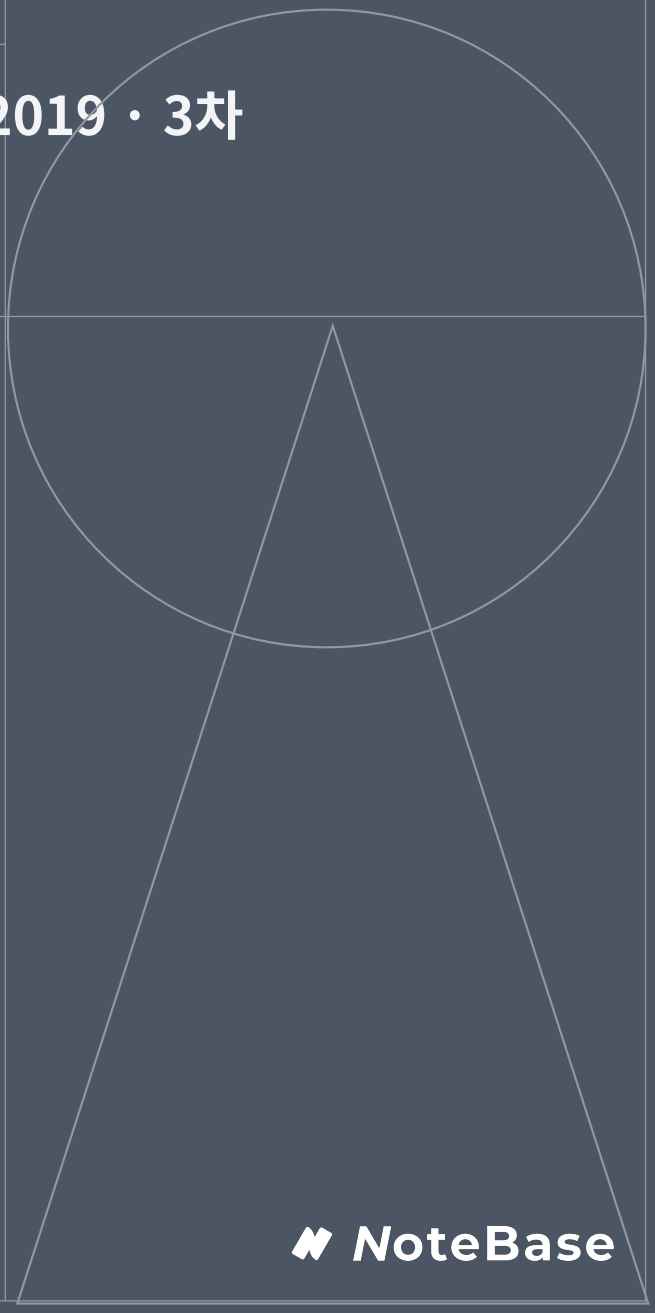
기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2019 · 3차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2019 · 3차

공무원/해경/순경 · 수학 · 2019 · 3차

문 1. $\lim_{x\to 4}\frac{3\sqrt{x}+n}{x-4}$**의 극한값이 존재하도록 하는 상수** n**의 값은?**

① 6

② 3

③ −6

④ −3

정답 3번

출제 포인트

분모가 0으로 가는 분수식의 유한한 극한값이 존재하려면 분자도 0으로 가야 한다는 조건을 이용해 상수 n을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: $\lim_{x\to 4}\frac{3\sqrt{x}+n}{x-4}$
구해야 할 값: 극한값이 존재하도록 하는 상수 n
주의할 조건: $x\to 4$일 때 분모 $x-4$는 0으로 가므로 분자 $3\sqrt{x}+n$도 0으로 가야 한다.

사용할 공식

필요조건은 $3\sqrt{4}+n=0$이다. 분모가 0으로 가는데 분자가 0이 아닌 값으로 가면 좌우에서 분수의 크기가 한없이 커지거나 부호가 달라져 유한한 극한값이 존재하지 않기 때문이다.

계산 과정

1. $x=4$에서 분자가 0이 되도록 놓으면 $3\sqrt{4}+n=0$이다.
2. $\sqrt{4}=2$이므로 $6+n=0$, 따라서 $n=-6$이다.
3. $n=-6$을 대입하여 유리화하면 $\frac{3\sqrt{x}-6}{x-4}=\frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{3}{\sqrt{x}+2}$이므로 극한값은 $\frac{3}{4}$로 실제로 존재한다.

NoteBase

선지 판단

① X — $n=6$이면 분자는 12로 가므로 유한한 극한값이 존재하지 않는다. 올바르게는 $n=-6$이다.
② X — $n=3$이면 분자는 9로 가므로 유한한 극한값이 존재하지 않는다. 올바르게는 $n=-6$이다.
③ O — $n=-6$이면 분자와 분모가 함께 0으로 가고, 유리화한 식의 극한값이 $\frac{3}{4}$이므로 조건을 만족한다.
④ X — $n=-3$이면 분자는 3으로 가므로 유한한 극한값이 존재하지 않는다. 올바르게는 $n=-6$이다.

오답 포인트

$3\sqrt{4}=6$을 구한 뒤 상수항을 상쇄하려면 반대 부호인 -6을 더해야 한다. ①의 6은 상쇄 조건에서 부호를 바꾸지 않은 값이고, ②와 ④는 $\sqrt{4}=2$ 또는 계수 3을 끝까지 반영하지 않은 값이다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0으로 가는 분수식의 유한한 극한을 묻는 경우에는 먼저 분자도 0이 되는 조건을 세우고, 구한 값을 대입하여 약분이나 유리화 뒤 실제 극한이 존재하는지 확인한다.

암기 포인트

분모가 0으로 갈 때 유한한 극한이 존재하려면 먼저 분자도 0으로 가야 한다.

NoteBase

문 2. 집합 A={1, 2, 3, 4, 5, 6}일 때, 집합 A의 부분집합 중 1, 2는 포함하고, 5, 6은 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

정답 2번

출제 포인트

반드시 포함하거나 제외할 원소를 먼저 고정한 뒤, 선택이 자유로운 원소의 수로 부분집합의 개수를 구하는 문제이다.

조건 정리

1, 2는 반드시 포함되고 5, 6은 반드시 제외된다. 따라서 포함 여부를 자유롭게 정할 수 있는 원소는 3과 4, 총 2개이다.

사용할 공식

선택이 자유로운 원소가 n개이면 가능한 부분집합의 수는 2^n개이다. 각 원소마다 포함과 제외의 두 가지 선택이 서로 독립적으로 가능하기 때문이다.

계산 과정

3의 포함 여부는 2가지이고, 4의 포함 여부도 2가지이다. 따라서 가능한 부분집합의 수는

$2 \times 2 = 2^2 = 4$

이다. 실제로 가능한 부분집합은 {1, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 3, 4}이다.

선지 판단

① X - 2개가 아니라 4개이다. 틀린 값 2는 자유로운 원소 두 개의 선택 수를 곱하지 않은 값이다. 올바르게는 $2^2 = 4$이다.

② O - 자유로운 원소가 3과 4의 2개이므로 부분집합의 수는 $2^2 = 4$이다.

③ X - 8개가 아니라 4개이다. 8은 자유로운 원소가 3개일 때의 값 2^3이다. 이 문제에서는 1과 2가 이미 포함으로 고정되어 자유로운 원소가 아니다.

④ X - 16개가 아니라 4개이다. 16은 자유로운 원소가 4개일 때의 값 2^4이다. 이 문제에서 자유로운 원소는 3과 4뿐이다.

NoteBase

오답 포인트

전체 원소 6개에 바로 2^6을 적용하면 안 된다. 반드시 포함되는 1, 2와 반드시 제외되는 5, 6은 선택지가 없으므로 경우의 수에 영향을 주지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

필수 포함 원소와 필수 제외 원소를 먼저 고정하고, 남은 자유 원소의 개수를 n이라 두어 2^n을 계산한다.

암기 포인트

부분집합 조건 문제에서는 고정 원소를 빼고 자유 원소만 센다. 자유 원소 n개이면 경우의 수는 2^n개이다.

NoteBase

문 3. 확률변수 X의 확률분포가 다음과 같고, $E(X)=1$, $V(X)=\frac{1}{2}$일 때, 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	a	b	c	1

① $\frac{1}{32}$
② $\frac{1}{16}$
③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{2}$

정답 1번

출제 포인트

확률의 총합, 기댓값, 분산의 식을 차례로 세워 확률 a, b, c를 구하는 문제이다.

조건 정리

확률변수 X는 0, 1, 2의 값을 각각 확률 a, b, c로 가진다. 따라서 $a+b+c=1$, $E(X)=1$, $V(X)=\frac{1}{2}$이다. 구해야 할 값은 abc이다.

사용할 공식

확률의 총합은 1이므로 $a+b+c=1$이다. 또한 $E(X)=\sum xP(X=x)$, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$를 사용한다. 확률분포에서 기댓값과 분산이 주어졌으므로 이 세 식으로 a, b, c를 결정할 수 있다.

계산 과정

기댓값에서
$E(X)=0\cdot a+1\cdot b+2\cdot c=b+2c=1$
이다. 분산 조건으로부터
$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$
이고, 한편
$E(X^2)=0^2\cdot a+1^2\cdot b+2^2\cdot c=b+4c$
이므로 $b+4c=\frac{3}{2}$이다. 두 식을 빼면 $2c=\frac{1}{2}$이어서 $c=\frac{1}{4}$이고, $b=1-2c=\frac{1}{2}$이다. 따라서
$a=1-b-c=\frac{1}{4}$이며,
$abc=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $abc = \frac{1}{32}$이므로 옳다.
② X — $\frac{1}{16}$은 $a \cdot c$만 계산하여 b를 빠뜨린 값이다. 틀린 값 $\frac{1}{16}$을 올바르게 고치면 $\frac{1}{32}$이다.
③ X — $\frac{1}{8}$은 $b \cdot c$만 계산하여 a를 빠뜨린 값이다. 틀린 값 $\frac{1}{8}$을 올바르게 고치면 $\frac{1}{32}$이다.
④ X — $\frac{1}{2}$은 구한 확률 b만을 답으로 고른 값이다. 틀린 값 $\frac{1}{2}$을 올바르게 고치면 세 확률의 곱 $\frac{1}{32}$이다.

오답 포인트

분산 $V(X)$를 곧바로 $E(X^2)$로 두면 안 된다. $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$이므로 이 문제에서는 $E(X^2) = \frac{3}{2}$이다. 또한 마지막에는 한 확률이나 두 확률의 곱이 아니라 a, b, c 세 값을 모두 곱해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

유한 확률분포에서 미지의 확률이 나오면 먼저 확률의 총합 식을 세우고, 이어서 $E(X)$와 $E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$의 식을 세워 연립한다.

암기 포인트

확률의 총합은 1이고, 분산은 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$이다.

NoteBase

문 4. $a+2b+c=0$**일 때,** $-a^2-4b^2+c^2+4ab$**을 간단히 하면?**

① $-16ab$

② $-8ab$

③ $-4ab$

④ $8ab$

정답 4번

출제 포인트

주어진 일차식에서 c를 나타낸 뒤 제곱식에 대입하여 동류항을 정리하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $a+2b+c=0$이므로 $c=-(a+2b)$이다. 구해야 할 식은 $-a^2-4b^2+c^2+4ab$이다. c를 제곱할 때 음수 부호가 사라지고, $(a+2b)^2$의 가운데 항이 $4ab$가 된다는 점에 주의한다.

사용할 공식

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
조건에서 $c=-(a+2b)$이므로 $c^2=(a+2b)^2$로 바꿀 수 있어 완전제곱식의 전개 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 조건에서 $c=-(a+2b)$를 얻는다.
2. 따라서 $c^2=\{-(a+2b)\}^2=(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$이다.
3. 이를 대입하면
$-a^2-4b^2+(a^2+4ab+4b^2)+4ab=8ab$
이므로 식을 간단히 한 결과는 $8ab$이다.

선지 판단

① X — $-16ab$는 계산 결과 $8ab$와 일치하지 않는다. 틀린 표현 $-16ab$를 올바르게 고치면 $8ab$이다.
② X — $-8ab$는 ab항의 부호가 잘못된 값이다. $(a+2b)^2$에서 나온 $4ab$와 원래 식의 $4ab$를 더하므로 올바른 값은 $8ab$이다.
③ X — $-4ab$는 계산 결과와 일치하지 않는다. 두 $4ab$항을 합하면 $8ab$이므로 $-4ab$를 올바르게 고치면 $8ab$이다.
④ O — a^2항과 b^2항은 각각 소거되고, $4ab+4ab=8ab$만 남으므로 옳다.

NoteBase

오답 포인트

핵심 함정은 $c = -(a + 2b)$의 음수 부호를 c^2에도 그대로 남기거나, $(a + 2b)^2$의 가운데 항 $4ab$를 빠뜨리는 것이다. 제곱하면 $(-u)^2 = u^2$이고, 전개 후에는 새로 생긴 $4ab$와 원래 식의 $4ab$를 모두 더해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

일차 조건에서 한 문자를 먼저 정리하고, 그 문자의 거듭제곱을 정확히 전개한 뒤 원래 식에 대입하여 같은 차수의 항끼리 소거·합산한다.

암기 포인트

$(-u)^2 = u^2$, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$이다.

NoteBase

문 5. 다음 중 가장 옳은 것은?

① 수열 1, 3, 9, 27, 81, …의 일반항은 3^n이다. (단, n은 자연수)
② $\sum_{k=1}^{2n} 4 = 4n$
③ $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \frac{99 \times 100 \times 199}{6}$
④ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

정답 4번

출제 포인트

등비수열의 일반항과 자연수의 거듭제곱 합 공식을 정확히 적용하여 각 등식의 참·거짓을 판단하는 문제이다.

조건 정리

①은 첫째항이 1이고 공비가 3인 등비수열이다.
②는 상수 4를 모두 $2n$번 더한다.
③은 1부터 100까지의 제곱의 합이다.
④는 1부터 n까지의 세제곱의 합이다.

사용할 공식

등비수열의 일반항: $a_n = a_1 r^{n-1}$
상수의 합: $\sum_{k=1}^{n} c = cn$
제곱의 합: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
세제곱의 합: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
각 선지가 등비수열의 항 또는 거듭제곱의 합을 묻고 있으므로 해당 공식을 적용한다.

계산 과정

① $a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$이다.
② $\sum_{k=1}^{2n} 4 = 4 \cdot 2n = 8n$이다.
③ $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6}$이다.
④ 1^3+2^3+·s+n^3=≤ft((n(n+1))/(2))^2이고, 1+2+·s+n=(n(n+1))/(2)이므로 우변은 $(1 + 2 + \cdots + n)^2$과 같다.

NoteBase

선지 판단

① X — 첫째항에 $n=1$을 대입하면 1이어야 하는데 3^n은 3이 된다. 틀린 표현 3^n은 3^{n-1}로 고쳐야 한다.
② X — 4를 $2n$번 더하므로 합은 $8n$이다. 틀린 표현 $4n$은 $8n$으로 고쳐야 한다.
③ X — 1부터 100까지의 제곱합은 $\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6}$이다. 제시된 $\frac{99\cdot 100\cdot 199}{6}$은 1부터 99까지의 제곱합이므로 고쳐야 한다.
④ O — 1부터 n까지의 세제곱합은 1부터 n까지의 합을 제곱한 것과 같으므로 제시된 등식이 성립한다.

오답 포인트

①에서는 등비수열의 지수를 n으로 쓰는 실수, ②에서는 항의 개수 $2n$을 빠뜨리는 실수, ③에서는 상한 100 대신 99를 공식에 넣는 실수가 함정이다. 특히 합 기호에서는 일반항뿐 아니라 시작값과 끝값으로 항의 개수를 먼저 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

수열 공식은 먼저 $n=1$을 대입해 첫째항과 맞는지 확인하고, 합 기호는 항의 개수를 센 뒤 공식을 적용한다. 거듭제곱 합은 상한 n이 공식의 모든 인수에 일관되게 반영되었는지 확인한다.

암기 포인트

첫째항 1, 공비 3이면 $a_n=3^{n-1}$이고, $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$이다.

NoteBase

문 6. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}$의 값은?

① $-\frac{1}{3}f'(a)$

② $\frac{1}{3}f'(a)$

③ $-3f'(a)$

④ $3f'(a)$

정답 3번

출제 포인트

미분계수의 정의에서 증분이 h가 아니라 $-3h$일 때, 분모도 같은 증분으로 맞추어 극한값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분 가능하므로 $f'(a)$가 존재한다.
구해야 할 값: $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}$이다.
주의할 조건: 함수의 입력 변화량은 $-3h$이지만 원래 식의 분모는 h이므로 배율과 부호를 함께 반영해야 한다.

사용할 공식

미분계수의 정의는 $f'(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$이다. 주어진 식에서 $t=-3h$로 놓으면 $h\to 0$일 때 $t\to 0$이므로 이 정의를 적용할 수 있다.

계산 과정

$t=-3h$로 놓으면 $h=-\frac{t}{3}$이다. 따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{-t/3}=-3\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=-3f'(a).$$

계산 결과는 $-3f'(a)$이다.

선지 판단

① X — $-\frac{1}{3}f'(a)$는 $-3h$의 계수를 역수로 잘못 적용한 값이다. 틀린 표현 $-\frac{1}{3}f'(a)$는 $-3f'(a)$로 고쳐야 한다.
② X — $\frac{1}{3}f'(a)$는 계수를 역수로 처리하면서 음의 부호까지 빠뜨린 값이다. 틀린 표현 $\frac{1}{3}f'(a)$는 $-3f'(a)$로 고쳐야 한다.
③ O — $t=-3h$로 치환하면 원래 분모 h는 $-t/3$가 되어 전체 극한값이 $-3f'(a)$이다.
④ X — $3f'(a)$는 입력 변화량 $-3h$의 음의 부호를 누락한 값이다. 틀린 표현 $3f'(a)$는 $-3f'(a)$로 고쳐야 한다.

오답 포인트

핵심 함정은 $-3h$를 보고 계수 3을 역수로 바꾸거나 음의 부호를 빠뜨리는 것이다. 분자의 입력 변화량을 새 변수로 둔 뒤 분모 h까지 같은 변수로 바꾸면 배율이 -3임을 확인할 수 있다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

$f(a+ch)-f(a)$ 꼴에서는 $t=ch$로 치환하여 분모를 t로 맞춘다. 그러면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+ch)-f(a)}{h}=cf'(a)$가 되므로 계수의 크기와 부호를 그대로 반영한다.

암기 포인트

입력 증분이 ch이면 미분계수 앞에도 같은 계수 c가 붙는다.

NoteBase

문 7. $f(x)=4x+\int_0^3 xf'(x)dx$**를 만족시키는 함수** $f(x)$**에 대하여** $f(-3)$**의 값은?**

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 2번

출제 포인트

정적분으로 나타난 항이 상수임을 이용해 $f'(x)$를 구하고, 그 값을 다시 적분식에 대입하여 $f(-3)$을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $f(x)=4x+\int_0^3 tf'(t)dt$이다. 적분 안의 변수는 혼동을 피하기 위해 t로 바꾸어 쓸 수 있다.
구해야 할 값은 $f(-3)$이다.
적분 구간이 0부터 3까지로 고정되어 있으므로 $\int_0^3 tf'(t)dt$는 x와 무관한 상수이다.

사용할 공식

$f'(x)=4$
$\int_0^3 tf'(t)dt=\int_0^3 4tdt$
정적분 항은 x에 관한 상수이므로 주어진 식의 양변을 x로 미분하면 $f'(x)=4$가 된다.

계산 과정

1. 주어진 식을 미분하여 $f'(x)=4$를 얻는다.

2. 이를 정적분에 대입하면
$\int_0^3 tf'(t)dt=\int_0^3 4tdt=[2t^2]_0^3=18$
이다.

3. 따라서 $f(x)=4x+18$이고,
$f(-3)=4(-3)+18=-12+18=6$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 5는 계산 결과 6과 다르다. 올바른 값은 $f(-3) = 6$이다.
② O — $f(-3) = 4(-3) + 18 = 6$이므로 옳다.
③ X — 7은 계산 결과 6과 다르다. 올바른 값은 $f(-3) = 6$이다.
④ X — 8은 계산 결과 6과 다르다. 올바른 값은 $f(-3) = 6$이다.
계산 결과가 6이므로 정답은 2번이다.

오답 포인트

주어진 식의 바깥에 있는 x와 정적분 안의 적분변수를 같은 역할로 보면 식을 잘못 해석하기 쉽다. 적분변수를 t로 바꾸면 정적분 전체가 상수임이 분명해진다. 또한 $\int_0^3 4t dt$를 계산할 때 원시함수는 $4t^2$가 아니라 $2t^2$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

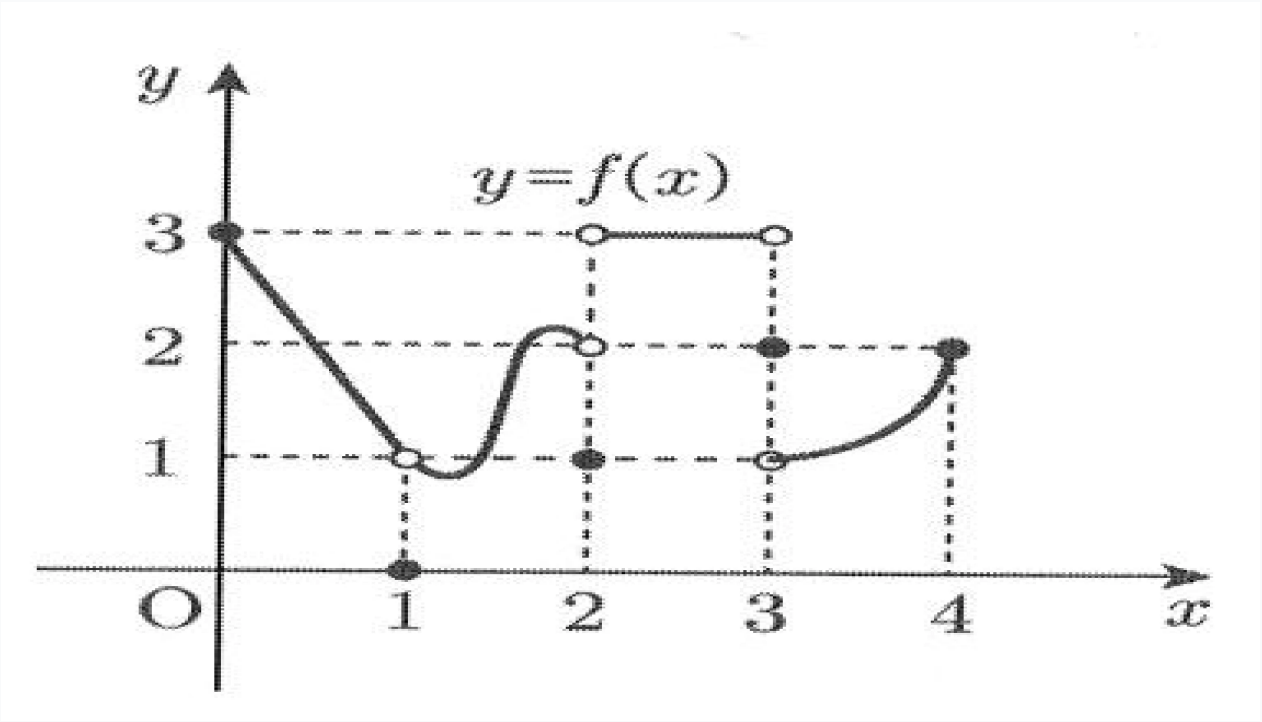
정적분의 상한과 하한이 모두 상수이면 적분 전체를 상수로 본다. 먼저 주어진 함수식을 미분해 도함수를 구한 뒤, 그 도함수를 원래 정적분에 대입하고 마지막으로 요구한 함숫값을 계산한다.

암기 포인트

고정된 구간의 정적분은 상수이다. 따라서 f(x)=ax+정적분 상수이면 $f'(x) = a$이다.

NoteBase

문 8. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 4\}$인 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\lim_{x \to 0+} f(f(x)) + \lim_{x \to 2+} f(f(x))$의 값은?



① 1

② 3

③ 4

④ 5

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 합성함수의 극한에서 안쪽 함수의 극한값뿐 아니라 그 값에 접근하는 방향을 확인하고, 안쪽 함수가 일정한 경우에는 바깥 함수의 함숫값을 적용하는 문제이다.

조건 정리

그래프에서 $x \to 0+$이면 $f(x) \to 3-$이다. 또한 $2 < x < 3$에서는 $f(x) = 3$이고, 닫힌 점에 의해 $f(3) = 2$이다.

사용할 원리

$f(x) \to a-$이면 $f(f(x))$는 바깥 함수의 왼쪽 극한 $\lim_{t \to a-} f(t)$로 판단한다. 반면 안쪽 함수가 근방에서 정확히 상수 a이면 $f(f(x)) = f(a)$이므로 극한값이 아니라 함숫값을 사용한다.

NoteBase

계산 과정

첫째, $x \to 0+$일 때 선분을 따라 $f(x) \to 3-$이므로
$\lim_{x \to 0+} f(f(x)) = \lim_{t \to 3-} f(t) = 3.$
둘째, $x \to 2+$이면 충분히 가까운 오른쪽 구간에서 $f(x) = 3$이므로
$\lim_{x \to 2+} f(f(x)) = f(3) = 2.$
따라서 구하는 값은 $3 + 2 = 5$이다.

선지 판단

① X — 선지의 값 1은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $3 + 2 = 5$이다.

② X — 선지의 값 3은 첫 번째 극한값만 반영한 값이다. 두 번째 극한값 2도 더해야 하므로 올바른 값은 5이다.

③ X — 선지의 값 4는 두 극한을 정확히 계산한 합이 아니다. 올바른 값은 $3 + 2 = 5$이다.

④ O — 두 극한값이 각각 3과 2이므로 그 합은 5이다.

오답 포인트

두 번째 항에서 $x \to 2+$일 때 안쪽 함수는 3에 가까워지는 것이 아니라 오른쪽 근방에서 정확히 3이다. 따라서 $x = 3$에서의 좌극한이나 우극한을 택하지 않고 닫힌 점이 나타내는 $f(3) = 2$를 대입해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 안쪽 함수의 극한값과 접근 방향을 읽는다. 안쪽 함수가 특정 값에 접근하면 바깥 함수의 해당 방향 극한을 보고, 근방에서 특정 값으로 일정하면 그 점의 실제 함숫값을 본다.

암기 포인트

안쪽이 접근하면 바깥의 극한, 안쪽이 상수이면 바깥의 함숫값을 사용한다.

NoteBase

문 9. 방정식 $x^5 + 2x^2 + k - 3 = 0$이 열린 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

① 35

② 36

③ 37

④ 38

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 연속이고 단조증가하는 함수의 끝점 함수값을 이용하여 열린 구간 안에 근이 존재하는 정수 매개변수의 범위를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x) = x^5 + 2x^2 + k - 3$이다. 구해야 할 것은 $f(x) = 0$이 열린 구간 $(1, 2)$에서 실근을 갖게 하는 정수 k의 개수이다. 열린 구간이므로 끝점 $x = 1, 2$에서 생기는 근은 제외해야 한다.

사용할 원리

$f'(x) = 5x^4 + 4x > 0$이므로 f는 $(1, 2)$에서 연속이고 엄격히 증가한다. 따라서 구간 내부에서 근을 가지려면 끝점에서 $f(1) < 0 < f(2)$이어야 하며, 이 조건은 근의 존재를 보장하는 동시에 단조성 때문에 필요한 조건이기도 하다.

계산 과정

끝점의 함수값은 다음과 같다.

$f(1) = 1 + 2 + k - 3 = k$

$f(2) = 32 + 8 + k - 3 = k + 37$

따라서

$k < 0, \qquad k + 37 > 0$

이므로 $-37 < k < 0$이다. 가능한 정수는 $-36, -35, \ldots, -1$이고, 그 개수는

$(-1) - (-36) + 1 = 36$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 가능한 정수의 개수는 35가 아니라 36이다. 올바르게는 -36부터 -1까지 세어 36개이다.
② O — 계산 결과가 36이므로 옳다.
③ X — 37은 끝점 중 하나를 포함할 때 나올 수 있는 값이다. 올바르게는 열린 구간의 끝점에서 근을 만드는 $k=-37$과 $k=0$을 모두 제외하여 36개이다.
④ X — 38은 -37부터 0까지 두 끝점을 모두 포함한 개수이다. 올바르게는 두 끝점을 제외한 36개이다.
계산 결과 36이므로 정답은 2번이다.

오답 포인트

열린 구간이라는 조건을 놓치면 $k=-37$ 또는 $k=0$을 포함하게 된다. 특히 $k=-37$이면 $x=2$, $k=0$이면 $x=1$이 근이므로 두 경우 모두 허용되지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

매개변수가 포함된 연속함수의 구간 내 근 문제에서는 먼저 단조성을 확인하고, 끝점 함수값의 부호가 바뀌는 조건을 세운 뒤 열린 구간인지 닫힌 구간인지에 따라 등호 포함 여부를 결정한다.

암기 포인트

엄격히 증가하는 연속함수가 열린 구간 (a, b)에서 근을 가지는 조건은 $f(a)<0<f(b)$이다. 열린 구간에서는 끝점에서 0이 되는 매개변수 값을 제외한다.

NoteBase

문 10. 다항식 $(x+a)^7$의 전개식에서 x^4의 계수가 280일 때, x^5의 계수는? (단, a는 상수이다.)

① 84

② 91

③ 98

④ 105

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 이항정리를 이용하여 한 항의 계수로 상수 a를 구한 뒤 다른 항의 계수를 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: x^4의 계수는 280이다.
구해야 할 값: x^5의 계수이다.
주의할 조건: x^r을 선택하면 나머지 $7-r$개의 인수에서는 a가 선택되므로 a의 지수는 $7-r$이다.

사용할 공식

이항정리에 따라 $(x+a)^7$에서 x^r의 계수는 $\binom{7}{r}a^{7-r}$이다. 일곱 인수 중 x를 선택할 r개의 위치를 정하는 경우의 수가 $\binom{7}{r}$이고, 나머지 인수에서 a가 선택되기 때문이다.

계산 과정

1. x^4의 계수는 $\binom{7}{4}a^3 = 35a^3$이다.
2. $35a^3 = 280$이므로 $a^3 = 8$, 따라서 $a = 2$이다.
3. x^5의 계수는 $\binom{7}{5}a^2 = 21 \times 2^2 = 84$이다.

선지 판단

① O — 계산한 x^5의 계수 84와 일치한다.
② X — 91은 $\binom{7}{5}a^2$의 값과 일치하지 않는다. 91이 아니라 84가 맞다.
③ X — 98은 21×2^2와 일치하지 않는다. 98이 아니라 84가 맞다.
④ X — 105는 x^5의 계수가 아니다. 105가 아니라 84가 맞다.

오답 포인트

핵심 함정은 x^r의 계수에서 a의 지수를 r로 착각하는 것이다. x^4항에는 a^3, x^5항에는 a^2가 곱해진다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

x^r의 계수를 $\binom{n}{r}a^{n-r}$로 적고, 주어진 계수에서 a를 먼저 구한 다음 요구한 차수의 계수에 대입한다.

암기 포인트

$(x+a)^n$에서 x^r의 계수는 $\binom{n}{r}a^{n-r}$이다.

NoteBase

문 11. A, B를 포함한 8명의 요리 동아리 회원 중에서 요리 박람회에 참가할 5명의 회원을 임의로 뽑을 때, A 또는 B가 뽑힐 확률은?

① $\frac{17}{28}$
② $\frac{19}{28}$
③ $\frac{25}{28}$
④ $\frac{23}{28}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 여사건을 이용하여 A와 B 중 적어도 한 명이 뽑힐 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

전체 경우는 8명 중 5명을 뽑는 경우이다. ‘A 또는 B가 뽑힌다’는 A와 B 중 적어도 한 명이 뽑힌다는 뜻이며, 그 여사건은 A와 B가 모두 뽑히지 않는 경우이다.

사용할 공식

여사건의 확률은 $P(E) = 1 - P(E^c)$이다. 따라서
P(A 또는 B가 뽑힘)=1-6585
전체 경우에서 A와 B가 모두 빠지는 경우만 빼면 되므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

전체 경우의 수는 $\binom{8}{5} = 56$이다. A와 B가 모두 뽑히지 않으려면 나머지 6명 중 5명을 뽑아야 하므로 경우의 수는 $\binom{6}{5} = 6$이다. 따라서
$1 - \frac{6}{56} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28}$

선지 판단

① X — $\frac{17}{28}$은 여사건을 정확히 뺀 값이 아니다. 올바른 확률은 $1 - \frac{\binom{6}{5}}{\binom{8}{5}} = \frac{25}{28}$이다.
② X — $\frac{19}{28}$은 계산 결과 $\frac{25}{28}$과 일치하지 않는다. 올바르게는 $\frac{25}{28}$이다.
③ O — A와 B가 모두 빠질 확률 $\frac{6}{56}$을 1에서 빼면 $\frac{25}{28}$이므로 옳다.
④ X — $\frac{23}{28}$은 여사건의 경우의 수를 잘못 센 값이다. A와 B가 모두 빠지는 경우는 $\binom{6}{5} = 6$가지이므로 올바르게는 $\frac{25}{28}$이다.

NoteBase

오답 포인트

‘A 또는 B’를 두 사람 중 정확히 한 명만 뽑는 경우로 해석하면 안 된다. 확률에서 ‘또는’은 두 사람 중 적어도 한 명이 뽑히는 경우이므로 A와 B가 함께 뽑히는 경우도 포함한다.

다시 나오면 이렇게 판단

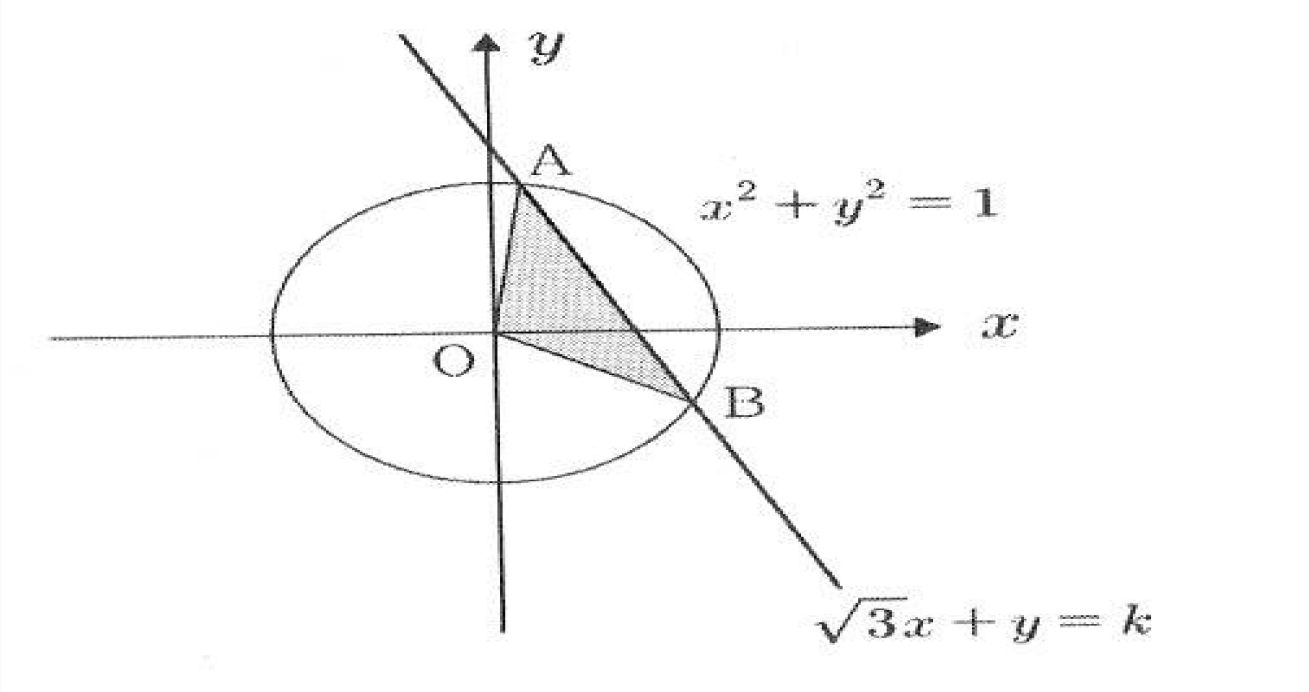
‘적어도 하나’의 확률은 전체 경우에서 ‘하나도 없음’의 확률을 빼는 여사건 방식으로 계산한다.

암기 포인트

적어도 하나 = 1 - 하나도 없음이다.

NoteBase

문 12. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선 $\sqrt{3}x + y = k$가 두 점 A, B에서 만난다. 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 되도록 하는 상수를 k라고 할 때, k^2의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 1

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

정답 4번

출제 포인트

원의 중심에서 직선까지의 거리와 현의 길이를 이용하여 삼각형의 넓이를 나타내고, 그 넓이의 최댓값을 구하는 문제이다.

조건 정리

원의 반지름은 1이다. 원점 O에서 직선 $\sqrt{3}x + y = k$까지의 거리를 d라 하면 $d = \frac{|k|}{\sqrt{3+1}} = \frac{|k|}{2}$이다. 현 AB의 길이는 $2\sqrt{1 - d^2}$이고, 삼각형 OAB에서 밑변 AB에 대한 높이는 d이다.

NoteBase

사용할 공식

$S = \frac{1}{2} \times AB \times d = d\sqrt{1-d^2}$
중심에서 현까지의 거리가 d이면 현의 반쪽 길이는 피타고라스 정리에 따라 $\sqrt{1-d^2}$이므로 이 공식을 사용할 수 있다.

계산 과정

넓이를 S라 하면 $S = d\sqrt{1-d^2}$이다. $S \geq 0$이므로 S가 최대가 되는 때는 S^2이 최대가 되는 때와 같다.
$S^2 = d^2(1-d^2) = -\left(d^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$
따라서 $d^2 = \frac{1}{2}$일 때 넓이가 최대이다. 한편 $d^2 = \frac{k^2}{4}$이므로
$\frac{k^2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = 2$

선지 판단

① X — $k^2 = 1$이 아니라 $k^2 = 2$이다. 1은 최대 조건 $d^2 = \frac{1}{2}$과 거리 관계 $d^2 = \frac{k^2}{4}$를 함께 적용한 결과와 일치하지 않는다.
② X — $k^2 = \frac{4}{3}$이 아니라 $k^2 = 2$이다. 넓이의 제곱 $d^2(1-d^2)$은 $d^2 = \frac{1}{2}$에서 최대가 된다.
③ X — $k^2 = \frac{5}{3}$이 아니라 $k^2 = 2$이다. 직선의 계수 제곱의 합은 $3 + 1 = 4$이므로 $d^2 = \frac{k^2}{4}$로 계산해야 한다.
④ O — 최대 넓이 조건 $d^2 = \frac{1}{2}$와 $d^2 = \frac{k^2}{4}$를 결합하면 $k^2 = 2$가 된다.

오답 포인트

직선까지의 거리를 $|k|$로 두거나 분모 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$를 빠뜨리면 오답이 나온다. 또한 최대화해야 하는 것은 현의 길이만이 아니라 밑변과 높이의 곱 $d\sqrt{1-d^2}$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

원의 중심에서 현을 포함하는 직선까지의 거리를 d로 둔 뒤, 현의 길이를 $2\sqrt{r^2-d^2}$로 나타낸다. 삼각형의 넓이를 거리 하나의 식으로 만든 다음 제곱하여 완전제곱식으로 정리하면 최댓값 조건을 구할 수 있다.

암기 포인트

반지름이 r, 중심에서 현까지의 거리가 d이면 현의 길이는 $2\sqrt{r^2-d^2}$이다. 이 문제에서는 넓이의 제곱이 $d^2(1-d^2)$이므로 $d^2 = \frac{1}{2}$에서 최대이다.

NoteBase

문 13. 주사위를 던져 3의 배수의 눈이 나오면 동쪽으로 1m 직진하고, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 북쪽으로 1m 직진한다고 하자. 이 규칙에 따라 주사위를 던지는 시행을 4회 반복할 때, 처음 위치로부터 거리가 3m 이하일 확률은?

① $\frac{7}{27}$
② $\frac{8}{27}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{10}{27}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 네 번의 이동을 좌표로 나타내어 거리 조건을 만족하는 이동 횟수를 찾고, 이항확률을 계산하는 문제이다.

조건 정리

3의 배수인 눈은 3, 6이므로 동쪽으로 갈 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 3의 배수가 아닌 눈은 1, 2, 4, 5이므로 북쪽으로 갈 확률은 $\frac{2}{3}$이다.
네 번 중 동쪽으로 이동한 횟수를 k라 하면 북쪽으로 이동한 횟수는 $4-k$이고, 최종 위치는 $(k, 4-k)$이다.

사용할 공식

원점으로부터의 거리는 $\sqrt{x^2+y^2}$이고, 네 번 중 동쪽 이동이 정확히 k번일 확률은 $\binom{4}{k}(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{4-k}$이다. 각 시행에서 동쪽 또는 북쪽으로 이동하며 시행들이 서로 독립이므로 이항확률을 사용한다.

계산 과정

거리 조건을 제곱하여 정리하면
$k^2+(4-k)^2 \le 9$
$2(k-2)^2+8 \le 9$
이 된다. k는 0부터 4까지의 정수이므로 이 조건을 만족하는 값은 $k=2$뿐이다. 따라서 동쪽과 북쪽으로 각각 두 번 이동해야 한다.
그 확률은
$\binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2 = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{7}{27}$은 거리 조건을 만족하는 유일한 경우인 동쪽 2회·북쪽 2회의 확률과 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{7}{27}$을 올바르게 고치면 $\frac{8}{27}$이다.
② O — 동쪽으로 정확히 두 번 이동할 확률을 계산하면 $\frac{8}{27}$이므로 맞다.
③ X — $\frac{1}{3} = \frac{9}{27}$은 계산 결과보다 크다. 틀린 값 $\frac{1}{3}$을 올바르게 고치면 $\frac{8}{27}$이다.
④ X — $\frac{10}{27}$은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{10}{27}$을 올바르게 고치면 $\frac{8}{27}$이다.

오답 포인트

동쪽 이동 횟수와 북쪽 이동 횟수의 합이 4라는 사실만 보고 거리를 4로 처리하면 안 된다. 두 방향은 서로 수직이므로 최종 거리는 $k + (4 - k)$가 아니라 $\sqrt{k^2 + (4-k)^2}$로 계산한다. 또한 동쪽과 북쪽의 이동 확률이 각각 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$로 서로 다르다는 점을 반영해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

방향별 이동 횟수를 좌표로 놓고 거리 조건을 먼저 만족시키는 정수 횟수를 찾은 다음, 그 횟수에 대한 이항확률을 계산한다.

암기 포인트

수직인 두 방향으로 이동하면 거리는 피타고라스 정리로 구하고, 특정 방향의 횟수가 정해지면 이항확률을 적용한다.

NoteBase

문 14. $\log_{x-2}(-x^2+7x-6)$**의 값이 존재하도록 하는 모든 정수** x**의 합은?**

① 9

② 11

③ 12

④ 14

정답 1번

출제 포인트

로그의 밑과 진수에 관한 조건을 동시에 만족하는 정수 x를 찾고 그 합을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: $\log_{x-2}(-x^2+7x-6)$
구해야 할 값: 로그의 값이 존재하게 하는 모든 정수 x의 합
주의할 조건: 실수 범위에서 로그가 정의되려면 밑이 양수이고 1이 아니어야 하며, 진수가 양수여야 한다.

사용할 공식

로그 $\log_a b$의 정의 조건은 $a>0, a\neq 1, b>0$이다.
이 조건을 쓰는 이유: 밑 $x-2$와 진수 $-x^2+7x-6$가 모두 x에 따라 달라지므로 세 조건을 빠짐없이 동시에 적용해야 한다.

계산 과정

1. 밑의 조건은 $x-2>0$이고 $x-2\neq 1$이므로 $x>2, x\neq 3$이다.
2. 진수의 조건은 $-x^2+7x-6>0$이다. 이를 인수분해하면 $-(x-1)(x-6)>0$이므로 $1<x<6$이다.
3. 두 범위를 함께 만족하는 정수는 3, 4, 5이지만, $x=3$이면 밑이 1이 되므로 제외된다. 따라서 가능한 정수는 4, 5이고 그 합은 $4+5=9$이다.

선지 판단

① O — 가능한 정수 4와 5의 합은 9이므로 옳다.
② X — 11은 $x=2$를 잘못 포함하고 $x=3$을 제외하여 $2+4+5$로 계산할 때 나오는 값이다. '합은 11이다'가 틀린 표현이며, 올바르게는 '합은 9이다'이다.
③ X — 12는 밑이 1이 될 수 없다는 조건을 빠뜨리고 $3+4+5$로 계산할 때 나오는 값이다. '합은 12이다'가 틀린 표현이며, 올바르게는 '합은 9이다'이다.
④ X — 14는 밑의 조건을 잘못 처리하여 $x=2, 3$을 모두 포함하고 $2+3+4+5$로 계산할 때 나오는 값이다. '합은 14이다'가 틀린 표현이며, 올바르게는 '합은 9이다'이다.

NoteBase

오답 포인트

진수가 양수라는 조건만 확인하면 $x = 3$까지 포함하여 ③을 고르게 된다. 또한 밑의 조건은 $x - 2 > 0$뿐 아니라 $x - 2 \neq 1$도 필요하므로, $x = 2$와 $x = 3$을 각각 반드시 제외해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

로그의 정의역 문제는 '밑 > 0', '밑 $\neq 1$', '진수 > 0'의 세 조건을 각각 구한 뒤 교집합을 취하고, 마지막에 요구한 합이나 개수를 계산한다.

암기 포인트

로그의 정의 조건은 밑은 양수이되 1이 아니고, 진수는 양수라는 것이다.

NoteBase

문 15. 방정식 $x^2 + 3(1-i)x + (a-6i) = 0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① -2

② -1

③ 0

④ 2

정답 4번

출제 포인트

복소수 계수를 가진 방정식에 실근을 대입한 뒤, 실수부와 허수부가 각각 0이 되어야 한다는 조건을 이용해 매개변수의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 방정식은 $x^2 + 3(1-i)x + (a-6i) = 0$이다. 실근을 $x = r$라 두면 r과 a는 모두 실수이다. 구해야 할 값은 방정식이 실근을 갖게 하는 a이다.

사용할 원리

복소수 $A + Bi$가 0이면 $A = 0, B = 0$이다. 실수 r를 방정식에 대입하면
$r^2 + 3r + a + (-3r - 6)i = 0$
이므로 실수부와 허수부를 각각 0으로 둔다.

계산 과정

1. 허수부에서 $-3r - 6 = 0$이므로 $r = -2$이다.
2. 실수부에서 $r^2 + 3r + a = 0$이다.
3. $r = -2$를 대입하면 $4 - 6 + a = 0$이므로 $a = 2$이다.

선지 판단

① X — $a = -2$를 대입하면 실근 후보 $r = -2$에서 실수부가 $4 - 6 - 2 = -4$가 되어 0이 아니다. 틀린 값 -2가 아니라 올바른 값은 2이다.
② X — $a = -1$을 대입하면 실수부가 $4 - 6 - 1 = -3$이 되어 0이 아니다. 틀린 값 -1이 아니라 올바른 값은 2이다.
③ X — $a = 0$을 대입하면 실수부가 $4 - 6 = -2$가 되어 0이 아니다. 틀린 값 0이 아니라 올바른 값은 2이다.
④ O — 허수부에서 얻은 $r = -2$와 $a = 2$를 대입하면 실수부와 허수부가 모두 0이므로 실제로 실근 -2를 갖는다.

NoteBase

오답 포인트

복소수 방정식 전체를 실수 방정식처럼 한 번에 처리하거나 $3(1-i)r$의 허수부를 $-3r$가 아닌 $3r$로 쓰면 오답이 된다. 허수부에서 먼저 실근 $r=-2$를 확정한 뒤 실수부에 대입해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

실근을 r로 놓고 식을 실수부와 허수부로 분리한 다음, 허수부가 0인 조건으로 r을 구하고 실수부가 0인 조건으로 매개변수를 구한다. 마지막에는 구한 값을 원래 식에 대입해 두 부분이 모두 0인지 확인한다.

암기 포인트

복소수 식이 0이면 실수부도 0, 허수부도 0이다.

NoteBase

문 16. $4[x]^2 - 12[x] + 5 \le 0$**를 만족하는** x**값의 범위가** $\alpha \le x < \beta$**일 때,** $\alpha^2 + \beta^2$**의 값은? (단,** $[x]$**는** x**를 넘지 않는 최대 정수이다.)**

① 5

② 10

③ 13

④ 17

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 바닥함수 $[x]$를 하나의 정수로 놓고 이차부등식을 푼 뒤, 그 정숫값을 다시 x의 범위로 바꾸는 문제이다.

조건 정리

$n = [x]$로 놓으면 n은 정수이다. 먼저 $4n^2 - 12n + 5 \le 0$을 만족하는 정수 n을 구하고, $[x] = n$이 뜻하는 $n \le x < n + 1$을 적용한다.

사용할 공식

이차식을 인수분해하면

$4n^2 - 12n + 5 = (2n - 1)(2n - 5)$

이다. 따라서

$(2n-1)(2n-5) \le 0$ $1 \le n \le 5$

이다. 이 공식을 쓰는 이유는 최고차항의 계수가 양수인 이차식이 두 근 사이에서 0 이하이기 때문이다.

계산 과정

1. n은 정수이므로 $1 \le n \le 5$에서 $n = 1, 2$이다.
2. $[x] = 1$이면 $1 \le x < 2$, $[x] = 2$이면 $2 \le x < 3$이다. 두 구간을 합치면 $1 \le x < 3$이다.
3. 따라서 $\alpha = 1, \beta = 3$이고,

$\alpha^2 + \beta^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 10이므로 '5'는 틀리고 '10'이 맞다. 5는 가능한 바닥함숫값 1과 2를 그대로 제곱하여 $1^2 + 2^2$로 계산한 값이지만, β는 바닥함숫값의 최댓값 2가 아니라 x 구간의 오른쪽 경계 3이다.
② O — $\alpha = 1, \beta = 3$이므로 $\alpha^2 + \beta^2 = 10$이다.
③ X — 계산 결과는 10이므로 '13'은 틀리고 '10'이 맞다. α는 2가 아니라 전체 해 구간 $[1, 3)$의 왼쪽 경계 1이다.
④ X — 계산 결과는 10이므로 '17'은 틀리고 '10'이 맞다. 전체 해 구간의 오른쪽 경계는 4가 아니라 3이므로 $1^2 + 4^2$로 계산할 수 없다.

오답 포인트

정수 $[x]$의 범위 $1 \le [x] \le 2$를 곧바로 $1 \le x \le 2$로 바꾸면 안 된다. 특히 $[x] = 2$는 $2 \le x < 3$이므로 전체 범위의 오른쪽 끝은 2가 아니라 3이고, 3은 포함되지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

바닥함수가 들어간 부등식은 $n = [x]$로 치환하여 정수 n의 범위를 먼저 구한 다음, 각 n에 대해 $n \le x < n + 1$로 되돌려 전체 구간을 합친다.

암기 포인트

$[x] = n$의 뜻은 $n \le x < n + 1$이다. 왼쪽 끝은 포함하고 오른쪽 끝은 포함하지 않는다.

NoteBase

문 17. FIFA에서 공인한 축구공을 생산하는 회사에서 생산된 축구공의 무게는 평균 350g, 표준편차 16g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사는 일정한 기간 동안 생산된 축구공 중에서 임의로 추출된 축구공 64개의 무게의 평균이 346g 이하 이거나 355g 이상이면 생산 공정에 문제가 있다고 판단한다. 이 회사에서 생산 공정에 문제가 있다고 판단할 확률을 주어진 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
2.00	0.4772
2.25	0.4878
2.50	0.4938
2.75	0.4970

① 0.0290

② 0.0258

③ 0.0184

④ 0.0152

정답 1번

출제 포인트

표본평균의 분포를 표준화한 뒤, 서로 겹치지 않는 왼쪽 꼬리확률과 오른쪽 꼬리확률을 더하는 문제이다.

조건 정리

모평균은 $\mu = 350g$, 모표준편차는 $\sigma = 16g$, 표본의 크기는 $n = 64$이다.
표본평균의 표준오차는 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{16}{\sqrt{64}} = 2g$이다.
구해야 하는 사건은 $\bar{X} \leq 346$ 또는 $\bar{X} \geq 355$이다.

사용할 공식

표본평균을 Z로 표준화하면 다음과 같다.
Z=(X-μ)/(σ/ n)
모집단이 정규분포를 따르므로 표본평균도 정규분포를 따르며, 이 표준화 공식을 이용해 주어진 표의 값을 사용할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

두 경계값을 표준화하면 다음과 같다.

$\frac{346-350}{2} = -2, \qquad \frac{355-350}{2} = 2.5$

따라서 구하는 확률은 $P(Z \le -2) + P(Z \ge 2.5)$이다. 주어진 표는 $P(0 \le Z \le z)$를 나타내므로 대칭성을 이용하면 다음과 같다.

$P(Z \le -2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

$P(Z \ge 2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$

두 사건은 서로 겹치지 않으므로 확률을 더하면 $0.0228 + 0.0062 = 0.0290$이다.

선지 판단

① O — 계산한 양쪽 꼬리확률의 합이 0.0290이므로 옳다.

② X — 0.0258은 양쪽 꼬리확률의 합과 일치하지 않는다. 올바른 값은 0.0290이다.

③ X — 0.0184는 $P(Z \le -2) + P(Z \ge 2.5)$의 값이 아니다. 올바른 값은 0.0290이다.

④ X — 0.0152는 두 경계 밖의 확률을 합한 값이 아니다. 올바른 값은 0.0290이다.

오답 포인트

표의 0.4772와 0.4938은 누적확률 $P(Z \le z)$가 아니라 평균 0부터 z까지의 넓이이다. 따라서 각각을 0.5에서 빼서 꼬리확률로 바꾼 뒤, '이하 또는 이상'이라는 조건에 따라 두 값을 더해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

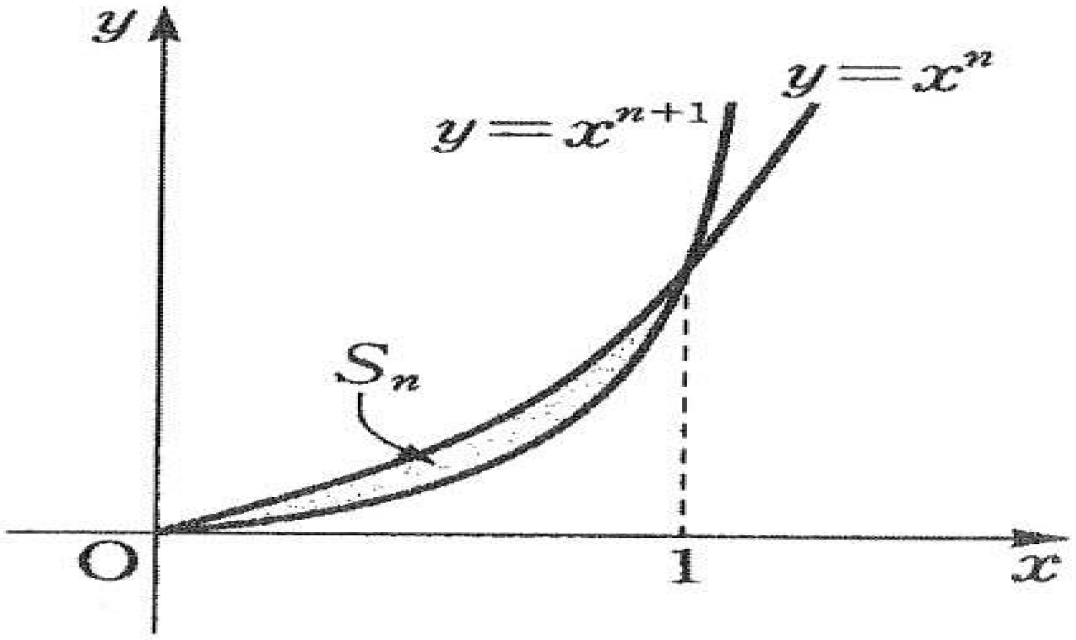
표본평균 문제에서는 먼저 표준오차 σ/ n를 구하고, 각 경계값을 표준화한 뒤, 표가 제공하는 확률의 범위를 확인하여 필요한 꼬리확률로 변환한다. 서로 겹치지 않는 '또는' 사건이면 마지막에 확률을 더한다.

암기 포인트

표본평균의 표준오차는 σ/ n이고, $P(0 \le Z \le z)$ 표에서 한쪽 꼬리는 0.5-표의 값이다.

NoteBase

문 18. 다음 그림과 같이 $x \geq 0$에서 두 곡선 $y = x^n$, $y = x^{n+1}$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{100} S_k$의 값은?



① $\frac{23}{51}$

② $\frac{51}{101}$

③ $\frac{25}{51}$

④ $\frac{67}{101}$

정답 3번

출제 포인트

두 곡선 사이의 넓이를 정적분으로 구한 뒤, 합을 망원급수로 정리하는 문제이다.

조건 정리

두 곡선은 $x = 0$과 $x = 1$에서 만난다. $0 \leq x \leq 1$에서는 $x^n \geq x^{n+1}$이므로 위쪽 곡선은 $y = x^n$, 아래쪽 곡선은 $y = x^{n+1}$이다. 구해야 할 값은 $\sum_{k=1}^{100} S_k$이다.

사용할 공식

두 곡선 사이의 넓이는 $S_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx$이다. 따라서 $S_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$로 나타낼 수 있다. 이 식은 연속한 두 분수의 차이이므로 여러 항을 더하면 중간 항들이 소거된다.

NoteBase

계산 과정

$S_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$
따라서
Σ_k=1^100S_k=Σ_k=1^100≤ft((1)/(k+1)-(1)/(k+2))=≤ft(12-13)+·s+≤ft(1101-1102)=12-1102=(25)/(51)
이므로 계산 결과는 $\frac{25}{51}$이다.

선지 판단

① X — $\frac{23}{51}$은 계산 결과 $\frac{25}{51}$과 다르다. 틀린 값 $\frac{23}{51}$은 $\frac{25}{51}$로 고쳐야 한다.
② X — $\frac{51}{101}$은 망원급수의 양 끝 항 12-1102를 계산한 값이 아니다. 틀린 값 $\frac{51}{101}$은 $\frac{25}{51}$로 고쳐야 한다.
③ O — 12-1102=(51-1)/(102)=(50)/(102)=(25)/(51)이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — $\frac{67}{101}$은 계산 결과 $\frac{25}{51}$과 다르다. 틀린 값 $\frac{67}{101}$은 $\frac{25}{51}$로 고쳐야 한다.

오답 포인트

넓이를 구할 때 0≤ x≤1에서 어느 함수가 위에 있는지 먼저 판단해야 한다. 또한 망원급수의 마지막 음의 항은 -1102이므로 이를 빠뜨리거나 -1101로 잘못 쓰면 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

교점을 확인하고 위 함수에서 아래 함수를 뺀 식을 적분한 다음, 일반항을 두 분수의 차이로 바꾸어 처음 항과 마지막 항만 남기는 순서로 판단한다.

암기 포인트

∫_0^1(x^n-x^n+1) dx=1n+1-1n+2이며, 연속한 분수의 차의 합은 중간 항이 소거된다.

NoteBase

문 19. $\sum_{k=1}^{255} \log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)$**의 값은?**

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 4번

출제 포인트

로그의 합을 곱의 로그로 바꾼 뒤, 연속된 분수의 곱이 망원소거되는 성질을 이용해 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: $\sum_{k=1}^{255} \log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)$

구해야 할 값: 로그의 합

주의할 조건: $1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k}$이고, 마지막 분자의 값은 255가 아니라 256이다.

사용할 공식

$$\sum_{k=1}^{n} \log_b a_k = \log_b\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$$

로그의 덧셈법칙 $\log_b x+\log_b y=\log_b(xy)$을 적용하면 각 항의 합을 하나의 곱으로 묶을 수 있다. 이 문제의 곱은 분자와 다음 항의 분모가 차례로 약분되므로 망원소거된다.

계산 과정

1. 각 로그의 진수를 $1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k}$로 고친다.

2. 로그의 합을 곱으로 묶는다.

$$\sum_{k=1}^{255} \log_2\left(\frac{k+1}{k}\right)=\log_2\left(\prod_{k=1}^{255}\frac{k+1}{k}\right)$$

3. 곱을 펼치면 중간 항이 모두 약분된다.

$$\prod_{k=1}^{255}\frac{k+1}{k}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{256}{255}=256$$

4. 따라서 $\log_2 256=\log_2 2^8=8$이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 8이므로 2는 일치하지 않는다. 틀린 값 2를 올바르게 고치면 8이다.

② X — 계산 결과는 8이므로 4는 일치하지 않는다. 틀린 값 4를 올바르게 고치면 8이다.

③ X — 계산 결과는 8이므로 6은 일치하지 않는다. 틀린 값 6을 올바르게 고치면 8이다.

④ O — 망원소거한 곱이 256이고 $256=2^8$이므로 식의 값은 8이다.

NoteBase

오답 포인트

마지막 인덱스가 255라는 이유로 곱의 결과도 255라고 판단하면 안 된다. 각 항이 $\frac{k+1}{k}$이므로 마지막 분자는 256이며, 중간 항을 모두 약분한 결과는 $\frac{256}{1}$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

로그의 합에서 진수가 연속된 $\frac{k+1}{k}$ 꼴이면 먼저 하나의 곱으로 묶고, 곱을 일부 펼쳐 망원소거를 확인한 뒤 남는 처음 분모와 마지막 분자를 계산한다.

암기 포인트

$\sum_{k=1}^{n} \log_b\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log_b(n+1)$이다.

NoteBase

문 20. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$는, f(x)=casesax &(0≤ x≤ 2)\\-2ax+6a &(2≤ x≤ 3)cases일 때, $P(1 \le X \le 2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}$

정답 1번

출제 포인트

확률밀도함수의 전체 넓이가 1이라는 조건으로 상수 a를 구한 뒤, 원하는 구간의 넓이를 적분하여 확률을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $0 \le x \le 2$에서는 $f(x) = ax$, $2 \le x \le 3$에서는 $f(x) = -2ax + 6a$이다.
구해야 할 값: $P(1 \le X \le 2)$이다.
주의할 조건: 확률밀도함수이므로 정의된 전체 구간에서의 적분값이 1이어야 한다.

사용할 공식

확률밀도함수의 정규화 조건은 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$이고, 구간확률은 $P(u \le X \le v) = \int_{u}^{v} f(x)dx$이다. 이 문제에서는 함수식이 $x = 2$에서 나뉘므로 전체 넓이를 두 구간의 적분으로 계산한다.

계산 과정

1. 전체 넓이가 1이라는 조건을 적용한다.
$\int_0^2 axdx + \int_2^3 (-2ax + 6a)dx = 2a + a = 3a = 1$
따라서 $a = \frac{1}{3}$이다.
2. $1 \le X \le 2$에서는 $f(x) = ax$를 적분한다.
$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 axdx = \frac{a}{2}(2^2 - 1^2) = \frac{3a}{2} = \frac{1}{2}$

NoteBase

선지 판단

① O: 계산 결과가 $\frac{1}{2}$이므로 옳다.
② X: $\frac{2}{3}$은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 $\frac{2}{3}$은 올바르게는 $\frac{1}{2}$이다.
③ X: $\frac{3}{4}$은 $2 \le x \le 3$ 구간의 넓이를 정규화에서 빠뜨려 $a = \frac{1}{2}$로 잘못 정할 때 나오는 값이다. 틀린 값 $\frac{3}{4}$은 올바르게는 $\frac{1}{2}$이다.
④ X: 전체 넓이 조건에서 $a = \frac{1}{3}$이고 이를 목표 구간의 적분에 대입하면 $\frac{1}{2}$이므로 $\frac{4}{5}$가 될 수 없다. 틀린 값 $\frac{4}{5}$은 올바르게는 $\frac{1}{2}$이다.

오답 포인트

목표 구간 $1 \le X \le 2$만 바로 적분하기 전에 상수 a를 전체 넓이 1로 먼저 결정해야 한다. 특히 정규화할 때 두 번째 구간 $2 \le x \le 3$의 넓이를 누락하면 ③의 $\frac{3}{4}$을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

구간별 확률밀도함수 문제는 전체 구간을 나누어 적분한 합을 1로 놓고 상수를 결정한 다음, 물은 구간에 해당하는 함수식만 다시 적분하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

확률밀도함수는 전체 넓이가 1이고, 구간확률은 그 구간 아래의 넓이이다.

NoteBase