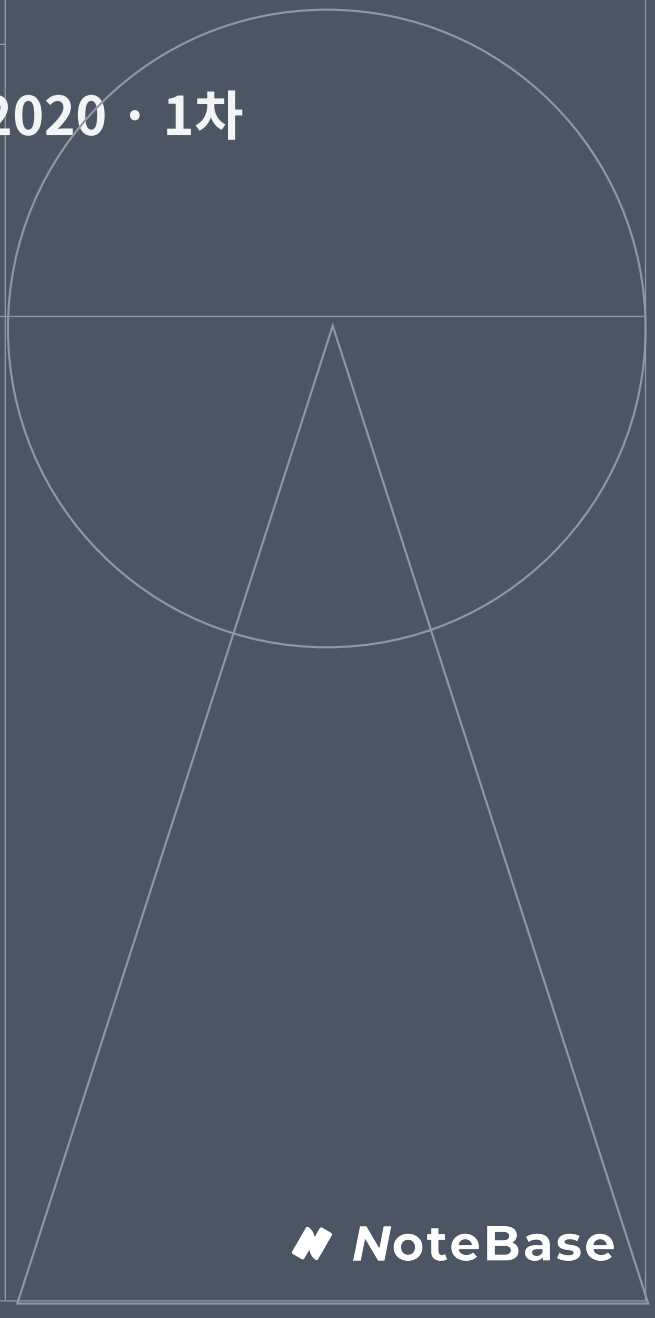
기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2020 · 1차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2020 · 1차

공무원/해경/순경 · 수학 · 2020 · 1차

문 1. 서로 다른 두 이차방정식 $x^2 + kx + 5 = 0$, $x^2 + 5x + k = 0$이 오직 하나의 공통인 근 α를 가질 때, 상수 k와 근 α의 합 $k + \alpha$의 값은?

① -9

② -7

③ -5

④ -3

정답 3번

출제 포인트

서로 다른 두 이차방정식의 공통근을 각각의 식에 대입한 뒤, 두 식을 빼서 공통근과 상수 k를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: α는 $x^2 + kx + 5 = 0$과 $x^2 + 5x + k = 0$의 공통근이다.
구해야 할 값: $k + \alpha$이다.
주의할 조건: 두 이차방정식은 서로 다르므로 $k = 5$는 제외된다.

사용할 공식

공통근 α를 두 식에 대입하면
$\alpha^2 + k\alpha + 5 = 0, \qquad \alpha^2 + 5\alpha + k = 0$
이다. 두 등식의 차를 구하면 공통된 α^2항이 소거되므로 α와 k의 관계를 간단히 얻을 수 있다.

NoteBase

계산 과정

1. 두 식을 빼면
$(k-5)\alpha+(5-k)=0$
이므로
$(k-5)(\alpha-1)=0$
이다.
2. $k=5$이면 두 방정식이 모두 $x^2+5x+5=0$이 되어 서로 다르다는 조건에 어긋난다. 따라서 $\alpha=1$이다.
3. $\alpha=1$을 첫째 식에 대입하면 $1+k+5=0$이므로 $k=-6$이다.
4. 따라서 $k+\alpha=-6+1=-5$이다.

선지 판단

① X: 계산 결과는 -5이므로 -9가 아니다. 틀린 값 -9는 올바르게는 -5이다.
② X: 계산 결과는 -5이므로 -7이 아니다. 틀린 값 -7은 올바르게는 -5이다.
③ O: $k=-6, \alpha=1$이므로 $k+\alpha=-5$이다.
④ X: 계산 결과는 -5이므로 -3이 아니다. 틀린 값 -3은 올바르게는 -5이다.

오답 포인트

$(k-5)(\alpha-1)=0$에서 곧바로 $k=5$를 택하면 안 된다. $k=5$일 때는 두 방정식이 같은 식이 되므로 '서로 다른 두 이차방정식'이라는 조건을 위반한다. 따라서 반드시 $\alpha=1$을 택해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 방정식이 공통근을 가지면 그 근을 양쪽 식에 대입하고 두 식을 빼서 공통항을 소거한다. 인수분해 뒤에는 각 인수가 0인 경우를 원래 조건과 대조하여 허용되지 않는 경우를 제외한다.

암기 포인트

공통근 문제는 '두 식에 대입 → 두 식의 차로 소거 → 서로 다르다는 조건 확인'의 순서로 판단한다.

NoteBase

문 2. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = 2$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 3n^2}{na_n + n^2 + 2n}$의 값은?

① -3

② $-\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{3}$

④ 3

정답 1번

출제 포인트

수렴하는 급수의 일반항은 0으로 수렴한다는 사실을 이용하여 주어진 식을 a_n/n에 관한 식으로 바꾸는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = 2$이므로 이 급수는 수렴한다.
구해야 할 값: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 3n^2}{na_n + n^2 + 2n}$이다.
주의할 조건: 급수가 수렴하면 그 일반항은 반드시 0으로 수렴하므로 $\frac{a_n}{n} \to 0$이다.

사용할 공식

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다. 여기서 $b_n = \frac{a_n}{n}$이므로 $\frac{a_n}{n} \to 0$을 사용할 수 있다.

계산 과정

분자와 분모를 n^2으로 나누면
$\frac{a_n^2 - 3n^2}{na_n + n^2 + 2n} = \frac{(\frac{a_n}{n})^2 - 3}{\frac{a_n}{n} + 1 + \frac{2}{n}}$.
이제 $\frac{a_n}{n} \to 0$, $\frac{2}{n} \to 0$을 대입하면
$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{a_n}{n})^2 - 3}{\frac{a_n}{n} + 1 + \frac{2}{n}} = \frac{0^2 - 3}{0 + 1 + 0} = -3$.

선지 판단

① O — 계산 결과가 -3이므로 옳다.
② X — $-\frac{1}{3}$이 아니라 -3이다. 분자와 분모의 극한은 각각 -3, 1이므로 올바른 값은 -3이다.
③ X — $\frac{1}{3}$이 아니라 -3이다. 분자의 상수항이 -3이므로 극한의 부호는 음수이고 올바른 값은 -3이다.
④ X — 3이 아니라 -3이다. 분자의 $-3n^2$에서 음의 부호를 유지해야 하므로 올바른 값은 -3이다.

오답 포인트

급수의 합이 2라는 조건을 $a_n/n \to 2$로 잘못 해석하면 안 된다. 급수의 합이 유한하다는 사실에서 얻는 것은 일반항 a_n/n이 0으로 수렴한다는 결론이다. 또한 ②는 분자와 분모를 뒤집은 값처럼 보이고, ③·④는 -3의 음의 부호를 놓치게 하는 선지이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

무한급수의 수렴 조건이 주어지면 먼저 일반항의 극한이 0임을 확인한다. 이어 최고차항으로 분자와 분모를 나누어 그 일반항을 포함한 식으로 고친 뒤 극한값을 대입한다.

암기 포인트

급수 수렴이면 일반항은 0이다: $\sum b_n$ 수렴 $\Rightarrow b_n \to 0$.

NoteBase

문 3. 원 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2=c$가 되었다. 이때, 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 6

정답 2번

출제 포인트

원의 방정식을 완전제곱식으로 고쳐 중심과 반지름을 구한 뒤, 평행이동한 원의 중심이 원점이 되는 이동량을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 원은 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$이다. 평행이동 후의 원 $x^2+y^2=c$는 중심이 원점이고 반지름의 제곱이 c인 원이다. 구해야 할 값은 $a+b+c$이다.

사용할 공식

완전제곱식은 $x^2+2px=(x+p)^2-p^2$이다. 중심이 h, k인 도형을 x축 방향으로 a, y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 중심은 $h+a, k+b$가 된다. 원의 중심과 이동 후 중심을 비교해야 하므로 이 두 관계를 사용한다.

계산 과정

주어진 식을 완전제곱식으로 고치면

$x^2+4x+y^2-6y+9=0$

$(x+2)^2-4+(y-3)^2-9+9=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=4$

이다. 따라서 원의 중심은 $(-2, 3)$, 반지름의 제곱은 4이다.

평행이동 후 중심이 원점이므로

$-2+a=0, \quad 3+b=0$

에서 $a=2, b=-3$이다. 평행이동으로 반지름은 변하지 않으므로 $c=4$이다. 따라서

$a+b+c=2+(-3)+4=3$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 2는 계산 결과 3과 다르다. $a+b+c$는 2가 아니라 3이다.
② O — $a=2, b=-3, c=4$이므로 $a+b+c=3$이다.
③ X — 4는 c, 즉 반지름의 제곱만 나타낸 값이다. $a+b+c$는 4가 아니라 3이다.
④ X — 6은 계산 결과 3과 다르다. $a+b+c$는 6이 아니라 3이다.

오답 포인트

평행이동량의 부호가 핵심 함정이다. 중심의 y좌표 3을 0으로 옮기려면 y축의 양의 방향이 아니라 음의 방향으로 3만큼 이동해야 하므로 $b=-3$이다. 또한 $c=4$만 구하고 멈추면 ③을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 완전제곱식으로 원의 중심과 반지름의 제곱을 구한다. 그다음 기존 중심에 이동량을 더한 좌표가 새 중심과 같다는 식을 세우고, 평행이동에서는 반지름이 변하지 않는다는 점을 적용한다.

암기 포인트

평행이동한 중심은 '기존 중심 + 이동량'이고, 평행이동 전후의 반지름은 같다.

NoteBase

문 4. $abc=-1$일 때, 다음 유리식의 값은?

$$Q=\frac{a+b}{(a+1)(b+1)}+\frac{b+c}{(b+1)(c+1)}+\frac{c+a}{(c+1)(a+1)}$$

① -1

② -2

③ 1

④ 2

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 세 유리식을 공통분모로 통분하고, $abc=-1$을 이용하여 분자와 분모의 관계를 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $abc=-1$이다. 구해야 할 값은 Q이며, 원래 유리식이 정의되려면 $a, b, c \neq -1$이어야 한다.

사용할 공식

공통분모를 $D=(a+1)(b+1)(c+1)$로 둔다. 그러면

$D=abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1$

이다. 세 항의 분모에 들어 있는 인수가 서로 겹치므로 공통분모로 통분하면 분자와 분모를 직접 비교할 수 있다.

계산 과정

통분한 분자는

$(a+b)(c+1)+(b+c)(a+1)+(c+a)(b+1)$

$=2(ab+bc+ca+a+b+c)$

이다. 한편 $abc=-1$이므로

$D=abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1=ab+bc+ca+a+b+c$

이다. 따라서 분자는 $2D$이고,

$Q=\frac{2D}{D}=2$

이다.

선지 판단

① X — 계산값은 2이므로 -1은 틀리다. 올바른 값은 2이다.

② X — 계산값은 2이므로 -2는 틀리다. 올바른 값은 2이다.

③ X — 분자는 공통분모와 같은 것이 아니라 그 2배이므로 1은 틀리다. 올바른 값은 2이다.

④ O — 통분한 분자가 공통분모의 2배이므로 $Q=2$이다.

NoteBase

오답 포인트

$abc=-1$을 분모 전개식에 대입하면 $abc+1=0$이 되어 두 항이 함께 사라진다. 또한 통분한 분자에서 ab, bc, ca, a, b, c가 각각 두 번씩 나타난다는 점을 놓치면 ③의 1을 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

순환형 유리식은 전체 공통분모를 먼저 세운 뒤 분자와 분모를 각각 대칭식으로 정리한다. 그다음 곱 조건을 분모 전개식에 대입하여 두 식의 배수 관계를 확인한다.

암기 포인트

공통분모 전개에서 $abc+1=0$, 통분한 분자에서는 나머지 각 항이 두 번씩 나타나므로 $Q=2$이다.

NoteBase

문 5. 검은 상자에 1부터 20까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 20개의 공이 들어 있다. 이 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내 공에 적힌 수를 확인하고 공을 다시 상자에 넣는 시행을 한다. 이 시행을 2번 했을 때, 20이 적힌 공이 나올 확률은?

① $\frac{11}{100}$
② $\frac{3}{20}$
③ $\frac{19}{100}$
④ $\frac{23}{100}$

정답 3번

출제 포인트

한 시행에서 20이 나오지 않을 확률을 구한 뒤, 두 시행 모두 20이 나오지 않는 여사건을 이용하는 문제이다.

조건 정리

한 시행에서는 20개의 공 중 2개를 동시에 꺼낸다. 한 시행이 끝나면 두 공을 다시 넣으므로 두 시행은 같은 조건에서 독립적으로 반복된다. 구해야 할 사건은 두 시행을 통틀어 20이 적힌 공이 한 번 이상 나오는 사건이다.

사용할 공식

구하려는 확률은 여사건을 이용하여
P(20이 한 번 이상 나옴)=1-P(두 시행 모두 20이 나오지 않음)
으로 계산한다. '한 번 이상'을 직접 경우별로 나누는 것보다 반대 사건인 '한 번도 나오지 않음'을 계산하는 것이 간단하기 때문이다.

계산 과정

한 시행에서 20이 나오지 않으려면 20을 제외한 19개의 공 중 2개를 뽑아야 한다. 따라서
P(한 시행에서 20이 나오지 않음)=192202=(9)/(10)
이다. 시행마다 공을 다시 넣으므로 두 시행 모두 20이 나오지 않을 확률은
$\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$
이다. 그러므로 구하는 확률은
$1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 제시값 $\frac{11}{100}$은 여사건 계산 결과와 다르다. 틀린 값이며, 올바른 확률은 $\frac{19}{100}$이다.
② X — 제시값 $\frac{3}{20}$은 $\frac{15}{100}$이므로 계산 결과와 다르다. 틀린 값이며, 올바른 확률은 $\frac{19}{100}$이다.
③ O — 두 시행에서 20이 한 번 이상 나올 확률을 계산하면 $\frac{19}{100}$이므로 옳다.
④ X — 제시값 $\frac{23}{100}$은 계산 결과와 다르다. 틀린 값이며, 올바른 확률은 $\frac{19}{100}$이다.

오답 포인트

한 시행에서 20이 나올 확률 $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$에 시행 횟수 2를 단순히 곱하면, 두 시행에서 모두 20이 나오는 경우가 중복되어 $\frac{1}{5}$이 된다. '한 번 이상'은 여사건을 이용하여 $1-(\frac{9}{10})^2$로 계산해야 한다. 또한 한 시행에서 두 공은 동시에 꺼내므로 같은 공을 중복해 뽑지 않지만, 시행이 끝나면 공을 다시 넣으므로 두 시행의 조건은 동일하다.

다시 나오면 이렇게 판단

'적어도 한 번' 또는 '한 번 이상'의 확률은 먼저 한 번도 일어나지 않을 확률을 구한 뒤 1에서 빼는 방식으로 판단한다. 매 시행 뒤 복원 여부를 확인하여 시행 간 확률을 곱할 수 있는지도 함께 확인한다.

암기 포인트

독립인 n번의 시행에서 사건이 한 번 이상 일어날 확률은 $1-(1-p)^n$이다.

NoteBase

문 6. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A^C \cup B^C=\{1,2,3,4\}$, $A^C \cap B^C=\{3,4\}$일 때, 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은?

① 3

② 5

③ 7

④ 9

정답 1번

출제 포인트

여집합의 합집합과 교집합을 이용하여 두 집합의 대칭차집합을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $A^C \cup B^C=\{1,2,3,4\}$, $A^C \cap B^C=\{3,4\}$이다. 구해야 할 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 A와 B 중 정확히 한 집합에만 속하는 원소들의 집합이다.

사용할 공식

두 집합의 대칭차집합은 $X \triangle Y=(X\cup Y)-(X\cap Y)$이다. 또한 두 집합을 모두 여집합으로 바꾸어도 각 원소가 두 집합 중 정확히 하나에만 속하는지는 변하지 않으므로 $A \triangle B=A^C \triangle B^C$이다.

계산 과정

$(A-B)\cup(B-A)=A \triangle B=A^C \triangle B^C$

$=(A^C \cup B^C)-(A^C \cap B^C)$

$=\{1,2,3,4\}-\{3,4\}=\{1,2\}$

따라서 모든 원소의 합은 $1+2=3$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 3이므로 옳다.

② X — 5가 아니라 3이다. 합집합에서 공통 원소 3, 4를 제외하면 남는 원소는 1, 2이다.

③ X — 7이 아니라 3이다. 교집합 $\{3,4\}$의 원소를 더하는 것이 아니라 대칭차집합 $\{1,2\}$의 원소를 더해야 한다.

④ X — 9가 아니라 3이다. 합집합의 원소 일부를 임의로 더하는 것이 아니라 합집합에서 교집합을 뺀 뒤 남은 원소 1, 2를 더해야 한다.

NoteBase

오답 포인트

$(A - B) \cup (B - A)$를 단순한 합집합이나 교집합으로 착각하기 쉽다. 이 집합은 두 집합의 공통 원소를 제외하고 정확히 한쪽에만 속하는 원소를 모은 대칭차집합이다.

다시 나오면 이렇게 판단

$(A - B) \cup (B - A)$가 보이면 대칭차집합으로 바꾸고, $(X \cup Y) - (X \cap Y)$를 계산한 다음 남은 원소만 더한다.

암기 포인트

대칭차집합은 합집합에서 교집합을 뺀 집합이며, 두 집합을 모두 여집합으로 바꾸어도 대칭차집합은 같다.

NoteBase

문 7. 다항식 $(x^2+2x)(x^2+2x-2)-3$을 인수분해하면 $(x+a)^2(x-1)(x+b)$일 때, ab의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 반복되는 식을 하나의 문자로 치환한 뒤 합성된 이차식을 인수분해하여 a, b, ab를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $(x^2+2x)(x^2+2x-2)-3$이다. 반복되는 x^2+2x를 t로 두고, 최종 형태 $(x+a)^2(x-1)(x+b)$와 비교하여 a와 b를 찾는다.

사용할 공식

$t^2-2t-3=(t-3)(t+1)$

반복되는 식을 $t=x^2+2x$로 치환하면 전체 식이 t에 관한 이차식이 되므로 이 인수분해를 사용할 수 있다.

계산 과정

$t=x^2+2x$로 두면

$t(t-2)-3=t^2-2t-3=(t-3)(t+1)$

이다. 다시 x에 관한 식으로 바꾸면

$t-3=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$t+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$

이므로

$(x^2+2x)(x^2+2x-2)-3=(x+1)^2(x-1)(x+3)$

이다. 따라서 $a=1$, $b=3$이고, $ab=1\times 3=3$이다.

선지 판단

① X — ab는 -3이 아니라 3이다. $x+3$을 $b=-3$으로 잘못 읽으면 나오는 값이며, $x+b=x+3$이므로 $b=3$이다.

② X — ab는 -1이 아니라 3이다. $(x+1)^2$에서 $a=1$이고 $x+3$에서 $b=3$이므로 곱은 음수가 될 수 없다.

③ X — ab는 1이 아니라 3이다. $a=1$만 확인하고 $b=3$을 곱하지 않으면 나오는 값이다.

④ O — $a=1$, $b=3$이므로 $ab=3$이다.

NoteBase

오답 포인트

$x+b=x+3$에서 상수항의 부호를 반대로 읽어 $b=-3$으로 판단하기 쉽다. 또한 $(x+1)^2$만 보고 $a=1$을 곧바로 답으로 고르면 3번을 선택하게 된다. 두 인수를 모두 표준형과 비교한 뒤 a와 b를 곱해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

반복되는 다항식을 하나의 문자로 치환하고, 치환식의 인수분해를 끝낸 뒤 원래 문자로 되돌린다. 마지막에는 문제에 제시된 인수의 형태와 계수를 직접 비교하여 미지수를 정하고 요구한 값을 계산한다.

암기 포인트

반복식은 치환하고, $x+b$의 부호는 그대로 비교한다. $x+3$이면 $b=3$이다.

NoteBase

문 8. $a^x = 5$를 만족시키는 실수 x가 $x = \frac{1}{\log_{25} 3}$일 때, a의 값은? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

① $\sqrt{2}$
② $\sqrt{3}$
③ 2
④ $\sqrt{5}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 로그의 역수 관계와 밑변환 공식을 이용하여 지수방정식의 밑 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: $a^x = 5$
지수: $x = \frac{1}{\log_{25} 3}$
구해야 할 값: a
주의할 조건: $a > 0$, $a \neq 1$이므로 로그와 지수의 성질을 적용할 수 있다.

사용할 공식

로그의 역수 관계는 $\frac{1}{\log_b c} = \log_c b$이고, 지수방정식 $a^x = 5$에서는 $a = 5^{1/x}$이다. 주어진 지수의 역수 $1/x$를 바로 구할 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

먼저 $x = \frac{1}{\log_{25} 3}$이므로 $\frac{1}{x} = \log_{25} 3$이다.
따라서
$a = 5^{1/x} = 5^{\log_{25} 3}$.
여기서 $25 = 5^2$이므로
$\log_{25} 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 25} = \frac{1}{2}\log_5 3$.
그러므로
$a = 5^{(1/2)\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^{1/2} = \sqrt{3}$.
검산하면 $x = \log_3 25$이고, $(\sqrt{3})^{\log_3 25} = 3^{(1/2)\log_3 25} = \sqrt{25} = 5$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 $\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{2}$는 성립하지 않는다. 틀린 값 $\sqrt{2}$는 $\sqrt{3}$으로 고쳐야 한다.
② O — $a=\sqrt{3}$을 대입하면 $a^x=5$가 되어 주어진 식을 만족한다.
③ X — 계산 결과는 $\sqrt{3}$이므로 2는 성립하지 않는다. 틀린 값 2는 $\sqrt{3}$으로 고쳐야 한다.
④ X — 계산 결과는 $\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{5}$는 성립하지 않는다. 틀린 값 $\sqrt{5}$는 $\sqrt{3}$으로 고쳐야 한다.

오답 포인트

주어진 x 자체를 a의 지수로 다시 사용하면서 $a=5^{1/x}$의 역수를 빠뜨리기 쉽다. 또한 $25=5^2$이므로 $\log_{25}3=\frac{1}{2}\log_5 3$인데, 이 계수 $\frac{1}{2}$를 놓치면 제곱근이 사라진다.

다시 나오면 이렇게 판단

지수방정식 $a^x=c$에서 밑을 구할 때는 먼저 $a=c^{1/x}$로 바꾸고, 로그의 역수 관계와 밑변환 공식으로 $1/x$를 정리한 뒤 대입하여 검산한다.

암기 포인트

$\frac{1}{\log_b c}=\log_c b$, $\log_{p^k} q=\frac{1}{k}\log_p q$이다.

NoteBase

문 9. 함수 $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-2$이고, $f(2)=3$이다. 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

① 14

② 16

③ 18

④ 20

정답 1번

출제 포인트

유리함수의 수직점근선과 수평점근선으로 계수를 정한 뒤, 주어진 함수값을 이용해 나머지 계수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 수직점근선은 $x=1$, 수평점근선은 $y=-2$, $f(2)=3$이다.
구해야 할 값: abc이다.
주의할 조건: 분모가 0이 되는 수직점근선은 $x=-c$이고, 분자와 분모의 차수가 같을 때 수평점근선은 최고차항 계수의 비인 $y=a$이다.

사용할 공식

$x=-c, \qquad y=a$
이 공식을 쓰는 이유: $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$에서 분모 $x+c$가 0이 되는 곳이 수직점근선이고, x의 계수끼리의 비 $a/1$이 수평점근선의 값이기 때문이다.

계산 과정

1. $x=-c=1$이므로 $c=-1$이다.
2. $y=a=-2$이므로 $a=-2$이다.
3. $f(2)=3$에 대입하면 $\frac{-2\cdot 2+b}{2-1}=3$이므로 $-4+b=3$, 따라서 $b=7$이다.
4. $abc=(-2)\cdot 7\cdot(-1)=14$이다.

선지 판단

① O — 계산한 abc의 값이 14이므로 옳다.
② X — 16은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $abc=14$이다.
③ X — 18은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $abc=14$이다.
④ X — 20은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $abc=14$이다.

NoteBase

오답 포인트

수직점근선 $x = 1$을 보고 $c = 1$로 정하면 부호를 잘못 처리하게 된다. 분모가 $x + c$이므로 $x + c = 0$, 즉 수직점근선은 $x = -c$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

일차식끼리의 유리함수에서는 먼저 수직점근선으로 분모의 상수를, 수평점근선으로 최고차항 계수를 정한 뒤 주어진 함수값을 대입해 남은 계수를 구한다. 마지막에는 각 계수의 부호를 다시 확인한다.

암기 포인트

$\frac{ax+b}{x+c}$의 점근선은 $x = -c$, $y = a$이다.

NoteBase

문 10. 서로 구별되지 않는 12개의 노트를 A, B, C 세 명에게 모두 나누어 주려고 한다. A에게는 적어도 1개, B에게는 적어도 3개, C에게는 적어도 2개의 노트를 나누어 주는 방법의 수는?

① 21

② 28

③ 35

④ 42

정답 2번

출제 포인트

최소 배분 조건이 있는 중복조합 문제에서 각 사람에게 최소 개수를 먼저 나누어 준 뒤, 남은 노트의 배분 방법 수를 구하는 문제이다.

조건 정리

A, B, C가 받는 노트의 수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=12$이다.
최소 조건은 $a \geq 1, b \geq 3, c \geq 2$이다.
노트는 서로 구별되지 않지만 받는 사람 A, B, C는 구별된다.

사용할 공식

서로 구별되지 않는 n개를 서로 구별되는 r명에게 0개 이상 나누는 방법의 수는 중복조합
${}_rH_n = \binom{n+r-1}{r-1}$
이다. 최소 개수를 먼저 배분하면 남은 노트는 각 사람에게 0개 이상 배분할 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

최소 조건만큼 A에게 1개, B에게 3개, C에게 2개를 먼저 주면 총 6개를 사용한다. 남은 노트는 $12-6=6$개이다.
$x=a-1, y=b-3, z=c-2$로 놓으면 $x, y, z \geq 0$이고
$x+y+z=6$
이다. 따라서 음이 아닌 정수해의 수는
${}_3H_6 = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 21은 계산 결과 28과 일치하지 않는다. 남은 노트를 5개로 잘못 계산하면 $\binom{7}{2} = 21$이 나오지만, 최소 배분량은 $1 + 3 + 2 = 6$개이므로 남은 수는 6개이다. 올바른 값은 28이다.
② O — 최소 배분 후 남은 6개를 세 명에게 0개 이상 나누는 방법은 $\binom{8}{2} = 28$가지이다.
③ X — 35는 계산 결과 28과 일치하지 않는다. 세 사람에게 나누는 별과 막대 모형에서는 경계가 2개이므로 $\binom{8}{2}$를 계산해야 한다. 올바른 값은 28이다.
④ X — 42는 계산 결과 28과 일치하지 않는다. 최소 조건을 제거한 뒤의 방정식 $x + y + z = 6$의 음이 아닌 정수해는 $\binom{8}{2}$개이므로 올바른 값은 28이다.

오답 포인트

핵심 함정은 최소 조건을 합산할 때 $1 + 3 + 2 = 6$을 정확히 빼는 것과, 세 명을 구분하는 데 필요한 경계가 2개라는 점이다. 남은 노트 수나 경계 수를 하나 잘못 잡으면 ① 또는 ③과 같은 오답을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

최소 배분 조건이 있으면 각 변수에서 최소값을 빼서 음이 아닌 새 변수로 바꾼다. 그 뒤 남은 총량이 n, 받는 사람이 r명이면 $\binom{n+r-1}{r-1}$을 적용한다.

암기 포인트

최소량은 먼저 배분하고, 남은 수에 별과 막대를 적용한다. 세 명에게 나누면 막대는 2개이다.

NoteBase

문 11. 이항분포 $B(20, p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 확률변수 $2X+3$의 평균이 13일 때, p의 값은?

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 이항분포의 평균과 확률변수의 일차변환에 대한 평균을 이용하여 성공확률 p를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $X \sim B(20, p)$, $E(2X+3) = 13$이다.
구해야 할 값: 성공확률 p이다.
주의할 조건: 상수 3은 평균을 구할 때 그대로 더해진다.

사용할 공식

이항분포 $X \sim B(n, p)$의 평균은 $E(X) = np$이다. 또한 평균의 선형성에 따라 $E(aX+b) = aE(X) + b$이다.
이 문제에서는 $n = 20$이고 $2X+3$의 평균이 주어졌으므로 두 공식을 함께 사용한다.

계산 과정

1. $E(X) = 20p$이다.
2. $E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 40p + 3$이다.
3. $40p + 3 = 13$이므로 $40p = 10$이고, $p = \frac{1}{4}$이다.

선지 판단

① X — $\frac{1}{2}$를 대입하면 $E(2X+3) = 40 \times \frac{1}{2} + 3 = 23$이므로 13이 아니다. 틀린 표현 $p = \frac{1}{2}$ → 올바르게는 $p = \frac{1}{4}$이다.
② X — $\frac{1}{3}$을 대입하면 $E(2X+3) = 40 \times \frac{1}{3} + 3 = \frac{49}{3}$이므로 13이 아니다. 틀린 표현 $p = \frac{1}{3}$ → 올바르게는 $p = \frac{1}{4}$이다.
③ O — 계산 결과 $p = \frac{1}{4}$이고, 이를 대입하면 $40 \times \frac{1}{4} + 3 = 13$이 되어 조건을 만족한다.
④ X — $\frac{1}{5}$를 대입하면 $E(2X+3) = 40 \times \frac{1}{5} + 3 = 11$이므로 13이 아니다. 틀린 표현 $p = \frac{1}{5}$ → 올바르게는 $p = \frac{1}{4}$이다.

NoteBase

오답 포인트

$E(2X+3)$을 $2E(X)$로만 계산하여 상수 3을 빠뜨리거나, $E(X)=20p$에서 시행 횟수 20을 빠뜨리면 오답이 된다. 이 문항에서는 $2E(X)+3=13$을 먼저 세우는 것이 핵심이다.

다시 나오면 이렇게 판단

이항분포의 평균을 $E(X)=np$로 구한 뒤, 일차변환의 평균 $E(aX+b)=aE(X)+b$에 대입하고 방정식을 풀어 판단한다.

암기 포인트

이항분포 평균은 np, 일차변환의 평균은 $aE(X)+b$이다.

NoteBase

문 12. 두 함수 $f(x)=x^4+x^3+x^2+k$, $g(x)=x^3-x^2+3$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

출제 포인트

두 함수의 교점 조건을 정리하여 매개변수 k의 범위를 구하고, 열린구간에서 가능한 정수의 개수를 판단하는 문제이다.

조건 정리

방정식 $f(x)=g(x)$에서 양변의 x^3을 소거하면 $x^4+2x^2+k-3=0$이다. 따라서 $k=3-2x^2-x^4$이고, x는 열린구간 $0<x<1$에 있어야 한다.

사용할 공식

$t=x^2$로 놓으면 $0<t<1$이고 $k=3-2t-t^2$이다. $2t+t^2$는 $0<t<1$에서 연속이고 순증가하므로 그 값의 범위는 $0<2t+t^2<3$이다. 이 치환을 사용하면 교점의 존재 조건을 k의 범위로 바로 바꿀 수 있다.

계산 과정

$0<2t+t^2<3$에서 각 변을 3에서 빼면 $0<3-2t-t^2<3$이므로 $0<k<3$이다. 이 범위의 정수는 $k=1, 2$이며, 그 개수는 2개이다.

선지 판단

① X — 가능한 정수는 $k=1, 2$의 두 개이므로 개수가 1이라는 값은 틀리다. 올바른 개수는 2이다.
② O — $0<k<3$을 만족하는 정수가 1과 2이므로 개수는 2이다.
③ X — 개수가 3이 되려면 경계값 $k=3$까지 포함해야 하지만, $k=3$은 $x=0$일 때만 가능하고 $x=0$은 구간 $(0,1)$에 포함되지 않는다. 올바른 개수는 2이다.
④ X — 개수가 4가 되려면 두 경계값 $k=0, 3$까지 포함해야 하지만, 각각 $x=1, x=0$에 해당하여 모두 열린구간에서 제외된다. 올바른 개수는 2이다.

NoteBase

오답 포인트

구간 $(0, 1)$의 양 끝점을 포함한다고 착각하면 $k = 0$ 또는 $k = 3$을 잘못 세게 된다. 열린구간이므로 끝점에서만 얻어지는 값은 범위에 포함되지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

매개변수를 한쪽에 고립시킨 뒤 주어진 구간에서 그 식의 값의 범위를 구한다. 구간이 열린구간이면 끝점의 함수값은 극한값일 뿐 실제 범위에는 포함되지 않는지 확인한 다음, 범위 안의 정수만 센다.

암기 포인트

교점 존재 조건은 매개변수의 치역 조건으로 바꾸며, 열린구간의 끝점 값은 제외한다.

NoteBase

문 13. 연립방정식 casesx+y+z=5\-y+z=-1\-3y+kz=-3cases의 해가 존재하지 않을 때, 상수 k의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

출제 포인트

연립방정식의 일부 식을 먼저 소거한 뒤, 남은 식의 좌변은 0인데 우변은 0이 아닌 모순이 생기는 조건을 찾는 문제이다.

조건 정리

첫째 식과 둘째 식의 차를 이용해 y를 구하고, 그 값을 첫째 식과 셋째 식에 대입한다. 구해야 할 값은 세 식을 동시에 만족하는 해가 존재하지 않게 하는 k이다.

사용할 원리

연립방정식을 정리했을 때 $0 = c$인 꼴에서 $c \neq 0$이면 모순이므로 해가 존재하지 않는다. 이 원리는 같은 미지수 조합을 나타내는 두 식의 좌변 계수가 같지만 상수항이 다를 때 적용된다.

계산 과정

첫째 식에서 둘째 식을 빼면

$2y = 6$

이므로 $y = 3$이다. 이를 첫째 식에 대입하면 $x + z = 2$, 즉 $x = 2 - z$이다. 셋째 식에는 $y = 3$을 대입하여 $x + kz = 6$을 얻는다. 여기에 $x = 2 - z$를 대입하면

$2 - z + kz = 6$

$(k - 1)z = 4$

이다. 해가 존재하지 않으려면 좌변이 0이면서 우변은 4로 남아야 하므로 $k - 1 = 0$, 즉 $k = 1$이다.

선지 판단

① O — $k = 1$이면 $(k - 1)z = 4$가 $0 = 4$가 되어 모순이므로 해가 존재하지 않는다.

② X — $k = 2$이면 $z = 4, x = -2, y = 3$인 해가 존재한다. 틀린 값 2가 아니라 올바르게는 $k = 1$이다.

③ X — $k = 3$이면 $z = 2, x = 0, y = 3$인 해가 존재한다. 틀린 값 3이 아니라 올바르게는 $k = 1$이다.

④ X — $k = 4$이면 $z = \frac{4}{3}, x = \frac{2}{3}, y = 3$인 해가 존재한다. 틀린 값 4가 아니라 올바르게는 $k = 1$이다.

NoteBase

오답 포인트

$(k-1)z=4$에서 $k=1$이면 z를 구할 수 없는 데 그치지 않고 $0=4$라는 모순이 된다. $k-1$을 0이 아닌 값으로 두면 오히려 z가 하나로 정해져 해가 존재한다.

다시 나오면 이렇게 판단

해가 존재하지 않는 조건은 식을 소거하여 $az=b$ 꼴로 만든 뒤, $a=0$이고 $b\neq 0$인지를 확인한다.

암기 포인트

$0=0$이면 해가 여러 개일 수 있고, $0\neq 0$ 꼴이면 해가 없다.

NoteBase

문 14. 등식 $x^3+x^2+x+2=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

출제 포인트

항등식은 모든 x에 대하여 성립하므로, 계수의 합이 바로 드러나는 값을 대입하여 $a+b+c+d$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 x에 대한 항등식이다. 구해야 할 값은 우변의 계수의 합 $a+b+c+d$이다. $x=0$이면 $x+1=1$이 되어 우변이 곧 $a+b+c+d$가 된다.

사용할 원리

항등식은 허용되는 모든 x에서 성립한다. 따라서 $x=0$을 대입하면

$$a(0+1)^3+b(0+1)^2+c(0+1)+d=a+b+c+d$$

가 되어 구하려는 값을 한 번에 얻을 수 있다.

NoteBase

계산 과정

$x = 0$을 원래 항등식에 대입한다.

좌변은
$0^3 + 0^2 + 0 + 2 = 2$
이고, 우변은
$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d$
이다.

따라서
$a + b + c + d = 2$
이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 2이므로 '1'은 틀린 값이다. 올바르게는 $a + b + c + d = 2$이다.
② O — 항등식에 $x = 0$을 대입하면 $a + b + c + d = 2$가 된다.
③ X — 계산 결과는 2이므로 '3'은 틀린 값이다. 올바르게는 $a + b + c + d = 2$이다.
④ X — 계산 결과는 2이므로 '4'는 틀린 값이다. 올바르게는 $a + b + c + d = 2$이다.

오답 포인트

좌변의 계수만 기계적으로 더하거나 우변을 전개할 필요는 없다. 이 문항의 핵심은 우변의 각 거듭제곱 밑인 $x + 1$을 1로 만드는 $x = 0$을 선택하는 것이다.

다시 나오면 이렇게 판단

항등식에서 계수의 합을 묻는 경우, 해당 다항식의 거듭제곱 밑을 1로 만드는 값을 먼저 대입한다. 이 식에서는 $x + 1 = 1$이 되도록 $x = 0$을 대입한다.

암기 포인트

다항식의 계수의 합은 그 다항식의 변수 자리에 1을 넣은 값이다. $x + 1$에 관한 계수의 합은 $x + 1 = 1$, 즉 $x = 0$을 대입해 구한다.

NoteBase

문 15. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{20}$**의 값은? (단** $i=\sqrt{-1}$**)**

① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 2번

출제 포인트

복소수를 삼각형식으로 나타낸 뒤 드무아브르의 정리를 이용하여 거듭제곱의 합을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 복소수를 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$라 두면 $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$이다. 구해야 할 값은 $z^{10}+z^{20}$이다. 두 거듭제곱의 편각을 정리할 때 2π의 정수배를 빼도 같은 복소수라는 점에 주의한다.

사용할 공식

드무아브르의 정리에 따라
$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$
이다. 주어진 복소수의 절댓값이 1이고 삼각형식으로 바로 표현되므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

z^10=(10π)/(3)+i(10π)/(3)=(4π)/(3)+i(4π)/(3)=-12-(3)/(2)i
z^20=(20π)/(3)+i(20π)/(3)=(2π)/(3)+i(2π)/(3)=-12+(3)/(2)i
따라서 허수부는 서로 소거되고,
z^10+z^20=≤ft(-12-(3)/(2)i)+≤ft(-12+(3)/(2)i)=-1
이다.

선지 판단

① X: 계산 결과는 -2가 아니라 -1이다. 각 항의 실수부는 -1이 아니라 -12이므로 두 실수부의 합은 -1이다.
② O: 두 항의 허수부가 소거되고 실수부의 합이 -1이므로 맞다.
③ X: 계산 결과는 1이 아니라 -1이다. 허수부가 소거되더라도 실수부 -12 두 개의 부호는 음수로 유지된다.
④ X: 계산 결과는 2가 아니라 -1이다. 각 거듭제곱을 1로 처리할 수 없으며, 편각을 각각 $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$으로 환원해야 한다.

NoteBase

오답 포인트

편각 $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{20\pi}{3}$을 2π의 정수배만큼 정확히 줄이지 않거나, 허수부가 소거된다는 사실만 보고 실수부의 음수 부호를 놓치면 1 또는 2를 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

절댓값이 1인 복소수의 거듭제곱은 먼저 삼각형식으로 바꾸고, 드무아브르의 정리를 적용한 뒤 편각을 2π 단위로 환원하여 실수부와 허수부를 각각 합한다.

암기 포인트

(1+3 i)/(2)=(π)/(3)+i(π)/(3)이며, 거듭제곱에서는 편각에 지수를 곱한다.

NoteBase

문 16. 이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha^2)(k-\beta^2)$의 값은?

① 55

② 60

③ 65

④ 70

정답 3번

출제 포인트

근과 계수의 관계로 두 근의 대칭식 $\alpha^2+\beta^2$와 $\alpha^2\beta^2$를 구한 뒤 합을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $x^2+2x-1=0$의 두 근은 α, β이다.
구해야 할 값: $\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha^2)(k-\beta^2)$이다.
주의할 조건: 상수항 $+1$도 $k=1$부터 10까지 모두 더하므로 총 10이 된다.

사용할 공식

이차방정식의 근과 계수의 관계에 따라 $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=-1$이다. 따라서
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+2=6, \qquad \alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=1.$
각 항은 두 근을 직접 구하지 않고 대칭식으로 전개할 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

각 항을 전개하면
$(k-\alpha^2)(k-\beta^2)=k^2-k(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2=k^2-6k+1.$
그러므로
$\sum_{k=1}^{10}(k^2-6k+1)=\sum_{k=1}^{10}k^2-6\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1.$
여기서 $\sum_{k=1}^{10}k^2=385, \sum_{k=1}^{10}k=55, \sum_{k=1}^{10}1=10$이므로
$385-6\times55+10=385-330+10=65.$

선지 판단

① X — 55는 전개식의 상수항 $+1$을 열 번 더하는 10을 누락하면 나오는 값이다. 합은 55가 아니라 65이다.
② X — 계산식 $385-330+10$의 값은 60이 아니라 65이다.
③ O — 계산 결과가 65이므로 옳다.
④ X — 계산식 $385-330+10$의 값은 70이 아니라 65이다.

NoteBase

오답 포인트

근 α, β를 직접 구하려 하거나, 전개 후 상수항 $\alpha^2\beta^2 = 1$을 한 번만 반영하는 실수가 핵심 함정이다. 상수항 1도 합의 각 항에 있으므로 총 10을 더해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 근이 들어간 대칭식은 먼저 근과 계수의 관계로 바꾸고, 일반항을 전개한 다음 $\sum k^2$, $\sum k$, 상수항의 개수를 각각 계산한다.

암기 포인트

두 근 α, β에 대해 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$, $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$이다.

NoteBase

문 17. 이차함수 $f(x)=x^2+6x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, $f(x)$의 최솟값은?

① -8

② -12

③ -16

④ -20

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 이차함수의 두 근 사이의 거리와 판별식의 관계를 이용해 상수 k와 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 이차방정식 $x^2+6x+k=0$의 서로 다른 두 실근 사이의 거리는 8이다.
구해야 할 값: 이차함수 $f(x)=x^2+6x+k$의 최솟값이다.
주의할 조건: 최고차항의 계수가 양수이므로 꼭짓점에서 최솟값을 갖는다.

사용할 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$
이다. 이 문제에서는 두 x절편의 가로 좌표가 두 근이므로, 두 점 사이의 거리 8을 두 근의 차에 바로 적용할 수 있다.

계산 과정

$a=1, b=6, c=k$이므로
$8=\sqrt{36-4k}$
이다. 양변을 제곱하면
$64=36-4k, \qquad k=-7$
이다. 완전제곱식을 만들면
$f(x)=x^2+6x-7=(x+3)^2-16$
이므로 $x=-3$일 때 최솟값은 -16이다.

NoteBase

선지 판단

① X — -8은 계산된 최솟값 -16과 다르다. 올바르게는 최솟값이 -16이다.
② X — -12는 계산된 최솟값 -16과 다르다. 올바르게는 최솟값이 -16이다.
③ O — $f(x)=(x+3)^2-16$이므로 최솟값은 -16이다.
④ X — -20은 계산된 최솟값 -16과 다르다. 올바르게는 최솟값이 -16이다.

오답 포인트

두 근 사이의 거리 8을 판별식 자체와 같다고 두면 안 된다. 두 근의 거리는 $\sqrt{D}/|a|$이며, 이 문제에서는 $a=1$이므로 $\sqrt{D}=8$, 즉 $D=64$이다. 또한 구한 $k=-7$은 최솟값이 아니라 함수식에 대입해야 하는 상수이다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 x절편 사이의 거리가 주어지면 이를 두 근의 차로 바꾸어 판별식으로 상수를 구한 뒤, 완전제곱식이나 꼭짓점 공식으로 최솟값을 계산한다.

암기 포인트

두 근의 거리: $|\alpha-\beta|=\sqrt{D}/|a|$, 이차함수의 최솟값: 꼭짓점의 y좌표이다.

NoteBase

문 18. x, y가 실수일 때, <보기>에서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 모두 몇 개인가?

<보기>
㉠ $p : \frac{1}{xy} < 1$ $q : xy > 1$
㉡ $p : x^2 + y^2 > 0$ $q : x + y > 0$
㉢ $p : \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ $q : x + y = xy$
㉣ $p : |x| > y$ $q : y < 0$

① 1개
② 2개
③ 3개
④ 4개

정답 3번

출제 포인트

조건 p가 조건 q의 필요조건이라는 것은 $q \Rightarrow p$가 성립한다는 뜻이고, 충분조건이 아니라는 것은 $p \Rightarrow q$가 성립하지 않는다는 뜻이다.

조건 정리

찾아야 하는 관계는 $q \Rightarrow p$는 참이지만 $p \Rightarrow q$는 거짓인 경우이다. 뒤의 명제가 거짓임을 보일 때에는 p는 참이고 q는 거짓인 반례 하나를 찾으면 된다.

판정 과정

㉠ $q : xy > 1$이면 $0 < \frac{1}{xy} < 1$이므로 p가 성립한다. 반면 $(x, y) = (1, -1)$이면 $\frac{1}{xy} = -1 < 1$이지만 $xy = -1$이므로 q는 성립하지 않는다. 따라서 p는 q의 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
㉡ $q : x + y > 0$이면 x, y가 동시에 0일 수 없으므로 $x^2 + y^2 > 0$이다. 반면 $(x, y) = (1, -1)$이면 $x^2 + y^2 = 2 > 0$이지만 $x + y = 0$이다. 따라서 조건에 해당한다.
㉢ p가 성립하면 $x, y \neq 0$이고, 양변에 xy를 곱하여 $x + y = xy$를 얻으므로 $p \Rightarrow q$이다. 그러나 $(x, y) = (0, 0)$에서는 q가 참이지만 p의 분수식은 정의되지 않는다. 따라서 p는 충분조건이지만 필요조건은 아니므로 해당하지 않는다.
㉣ $q : y < 0$이면 $|x| \geq 0 > y$이므로 p가 성립한다. 반면 $(x, y) = (2, 1)$이면 $|x| = 2 > 1$이지만 $y < 0$은 거짓이다. 따라서 조건에 해당한다.
해당하는 것은 ㉠, ㉡, ㉣의 3개이다.

NoteBase

선지별 해설

① X — 해당하는 것은 1개가 아니라 ㉠, ㉡, ㉣의 3개이다. 올바르게는 '3개'이다.
② X — 해당하는 것은 2개가 아니라 3개이다. 올바르게는 '3개'이다.
③ O — ㉠, ㉡, ㉣의 3개가 모두 '필요조건이지만 충분조건이 아닌' 관계이다.
④ X — ㉢은 $p \Rightarrow q$만 성립하여 반대 관계에 해당하므로, 4개가 아니라 3개이다. 올바르게는 '3개'이다.

오답 포인트

'p가 q의 필요조건'에서 함의 방향을 $p \Rightarrow q$로 뒤집기 쉽다. 또한 ㉢에서는 분수식의 정의역 $x, y \neq 0$을 놓치면 두 조건을 동치로 잘못 판단하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 'p가 q의 필요조건'을 $q \Rightarrow p$로 바꿔 확인한다. 그다음 $p \Rightarrow q$를 깨뜨리는 반례를 찾고, 분수나 제곱근이 있으면 정의역까지 함께 확인한다.

암기 포인트

필요조건은 화살표가 들어오는 조건이다. 'p가 q의 필요조건'은 $q \Rightarrow p$이다.

NoteBase

문 19. 자연수 k에 대하여 $S(k)=\sqrt{2k+1-2\sqrt{k^2+k}}$라 하자. 이때, $\sum_{k=1}^{2020} S(k)$의 값보다 작은 소수(prime number)의 개수는? (단, 소수는 1과 자기 자신만으로 나누어떨어지는 1보다 큰 자연수이다.)

① 11

② 12

③ 13

④ 14

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 근호 안을 완전제곱식으로 바꾼 뒤 망원합을 이용하고, 그 합보다 작은 소수의 개수를 세는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $S(k)=\sqrt{2k+1-2\sqrt{k^2+k}}$이고, 구해야 할 것은 $\sum_{k=1}^{2020} S(k)$보다 작은 소수의 개수이다. 자연수 k에 대하여 $\sqrt{k+1}>\sqrt{k}$이므로 제곱근을 벗길 때 부호가 양수라는 점에 주의한다.

사용할 공식

$(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2=2k+1-2\sqrt{k^2+k}$
따라서 $S(k)=\sqrt{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$이다. 연속된 항에서 중간 항들이 소거되는 망원합 형태이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 합을 전개하면
Σ_k=1^2020S(k)=(2-1)+(3-2)+·s +(√(2021)-√(2020))이다.
2. 중간 항이 모두 소거되어
$\sum_{k=1}^{2020} S(k)=\sqrt{2021}-1$이다.
3. $44^2=1936<2021<2025=45^2$이므로
$43<\sqrt{2021}-1<44$이다.
4. 이 값보다 작은 소수는 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43의 14개이다.

선지 판단

① X — 11은 31까지의 소수만 센 개수이다. 37, 41, 43도 합보다 작으므로 올바른 개수는 14이다.

② X — 12는 37까지 센 개수로, 41과 43을 빠뜨린 값이다. 올바른 개수는 14이다.

③ X — 13은 41까지 센 개수로, 합보다 작은 소수 43을 빠뜨린 값이다. 올바른 개수는 14이다.

④ O — $43<\sqrt{2021}-1<44$이므로 43 이하의 소수 14개가 모두 포함된다.

NoteBase

오답 포인트

합을 직접 계산하려 하거나 $\sqrt{2021}-1$을 정수로 잘못 처리하기 쉽다. 특히 합이 43보다 크므로 소수 43도 반드시 포함해야 하며, 이를 빠뜨리면 ③의 13이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

중첩근에서 a+b-2√(ab)=(a- b)^2 꼴을 먼저 찾고, 연속된 근호의 차이면 망원합으로 소거한다. 마지막 값이 어느 두 정수 사이인지 제곱값으로 판정한 뒤 경계 소수까지 포함하여 센다.

암기 포인트

완전제곱식 변형 → 망원합 소거 → 정수 구간 확정 → 경계 소수 포함 여부 확인이다.

NoteBase

문 20. 어느 모집단의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $P(\overline{X} \geq \frac{1}{2})$의 값은?

X	0	1	계
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

① $\frac{1}{3}$
② $\frac{4}{9}$
③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{2}{3}$

정답 3번

출제 포인트

값이 0 또는 1인 모집단에서 크기 2의 표본평균에 관한 사건을 두 번의 독립추출 사건으로 바꾸어 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

한 번 추출할 때 $P(X=0)=\frac{2}{3}$, $P(X=1)=\frac{1}{3}$이다. 두 표본을 X_1, X_2라 하면 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이다. 구해야 할 값은 $P(\overline{X} \geq \frac{1}{2})$이다.

사용할 공식

$P(A)=1-P(A^c)$
표본평균이 $\frac{1}{2}$ 이상이려면 두 번의 추출 중 적어도 한 번은 1이 나와야 한다. 따라서 여사건인 '두 번 모두 0'의 확률을 1에서 뺀다.

계산 과정

X≥(1)/(2) X_1+X_2≥ 1
$P(\overline{X} \geq \frac{1}{2})=1-P(X_1=0, X_2=0)$
두 번의 임의추출은 독립이므로
$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{9}$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{1}{3}$은 한 번 추출할 때 1이 나올 확률만 사용한 값으로, 크기 2의 표본을 반영하지 않았다. $\frac{1}{3}$이 아니라 $\frac{5}{9}$이다.
② X — $\frac{4}{9}$은 두 번 모두 0이 나와 $\overline{X}=0$이 되는 여사건의 확률이다. 이를 1에서 뺀 $\frac{5}{9}$가 올바른 값이다.
③ O — 적어도 한 번 1이 나올 확률은 $1-(\frac{2}{3})^2=\frac{5}{9}$이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — $\frac{2}{3}$은 한 번 추출할 때 0이 나올 확률일 뿐이다. 표본 두 개의 결합사건을 계산하면 $\frac{2}{3}$이 아니라 $\frac{5}{9}$이다.

오답 포인트

표본평균이 $\frac{1}{2}$ 이상이라는 조건을 '한 번에 1이 나올 확률'로 착각하기 쉽다. 가능한 표본값 $(0,1),(1,0),(1,1)$을 모두 포함해야 하며, 가장 간단한 계산은 제외되는 $(0,0)$의 확률을 1에서 빼는 것이다.

다시 나오면 이렇게 판단

0과 1만 나오는 표본의 평균 조건은 먼저 1이 나온 횟수의 조건으로 바꾼다. '적어도 한 번'의 확률은 여사건인 '한 번도 나오지 않음'을 이용하여 계산한다.

암기 포인트

적어도 한 번 성공할 확률은 1-P(모두 실패)이다.

NoteBase