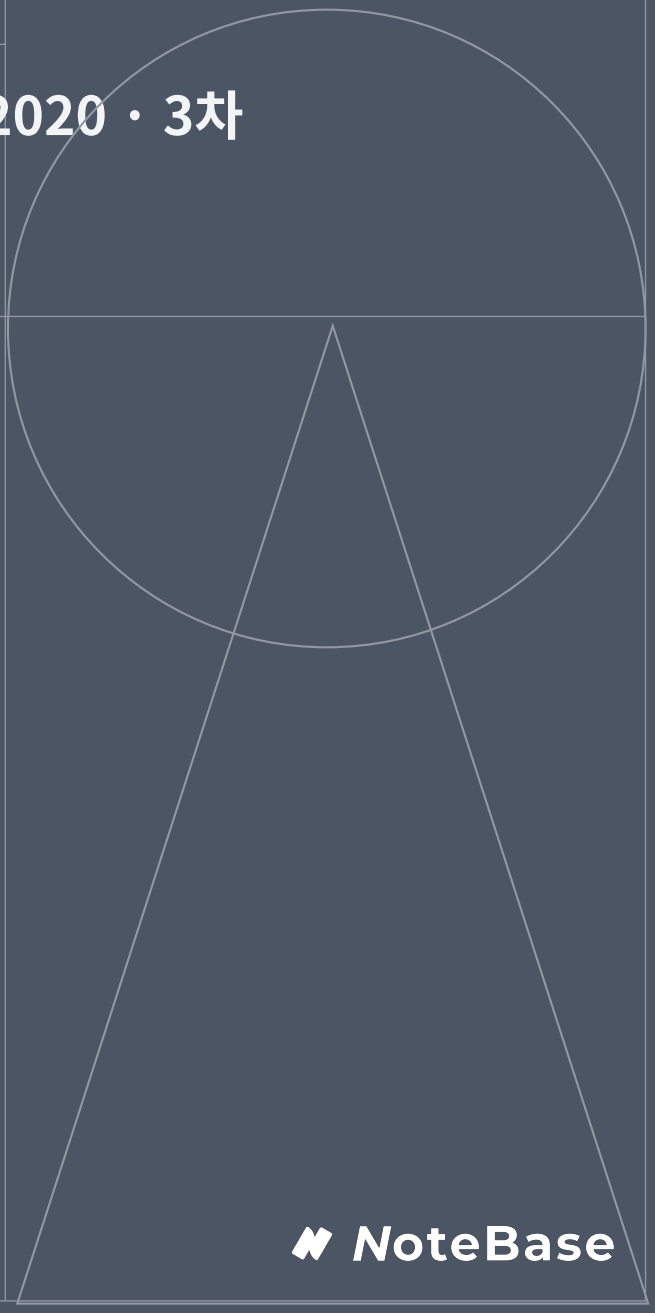
기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2020 · 3차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2020 · 3차

공무원/해경/순경 · 수학 · 2020 · 3차

문 1. $\log 30$을 $\log 30 = n + \alpha$**(단,** n**은 정수,** $0 \le \alpha < 1$**)로 표현할 때,** $2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{\alpha}}$**의 값은?**

① 16

② 14

③ 12

④ 10

정답 3번

출제 포인트

상용로그의 정수 부분과 소수 부분을 구한 뒤, 로그의 밑 변환 공식을 이용해 지수의 값을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\log 30 = n + \alpha$이고, n은 정수이며 $0 \le \alpha < 1$이다. 구해야 할 값은 $2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{\alpha}}$이다. 여기서 log는 상용로그이다.

사용할 공식

$\log 30 = \log(3 \times 10) = 1 + \log 3$

$\frac{1}{\log_{10} 3} = \log_3 10$

첫째 식은 n과 α를 분리하기 위해 사용하고, 둘째 식은 $3^{\frac{1}{\alpha}}$의 지수를 밑이 3인 로그로 바꾸기 위해 사용한다.

계산 과정

1. $\log 30 = 1 + \log 3$이고 $0 < \log 3 < 1$이므로 $n = 1, \alpha = \log 3$이다.
2. $2^{\frac{1}{n}} = 2^1 = 2$이다.
3. $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\log_{10} 3} = \log_3 10$이므로 $3^{\frac{1}{\alpha}} = 3^{\log_3 10} = 10$이다.
4. 따라서 $2 + 10 = 12$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 12이므로 16은 틀린 값이다. 틀린 값 16 → 올바른 값은 12이다.
② X — 계산 결과는 12이므로 14는 틀린 값이다. 틀린 값 14 → 올바른 값은 12이다.
③ O — $n=1$, $\alpha=\log 3$을 대입하면 $2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{\alpha}}=2+10=12$이다.
④ X — 계산 결과는 12이므로 10은 틀린 값이다. 10은 둘째 항 $3^{\frac{1}{\alpha}}$만 계산한 값이며, 첫째 항 2를 더해야 한다. 틀린 값 10 → 올바른 값은 12이다.

오답 포인트

$3^{\frac{1}{\log 3}}=10$만 구하고 $2^{\frac{1}{n}}=2$를 누락하면 ④를 고르게 된다. 또한 n은 $\log 30$의 정수 부분인 1이고, α는 소수 부분인 $\log 3$이라는 점을 구분해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

상용로그를 정수 부분과 소수 부분으로 먼저 분리한 다음, 역수 형태의 로그는 $\frac{1}{\log_a b}=\log_b a$로 바꾸어 계산한다. 마지막에는 식의 모든 항을 빠짐없이 합산한다.

암기 포인트

$\log 30=1+\log 3$, $\frac{1}{\log_{10} 3}=\log_3 10$, 따라서 $3^{\frac{1}{\log 3}}=10$이다.

NoteBase

문 2. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{CA}=8$, $\cos(B+C)=\frac{1}{3}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $8\sqrt{2}$
② $8\sqrt{3}$
③ $32\sqrt{2}$
④ $16\sqrt{2}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 삼각형의 내각의 합을 이용해 $\cos A$를 구하고, 두 변과 그 끼인각으로 삼각형의 넓이를 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $\overline{AB}=6$, $\overline{CA}=8$, $\cos(B+C)=\frac{1}{3}$이다.
구해야 할 값: 삼각형 ABC의 넓이이다.
주의할 조건: $A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$이다. 따라서 $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$이다.

사용할 공식

두 변의 길이와 그 끼인각을 알 때 삼각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$이다. 여기서는 $\overline{AB}$와 $\overline{CA}$가 각 A를 끼고 있으므로 이 공식을 사용한다. 또한 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$을 이용해 $\sin A$를 구한다.

계산 과정

1. $B+C=\pi-A$이므로
$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A=\frac{1}{3}$
따라서 $\cos A=-\frac{1}{3}$이다.
2. 삼각형의 내각인 A에서는 $\sin A>0$이므로
$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
이다.
3. 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=16\sqrt{2}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $8\sqrt{2}$는 계산 결과 $16\sqrt{2}$의 절반이므로 틀리다. $8\sqrt{2}$ → 올바르게는 $16\sqrt{2}$이다.
② X — $8\sqrt{3}$은 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$을 적용한 넓이와 일치하지 않는다. $8\sqrt{3}$ → 올바르게는 $16\sqrt{2}$이다.
③ X — $32\sqrt{2}$는 계산 결과 $16\sqrt{2}$의 두 배이므로 틀리다. $32\sqrt{2}$ → 올바르게는 $16\sqrt{2}$이다.
④ O — 두 변과 끼인각을 이용해 계산한 넓이가 $16\sqrt{2}$이므로 맞다.

오답 포인트

$\cos(B+C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$에서 음의 부호를 놓치기 쉽다. 또한 넓이 공식의 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리면 ③의 $32\sqrt{2}$, 같은 계수를 한 번 더 적용하면 ①의 $8\sqrt{2}$ 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

삼각형에서 두 각의 합이 제시되면 먼저 $B + C = \pi - A$로 바꾼다. 이어서 삼각함수 값을 구하고, 주어진 두 변 사이의 끼인각을 확인한 뒤 $S = \frac{1}{2}bc\sin A$를 적용한다.

암기 포인트

$B + C = \pi - A$, $\cos(\pi - A) = -\cos A$, 넓이는 '두 변 × 끼인각의 사인 ÷ 2'이다.

NoteBase

문 3. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{2020} ka_{k+1} = 26$, $\sum_{k=1}^{2020} (k+1)a_k = 47$, $a_{2021} = \frac{1}{2020}$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{2020} a_k$의 값은?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

정답 3번

출제 포인트

두 합의 지수를 맞춘 뒤 서로 빼서 $\sum_{k=1}^{2020} a_k$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $\sum_{k=1}^{2020} ka_{k+1} = 26$, $\sum_{k=1}^{2020} (k+1)a_k = 47$, $a_{2021} = \frac{1}{2020}$이다.
구해야 할 값: $S = \sum_{k=1}^{2020} a_k$이다.
주의할 조건: 첫째 합의 지수를 바꾸면 마지막에 $2020a_{2021}$이 남는다.

사용할 공식

첫째 합은 지수를 $j = k+1$로 바꾸어
$\sum_{k=1}^{2020} ka_{k+1} = \sum_{j=2}^{2021} (j-1)a_j$
로 나타낸다. 둘째 합에서 이 식을 빼면 같은 항끼리 계수를 비교할 수 있다.

계산 과정

$S = \sum_{k=1}^{2020} a_k$라 둔다. 두 주어진 합의 차는
$47 - 26 = \sum_{k=1}^{2020} (k+1)a_k - \sum_{j=2}^{2021} (j-1)a_j$
이다. a_1부터 a_{2020}까지의 계수 차는 모두 2이고, 마지막 항 $2020a_{2021}$은 빼야 하므로
$21 = 2S - 2020a_{2021} = 2S - 1$
이다. 따라서 $2S = 22$, 즉 $S = 11$이다.

선지 판단

① X — 9는 계산 결과 11과 다르다. 틀린 값 9를 올바르게 고치면 11이다.
② X — 10은 계산 결과 11과 다르다. 틀린 값 10을 올바르게 고치면 11이다.
③ O — 두 합의 차에서 $21 = 2S - 1$이므로 $S = 11$이다.
④ X — 12는 계산 결과 11과 다르다. 틀린 값 12를 올바르게 고치면 11이다.

NoteBase

오답 포인트

지수를 맞출 때 경계항을 빠뜨리기 쉽다. 첫째 합에는 a_1이 없고 $2020a_{2021}$이 있으며, 두 합을 뺄 때 이 마지막 항은 $-2020a_{2021} = -1$로 반영된다.

다시 나오면 이렇게 판단

첨자가 한 칸 어긋난 합은 먼저 같은 첨자로 바꾸고, 공통 구간의 계수 차와 양 끝의 경계항을 따로 정리한다.

암기 포인트

지수 이동에서는 공통항의 계수뿐 아니라 처음과 마지막 경계항까지 확인한다.

NoteBase

문 4. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+3x+5}{x^{2n}+1}$에 대하여 $\lim_{x\to1^-}f(x)+\lim_{x\to2^+}f(x)$의 값은?

① 4
② $\frac{17}{2}$
③ $\frac{9}{2}$
④ $\frac{11}{2}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 먼저 고정된 x에 대해 $n\to\infty$의 극한을 구간별로 구한 뒤, 그 결과로 정의된 함수의 좌극한과 우극한을 계산하는 문제이다.

조건 정리

$x\to1^-$에서는 $0<x<1$인 구간만 보면 되고, x^{2n-1}과 x^{2n}은 모두 0으로 수렴한다.
$x\to2^+$에서는 $x>1$이므로 분자와 분모를 최고차항 x^{2n}으로 나누어 판단한다.
구해야 할 값은 $\lim_{x\to1^-}f(x)+\lim_{x\to2^+}f(x)$이다.

사용할 공식

$|x|<1$이면 $x^n\to0$이고, $x>1$이면 분자와 분모를 x^{2n}으로 나누어 $n\to\infty$의 극한을 구한다.
이 원리를 쓰는 이유는 x의 크기에 따라 거듭제곱항의 극한이 달라지므로 $f(x)$의 식도 구간별로 달라지기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. $0 < x < 1$에서는
$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1} + 3x + 5}{x^{2n} + 1} = 3x + 5$
이므로
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 8$
이다.

2. $x > 1$에서는 분자와 분모를 x^{2n}으로 나누면
$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{-1} + (3x + 5)x^{-2n}}{1 + x^{-2n}} = \frac{1}{x}$
이므로
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$
이다.

3. 따라서
$8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$
이다.

선지 판단

① X — 4는 계산 결과 $\frac{17}{2}$와 다르다. 틀린 값 4가 아니라 올바른 합은 $\frac{17}{2}$이다.

② O — $8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$이므로 계산 결과와 일치한다.

③ X — $\frac{9}{2}$는 $x = 1$을 원래 식에 대입해 얻는 $f(1)$의 값이지만, 문제는 $x \to 1^-$에서의 좌극한을 묻는다. 올바른 좌극한은 8이고 최종 합은 $\frac{17}{2}$이다.

④ X — $\frac{11}{2}$는 두 극한의 합과 다르다. 틀린 값 $\frac{11}{2}$가 아니라 올바른 합은 $\frac{17}{2}$이다.

오답 포인트

가장 큰 함정은 $\lim_{x\to 1^-} f(x)$를 $f(1)$과 같다고 보는 것이다. 실제로 $f(1) = \frac{9}{2}$이지만, $x < 1$에서의 함수식은 $3x + 5$이므로 좌극한은 8이다. 또한 극한의 순서는 먼저 $n \to \infty$, 그다음 x의 극한이다.

다시 나오면 이렇게 판단

거듭제곱이 포함된 함수열의 극한은 $|x| < 1$, $|x| = 1$, $|x| > 1$로 나누어 먼저 $f(x)$를 구한다. 그 뒤 문제에서 요구한 방향의 x 극한을 계산하며, 함수값과 좌우극한을 구분한다.

암기 포인트

극한이 두 번 나오면 안쪽 극한부터 계산한다. x^n은 $|x| < 1$에서 0으로 가고, $x > 1$에서는 최고차 거듭제곱으로 나누어 비교한다.

NoteBase

문 5. 함수 $g(x)$는 함수 f(x)=casesx^2+7x+6&(x<-1)\(x)&(-1≤ x≤ 1)\^2+7x-2&(x>1)cases를 모든 실수에서 미분가능하게 하는 삼차 다항함수이다. 이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

① 3

② 2

③ -2

④ -3

정답 1번

출제 포인트

구간별 함수가 모든 실수에서 미분가능하려면 경계점에서 함수값과 미분계수가 각각 같아야 한다는 조건을 이용해 삼차 다항함수 $g(x)$를 결정하는 문제이다.

조건 정리

왼쪽 식은 x^2+7x+6, 오른쪽 식은 x^2+7x-2이다. 따라서 $x=-1$에서 $g(-1)=0$, $g'(-1)=5$이고, $x=1$에서 $g(1)=6$, $g'(1)=9$이다. 구해야 할 값은 $f(1/2)=g(1/2)$이다.

사용할 공식

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 놓는다. 미분가능성은 연속성을 포함하므로 각 경계점에서 g의 함수값과 도함숫값을 바깥쪽 이차함수의 값과 각각 일치시킨다.

계산 과정

경계 조건을 대입하면 다음 네 식을 얻는다.
$-a+b-c+d=0$, $\quad a+b+c+d=6$
$3a-2b+c=5$, $\quad 3a+2b+c=9$
앞의 두 식에서 $a+c=3$, $b+d=3$이고, 뒤의 두 식을 빼면 $4b=4$이므로 $b=1$, $d=2$이다. 또한 $3a+c=7$과 $a+c=3$을 연립하면 $a=2$, $c=1$이다. 따라서 $g(x)=2x^3+x^2+x+2$이고,
f≤ft(12)=g≤ft(12)=2≤ft(12)^3+≤ft(12)^2+12+2=3
이다.

선지 판단

① O: 계산 결과가 3이므로 옳다.
② X: 계산 결과는 2가 아니라 3이다. 틀린 값 2는 올바르게는 3으로 고쳐야 한다.
③ X: 계산 결과는 -2가 아니라 3이다. 틀린 값 -2는 올바르게는 3으로 고쳐야 한다.
④ X: 계산 결과는 -3이 아니라 3이다. 틀린 값 -3은 올바르게는 3으로 고쳐야 한다.

NoteBase

오답 포인트

경계점에서 함수값만 맞추면 연속인 함수는 만들 수 있지만 미분가능성까지 보장되지 않는다. $g(-1), g(1)$뿐 아니라 $g'(-1), g'(1)$도 각각 일치시켜야 하며, 1/2는 가운데 구간이므로 바깥쪽 식이 아니라 $g(x)$에 대입해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

구간별 함수의 미분가능성을 묻는 문제에서는 각 경계점마다 함수값 일치 조건과 도함숫값 일치 조건을 세운 뒤, 미정계수를 구하고 요구한 구간의 식에 값을 대입한다.

암기 포인트

경계에서 미분가능이면 함수값도 같고 기울기도 같다.

NoteBase

문 6. 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족할 때 정적분 $\int_{-3}^{3}(x-1)f(x)dx$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) $\int_{0}^{3}f(x)dx=-3$

① 6

② 4

③ -4

④ -6

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 우함수의 대칭성과 홀함수의 대칭구간 정적분을 이용해 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 f는 우함수이고, $\int_{0}^{3}f(x)dx=-3$이다.
구해야 할 값: $\int_{-3}^{3}(x-1)f(x)dx$이다.
주의할 조건: $xf(x)$는 홀함수이므로 대칭구간에서의 정적분이 0이다.

사용할 공식

우함수 f와 홀함수 $xf(x)$에 대하여
$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx, \qquad \int_{-a}^{a}xf(x)dx=0$
가 성립한다. 첫째 식은 우함수의 좌우 넓이가 같기 때문이고, 둘째 식은 홀함수의 좌우 적분값이 서로 상쇄되기 때문이다.

계산 과정

먼저 f가 우함수이므로
$\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\int_{0}^{3}f(x)dx=2(-3)=-6$
이다. 또한 $xf(x)$는 홀함수이므로
$\int_{-3}^{3}xf(x)dx=0$
이다. 따라서
$\int_{-3}^{3}(x-1)f(x)dx=\int_{-3}^{3}xf(x)dx-\int_{-3}^{3}f(x)dx=0-(-6)=6$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과가 6이므로 옳다.
② X — 4는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 6이다.
③ X — -4는 계산 결과와 부호 및 크기가 모두 다르다. 올바른 값은 6이다.
④ X — -6은 $\int_{-3}^{3} f(x)dx$의 값일 뿐, 구하는 적분값이 아니다. 앞에 붙은 음의 부호까지 적용한 올바른 값은 $-(-6)=6$이다.

오답 포인트

④의 -6은 우함수의 대칭 적분까지 계산한 뒤 $(x-1)f(x)=xf(x)-f(x)$의 음의 부호를 빠뜨릴 때 선택하기 쉽다. $xf(x)$의 적분은 0이고, 남는 값은 $-\int_{-3}^{3} f(x)dx$임을 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

대칭구간 정적분에서는 먼저 각 항의 홀짝성을 판별한다. 홀함수 항은 적분값을 0으로 처리하고, 우함수 항은 0부터 양의 끝점까지의 적분을 두 배 한 뒤 항의 부호를 적용한다.

암기 포인트

대칭구간에서는 홀함수의 적분은 0, 우함수의 적분은 절반 구간 적분의 2배이다.

NoteBase

문 7. 어느 학교의 전체 학생의 a%는 걸어서 등교하고, 나머지 학생은 모두 버스를 타고 등교한다고 한다. 어느 날 걸어서 등교한 학생의 $\frac{1}{40}$이 지각하였고, 버스를 타고 등교한 학생의 $\frac{1}{20}$이 지각하였다. 이 날 전체 학생 중에서 임의로 선택한 한 명의 학생이 지각하였을 때, 이 학생이 버스를 타고 등교하였을 확률은 $\frac{16}{33}$이다. a의 값은?

① 58

② 68

③ 44

④ 32

정답 2번

출제 포인트

등교 방법별 지각 확률을 이용해 조건부확률을 세우고 전체 학생 중 도보 등교생의 비율 a%를 구하는 문제이다.

조건 정리

전체 학생 수를 100명으로 놓으면 도보 등교생은 a명, 버스 등교생은 $100-a$명이다. 도보 등교생 중 지각생은 $\frac{a}{40}$명이고, 버스 등교생 중 지각생은 $\frac{100-a}{20}$명이다. 구해야 할 값은 지각생이 버스 등교생일 조건부확률이 $\frac{16}{33}$이 되게 하는 a이다.

사용할 공식

P(버스지각)=버스 등교 지각생 수전체 지각생 수

지각한 학생들만을 분모로 삼아 그중 버스 등교생의 비율을 구해야 하므로 이 조건부확률 공식을 사용한다.

계산 과정

$$\frac{\frac{100-a}{20}}{\frac{a}{40}+\frac{100-a}{20}}=\frac{16}{33}$$

분모와 분자에 40을 곱하면 다음과 같다.

$$\frac{2(100-a)}{a+2(100-a)}=\frac{16}{33}$$

양변을 교차하여 곱하면

$$66(100-a)=16(200-a)$$

$$6600-66a=3200-16a$$

$$3400=50a, \qquad a=68$$

따라서 전체 학생의 68%가 걸어서 등교한다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a = 58$이면 조건부확률은 $\frac{2(42)}{58 + 2(42)} = \frac{42}{71}$이므로 $\frac{16}{33}$이 아니다. 틀린 값 58을 올바르게 고치면 68이다.
② O — $a = 68$이면 $\frac{2(32)}{68 + 2(32)} = \frac{64}{132} = \frac{16}{33}$이므로 조건을 만족한다.
③ X — $a = 44$이면 조건부확률은 $\frac{2(56)}{44 + 2(56)} = \frac{28}{39}$이므로 $\frac{16}{33}$이 아니다. 틀린 값 44를 올바르게 고치면 68이다.
④ X — $a = 32$이면 조건부확률은 $\frac{2(68)}{32 + 2(68)} = \frac{17}{21}$이므로 $\frac{16}{33}$이 아니다. 틀린 값 32를 올바르게 고치면 68이다.

오답 포인트

지각한 학생을 뽑았다는 조건이 있으므로 분모는 전체 학생 수가 아니라 전체 지각생 수이다. 또한 버스 등교 비율은 a%가 아니라 $100 - a$%이다.

다시 나오면 이렇게 판단

조건부확률 문제에서는 전체 수를 계산하기 편한 값으로 놓고, 조건에 해당하는 집단을 분모로 정한 뒤 목표 집단과 조건 집단의 교집합을 분자로 둔다.

암기 포인트

‘지각하였을 때 버스’는 전체 지각생 중 버스 등교 지각생의 비율이다.

NoteBase

문 8. 다항함수 $f(x)$가 $f(1)=-4$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}=9$을 만족시킨다. 함수 $g(x)=(x^2+1)f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값은?

① 3

② -2

③ 2

④ -3

정답 2번

출제 포인트

주어진 극한을 도함수의 정의로 바꾸어 $f'(1)$을 구한 뒤 곱의 미분법으로 $g'(1)$을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $f(1)=-4$
극한 조건: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}=9$
구해야 할 값: $g(x)=(x^2+1)f(x)$일 때 $g'(1)$

사용할 공식

다항함수는 미분 가능하므로 $h\to 0$일 때
$f(1+h)=f(1)+f'(1)h+o(h),\qquad f(1-2h)=f(1)-2f'(1)h+o(h)$
를 사용할 수 있다. 또한 곱의 미분법에 따라
$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$
이다. 첫 번째 식은 두 함수값의 차를 $f'(1)$로 바꾸기 위해, 두 번째 식은 x^2+1과 $f(x)$의 곱을 미분하기 위해 사용한다.

계산 과정

극한의 분자는
$f(1+h)-f(1-2h)=3f'(1)h+o(h)$
이므로
$3f'(1)=9,\qquad f'(1)=3$
이다. 따라서
$g'(1)=2\cdot 1\cdot f(1)+(1^2+1)f'(1)=2(-4)+2(3)=-2$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 3은 $f'(1)$의 값일 뿐 $g'(1)$이 아니다. 곱의 미분을 끝까지 적용하면 올바른 값은 -2이다.
② O — 계산 결과 $g'(1) = -2$이므로 옳다.
③ X — 2는 $g'(1)$의 계산값과 일치하지 않는다. $2f(1) + 2f'(1) = -8 + 6$이므로 올바른 값은 -2이다.
④ X — -3은 $f'(1) = 3$의 부호만 바꾼 값으로, 곱의 미분 결과가 아니다. 올바른 값은 -2이다.

오답 포인트

극한값 9를 곧바로 $f'(1)$로 보면 안 된다. $1 + h$와 $1 - 2h$의 변화량 차이 때문에 극한은 $3f'(1)$이 된다. 또한 $f'(1) = 3$을 구한 뒤 멈추지 않고 $g(x)$에 곱의 미분법을 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

서로 다른 변화량이 들어간 극한은 각 변화량의 계수를 반영해 도함수로 바꾼다. 그다음 합성된 함수의 미분 공식을 적용하고, 주어진 함수값과 도함수값을 모두 대입해 검산한다.

암기 포인트

$f(a + ph) - f(a + qh)$를 h로 나눈 극한은 $(p - q)f'(a)$이다. 곱의 미분은 $(uv)' = u'v + uv'$이다.

NoteBase

문 9. $y = -x^2 + 3x$**와** $y = -2x$**로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선** $x = a$**가 이등분할 때,** a**의 값은?**

① $\frac{3}{2}$
② $\frac{7}{2}$
③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{1}{2}$

정답 3번

출제 포인트

두 곡선 사이의 세로 길이를 나타내는 함수의 대칭성을 이용하여 넓이를 이등분하는 직선의 위치를 구하는 문제이다.

조건 정리

두 곡선의 교점은 $-x^2 + 3x = -2x$에서 구한다. 이를 정리하면 $x(5 - x) = 0$이므로 교점의 x좌표는 0과 5이다. 구간 0≤ x≤5에서 위쪽 곡선은 $y = -x^2 + 3x$, 아래쪽 직선은 $y = -2x$이므로 두 곡선 사이의 세로 길이는 $(-x^2 + 3x) - (-2x) = -x^2 + 5x$이다.

사용할 공식

곡선 사이의 넓이는 위쪽 함수에서 아래쪽 함수를 뺀 값을 적분하여 구한다.
$A(a) = \int_0^a (-x^2 + 5x)dx$
또한 $-x^2 + 5x = -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}$이므로 이 세로 길이의 그래프는 $x = \frac{5}{2}$에 대하여 대칭이다. 전체 구간 $[0, 5]$도 이 직선을 중심으로 대칭이므로 $x = \frac{5}{2}$가 넓이를 이등분한다.

계산 과정

적분으로도 확인할 수 있다.
$\int_0^5 (-x^2 + 5x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{125}{6}$
따라서 절반의 넓이는 $\frac{125}{12}$이다. $a = \frac{5}{2}$일 때
$\int_0^{5/2} (-x^2 + 5x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^{5/2} = \frac{125}{12}$
이므로 $a = \frac{5}{2}$이다.

선지 판단

① X — $a = \frac{3}{2}$이면 왼쪽 넓이는 $\frac{9}{2}$로 전체 넓이의 절반인 $\frac{125}{12}$보다 작다. $\frac{3}{2}$가 아니라 $\frac{5}{2}$이어야 한다.
② X — $a = \frac{7}{2}$이면 왼쪽 넓이는 $\frac{49}{3}$으로 $\frac{125}{12}$보다 크다. $\frac{7}{2}$가 아니라 $\frac{5}{2}$이어야 한다.
③ O — $a = \frac{5}{2}$이면 대칭축과 일치하고 왼쪽 넓이가 $\frac{125}{12}$이므로 전체 넓이를 정확히 이등분한다.
④ X — $a = \frac{1}{2}$이면 왼쪽 넓이는 $\frac{7}{12}$로 $\frac{125}{12}$보다 작다. $\frac{1}{2}$이 아니라 $\frac{5}{2}$이어야 한다.

NoteBase

오답 포인트

두 그래프 자체의 위치만 보고 중점을 정하면 안 된다. 넓이를 결정하는 것은 두 함수의 차 $-x^2+5x$이며, 이 함수의 대칭축과 교점 구간의 중점이 모두 $x=\frac{5}{2}$라는 점이 핵심이다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 곡선의 교점을 먼저 구하고, 위쪽 함수에서 아래쪽 함수를 뺀 함수의 대칭성을 확인한다. 그 함수와 적분 구간이 같은 축에 대하여 대칭이면 대칭축이 넓이를 이등분한다. 대칭이 없으면 누적 넓이를 전체 넓이의 절반과 같게 놓고 푼다.

암기 포인트

곡선 사이의 넓이 이등분은 '교점 구간 확인 → 함수의 차 확인 → 대칭축 확인'의 순서로 판단한다.

NoteBase

문 10. 이차방정식 $x^2+2x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha^2)(k-\beta^2)$의 값은?

① -15

② -25

③ 220

④ 230

정답 1번

출제 포인트

근과 계수의 관계로 두 근의 제곱의 합과 곱을 구한 뒤, 주어진 곱을 전개하여 수열의 합을 계산하는 문제이다.

조건 정리

이차방정식 $x^2+2x-2=0$에서 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-2$이다. 따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8$이고 $\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=4$이다. 구해야 할 값은 $k=1$부터 10까지 $(k-\alpha^2)(k-\beta^2)$를 모두 더한 값이다.

사용할 공식

각 항은 $(k-\alpha^2)(k-\beta^2)=k^2-(\alpha^2+\beta^2)k+\alpha^2\beta^2=k^2-8k+4$로 정리된다. 두 근을 직접 구하지 않아도 근과 계수의 관계로 대칭식 $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^2\beta^2$를 계산할 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2-8k+4)=\sum_{k=1}^{10}k^2-8\sum_{k=1}^{10}k+4\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=385-8\cdot 55+4\cdot 10=385-440+40=-15$$

따라서 구하는 값은 -15이다.

선지 판단

① O — 계산값이 -15이므로 옳다.

② X — -25는 계산값과 다르다. -25를 -15로 고쳐야 한다.

③ X — 220은 계산값과 다르다. 220을 -15로 고쳐야 한다.

④ X — 230은 계산값과 다르다. 230을 -15로 고쳐야 한다.

오답 포인트

$\alpha^2+\beta^2$를 $(\alpha+\beta)^2$로만 계산하여 $-2\alpha\beta$를 빠뜨리거나, 상수항 4도 10번 더해야 한다는 점을 놓치기 쉽다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

두 근에 관한 대칭식은 근과 계수의 관계로 먼저 바꾸고, 곱을 k에 관한 다항식으로 전개한 다음 $\sum k^2$, $\sum k$, 상수항의 합을 각각 계산한다.

암기 포인트

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, $\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2$이다.

NoteBase

문 11. 20 이하의 자연수 n에 대하여 $\left\{\frac{2(1+i)}{1-i}\right\}^n = -2^n i$를 만족시키는 모든 n의 개수는?

① 5개

② 4개

③ 3개

④ 2개

정답 1번

출제 포인트

복소수를 간단히 정리한 뒤 허수 단위 i의 거듭제곱이 4를 주기로 반복된다는 성질을 이용해 조건을 만족하는 자연수의 개수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 범위는 20 이하의 자연수 n이다. 먼저 밑 $\frac{2(1+i)}{1-i}$를 간단히 정리하고, 등식 $\left\{\frac{2(1+i)}{1-i}\right\}^n = -2^n i$를 만족하는 n을 찾는다.

사용할 공식

분모를 실수로 만들기 위해 분자와 분모에 $1+i$를 곱한다. 또한 $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$이므로 i의 거듭제곱은 지수를 4로 나눈 나머지에 따라 결정된다.

계산 과정

$\frac{2(1+i)}{1-i} = \frac{2(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(2i)}{2} = 2i$

따라서 주어진 등식은

$(2i)^n = -2^n i$

이고, 양변을 2^n으로 나누면

$i^n = -i = i^3$

이다. 그러므로 n≡3±od4이다. 20 이하의 자연수 중 이에 해당하는 수는 3,7,11,15,19이므로 모두 5개이다.

선지 판단

① O — 조건을 만족하는 n은 3,7,11,15,19로 5개이므로 옳다.

② X — ‘4개’가 아니라 ‘5개’가 올바른 값이다. $n = 19$까지 포함해야 한다.

③ X — ‘3개’가 아니라 ‘5개’가 올바른 값이다. 주기 4에 따라 범위 전체에서 n≡3±od4인 수를 모두 세어야 한다.

④ X — ‘2개’가 아니라 ‘5개’가 올바른 값이다. $n = 3, 7$에서 멈추지 않고 20 이하까지 같은 주기를 적용해야 한다.

NoteBase

오답 포인트

핵심 함정은 i의 거듭제곱 주기를 찾은 뒤 일부 값만 세거나 상한 20을 끝까지 확인하지 않는 것이다. 특히 ②의 4개는 마지막 값 $n = 19$를 빠뜨리면 나올 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

복소수의 거듭제곱 방정식은 먼저 밑을 간단히 정리하고, 공통인 실수 배수를 소거한 뒤, i의 지수를 4로 나눈 나머지를 비교한다. 마지막에는 주어진 자연수 범위에서 해당 합동식을 만족하는 값을 직접 나열해 개수를 확인한다.

암기 포인트

i의 거듭제곱은 $i,\ -1,\ -i$, 1의 순서로 4마다 반복되며, $i^n = -i$이면 n≡3±od4이다.

NoteBase

문 12. 함수 $f(x)=|x-1|+2x$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 $f^{-1}(1)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② 0

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

정답 2번

출제 포인트

절댓값 함수의 식을 구간별로 나눈 뒤, 역함수의 정의에 따라 $f^{-1}(1)$을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=|x-1|+2x$이다. 구해야 할 값은 $f^{-1}(1)$이며, 이는 $f(x)=1$을 만족하는 x이다.
절댓값의 기준점 $x=1$에서 식을 나누어야 한다.

사용할 공식

|x-1|=cases1-x & (x<1)\ x-1 & (x≥ 1)cases 따라서 $f(x)$는 $x<1$일 때 $x+1$, $x\geq 1$일 때 $3x-1$이다.
역함수의 정의에 따라 $f^{-1}(1)=a$이면 $f(a)=1$이다.

계산 과정

1. 함수의 구간별 식은 $f(x)=x+1(x<1)$, $f(x)=3x-1(x\geq 1)$이다.
2. 함숫값 1은 경계에서의 값 $f(1)=2$보다 작으므로 $x<1$인 구간의 식 $x+1=1$을 사용한다.
3. 이를 풀면 $x=0$이고 $0<1$이므로 구간 조건도 만족한다. 따라서 $f^{-1}(1)=0$이다.

선지 판단

① X — $-\frac{1}{2}$을 대입하면 $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$이므로 함숫값이 1이 아니다. 틀린 값 $-\frac{1}{2}$이 아니라 올바른 값은 0이다.
② O — $f(0)=|-1|+0=1$이므로 $f^{-1}(1)=0$이다.
③ X — $\frac{1}{2}$을 대입하면 $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$이므로 함숫값이 1이 아니다. 틀린 값 $\frac{1}{2}$이 아니라 올바른 값은 0이다.
④ X — 1을 대입하면 $f(1)=2$이므로 함숫값이 1이 아니다. 틀린 값 1이 아니라 올바른 값은 0이다.

오답 포인트

$f^{-1}(1)$을 $1/f(1)$로 해석하거나, 절댓값을 구간별로 나누지 않고 계산하면 오답이 된다. 특히 ④의 1은 역함수의 입력값을 그대로 답으로 착각한 값이며, 실제로는 $f(x)=1$을 만족하는 x를 찾아야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

$f^{-1}(a)$는 방정식 $f(x) = a$의 해로 바꾸어 구한다. 절댓값 함수는 기준점에서 식을 나누고, 계산한 해가 해당 구간 조건을 만족하는지 확인한다.

암기 포인트

$f^{-1}(a) = x$와 $f(x) = a$는 같은 뜻이다.

NoteBase

문 13. 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 A(4, 2)에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이는? (단, O는 원점)

① 15

② 35

③ 25

④ 45

정답 3번

출제 포인트

원의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 구하고, 두 좌표축과의 절편을 이용해 삼각형의 넓이를 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 원은 $x^2 + y^2 = 20$이고 접점은 $A(4, 2)$이다. 접선과 x축, y축의 교점을 각각 P, Q라 할 때, 두 절편을 밑변과 높이로 하는 삼각형 OPQ의 넓이를 구해야 한다.

사용할 공식

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선은 $x_1x + y_1y = r^2$이다. 따라서 이 문제의 접선은 $4x + 2y = 20$, 즉 $2x + y = 10$이다. 접선의 두 축과의 교점이 $(a, 0)$, $(0, b)$이면 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}|ab|$이다. 두 좌표축이 서로 수직이므로 절편의 길이가 삼각형의 밑변과 높이가 된다.

계산 과정

1. 접선 $2x + y = 10$에서 $y = 0$을 대입하면 $x = 5$이므로 $P = (5, 0)$이다.
2. $x = 0$을 대입하면 $y = 10$이므로 $Q = (0, 10)$이다.
3. 따라서 $OP = 5$, $OQ = 10$이고, 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$이다.

선지 판단

① X — 15는 계산된 넓이 25와 다르다. 틀린 값 15는 올바르게는 25이다.
② X — 35는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 10$의 값이 아니다. 틀린 값 35는 올바르게는 25이다.
③ O — 두 절편이 5와 10이므로 삼각형 OPQ의 넓이는 25이다.
④ X — 45는 계산된 넓이 25와 다르다. 틀린 값 45는 올바르게는 25이다.

오답 포인트

접선의 방정식을 원의 방정식과 혼동하거나, 절편 5와 10을 구한 뒤 삼각형 넓이 공식의 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리기 쉽다. 이 문항에서는 접선 $2x + y = 10$의 두 절편을 먼저 정확히 구하는 것이 핵심이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

원의 접점 좌표로 접선의 방정식을 세운 뒤, 각 축의 절편을 구하고 12×밑변×높이 순서로 계산한다.

암기 포인트

$x^2 + y^2 = r^2$ 위의 (x_1, y_1)에서의 접선은 $x_1x + y_1y = r^2$이고, 좌표축 절편으로 만든 삼각형의 넓이는 두 절편의 곱의 절반이다.

NoteBase

문 14. 한 개의 주사위를 5번 던질 때, k번째 나오는 눈의 수를 a_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$라고 하자. 이때 $a_1 \le a_2 = a_3 \le a_4 \le a_5$인 경우의 수는?

① 63

② 84

③ 126

④ 210

정답 3번

출제 포인트

공통값 $a_2 = a_3$을 먼저 정한 뒤, 그 값 이하인 a_1과 그 값 이상인 비감소 순서쌍 a_4, a_5의 가짓수를 곱하여 합하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 각 a_k는 주사위의 눈이므로 1부터 6까지의 정수이다.
구해야 할 값: $a_1 \le a_2 = a_3 \le a_4 \le a_5$를 만족하는 순서 있는 5회의 결과 수이다.
주의할 조건: 등호가 허용되므로 $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$, $a_4 = a_5$인 경우도 포함한다.

사용할 공식

$a_2 = a_3 = j$라 두면 a_1의 선택 수는 j개이다. a_4, a_5는 $j, j+1, \dots, 6$ 중에서 중복을 허용해 2개를 비감소 순서로 고르므로 선택 수는
$\binom{(7-j)+2-1}{2} = \binom{8-j}{2}$
이다. 같은 j에서 앞부분과 뒷부분의 선택은 독립이므로 두 선택 수를 곱하고, $j = 1, 2, \dots, 6$에 대하여 합한다.

계산 과정

$$\sum_{j=1}^{6} j\binom{8-j}{2}$$
$$= 1 \cdot 21 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1$$
$$= 21 + 30 + 30 + 24 + 15 + 6 = 126$$
따라서 조건을 만족하는 경우의 수는 126이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 126이므로 63은 틀린 값이다. ①의 63은 올바르게는 126이다.
② X — j별 경우의 수 21,30,30,24,15,6을 모두 합하면 126이므로 84는 틀린 값이다. ②의 84는 올바르게는 126이다.
③ O — $\sum_{j=1}^{6} j\binom{8-j}{2} = 126$이므로 조건을 만족하는 경우의 수와 일치한다.
④ X — 계산 결과는 126이므로 210은 틀린 값이다. ④의 210은 올바르게는 126이다.

오답 포인트

$a_2 = a_3$를 하나의 공통값 j로 고정하지 않고 단순한 비감소 수열처럼 세거나, 등호가 허용되는 $a_4 \le a_5$를 서로 다른 두 눈의 선택으로 처리하면 중복 선택을 빠뜨리게 된다. 또한 주사위는 5번 던지므로 각 순서의 결과를 세는 문제이지만, 부등식 때문에 j를 정한 뒤에는 가능한 값의 범위만 정확히 세어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

연속한 항 사이에 등식이 지정된 비감소 수열 문제에서는 등식으로 묶인 공통값을 먼저 고정한다. 그 공통값의 왼쪽과 오른쪽에서 가능한 비감소 선택 수를 각각 구해 곱한 뒤, 공통값의 전체 범위에 대해 합한다.

암기 포인트

공통값 고정 → 왼쪽 선택 수 × 오른쪽 중복조합 수 → 공통값별 합산이다.

NoteBase

문 15. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 f(x)=casesax(1-x),&0≤ x≤ 1\\0,&x<0 또는 x>1cases일 때, 확률 $P(0 \le X \le \frac{3}{4})$의 값은? (단, a는 양의 상수이다.)

① $\frac{9}{16}$
② $\frac{21}{32}$
③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{27}{32}$

정답 4번

출제 포인트

확률밀도함수의 전체 적분값이 1이라는 조건으로 상수 a를 구한 뒤, 주어진 구간에서 확률밀도함수를 적분하여 확률을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 확률밀도함수는 $0 \le x \le 1$에서 $f(x) = ax(1-x)$이고 그 밖에서는 0이다. 먼저 $\int_0^1 f(x)dx = 1$을 이용해 a를 정한 다음, $0 \le X \le \frac{3}{4}$의 확률을 구한다.

사용할 공식

확률밀도함수의 정규화 조건은 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$이다. 또한 연속확률변수의 구간 확률은 $P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)dx$이다. 확률은 확률밀도함수 아래의 해당 구간 넓이이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

먼저 전체 확률이 1이므로 $1 = \int_0^1 ax(1-x)dx = a\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{6}$이다. 따라서 $a = 6$이다. 이제 $P\left(0 \le X \le \frac{3}{4}\right) = \int_0^{3/4} 6x(1-x)dx = [3x^2 - 2x^3]_0^{3/4}$이고, $3 \cdot \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{27}{64} = \frac{27}{16} - \frac{27}{32} = \frac{27}{32}$이다.

선지 판단

① X — $\frac{9}{16}$은 계산 결과 $\frac{27}{32}$와 다르다. 틀린 값 $\frac{9}{16}$은 올바르게는 $\frac{27}{32}$이다.
② X — $\frac{21}{32}$은 계산 결과 $\frac{27}{32}$와 다르다. 틀린 값 $\frac{21}{32}$은 올바르게는 $\frac{27}{32}$이다.
③ X — $\frac{3}{4}$은 적분의 상한이지 그 자체가 구간 확률은 아니다. 틀린 값 $\frac{3}{4}$은 올바르게는 $\frac{27}{32}$이다.
④ O — 정규화로 $a = 6$을 구해 적분하면 확률이 $\frac{27}{32}$이므로 옳다.

오답 포인트

$\frac{3}{4}$을 확률로 바로 고르거나, 상수 a를 구하지 않은 채 적분하면 오답이 된다. $\frac{3}{4}$은 확률변수의 구간 끝값이고, 확률은 정규화된 밀도함수를 그 구간에서 적분한 넓이이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

상수가 포함된 확률밀도함수 문제는 전체 구간 적분을 1로 두어 상수를 결정하고, 구하려는 구간만 다시 적분한 뒤 결과가 0과 1 사이인지 검산한다.

암기 포인트

전체 넓이는 1, 구간 확률은 그 구간의 넓이이다.

NoteBase

문 16. 집합 X는 공집합이 아니고, 정수를 원소로 가진다. X를 정의역으로 하는 두 함수 f, g가 $f(x)=x^3+1,\ g(x)=3x-1$일 때, $f=g$가 되는 집합 X의 개수는?

① 4개

② 3개

③ 2개

④ 1개

정답 2번

출제 포인트

두 함수가 같아지는 정의역의 원소를 방정식으로 구한 뒤, 그 원소들로 만들 수 있는 공집합이 아닌 부분집합의 개수를 세는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 집합 X는 정수를 원소로 하는 공집합이 아닌 집합이다.
구해야 할 값: 정의역이 X인 두 함수 f와 g가 같은 함수가 되도록 하는 집합 X의 개수이다.
주의할 조건: $f=g$이려면 X의 모든 원소 x에서 $f(x)=g(x)$이어야 하며, X는 공집합일 수 없다.

사용할 공식

$x^3+1=3x-1$
$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=0$

두 함수가 같은 함수이려면 정의역의 모든 원소에서 함숫값이 같아야 하므로 이 방정식을 사용한다. 방정식의 서로 다른 정수해가 n개이면 가능한 정의역은 그 해집합의 공집합이 아닌 부분집합이므로 개수는 2^n-1개이다.

계산 과정

1. $f(x)=g(x)$를 세우면 $x^3+1=3x-1$이다.
2. 식을 정리하면 $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=0$이므로 서로 다른 정수해는 $x=1,\ -2$이다. 중근 $x=1$은 집합의 원소로 한 번만 센다.
3. 따라서 X는 $1, -2, -2, 1$ 중 하나이며 모두 3개이다. 또는 $2^2-1=3$으로 계산할 수 있다.

NoteBase

선지 판단

① X — 4개는 해집합 -2, 1의 모든 부분집합에 공집합까지 포함한 수이다. 그러나 X는 공집합이 아니므로 올바르게는 3개이다.
② O — 가능한 집합은 1, -2, -2, 1의 3개이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X — 2개는 한 원소 집합 1, -2만 세고 두 원소 집합 -2, 1을 누락한 수이다. 올바르게는 3개이다.
④ X — 1개는 방정식의 해집합 -2, 1 자체만 정의역으로 본 수이다. 그 해집합의 공집합이 아닌 모든 부분집합이 가능하므로 올바르게는 3개이다.

오답 포인트

방정식의 서로 다른 해가 2개라는 사실과 가능한 집합 X의 개수를 혼동하기 쉽다. 특히 ①의 4개는 공집합까지 포함한 부분집합의 수이고, ③의 2개는 한 원소 부분집합만 센 결과이다. 또한 중근 $x = 1$은 집합에서 중복해 세지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 정수해를 구한다. 그 해가 n개이면 가능한 정의역은 해집합의 부분집합이며, 공집합을 제외하라는 조건이 있으면 $2^n - 1$개로 판단한다.

암기 포인트

함수의 일치 조건은 정의역의 모든 원소에서 함숫값이 같은 것이며, 서로 다른 공통해가 n개일 때 공집합이 아닌 정의역의 수는 $2^n - 1$개이다.

NoteBase

문 17. 실수 x, y에 대하여 $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$을 만족할 때, $x - y$의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 이차식을 완전제곱식의 합으로 변형하고, 실수의 제곱은 항상 0 이상이라는 성질을 이용해 $x - y$의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$이다. 구해야 할 값은 $x - y$이며, x, y가 실수라는 조건이 중요하다.

사용할 공식

완전제곱식 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$을 이용한다. 또한 실수 A, B에 대하여 $A^2 + B^2 = 0$이면 $A = 0, B = 0$이다. 주어진 식을 두 제곱의 합으로 바꿀 수 있으므로 이 성질을 사용한다.

계산 과정

주어진 식을 완전제곱식으로 정리하면

$x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 6y + 5 = (x - y + 2)^2 + (y - 1)^2$

이다. 따라서

$(x - y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$

이다. 두 항은 모두 실수의 제곱이므로 각각 0이어야 한다. 즉, $x - y + 2 = 0$이고 $y - 1 = 0$이다. 따라서 $x - y = -2$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 $x - y = -2$이므로 옳다.

② X — $x - y + 2 = 0$에서 얻는 값은 -2이므로 -1은 틀리다. 올바르게는 -2이다.

③ X — 두 제곱의 합이 0이라는 조건은 $x - y + 2 = 0$을 강제하므로 0은 틀리다. 올바르게는 -2이다.

④ X — $x - y + 2 = 0$을 풀면 $x - y = -2$이므로 1은 틀리다. 올바르게는 -2이다.

NoteBase

오답 포인트

$(x-y+2)^2=0$에서 $x-y=2$로 부호를 잘못 옮기거나, 제곱의 합이 0일 때 각 제곱이 0이라는 점을 놓치기 쉽다. 이 문항에서는 $x-y+2=0$을 정확히 풀어 $x-y=-2$를 얻어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

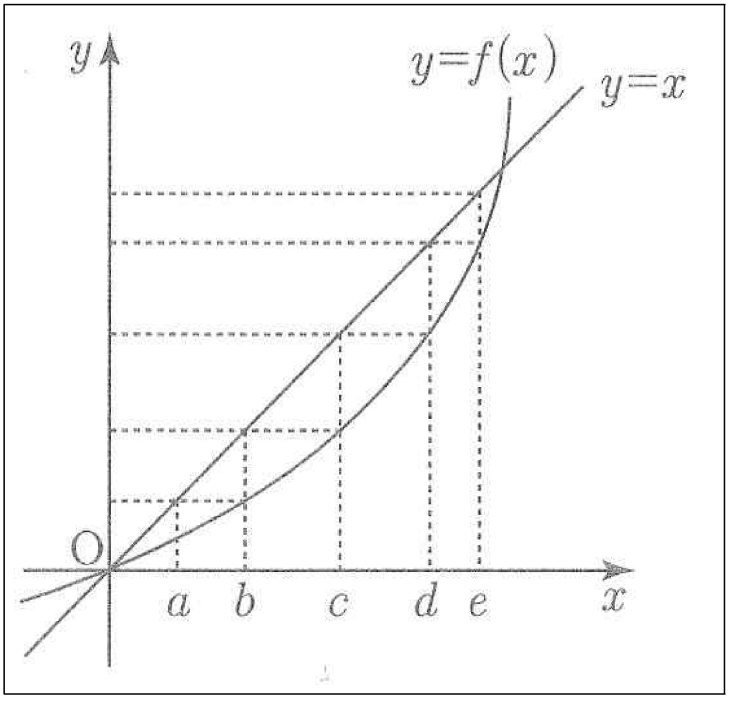
이차식의 최솟값이 0인 형태에서는 먼저 완전제곱식의 합으로 정리한다. 실수의 제곱들의 합이 0이면 각 제곱의 밑이 모두 0이라는 조건을 세운 뒤, 요구한 식의 값을 구한다.

암기 포인트

실수에서 제곱의 합이 0이면 각 제곱은 모두 0이다.

NoteBase

문 18. 직선 $y = x$와 역함수가 존재하는 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(b) \neq e$

② $(f \circ f)(d) = c$

③ $f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(b))) \neq f^{-1}(d)$

④ $(f \circ f)(e) \neq (f^{-1} \circ f^{-1})(b)$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 그래프에서 함수의 대응을 읽고, 역함수는 그 대응을 거꾸로 적용하며 합성함수는 오른쪽 함수부터 차례로 적용한다는 원리로 각 식을 판단하는 문제이다.

조건 정리

그래프의 점과 점선을 읽으면 $f(b) = a$, $f(c) = b$, $f(d) = c$, $f(e) = d$이다. 따라서 대응을 거꾸로 하면 $f^{-1}(a) = b$, $f^{-1}(b) = c$, $f^{-1}(c) = d$, $f^{-1}(d) = e$이다.

사용할 공식

역함수의 정의는 $f(x) = y$이면 $f^{-1}(y) = x$라는 것이다. 또한 $(g \circ h)(x) = g(h(x))$이므로 합성함수는 오른쪽에 있는 함수부터 적용한다. 그래프가 알려 주는 대응을 여러 번 이어 가야 하므로 이 두 원리를 사용한다.

NoteBase

계산 과정

역함수를 반복하면 bf^-1cf^-1df^-1e이다. 정함수를 반복하면 dfcfb, efdfc이다. 한편 역함수를 두 번 적용하면 bf^-1cf^-1d이다.

선지 판단

① X. $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(b) = e$이므로 주어진 '$\neq e$'가 틀렸다. 올바르게는 $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(b) = e$이다.
② X. $(f \circ f)(d) = f(f(d)) = f(c) = b$이므로 주어진 '$= c$'가 틀렸다. 올바르게는 $(f \circ f)(d) = b$이다.
③ X. 왼쪽은 $f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(b))) = e$이고 오른쪽도 $f^{-1}(d) = e$이므로 두 값은 같다. 주어진 '$\neq$'가 틀렸으며, 올바르게는 $f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(b))) = f^{-1}(d)$이다.
④ O. $(f \circ f)(e) = f(d) = c$이고 $(f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(c) = d$이다. $c \neq d$이므로 옳다.

오답 포인트

그래프에서 $f(d) = c$를 읽은 뒤 합성을 한 번만 적용하면 ②를 고르기 쉽다. 그러나 $(f \circ f)(d)$는 $f(d)$에서 끝나지 않고 그 결과에 f를 한 번 더 적용해야 한다. 또한 역함수는 그래프의 대응을 반대로 따라가므로 반복 횟수를 빠뜨리지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 그래프를 xfy 형태의 대응표로 바꾼다. 역함수는 화살표를 반대로 돌리고, 합성 기호의 개수만큼 오른쪽부터 한 단계씩 이동한 뒤 두 결과의 등식 또는 부등식을 비교한다.

암기 포인트

정함수는 화살표 방향, 역함수는 화살표의 반대 방향이며, 합성은 오른쪽부터 적용한다.

NoteBase

문 19. 다항식 $x^3 - ax^2 + bx - 6$을 인수분해하면 $(x-1)(x-2)(x+c)$일 때, $2a + 3b - 5c$의 값은?

① 60

② 50

③ 30

④ 20

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 인수의 곱을 전개한 뒤 같은 차수의 계수를 비교하여 미지수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 다항식은 $x^3 - ax^2 + bx - 6$이고, 인수분해한 식은 $(x-1)(x-2)(x+c)$이다. 두 식의 상수항과 각 차수의 계수가 각각 같아야 한다.

사용할 공식

$(x-1)(x-2)(x+c) = (x^2 - 3x + 2)(x+c) = x^3 + (c-3)x^2 + (2-3c)x + 2c$
두 다항식이 서로 같으므로 대응하는 항의 계수를 비교할 수 있다.

계산 과정

1. 상수항을 비교하면 $2c = -6$이므로 $c = -3$이다.
2. x^2의 계수를 비교하면 $-a = c - 3 = -6$이므로 $a = 6$이다.
3. x의 계수를 비교하면 $b = 2 - 3c = 2 - 3(-3) = 11$이다.
4. 따라서 $2a + 3b - 5c = 2(6) + 3(11) - 5(-3) = 12 + 33 + 15 = 60$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 60이므로 옳다.
② X — 50이 아니라 60이다. $-5c = -5(-3) = 15$에서 음수와 음수의 곱을 양수로 처리해야 한다.
③ X — 30이 아니라 60이다. $a = 6, b = 11, c = -3$을 모두 대입해야 한다.
④ X — 20이 아니라 60이다. 인수분해식의 상수항 $2c$를 원래 다항식의 상수항 -6과 비교하면 $c = -3$이다.

오답 포인트

핵심 함정은 $c = -3$을 구한 뒤 $-5c$를 -15로 잘못 계산하는 부호 오류이다. 실제로는 $-5c = -5(-3) = 15$이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

인수의 곱을 차수별로 정리하고, 상수항부터 비교해 미지수를 구한 뒤 나머지 계수를 대응시킨다. 마지막에는 음수를 대입한 항의 부호를 다시 확인한다.

암기 포인트

같은 다항식은 같은 차수의 계수가 각각 같으며, 상수항 비교가 가장 빠른 출발점이 된다.

NoteBase

문 20. 다음 <보기>의 명제에서 참인 것을 모두 고르면 몇 개인가?

<보기>
x는 실수이다.
㉠ $x^2 = 1$이면 $x^3 = x$이다.
㉡ $x^2 - 6x + 8 \le 0$이면 $x^2 - x > 0$이다.
㉢ $x^2 - 1 \le 0$이면 $x^2 - 3x \le 0$이다.
㉣ $2x - 1 = 3$이면 $x^2 - 4x + 4 = 0$이다.

① 1개
② 2개
③ 3개
④ 4개

정답 3번

출제 포인트

조건을 만족하는 모든 실수의 범위를 구한 뒤, 그 범위 전체에서 결론이 성립하는지 판단하여 참인 명제의 개수를 세는 문제이다.

조건 정리

㉠의 조건은 $x^2 = 1$이다.
㉡의 조건은 $x^2 - 6x + 8 \le 0$이다.
㉢의 조건은 $x^2 - 1 \le 0$이다.
㉣의 조건은 $2x - 1 = 3$이다.
각 명제는 조건을 만족하는 모든 x에서 결론이 성립해야 참이다.

사용할 공식

$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$
$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
이차부등식의 해를 구해 조건의 범위를 정하고, 그 범위에서 결론식의 부호를 확인한다. 등식 조건은 해를 직접 대입하여 결론을 검산한다.

NoteBase

계산 과정

㉠ $x^2 = 1$이면 $x = \pm 1$이다. 두 경우 모두 $x^3 = x$이므로 참이다.
㉡ $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) \le 0$이므로 $2 \le x \le 4$이다. 이 범위에서는 $x > 1$이므로 $x^2 - x = x(x-1) > 0$이다. 따라서 참이다.
㉢ $x^2 - 1 \le 0$이면 $-1 \le x \le 1$이다. 그러나 $x = -1$일 때 $x^2 - 3x = 1 + 3 = 4 > 0$이므로 결론이 성립하지 않아 거짓이다.
㉣ $2x - 1 = 3$이면 $x = 2$이다. 이를 대입하면 $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$이므로 참이다.
따라서 참인 명제는 ㉠, ㉡, ㉣의 3개이다.

선지 판단

① X — '참인 명제가 1개'라는 수가 틀렸다. ㉠, ㉡, ㉣이 참이므로 올바르게는 3개이다.
② X — '참인 명제가 2개'라는 수가 틀렸다. ㉢만 거짓이므로 올바르게는 3개이다.
③ O — 참인 명제가 ㉠, ㉡, ㉣의 3개이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — '참인 명제가 4개'라는 수가 틀렸다. ㉢은 $x = -1$이라는 반례가 있으므로 올바르게는 3개이다.

오답 포인트

㉢에서 조건의 해 $-1 \le x \le 1$을 구한 뒤 일부 양수만 확인하면 참으로 오인하기 쉽다. 명제가 참이려면 조건을 만족하는 모든 값에서 결론이 성립해야 하며, 하나의 반례만 있어도 거짓이다.

다시 나오면 이렇게 판단

조건식의 해집합을 먼저 구하고, 결론식이 그 해집합 전체에서 성립하는지 확인한다. 참은 전체 범위를 증명하고, 거짓은 조건을 만족하면서 결론을 깨는 반례 하나로 판정한다.

암기 포인트

'이면' 명제는 조건을 만족하는 모든 값에서 결론이 성립해야 참이며, 반례 하나면 거짓이다.

NoteBase