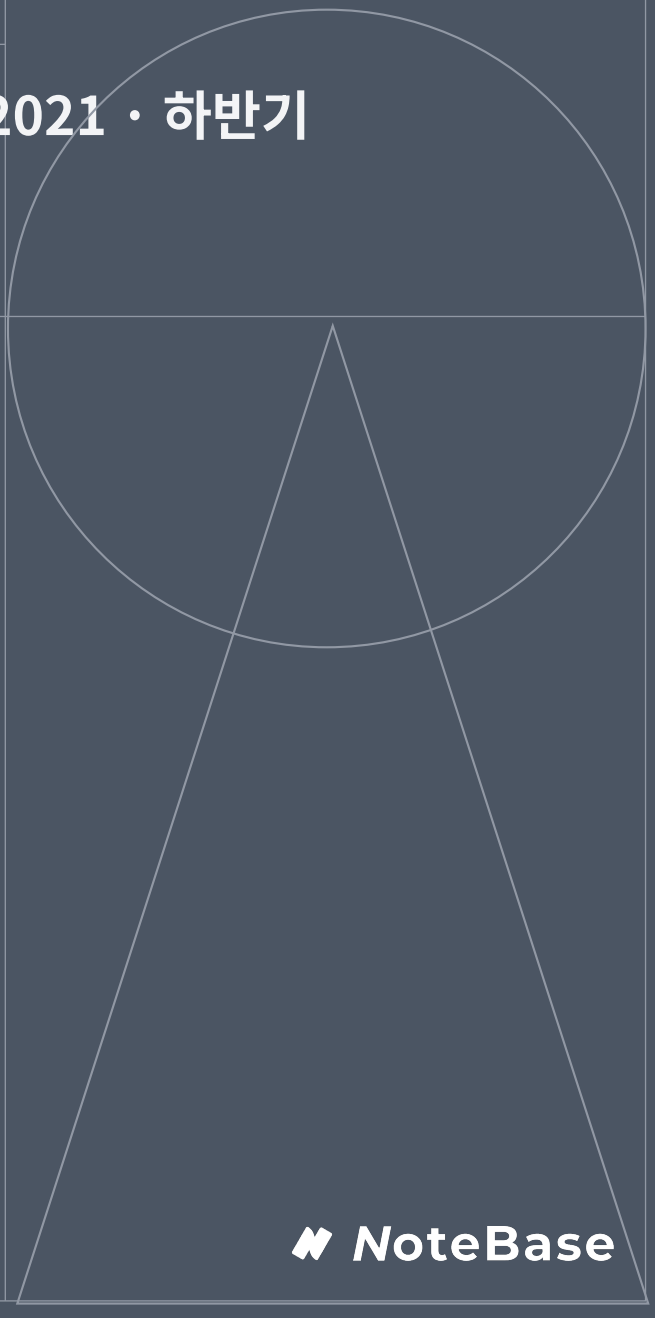
기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2021 · 하반기



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2021 · 하반기

공무원/해경/순경 · 수학 · 2021 · 하반기

문 1. 실수 $t=\sqrt[3]{50}-\sqrt[3]{20}$에 대하여 t^3+30t의 값은?

① 10

② 20

③ 30

④ 40

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 두 수의 차의 세제곱 공식과 세제곱근의 곱을 이용해 주어진 식의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $t=\sqrt[3]{50}-\sqrt[3]{20}$
구해야 할 값: t^3+30t
핵심 관계: $\sqrt[3]{50}\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{1000}=10$

사용할 공식

두 수 a, b에 대하여
$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$
이 문제에서 t가 두 세제곱근의 차로 주어졌으므로 이 공식을 사용하면 t^3을 t에 관한 식으로 바꿀 수 있다.

계산 과정

$a=\sqrt[3]{50}$, $b=\sqrt[3]{20}$으로 놓으면 $t=a-b$이다. 또한 $a^3-b^3=50-20=30$이고 $ab=\sqrt[3]{1000}=10$이다. 따라서
$t^3=(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)=30-30t$
이므로
$t^3+30t=30$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 10은 계산 결과 30과 다르다. 올바른 값은 30이다.
② X — 20은 계산 결과 30과 다르다. 올바른 값은 30이다.
③ O — 계산 결과가 30이므로 일치한다.
④ X — 40은 계산 결과 30과 다르다. 올바른 값은 30이다.

오답 포인트

$(a-b)^3$을 단순히 a^3-b^3으로 계산하면 교차항 $-3ab(a-b)$을 빠뜨리게 된다. 이 문항에서는 그 교차항이 $-30t$이므로 반드시 포함해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

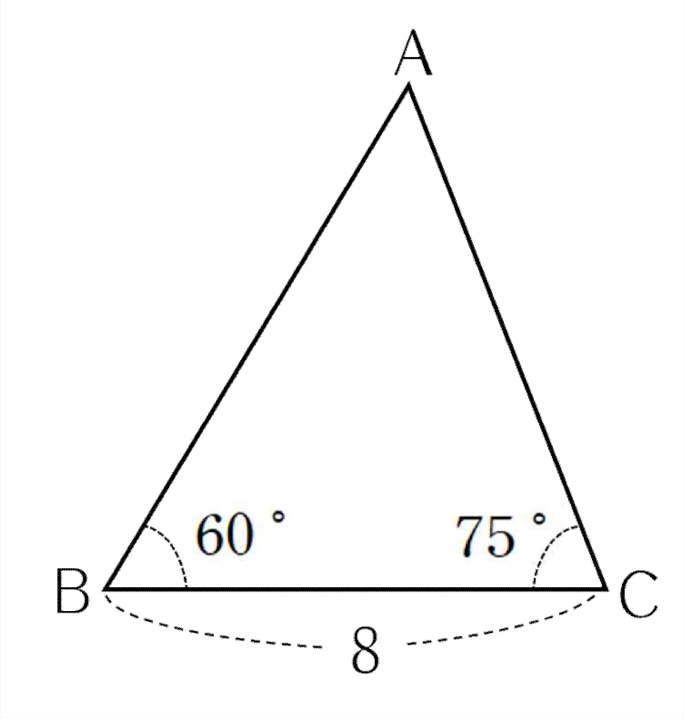
세제곱근의 차가 주어지면 두 수를 a, b로 놓고 a^3-b^3과 ab를 먼저 계산한 뒤,
$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$를 적용한다.

암기 포인트

세제곱근의 차에서는 a^3-b^3뿐 아니라 교차항 $-3ab(a-b)$까지 확인한다.

NoteBase

문 2. 다음 삼각형 ABC에서 선분 $\overline{BC} = 8$이고, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 75^\circ$일 때, 삼각형에 외접하는 원의 반지름 길이는?



① $3\sqrt{2}$
② $3\sqrt{3}$
③ $4\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{3}$

정답 3번

출제 포인트

삼각형의 두 내각으로 나머지 한 각을 구한 뒤, 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $BC = 8$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 75^\circ$이다. 구해야 할 값은 삼각형 ABC의 외접원의 반지름 R이다. 변 BC는 각 A의 대변이라는 점에 주의한다.

NoteBase

사용할 공식

삼각형의 내각의 합과 확장된 사인법칙을 사용한다.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$\frac{BC}{\sin A} = 2R$

변 BC와 그 대각 A가 주어지는 형태이므로 확장된 사인법칙으로 외접원의 반지름을 바로 구할 수 있다.

계산 과정

1. 나머지 내각을 구하면 $\angle A = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$이다.
2. 확장된 사인법칙에 대입하면 $\frac{8}{\sin 45^\circ} = 2R$이다.
3. $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $R = \frac{8}{2\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$이다.

선지 판단

① X — $3\sqrt{2}$는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 $3\sqrt{2}$가 아니라 외접원의 반지름은 $4\sqrt{2}$이다.

② X — $3\sqrt{3}$은 $R = \frac{8}{2\sin 45^\circ}$의 계산 결과와 다르다. 틀린 값 $3\sqrt{3}$이 아니라 $4\sqrt{2}$이다.

③ O — 확장된 사인법칙으로 구한 외접원의 반지름 R과 같은 $4\sqrt{2}$이다.

④ X — $4\sqrt{3}$은 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$를 대입하여 얻는 값이 아니다. 틀린 값 $4\sqrt{3}$이 아니라 $4\sqrt{2}$이다.

오답 포인트

외접원의 반지름을 구할 때 $BC = 8$의 대각은 $A = 45^\circ$이다. 60°나 75°를 대응각으로 넣으면 안 된다. 또한 $\frac{BC}{\sin A}$는 반지름 R이 아니라 지름 $2R$이므로 마지막에 2로 나누어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 내각으로 세 번째 각을 구하고, 길이가 주어진 변과 그 대각을 짝지은 다음 $\frac{a}{\sin A} = 2R$에 대입하여 판단한다.

암기 포인트

확장된 사인법칙은 '변 ÷ 대각의 사인 = 외접원의 지름'으로 정리된다. 즉 $\frac{a}{\sin A} = 2R$이다.

NoteBase

문 3. 다항식 $x^{2021}-1$을 x^2-x로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2021)$의 값은?

① -2019

② -2020

③ 2019

④ 2020

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 나누는 식의 근을 이용하여 일차 이하의 나머지 $R(x)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

나누어지는 식은 $f(x)=x^{2021}-1$이고, 나누는 식은 $x^2-x=x(x-1)$이다.
나머지는 일차 이하이므로 $R(x)=ax+b$로 둘 수 있다.
구해야 할 값은 $R(2021)$이다.

사용할 공식

$f(x)$를 $x(x-1)$로 나눈 나머지가 $R(x)$이면 $R(0)=f(0)$, $R(1)=f(1)$이다. 나누는 식이 0이 되는 $x=0,1$에서는 몫에 나누는 식을 곱한 항이 사라지기 때문에 이 관계를 사용할 수 있다.

계산 과정

$R(x)=ax+b$로 둔다.
$R(0)=f(0)=0^{2021}-1=-1$이므로 $b=-1$이다.
$R(1)=f(1)=1^{2021}-1=0$이므로 $a+b=0$, 따라서 $a=1$이다.
그러므로 $R(x)=x-1$이고, $R(2021)=2021-1=2020$이다.

선지 판단

① X — -2019는 계산 결과 2020과 일치하지 않는다. 올바른 값은 2020이다.
② X — -2020은 계산 결과의 부호를 반대로 한 값이다. 올바른 값은 양수 2020이다.
③ X — 2019는 $R(2021)=2021-1$에서 1을 한 번 더 뺀 값이다. 올바른 계산은 $2021-1=2020$이다.
④ O — $R(x)=x-1$이므로 $R(2021)=2020$이다.

오답 포인트

지수 2021을 그대로 계산할 필요는 없다. 나누는 식의 두 근 0과 1을 대입해 나머지 $R(x)=x-1$을 먼저 확정한 뒤 2021을 대입해야 한다. 특히 -2020은 마지막에 부호를 뒤집을 때 생기는 오답이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

일차식 두 개의 곱으로 나눌 때는 나누는 식의 두 근을 원래 다항식과 나머지에 각각 대입하여 일차 나머지의 두 계수를 결정한다.

암기 포인트

$x(x-1)$로 나눈 나머지는 $x=0$과 $x=1$에서의 값으로 결정된다.

문 4. 함수 $f(x)=x^2-kx$ $(0<k<1)$에 대하여 $\int_0^1|f(x)|dx-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{81}$일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{3}$
② $\frac{1}{6}$
③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{1}{18}$

정답 1번

출제 포인트

함수의 부호가 바뀌는 지점을 찾고, 절댓값 때문에 원래 함수와 달라지는 구간의 넓이를 계산하는 문제이다.

조건 정리

$f(x)=x(x-k)$이고 $0<k<1$이다. 따라서 $0<x<k$에서는 $f(x)<0$, $k<x<1$에서는 $f(x)>0$이다.
구해야 할 값은 주어진 두 적분의 차가 $\frac{1}{81}$이 되게 하는 k이다.

사용할 공식

$|f(x)|-f(x)=-2f(x)$이다($f(x)<0$일 때). $f(x)\geq 0$일 때는 $|f(x)|-f(x)=0$이다.

이 문제에서는 $f(x)$가 음수인 구간이 $[0,k]$이므로 두 적분의 차는 그 구간에서만 생긴다.

계산 과정

1. 두 적분의 차를 하나의 적분으로 합친다.
$\int_0^1|f(x)|dx-\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(|f(x)|-f(x))dx$
2. $[0,k]$에서만 $f(x)\leq 0$이므로 다음과 같이 계산한다.
$\int_0^1(|f(x)|-f(x))dx=-2\int_0^k(x^2-kx)dx$
$=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{kx^2}{2}\right]_0^k=-2\left(\frac{k^3}{3}-\frac{k^3}{2}\right)=\frac{k^3}{3}$
3. 주어진 값과 같게 놓는다.
$\frac{k^3}{3}=\frac{1}{81}\quad\Rightarrow\quad k^3=\frac{1}{27}\quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{3}$
$0<k<1$ 조건도 만족한다.

선지 판단

① O: $k=\frac{1}{3}$이면 $\frac{k^3}{3}=\frac{1}{81}$이므로 조건을 만족한다.
② X: $k=\frac{1}{6}$이면 적분의 차는 $\frac{k^3}{3}=\frac{1}{648}$이므로 $\frac{1}{81}$이 아니다. 틀린 값 $\frac{1}{6}$은 올바르게는 $\frac{1}{3}$이다.
③ X: $k=\frac{1}{9}$이면 적분의 차는 $\frac{k^3}{3}=\frac{1}{2187}$이므로 $\frac{1}{81}$이 아니다. 틀린 값 $\frac{1}{9}$은 올바르게는 $\frac{1}{3}$이다.
④ X: $k=\frac{1}{18}$이면 적분의 차는 $\frac{k^3}{3}=\frac{1}{17496}$이므로 $\frac{1}{81}$이 아니다. 틀린 값 $\frac{1}{18}$은 올바르게는 $\frac{1}{3}$이다.

NoteBase

오답 포인트

절댓값을 단순히 없애거나 전체 구간에서 부호를 한 번에 처리하면 안 된다. 영점 $x = 0, k$를 기준으로 부호를 나누어야 하며, 두 적분의 차는 $f(x) < 0$인 $[0, k]$에서 원래 함수의 음수 넓이를 두 배 한 값이다.

다시 나오면 이렇게 판단

절댓값 적분과 원래 함수의 적분 차가 나오면 먼저 함수의 영점을 구하고 부호 구간을 나눈다. 그다음 $f(x) < 0$인 구간에서만 $-2f(x)$를 적분한다.

암기 포인트

$\int |f(x)|dx - \int f(x)dx$는 $f(x)$가 음수인 구간의 넓이를 두 배 한 값이다.

NoteBase

문 5. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$**을 만족시키는 상수** a**,** b**의 합** $a+b$**의 값은?**

① -3

② -2

③ -1

④ 0

정답 3번

출제 포인트

분모가 0으로 가는 극한이 유한한 값을 가지려면 분자도 0이 되어야 한다는 조건과 약분 후의 극한값을 함께 이용해 상수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$이다.
구해야 할 값: $a+b$이다.
주의할 조건: $x\to 1$일 때 분모가 0이므로 극한이 유한하려면 분자도 0이어야 한다.

사용할 공식

분자가 $x=1$에서 0이므로 $1+a+b=0$이다. 또한 분자 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $f(1)=0$일 때 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=f'(1)$
을 이용할 수 있다. 이는 $f(x)$가 $x-1$을 인수로 가져 약분할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 유한한 극한값이 존재하려면 $1+a+b=0$이므로 $a+b=-1$이다.
2. 극한값 조건으로 $f'(x)=2x+a$, $f'(1)=2+a=3$이므로 $a=1$이다.
3. $1+a+b=0$에 $a=1$을 대입하면 $b=-2$이며, 따라서 $a+b=-1$이다.

선지 판단

① X — $a+b=-3$이 아니라 $a+b=-1$이다. 올바른 값은 -1이다.
② X — -2는 b의 값이지 $a+b$의 값이 아니다. 올바르게는 $b=-2$, $a+b=-1$이다.
③ O — $a=1$, $b=-2$이므로 $a+b=-1$이다.
④ X — $a+b=0$이면 분자가 $x=1$에서 1이 되어 유한한 극한값을 가질 수 없다. 올바른 값은 -1이다.

NoteBase

오답 포인트

②의 -2는 상수 b만 구한 뒤 이를 $a+b$로 착각하면 고르기 쉽다. 또한 극한값이 3이라는 조건만 이용해서는 부족하며, 먼저 분자가 $x=1$에서 0이라는 존재 조건을 반드시 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0으로 가는데 극한값이 유한한 유리식에서는 먼저 분자도 0이 되는 조건을 세운다. 그다음 인수분해로 약분하거나 미분계수 형태를 이용해 주어진 극한값 조건을 적용한다.

암기 포인트

0/0 꼴의 유한한 극한은 '분자도 0' 조건을 먼저 세우고, 약분한 뒤 극한값을 맞춘다.

NoteBase

문 6. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$에서 $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$로의 함수 $f: X \to Y$ 중에서 다음을 모두 만족시키는 f의 개수는?

㉠ $f(1) + f(2) = 12$
㉡ $f(1) < f(3)$
㉢ $f(2) < f(4)$

① 20
② 25
③ 30
④ 35

정답 2번

출제 포인트

조건 $f(1) + f(2) = 12$를 만족하는 순서쌍을 먼저 정한 뒤, 각 순서쌍마다 부등식 조건을 만족하는 $f(3)$과 $f(4)$의 선택 수를 곱하고 더하는 문제이다.

조건 정리

함숫값은 모두 $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$의 원소이다.
$f(1) + f(2) = 12$를 만족하는 순서쌍 $(f(1), f(2))$는 $(5, 7), (6, 6), (7, 5)$이다.
각 순서쌍에서 $f(3) > f(1)$, $f(4) > f(2)$를 동시에 만족해야 한다.

사용할 원리

한 순서쌍을 고정하면 $f(3)$과 $f(4)$의 선택은 서로 독립이므로 곱의 법칙을 적용한다. 세 순서쌍은 서로 겹치지 않는 경우이므로 각 경우의 수에는 합의 법칙을 적용한다.

계산 과정

1. $(f(1), f(2)) = (5, 7)$이면 $f(3)$은 6, 7, 8, 9의 4가지이고, $f(4)$는 8, 9의 2가지이므로 $4 \times 2 = 8$가지이다.
2. $(f(1), f(2)) = (6, 6)$이면 $f(3)$과 $f(4)$는 각각 7, 8, 9의 3가지이므로 $3 \times 3 = 9$가지이다.
3. $(f(1), f(2)) = (7, 5)$이면 $f(3)$은 8, 9의 2가지이고, $f(4)$는 6, 7, 8, 9의 4가지이므로 $2 \times 4 = 8$가지이다.

따라서 전체 함수의 개수는 $8 + 9 + 8 = 25$이다.

NoteBase

선지 판단

① X - 계산 결과는 25이므로 ‘20’은 틀린 값이다. 올바른 값은 25이다.
② O - 세 경우의 수를 더하면 8 + 9 + 8 = 25이므로 옳다.
③ X - 계산 결과는 25이므로 ‘30’은 틀린 값이다. 올바른 값은 25이다.
④ X - 계산 결과는 25이므로 ‘35’는 틀린 값이다. 올바른 값은 25이다.

오답 포인트

$f(1) + f(2) = 12$에서 $(5, 7)$과 $(7, 5)$는 서로 다른 순서쌍이며, $(6, 6)$도 빠뜨리면 안 된다. 또한 함수가 일대일이라는 조건은 없으므로 $f(3)$과 $f(4)$가 같은 값을 가져도 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

합 조건을 만족하는 순서쌍을 모두 나열하고, 각 순서쌍에서 남은 함숫값의 선택 수를 곱한 뒤 서로 다른 경우의 수를 더한다. 문제에 없는 일대일 조건을 임의로 추가하지 않는다.

암기 포인트

고정된 한 경우 안에서는 곱하고, 서로 겹치지 않는 여러 경우 사이에서는 더한다.

NoteBase

문 7. 두 함수 $f(x)=3x+a,\quad g(x)=ax+b$에 대하여 $(g\circ f)(x)=6x+1$일 때, $g^{-1}(1)$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수)

① -3

② -2

③ 2

④ 3

정답 3번

출제 포인트

합성함수의 계수를 비교하여 상수 a, b를 구한 뒤, $g(x)=1$을 만족하는 입력값으로 $g^{-1}(1)$을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=3x+a, g(x)=ax+b$이고, $(g\circ f)(x)=6x+1$이다. 구해야 할 값은 $g^{-1}(1)$, 즉 $g(x)=1$을 만족하는 x이다.

사용할 공식

합성함수는 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$로 계산한다. 두 일차식이 모든 x에서 같으면 x의 계수와 상수항이 각각 같아야 하므로 계수 비교를 사용한다. 또한 $g^{-1}(1)=x$는 $g(x)=1$과 같은 뜻이다.

계산 과정

먼저 합성함수를 계산한다.

$g(f(x))=a(3x+a)+b=3ax+a^2+b$

이를 $6x+1$과 비교하면 다음을 얻는다.

$3a=6,\qquad a^2+b=1$

따라서 $a=2$이고, $4+b=1$이므로 $b=-3$이다. 그러므로 $g(x)=2x-3$이다.

이제 $g^{-1}(1)$을 구하기 위해 $g(x)=1$을 푼다.

$2x-3=1\quad\Rightarrow\quad 2x=4\quad\Rightarrow\quad x=2$

따라서 $g^{-1}(1)=2$이다.

선지 판단

① X — $g(-3)=-9$이므로 -3은 $g(x)=1$의 해가 아니다. 올바른 값은 $g^{-1}(1)=2$이다.

② X — $g(-2)=-7$이므로 -2는 $g(x)=1$의 해가 아니다. 올바른 값은 $g^{-1}(1)=2$이다.

③ O — $g(2)=2\cdot 2-3=1$이므로 $g^{-1}(1)=2$이다.

④ X — $g(3)=3$이므로 3은 $g(x)=1$의 해가 아니다. 올바른 값은 $g^{-1}(1)=2$이다.

NoteBase

오답 포인트

①의 -3은 함수값이 아니라 $g(x)=2x-3$의 상수항 b이다. 또한 $g^{-1}(1)$을 역함수의 식 자체로 오해하지 않고, $g(x)=1$을 만족하는 입력값으로 해석해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 합성함수를 전개하고 계수와 상수항을 비교하여 미지수를 정한다. 그다음 $g^{-1}(y)$는 $g(x)=y$를 푼 값이라는 관계를 이용하고, 마지막에 구한 값을 원래 함수에 대입하여 확인한다.

암기 포인트

$g^{-1}(y)=x$와 $g(x)=y$는 서로 같은 관계를 나타낸다.

NoteBase

문 8. 곡선 $y = x^2 - 4x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{4}{3}$
② $\frac{16}{3}$
③ $\frac{28}{3}$
④ $\frac{32}{3}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 곡선과 x축의 교점을 구한 뒤, 함수값이 음수인 구간에서 정적분의 부호를 바꾸어 넓이를 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 곡선: $y = x^2 - 4x$
구해야 할 값: 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이
교점: $x^2 - 4x = x(x - 4) = 0$이므로 $x = 0, 4$이다.
주의할 조건: $0 < x < 4$에서 $x^2 - 4x < 0$이므로 정적분값에 음의 부호를 붙여 넓이로 바꾼다.

사용할 공식

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 x축 아래에 있으면 넓이는
$A = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$
이다. 이 곡선은 두 교점 사이에서 x축 아래에 있으므로 $f(x) = x^2 - 4x$의 부호를 바꾼 $4x - x^2$를 적분한다.

계산 과정

1. 둘러싸인 구간은 $0 \leq x \leq 4$이다.
2. 넓이를 정적분으로 나타내면
$A = \int_0^4 (4x - x^2)dx$
이다.
3. 적분하면
$A = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{4}{3}$은 계산된 넓이 $\frac{32}{3}$과 일치하지 않는다. 올바른 값은 $\frac{32}{3}$이다.
② X — $\frac{16}{3}$은 계산된 넓이의 절반이므로 옳지 않다. 올바른 값은 $\frac{32}{3}$이다.
③ X — $\frac{28}{3}$은 정적분 계산 결과와 일치하지 않는다. 올바른 값은 $\frac{32}{3}$이다.
④ O — $\int_0^4 (4x - x^2)dx = \frac{32}{3}$이므로 옳다.
계산 결과가 $\frac{32}{3}$이므로 정답은 4번이다.

오답 포인트

곡선이 $0 < x < 4$에서 x축 아래에 있다는 점이 핵심이다. $\int_0^4 (x^2 - 4x)dx = -\frac{32}{3}$은 부호 있는 정적분값이고, 넓이는 그 절댓값인 $\frac{32}{3}$이다. 또한 대칭을 잘못 적용해 전체 넓이를 절반으로 줄이면 ②의 $\frac{16}{3}$을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

곡선과 x축 사이의 넓이는 먼저 교점으로 적분 구간을 정하고, 각 구간에서 함수값의 부호를 확인한 뒤, x축 아래 부분의 정적분에는 음의 부호를 붙여 계산한다.

암기 포인트

넓이는 항상 0 이상이다. x축 아래에서는 $\int f(x)dx$가 아니라 $-\int f(x)dx$를 사용한다.

NoteBase

문 9. 같은 종류의 사탕 6개를 4명의 사람에게 남김없이 나누어줄 때, 사탕을 한 개도 받지 못하는 사람이 1명인 경우의 수는?

① 40

② 60

③ 80

④ 100

정답 1번

출제 포인트

같은 사탕을 서로 다른 사람들에게 나누는 경우를 양의 정수해의 개수로 바꾸고, 사탕을 받지 못하는 한 사람을 선택하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 같은 종류의 사탕 6개, 서로 다른 사람 4명
구해야 할 값: 정확히 1명만 사탕을 받지 못하는 분배의 수
주의할 조건: 받지 못하는 사람을 정한 뒤 나머지 3명은 모두 적어도 1개씩 받아야 한다.

사용할 공식

서로 다른 3명에게 같은 사탕 6개를 한 개 이상씩 나누는 방법은 양의 정수해의 개수이므로
$x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_i \geq 1$
의 해의 수는 별과 막대 방법에 따라 $\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2}$이다. 먼저 사탕을 받지 못하는 1명을 4명 중에서 선택해야 하므로 이 값에 $\binom{4}{1}$을 곱한다.

계산 과정

1. 사탕을 받지 못하는 사람을 고르는 방법은 $\binom{4}{1} = 4$가지이다.
2. 나머지 3명에게 6개를 모두 한 개 이상씩 나누는 방법은 $\binom{5}{2} = 10$가지이다.
3. 따라서 전체 경우의 수는 $4 \times 10 = 40$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 40이므로 옳다.
② X — 60은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 40이다.
③ X — 80은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 40이다.
④ X — 100은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 40이다.

NoteBase

오답 포인트

‘사탕을 한 개도 받지 못하는 사람이 1명’은 정확히 한 사람만 0개를 받고 나머지 3명은 모두 양수 개를 받는다는 뜻이다. 0개를 받을 사람을 고르는 4가지를 빠뜨리거나, 나머지 사람에게도 0개를 허용하면 다른 값이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

정확히 몇 명이 0개를 받는지를 먼저 정하고, 0개를 받을 사람을 선택한 다음, 나머지 사람에 대해서는 양의 정수해의 개수를 구해 곱한다.

암기 포인트

같은 물건 n개를 서로 다른 r명에게 모두 한 개 이상 나누는 방법은 $\binom{n-1}{r-1}$가지이다.

NoteBase

문 10. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 3)$, $B(5, 12)$에 대하여 선분 AB를 $1 : 2$로 내분하는 점의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a + b$의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

정답 1번

출제 포인트

두 점을 주어진 비로 내분하는 점의 좌표를 내분점 공식으로 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 점은 $A(-1, 3), B(5, 12)$이다. 점 $P(a, b)$가 선분 $\overline{AB}$를 $1 : 2$로 내분하므로 $AP : PB = 1 : 2$이다.
구해야 할 값은 $a + b$이다.

사용할 공식

두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$를 $m : n$, 즉 $AP : PB = m : n$으로 내분하는 점 P는
$P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$이다. 내분점은 가까운 끝점의 가중치가 더 작고 반대쪽 구간의 비가 가중치가 되므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$m = 1, n = 2$를 공식에 대입하면
$(a, b) = \left(\frac{2(-1) + 1 \cdot 5}{1+2}, \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 12}{1+2}\right) = (1, 6)$이다. 따라서
$a + b = 1 + 6 = 7$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 $a + b = 7$이므로 옳다.
② X — 계산 결과는 8이 아니라 7이다. 올바른 값은 $a + b = 7$이다.
③ X — 계산 결과는 9가 아니라 7이다. 올바른 값은 $a + b = 7$이다.
④ X — 계산 결과는 10이 아니라 7이다. 올바른 값은 $a + b = 7$이다.

오답 포인트

내분비 $1 : 2$를 좌표에 그대로 같은 순서의 가중치로 곱하면 안 된다. A의 좌표에는 반대편 구간의 비 2를, B의 좌표에는 반대편 구간의 비 1을 곱해야 한다. 또한 좌표를 구한 뒤 $a + b$까지 계산해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 $AP : PB = m : n$을 확인하고, 각 끝점에 반대편 구간의 비를 가중치로 곱한 뒤 $m + n$으로 나눈다.
마지막으로 구한 점이 긴 구간 쪽 끝점에 더 가까운지 검산한다.

암기 포인트

내분점의 좌표는 반대쪽 비를 곱해 더하고 전체 비의 합으로 나눈 값이다.

NoteBase

문 11. $x \neq 1$인 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x^3+1)f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{2}$을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{3}{4}$
④ 1

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 주어진 식을 인수분해하여 공통인수 $x+1$을 약분한 뒤, 함수의 연속성을 이용해 $f(-1)$을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $(x^3+1)f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{2}$이다. $x=-1$을 바로 대입하면 양변이 모두 0이 되어 $f(-1)$을 정할 수 없다. 함수 f는 $x=-1$에서 연속이므로, $x \neq -1$에서 구한 $f(x)$의 극한이 $f(-1)$과 같다.

사용할 공식

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$이고, 연속성에 의해 $f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x)$이다. 주어진 식의 양변에 $x+1$이 공통인수로 나타나므로 이를 약분한 식의 극한을 사용한다.

계산 과정

우변을 통분하고 인수분해하면
$\frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{2} = \frac{2x - x^2(x-1)}{2(x-1)} = \frac{x(2-x)(x+1)}{2(x-1)}$.
따라서 $x \neq -1$에서
$f(x) = \frac{x(2-x)(x+1)}{2(x-1)(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x(2-x)}{2(x-1)(x^2-x+1)}$.
연속성을 적용하면
f(-1)=_x→ -1f(x)=((-1)(2-(-1)))/(2(-1-1)((-1)^2-(-1)+1))=(-3)/(-12)=14.

선지 판단

① O — 계산 결과 f(-1)=14이므로 옳다.
② X — $f(-1)$은 12가 아니라 14이다. $x=-1$에서 우변의 첫 항만 계산하면 12이지만, 둘째 항까지 빼면 우변 전체는 0이 되어 그 값만으로는 $f(-1)$을 구할 수 없다.
③ X — 약분한 함수의 $x \to -1$ 극한은 34가 아니라 14이다. 올바르게 계산하면 분자는 -3, 분모는 -12이다.
④ X — $f(-1)$은 1이 아니라 14이다. $x+1$을 약분한 뒤에도 분모의 $2(x-1)(x^2-x+1)$을 모두 계산해야 한다.

NoteBase

오답 포인트

$x=-1$을 원래 식에 바로 대입하면 $0=0$만 얻는다. 이를 $f(-1)=0$으로 해석하거나, $x^3+1=0$으로 나누는 것이 함정이다. $x \neq -1$에서 공통인수 $x+1$을 약분한 뒤 연속성으로 극한을 취해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

구하려는 점에서 함수 앞의 인수가 0이 되고 우변도 0이면, 먼저 양변을 인수분해한다. 구하려는 점 이외의 값에서 공통인수를 약분하고, 연속 조건을 이용해 약분한 식의 극한을 함수값으로 정한다.

암기 포인트

직접 대입이 $0=0$이면 인수분해·약분 후 연속성에 따른 극한을 사용한다.

NoteBase

문 12. $\log_2 3 = a,\ \log_3 5 = b$**라 할 때,** $\log_{15} 80$**을** $a,\ b$**로 바르게 나타낸 것은?**

① $\frac{2+b}{a+b}$
② $\frac{4+a}{b+ab}$
③ $\frac{4+b}{a+ab}$
④ $\frac{4+ab}{a+ab}$

정답 4번

출제 포인트

밑변환 공식과 로그의 곱셈 법칙을 이용하여 $\log_{15} 80$을 a, b로 나타내는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $\log_2 3 = a, \log_3 5 = b$이다.
구해야 할 값: $\log_{15} 80$이다.
주의할 조건: $\log_2 5$는 b가 아니라 $\log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab$이다.

사용할 공식

밑변환 공식 $\log_M N = \frac{\log_c N}{\log_c M}$을 사용한다. 주어진 a가 밑이 2인 로그이므로 분자와 분모를 모두 밑 2의 로그로 바꾸면 주어진 조건을 바로 연결할 수 있다. 또한 $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab$를 이용한다.

계산 과정

먼저 $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab$이다.
분자는 $80 = 2^4 \cdot 5$이므로 $\log_2 80 = 4 + \log_2 5 = 4 + ab$이다.
분모는 $15 = 3 \cdot 5$이므로 $\log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5 = a + ab$이다.
따라서
$\log_{15} 80 = \frac{\log_2 80}{\log_2 15} = \frac{4+ab}{a+ab}$.

선지 판단

① X — $\frac{2+b}{a+b}$에서 분자의 $2 + b$와 분모의 $a + b$가 모두 잘못되었다. $80 = 2^4 \cdot 5$이고 $\log_2 5 = ab$이므로 올바르게는 $\frac{4+ab}{a+ab}$이다.
② X — $\frac{4+a}{b+ab}$는 분자에서 $\log_2 5$를 a로 잘못 두고 분모도 잘못 나타낸 식이다. 올바르게는 분자가 $4 + ab$, 분모가 $a + ab$이다.
③ X — $\frac{4+b}{a+ab}$는 분자의 b가 잘못되었다. $b = \log_3 5$이므로 밑을 2로 연결하면 $\log_2 5 = ab$가 되어, 올바른 분자는 $4 + ab$이다.
④ O — 분자와 분모를 각각 밑 2로 바꾸면 정확히 $\frac{4+ab}{a+ab}$가 된다.

NoteBase

오답 포인트

핵심 함정은 $b = \log_3 5$를 곧바로 $\log_2 5$처럼 사용하는 것이다. 서로 밑이 다르므로 $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab$로 연결해야 하며, $80 = 2^4 \cdot 5$에서 지수 4도 빠뜨리지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

주어진 로그 중 계산을 가장 쉽게 만드는 밑으로 분자와 분모를 통일한 뒤, 서로 다른 밑의 로그는 $\log_x z = \log_x y \cdot \log_y z$로 연결한다. 마지막에는 원래 수를 소인수분해하여 지수와 로그항이 모두 반영되었는지 확인한다.

암기 포인트

밑을 이어 주는 로그는 곱한다: $\log_2 3 \cdot \log_3 5 = \log_2 5$.

NoteBase

문 13. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=4x^3+x\int_0^1 f(t)dt$를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 정적분 $\int_0^1 f(t)dt$를 하나의 상수로 놓고 주어진 함수식에 다시 적분하여 그 상수를 결정하는 문제이다.

조건 정리

$A=\int_0^1 f(t)dt$로 놓으면 $f(x)=4x^3+Ax$이다. 구해야 할 값은 $f(1)=4+A$이므로 먼저 A를 구해야 한다.

사용할 공식

주어진 식의 양변을 0부터 1까지 적분하면
$A=\int_0^1(4t^3+At)dt$
가 된다. A는 적분변수 t와 무관한 상수이므로 $\int_0^1 Atdt=A\int_0^1 tdt$로 계산한다.

계산 과정

1. $A=\int_0^1 f(t)dt$로 둔다.
2. 함수식에 $x=t$를 대입하여 적분하면
$A=\int_0^1(4t^3+At)dt=1+\frac{A}{2}$
이다.
3. 따라서 $A=2$이다.
4. 이를 원래 식에 대입하면 $f(1)=4+2=6$이다.

선지 판단

① X — 5는 $A=1$로 볼 때 나오는 값이지만, 적분할 때 At 항에서 생기는 $\frac{A}{2}$를 포함하면 $A=2$이다. 올바른 값은 $f(1)=6$이다.
② O — 계산 결과 $A=2$이므로 $f(1)=4+A=6$이다.
③ X — 7이라면 $f(1)=4+A$에서 $A=3$이어야 하지만, 적분으로 얻은 방정식 $A=1+\frac{A}{2}$의 해는 $A=2$이다. 올바른 값은 6이다.
④ X — 8이라면 $A=4$이어야 하지만 이는 $A=1+\frac{A}{2}$를 만족하지 않는다. 올바른 값은 6이다.

NoteBase

오답 포인트

$\int_0^1 4t^3 dt = 1$만 계산하고 At 항을 빠뜨리면 $A = 1$, $f(1) = 5$로 잘못 판단하기 쉽다. 적분 안의 A는 미지의 상수이지만 그 항 자체를 생략해서는 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수식에 함수의 정적분이 포함되면 그 정적분을 A로 놓고, 주어진 식 전체를 같은 구간에서 적분하여 A에 관한 방정식을 세운 뒤 요구한 함수값을 계산한다.

암기 포인트

함수의 정적분을 상수 A로 치환한 뒤 다시 적분하면 자기일관성 방정식이 만들어진다.

NoteBase

문 14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} = 2a_n - 1$일 때, a_{10}의 값은?

① 511

② 513

③ 1023

④ 1025

정답 2번

출제 포인트

점화식에서 일정한 값을 빼 등비수열로 바꾼 뒤 일반항과 특정 항의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1$
구해야 할 값: a_{10}
주의할 조건: 첫째항이 $n = 1$이므로 a_{10}까지 배수 2를 적용하는 횟수는 9회이다.

사용할 공식

$b_n = a_n - 1$로 놓으면
$b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = 2a_n - 2 = 2(a_n - 1) = 2b_n$
이므로 $\{b_n\}$은 첫째항 $b_1 = 1$, 공비 2인 등비수열이다. 따라서
$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}, \qquad a_n = 2^{n-1} + 1$
이다. 점화식의 상수항 -1을 없애기 위해 a_n에서 고정값 1을 빼는 치환을 사용한다.

계산 과정

1. $b_n = a_n - 1$로 두면 $b_1 = 2 - 1 = 1$이다.
2. $b_{n+1} = 2b_n$이므로 $b_{10} = 1 \cdot 2^9 = 512$이다.
3. $a_{10} = b_{10} + 1 = 512 + 1 = 513$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 511은 계산 결과 513과 다르다. $2^9 - 1$로 처리한 값이며, 틀린 값 511이 아니라 $a_{10} = 2^9 + 1 = 513$이다.
② O — 점화식을 변형하여 얻은 $a_{10} = 2^9 + 1$의 값이 513이므로 옳다.
③ X — 1023은 계산 결과 513과 다르다. $2^{10} - 1$로 지수와 부호를 모두 잘못 처리한 값이며, 올바르게는 $2^9 + 1 = 513$이다.
④ X — 1025는 계산 결과 513과 다르다. $2^{10} + 1$로 첫째항부터 열 번 배수 2를 적용한 값이며, 올바르게는 9회 적용하여 $2^9 + 1 = 513$이다.

오답 포인트

상수항 -1을 그대로 누적하려 하거나, a_1에서 a_{10}까지의 갱신 횟수를 10회로 세면 511, 1023, 1025 같은 오답이 나온다. 핵심은 $a_n - 1$을 등비수열로 바꾸고 지수를 $n - 1$로 잡는 것이다.

다시 나오면 이렇게 판단

일차 점화식 $a_{n+1} = ra_n + c$에서는 일정한 값 L이 $L = rL + c$를 만족하도록 잡고 $a_n - L$을 치환한다. 그 뒤 등비수열의 첫째항, 공비, 지수를 확인하여 계산한다.

암기 포인트

$a_{n+1} = 2a_n - 1$이면 1을 빼서 $a_n - 1$을 본다. 이 문항에서는 $a_n = 2^{n-1} + 1$이다.

NoteBase

문 15. 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $N(15, 3^2)$을 따르는 확률변수 Y에 대하여 $P(16 \le X \le 28) = P(a \le Y \le 18)$일 때, 상수 a의 값은?

① 3

② 9

③ 15

④ 21

정답 2번

출제 포인트

두 정규분포의 확률구간을 각각 표준화한 뒤 표준정규분포의 대칭성을 이용하여 같은 확률을 만드는 구간의 끝값을 구하는 문제이다.

조건 정리

$X \sim N(20, 4^2)$, $Y \sim N(15, 3^2)$이다. 구해야 할 값은 $P(16 \le X \le 28) = P(a \le Y \le 18)$을 만족하는 a이다. 두 확률을 비교하려면 각 확률변수에서 평균을 빼고 표준편차로 나누어 표준화한다.

사용할 공식

정규분포 $W \sim N(\mu, \sigma^2)$의 표준화 공식은 $Z = \frac{W-\mu}{\sigma}$이다. 또한 표준정규분포는 0을 중심으로 대칭이므로 $P(-1 \le Z \le 2) = P(-2 \le Z \le 1)$이다. 두 확률변수의 평균과 표준편차가 서로 다르므로 원래 값이 아니라 표준화한 구간을 비교해야 한다.

계산 과정

1. X의 구간을 표준화하면 $\frac{16-20}{4} = -1$, $\frac{28-20}{4} = 2$이므로 $P(16 \le X \le 28) = P(-1 \le Z \le 2)$이다.
2. 표준정규분포의 대칭성에 따라 $P(-1 \le Z \le 2) = P(-2 \le Z \le 1)$이다.
3. Y의 위끝 18을 표준화하면 $\frac{18-15}{3} = 1$이다. 따라서 같은 확률을 만들려면 아래끝 a의 표준화값이 -2여야 한다.
4. $\frac{a-15}{3} = -2$이므로 $a - 15 = -6$, 따라서 $a = 9$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a = 3$이면 표준화값은 $\frac{3-15}{3} = -4$이므로 구간이 $-4 \le Z \le 1$이 되어 필요한 $-2 \le Z \le 1$보다 넓다. 틀린 값 3은 올바르게는 9이다.
② O — $a = 9$이면 $\frac{9-15}{3} = -2$이므로 $P(9 \le Y \le 18) = P(-2 \le Z \le 1) = P(-1 \le Z \le 2)$가 성립한다.
③ X — $a = 15$이면 표준화 구간이 $0 \le Z \le 1$이 되어 필요한 확률보다 작다. 틀린 값 15는 올바르게는 9이다.
④ X — $a = 21$은 위끝 18보다 크므로 $a \le Y \le 18$을 만족하는 값이 없어 확률이 0이다. 틀린 값 21은 올바르게는 9이다.
계산 결과 $a = 9$이므로 정답은 2번이다.

오답 포인트

X의 표준화 구간 $[-1, 2]$을 그대로 Y에 적용하면 위끝의 표준화값 1과 맞지 않는다. 표준정규분포의 대칭성을 이용해 같은 확률의 구간 $[-2, 1]$로 바꾼 뒤 Y의 척도로 되돌려야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

서로 다른 정규분포의 구간확률이 같다고 주어지면 먼저 두 구간을 표준화한다. 한쪽 끝값이 다를 때에는 표준정규분포의 0에 대한 대칭성을 확인한 뒤, 대응하는 표준화값을 원래 확률변수의 값으로 환산한다.

암기 포인트

표준화는 $Z = \frac{W-\mu}{\sigma}$, 대칭 구간은 $[p, q] \leftrightarrow [-q, -p]$이다.

NoteBase

문 16. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q를 각각
$p : (x-3)(x+2) \geq 0$
$q : |x-8| < a$
라 할 때, p는 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 자연수 a의 최댓값은?

① 1
② 3
③ 5
④ 7

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 필요조건의 논리 관계를 집합의 포함 관계로 바꾸어 자연수 a의 최댓값을 구하는 문제이다.

조건 정리

p의 진리집합은 $P = (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$이다.
q의 진리집합은 $Q = (8-a, 8+a)$이다.
p가 q이기 위한 필요조건이라는 말은 $q \Rightarrow p$, 즉 $Q \subseteq P$라는 뜻이다.

사용할 공식

필요조건 관계는 p가 q의 필요조건 q⇒ p Q P로 판단한다.
구간 Q는 8을 포함하는 하나의 구간이므로 P의 오른쪽 구간 $[3, \infty)$ 안에 들어가야 한다. 따라서 왼쪽 끝에 대해 $8-a \geq 3$을 적용한다.

계산 과정

1. 부등식 $(x-3)(x+2) \geq 0$을 풀면 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$이다.
2. $|x-8| < a$를 풀면 $8-a < x < 8+a$이다.
3. $Q \subseteq [3, \infty)$가 되려면 $8-a \geq 3$이어야 하므로 $a \leq 5$이다.
4. a가 자연수이므로 최댓값은 5이다. 실제로 $a = 5$이면 $Q = (3, 13)$이어서 모든 x가 p를 만족한다.

NoteBase

선지 판단

① X — 1도 조건을 만족하지만 최댓값은 아니다. '최댓값은 1'이 틀렸으며, 올바르게는 '최댓값은 5'이다.
② X — 3도 조건을 만족하지만 그보다 큰 자연수 5도 조건을 만족한다. '최댓값은 3'이 틀렸으며, 올바르게는 '최댓값은 5'이다.
③ O — 계산 결과 자연수 a의 최댓값은 5이므로 옳다.
④ X — $a = 7$이면 $Q = (1, 15)$이고, 예를 들어 $x = 2$는 q를 만족하지만 p를 만족하지 않는다. '최댓값은 7'이 틀렸으며, 올바르게는 '최댓값은 5'이다.

오답 포인트

'p는 q이기 위한 필요조건'의 방향을 $p \Rightarrow q$로 뒤집는 것이 핵심 함정이다. 올바른 방향은 $q \Rightarrow p$이다. 또한 $|x - 8| < a$가 엄격부등식이므로 $a = 5$일 때 $Q = (3, 13)$이며 경계값 3은 포함되지 않지만, 이 경우에도 $Q \subset P$가 성립한다.

다시 나오면 이렇게 판단

'A는 B의 필요조건'이면 먼저 $B \Rightarrow A$로 방향을 정하고, 각 조건의 진리집합을 구한 뒤 B의 진리집합이 A의 진리집합에 포함되는 경계를 계산한다.

암기 포인트

필요조건은 결과 쪽에 놓인다. A가 B의 필요조건이면 $B \Rightarrow A$이다.

NoteBase

문 17. x**에 대한 방정식** $x^n - 10x^{n-1} + x^2 - x + 1 = 0$**이** n**개의 근** $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n$**을 가질 때,** $(10-\alpha_1)(10-\alpha_2)(10-\alpha_3)\cdots(10-\alpha_n)$**의 값은?**

① 91

② 89

③ 111

④ 109

정답 1번

출제 포인트

근을 직접 구하지 않고, 최고차항의 계수가 1인 다항식을 근의 곱으로 나타내어 주어진 곱을 함수값으로 바꾸는 문제이다.

조건 정리

다항식을 $P(t) = t^n - 10t^{n-1} + t^2 - t + 1$이라 한다. 이 다항식은 n차이고 최고차항의 계수가 1이며, 그 n개의 근은 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$이다. 구해야 할 값은 $\prod_{i=1}^{n}(10-\alpha_i)$이다.

사용할 공식

최고차항의 계수가 1인 n차 다항식은 근을 이용해 $P(t) = \prod_{i=1}^{n}(t-\alpha_i)$로 나타낼 수 있다. 따라서 $t = 10$을 대입하면 $P(10) = \prod_{i=1}^{n}(10-\alpha_i)$가 된다. 주어진 곱의 각 인수가 모두 $10-\alpha_i$이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$t = 10$을 대입하면 앞의 두 항이 서로 소거된다.

$P(10) = 10^n - 10 \cdot 10^{n-1} + 10^2 - 10 + 1$

$= 10^n - 10^n + 100 - 10 + 1$

$= 91$

따라서 $\prod_{i=1}^{n}(10-\alpha_i) = 91$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 다항식에 10을 대입한 값이 $P(10) = 91$이므로 주어진 곱의 값과 일치한다.
② X — 89는 마지막 부분을 $100 - 10 - 1$로 계산하여 상수항 $+1$의 부호를 바꾼 값이다. 올바르게는 $100 - 10 + 1 = 91$이다.
③ X — 111은 $100 + 10 + 1$로 계산하여 $-t$를 $+t$로 잘못 처리한 값이다. 올바르게는 $100 - 10 + 1 = 91$이다.
④ X — 109는 $100 + 10 - 1$로 계산하여 $-t$와 상수항 $+1$의 부호를 모두 바꾼 값이다. 올바르게는 $100 - 10 + 1 = 91$이다.

오답 포인트

근을 하나씩 구하려고 하면 계산이 불가능해 보일 수 있다. 핵심은 $\prod(10 - \alpha_i)$를 곧바로 $P(10)$으로 보는 것이다. 또한 $10^n - 10 \cdot 10^{n-1} = 0$으로 소거한 뒤 남는 $+t^2 - t + 1$의 부호를 정확히 유지해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

최고차항의 계수가 1이고 모든 근이 제시된 다항식에서 $\prod(c - \alpha_i)$를 묻는 경우, 근을 구하지 않고 다항식에 c를 대입한 $P(c)$를 계산한다.

암기 포인트

단위원 다항식에서는 $P(c) = \prod_{i=1}^{n}(c - \alpha_i)$이다.

NoteBase

문 18. 방정식 $x^3 = 3x^2 - 4 + a$가 서로 다른 두 개의 양근과 하나의 음근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값들의 합은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

정답 2번

출제 포인트

삼차함수의 극대값과 극소값을 이용하여 수평선과 그래프가 세 점에서 만나는 정수 매개변수의 범위를 구하는 문제이다.

조건 정리

방정식을 $x^3 - 3x^2 + 4 = a$로 바꾸고 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$로 둔다. 서로 다른 두 양근과 한 음근을 가지려면 수평선 $y = a$가 $y = f(x)$와 음의 구간에서 한 번, 양의 구간에서 두 번 만나야 한다.

사용할 공식

도함수는 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$이다. 따라서 극값 후보는 $x = 0, 2$이고, $f(0) = 4$, $f(2) = 0$이다. 삼차함수와 수평선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 수평선의 높이가 극솟값과 극댓값 사이에 있어야 하므로 이 극값을 사용한다.

계산 과정

f는 $(-\infty, 0)$에서 증가하고, $(0, 2)$에서 감소하며, $(2, \infty)$에서 증가한다. 따라서 $0 < a < 4$이면 $f(x) = a$의 서로 다른 세 근은 각각 $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$에 하나씩 존재하여 한 음근과 두 양근이 된다. 가능한 정수는 $a = 1, 2, 3$이고, 그 합은 $1 + 2 + 3 = 6$이다.

선지 판단

① X — '4'는 가능한 정수 a의 합이 아니다. 올바른 합은 $1 + 2 + 3 = 6$이다.
② O — 가능한 정수 a는 1, 2, 3이므로 그 합은 6이다.
③ X — '8'은 가능한 정수 a의 합이 아니다. 올바른 합은 6이다.
④ X — '10'은 가능한 정수 a의 합이 아니다. 올바른 합은 6이다.

NoteBase

오답 포인트

경계값 $a = 0$ 또는 $a = 4$를 포함하면 수평선이 극값에서 그래프에 접하여 중근이 생기므로 '서로 다른' 세 근이라는 조건을 만족하지 않는다. 또한 $0 < a < 4$일 때 세 근의 위치를 확인해야 두 근이 양수이고 한 근이 음수라는 부호 조건까지 검증된다.

다시 나오면 이렇게 판단

매개변수가 수평선의 높이로 나타나는 삼차방정식은 먼저 함수의 극값을 구해 서로 다른 세 교점의 범위를 정하고, 각 단조 구간의 위치로 근의 부호를 확인한다.

암기 포인트

서로 다른 세 실근은 '극솟값 < 수평선 높이 < 극댓값'이며, 근의 부호는 세 교점이 놓인 구간으로 판정한다.

NoteBase

문 19. 다항함수 $y = f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.
이때, $\frac{f'(1)}{f(1)}$의 값은?

㉠ 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$
㉡ $f'(0) = 2$

① $\frac{1}{2}$
② 1
③ $\frac{1}{4}$
④ 4

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 덧셈에 관한 함수방정식을 미분하여 다항함수 f를 결정한 뒤 $\frac{f'(1)}{f(1)}$을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$이고 $f'(0) = 2$이다.
구해야 할 값: $\frac{f'(1)}{f(1)}$이다.
주의할 조건: 함수방정식에 $y = 0$을 대입해 $f(0)$을 먼저 정하고, 다항함수이므로 식을 미분할 수 있다.

사용할 공식

$f'(x+y) = f'(x)$
이 식은 $f(x+y) = f(x) + f(y)$의 양변을 x에 대하여 미분하여 얻는다. 모든 실수 x, y에서 성립하므로 $x = 0$을 대입하면 $f'(y) = f'(0) = 2$가 되어 도함수가 상수임을 알 수 있다.

계산 과정

1. 함수방정식에 $y = 0$을 대입하면 $f(x) = f(x) + f(0)$이므로 $f(0) = 0$이다.
2. 함수방정식을 x에 대하여 미분하면 $f'(x+y) = f'(x)$이다. 여기에 $x = 0$을 대입하면 $f'(y) = f'(0) = 2$이므로 모든 실수 y에 대하여 $f'(y) = 2$이다.
3. 따라서 $f(x) = 2x + C$이고, $f(0) = 0$이므로 $C = 0$이다. 즉, $f(x) = 2x$이다.
4. $f'(1) = 2$, $f(1) = 2$이므로
$\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{2}{2} = 1$

NoteBase

선지 판단

① X — 계산값은 1이므로 $\frac{1}{2}$는 틀린 값이다. 올바르게는 1이다.
② O — $f'(1) = 2$이고 $f(1) = 2$이므로 그 비는 1이다.
③ X — 계산값은 1이므로 $\frac{1}{4}$는 틀린 값이다. 올바르게는 1이다.
④ X — 계산값은 1이므로 4는 틀린 값이다. 올바르게는 1이다.

오답 포인트

$f'(0) = 2$만 이용해서는 비의 값을 바로 정할 수 없다. 함수방정식에서 $f(0) = 0$과 $f'(x) = 2$를 모두 얻어 $f(1) = 2$까지 계산해야 한다. 특히 $f'(1)$과 $f(1)$을 곱하면 ④의 4가 나오지만, 문제에서 요구한 것은 곱이 아니라 비이다.

다시 나오면 이렇게 판단

다항함수가 $f(x + y) = f(x) + f(y)$를 만족하면 먼저 $f(0) = 0$을 확인하고, 양변을 미분하여 도함수가 일정한지 판단한다. 그다음 함수를 결정한 뒤 요구된 대입값과 비를 계산한다.

암기 포인트

다항함수인 가법함수는 일차함수 $f(x) = ax$이고, 이 문제에서는 $a = f'(0) = 2$이다.

NoteBase

문 20. 이차방정식 $x^2+5x+4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$을 구하면?

① -3

② -5

③ -7

④ -9

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 이차방정식을 인수분해하여 두 근을 구한 뒤, 음수의 제곱근을 복소수로 나타내어 식의 값을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 방정식은 $x^2+5x+4=0$이고, 구해야 할 값은 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$이다. 제곱근 기호는 복소수에서의 주값으로 보아 $\sqrt{-1}=i$, $\sqrt{-4}=2i$로 계산한다.

사용할 공식

$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

첫 번째 식으로 두 근을 직접 구할 수 있고, 두 번째 식 또는 직접 대입으로 제곱근의 합의 제곱을 계산할 수 있다.

계산 과정

1. $(x+1)(x+4)=0$이므로 두 근은 -1과 -4이다. 따라서 $\{\alpha,\beta\}=\{-1,\ -4\}$이다.
2. $\sqrt{-1}=i$, $\sqrt{-4}=2i$이므로 제곱근의 합은 $3i$이다. 두 근의 순서는 결과에 영향을 주지 않는다.
3. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(i+2i)^2=(3i)^2=9i^2=-9$

따라서 계산값은 -9이다.

선지 판단

① X — -3은 계산값 -9와 다르다. 틀린 값 -3을 올바르게 고치면 -9이다.

② X — -5는 두 근의 합 $\alpha+\beta$일 뿐, 교차항 $2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-4$를 반영하지 않은 값이다. 틀린 값 -5를 올바르게 고치면 -9이다.

③ X — -7은 $(i+2i)^2$의 계산 결과가 아니다. 틀린 값 -7을 올바르게 고치면 -9이다.

④ O — $(i+2i)^2=9i^2=-9$이므로 계산 결과와 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

핵심 함정은 $\sqrt{-1}\sqrt{-4}$를 $\sqrt{4}=2$로 처리하는 것이다. 복소수에서는 제곱근의 곱셈법칙을 이처럼 그대로 적용할 수 없으며, 주값을 각각 계산하면 $i\cdot 2i=-2$이다. 또한 -5는 두 근의 합일 뿐 최종 식의 값이 아니다.

다시 나오면 이렇게 판단

음의 근이 포함된 제곱근 식은 먼저 각 근을 구하고, 각 제곱근을 i로 나타낸 다음 식 전체를 계산한다.
복소수에서는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$를 무조건 적용하지 않는다.

암기 포인트

$\sqrt{-1}=i$, $i^2=-1$이며, 음수의 제곱근끼리는 각각 복소수로 바꾸어 곱한다.

NoteBase