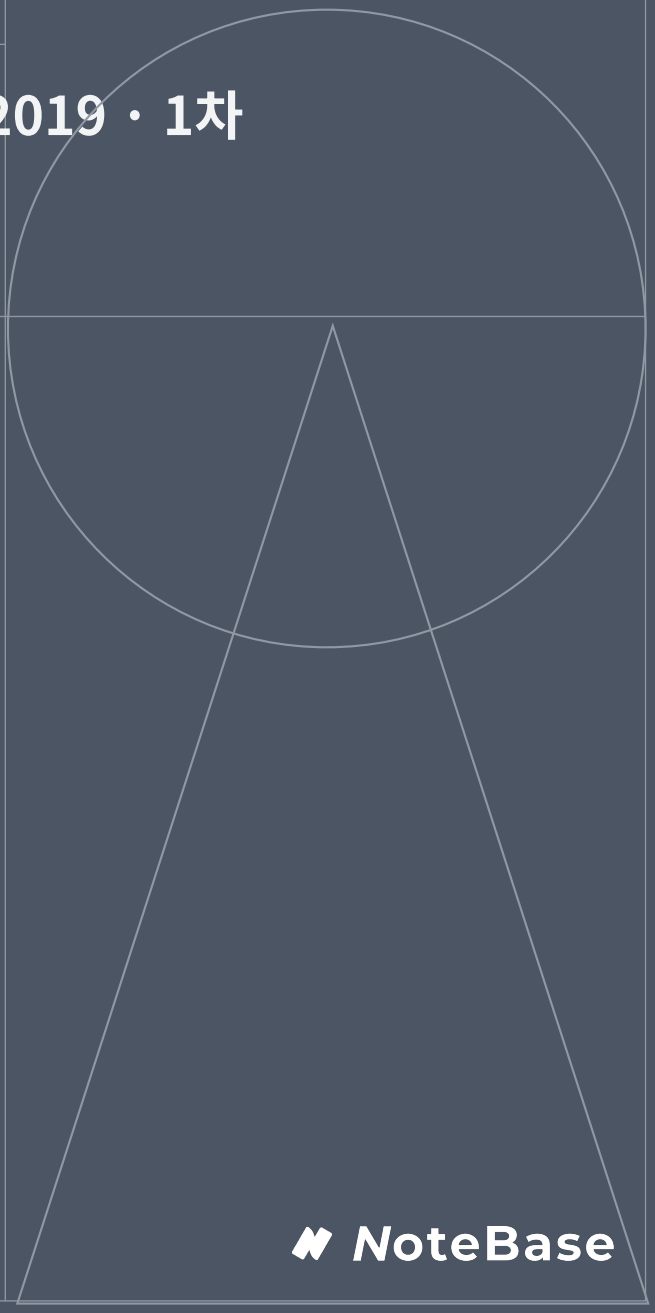
기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2019 · 1차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2019 · 1차

공무원/해경/순경 · 수학 · 2019 · 1차

문 1. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$**의 값은 얼마인가?**

① 1

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{6}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 분자와 분모가 모두 0으로 수렴하는 극한에서 분자를 유리화하여 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $x \to 2$일 때 분자 $\sqrt{x+7}-3$과 분모 $x-2$가 모두 0이 되는 0/0 꼴이다. 구해야 할 값은 이 부정형을 정리한 뒤의 극한값이다.

사용할 공식

켤레식을 곱하는 유리화를 사용한다.
$\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}$
분자의 곱이 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$이므로 근호가 사라지고, 분모의 $x-2$와 약분할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 분자와 분모에 켤레식 $\sqrt{x+7}+3$을 곱한다.
$\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$
2. 분자의 $x-2$를 약분한다.
$\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}\quad(x\neq 2)$
3. 정리된 식에 $x=2$를 대입한다.
_x→2(1)/(√(x+7)+3)=(1)/(9+3)=16

NoteBase

선지 판단

① X — 계산값은 1이 아니라 16이다. 1은 근호 함수의 변화를 일차식의 변화처럼 처리해 계수를 빠뜨린 값이며, 올바르게는 16이다.
② X — 계산값은 12가 아니라 16이다. $\sqrt{x+7}$의 변화율에서 분모의 $\sqrt{x+7}$ 값을 빠뜨리면 나올 수 있으며, 올바르게는 16이다.
③ X — 계산값은 13이 아니라 16이다. 유리화한 분모 $\sqrt{x+7}+3$에서 두 항 중 하나를 빠뜨리면 나올 수 있으며, 올바르게는 16이다.
④ O — 유리화하여 $x-2$를 약분한 뒤 $x=2$를 대입하면 (1)/(3+3)=16이 된다.

오답 포인트

분자와 분모에 $x=2$를 바로 대입하면 0/0이 되지만, 이는 극한값이 0이라는 뜻이 아니다. 켤레식을 곱한 뒤 $x-2$를 약분하고, 유리화한 분모의 두 항 $\sqrt{x+7}+3$을 모두 반영해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

근호의 차가 있는 극한이 0/0 꼴이면 켤레식을 곱해 유리화하고, 공통인자를 약분한 뒤 극한값을 대입한다.

암기 포인트

근호의 차는 켤레식으로 유리화한다: (A- B)(A+ B)=A-B이다.

NoteBase

문 2. 두 점 $A(-2, 6)$, $B(1, -2)$를 잇는 선분 AB와 x축 위의 교점을 P라 할 때, $\overline{AP} : \overline{BP}$의 비는 얼마인가?

① 1 : 1

② 2 : 1

③ 3 : 1

④ 3 : 2

정답 3번

출제 포인트

선분 위 점의 좌표를 매개변수로 나타내고, x축과 만나는 조건인 $y = 0$을 이용해 선분의 비를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 점은 $A(-2, 6)$, $B(1, -2)$이다. 점 P는 선분 AB 위에 있으면서 x축 위에 있으므로 P의 y좌표는 0이다. 구해야 할 값은 $\overline{AP} : \overline{BP}$이다.

사용할 공식

점을 A에서 B로 이동하는 비율을 t라 하면 $P = A + t(B - A)$이고, $\overline{AP} : \overline{BP} = t : (1 - t)$이다. 선분 위의 위치를 나타내는 같은 매개변수 t가 거리의 비도 결정하므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

P의 y좌표는 $6 + t(-2 - 6) = 6 - 8t$이다. P가 x축 위에 있으므로

$6 - 8t = 0$

이고, 따라서 $t = \frac{3}{4}$이다. 그러므로

$\overline{AP} : \overline{BP} = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$

이다.

선지 판단

① X — 1 : 1이면 P는 선분 AB의 중점이어야 하지만 중점의 y좌표는 2이므로 x축 위에 있지 않다. 틀린 비 1 : 1은 3 : 1로 고쳐야 한다.

② X — 2 : 1은 계산된 $t = \frac{3}{4}$에 대응하지 않는다. 틀린 비 2 : 1은 3 : 1로 고쳐야 한다.

③ O — $t = \frac{3}{4}$이므로 $\overline{AP} : \overline{BP} = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$이다.

④ X — 3 : 2는 AP와 BP의 실제 비가 아니다. 틀린 비 3 : 2는 3 : 1로 고쳐야 한다.

NoteBase

오답 포인트

$t=\frac{3}{4}$을 구한 뒤 이를 곧바로 비의 한쪽 값으로만 보는 것이 함정이다. 남은 구간의 비율은 $1-t=\frac{1}{4}$이므로 반드시 $t:(1-t)$를 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

선분과 좌표축의 교점 문제에서는 $P=A+t(B-A)$로 놓고, 해당 좌표축의 조건을 대입해 t를 구한 다음 $AP:PB=t:(1-t)$로 판단한다.

암기 포인트

선분을 전체의 t만큼 이동한 점은 출발점과 도착점까지의 거리를 $t:(1-t)$로 나눈다.

NoteBase

문 3. 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{3n+1} < \frac{a_n+1}{2n+1} < \frac{1}{3n}$을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은 얼마인가?

① $-\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{2}$
③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{3}$

정답 3번

출제 포인트

주어진 부등식에서 a_n의 상한과 하한을 만든 뒤 샌드위치 정리를 적용하여 극한을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{3n+1} < \frac{a_n+1}{2n+1} < \frac{1}{3n}$이다.
구해야 할 값: $\lim_{n\to\infty} a_n$이다.
주의할 조건: 자연수 n에 대해 $2n+1$, $3n$, $3n+1$은 모두 양수이므로 부등식의 방향을 바꾸지 않고 곱할 수 있다.

사용할 공식

샌드위치 정리는 $l_n < a_n < u_n$이고 $\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} u_n = L$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$이라는 원리이다. 주어진 부등식에서 a_n만 남기면 같은 값으로 수렴하는 하한과 상한을 만들 수 있으므로 이 정리를 사용한다.

계산 과정

$2n+1 > 0$이므로 주어진 부등식의 각 변에 $2n+1$을 곱하면
$\frac{2n+1}{3n+1} < a_n + 1 < \frac{2n+1}{3n}$
이다. 각 변에서 1을 빼면
$\frac{-n}{3n+1} < a_n < \frac{1-n}{3n}$
을 얻는다. 양쪽 수열의 극한은 각각
_n→∞(-n)/(3n+1)=-13, _n→∞(1-n)/(3n)=-13
이다. 따라서 샌드위치 정리에 의해
_n→∞a_n=-13
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산된 극한은 -13이므로 -12가 아니다. 올바른 값은 -13이다.
② X — 계산된 극한은 음수인 -13이므로 12가 아니다. 올바른 값은 -13이다.
③ O — 하한과 상한이 모두 -13으로 수렴하므로 샌드위치 정리에 따라 이 값이 맞다.
④ X — 계산된 극한은 음수인 -13이므로 13이 아니다. 올바른 값은 -13이다.

오답 포인트

중간항이 $\frac{a_n+1}{2n+1}$이므로 바로 세 항의 극한을 비교해서는 a_n의 극한이 드러나지 않는다. 먼저 양수인 $2n+1$을 곱하고 1을 빼서 a_n의 하한과 상한을 만들어야 한다. 또한 ④는 크기만 보고 부호를 빠뜨릴 때 고르기 쉬운 값이다.

다시 나오면 이렇게 판단

미지의 수열이 분수의 일부로 들어 있는 부등식에서는 분모의 부호를 확인한 뒤 미지의 수열만 가운데 남도록 식을 정리한다. 그다음 하한과 상한의 극한이 같은지 확인하여 샌드위치 정리를 적용한다.

암기 포인트

같은 극한으로 가는 두 수열 사이에 끼인 수열도 그 극한으로 간다.

NoteBase

문 4. 고속도로를 한 변으로 하는 직사각형 모양의 휴게소를 만들려고 한다. 고속도로에 접하지 않는 세 변의 울타리를 치려고 하는데, 휴게소의 넓이를 5,000 m^2가 되게 하면서 울타리의 길이를 최소가 되게 할 때, 울타리 전체의 최소 길이는 몇 m인가?

① 200 m

② $200\sqrt{10}$ m

③ $400\sqrt{5}$ m

④ $200\sqrt{30}$ m

정답 1번

출제 포인트

넓이가 일정한 직사각형에서 세 변의 길이의 합을 식으로 나타내고, 산술·기하평균을 이용해 그 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

고속도로에 수직인 한 변의 길이를 xm, 고속도로와 평행한 한 변의 길이를 ym라 한다. 넓이 조건은 $xy = 5000$이고, 고속도로에 접한 변에는 울타리를 치지 않으므로 울타리의 전체 길이는 $L = 2x + y$이다. 따라서 $y = \frac{5000}{x}$이고 $L = 2x + \frac{5000}{x}$이다.

사용할 공식

양수 a, b에 대하여 산술·기하평균 관계 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$가 성립하며, 등호는 $a = b$일 때 성립한다. 여기서는 $2x$와 $\frac{5000}{x}$의 곱이 10000으로 일정하므로 이 관계로 합의 최솟값을 구할 수 있다.

계산 과정

$L = 2x + \frac{5000}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{5000}{x}} = 2\sqrt{10000} = 200$ 등호 조건은 $2x = \frac{5000}{x}$이므로 $x^2 = 2500$, $x = 50$이다. 이때 $y = \frac{5000}{50} = 100$이고 실제 울타리 길이는 $2 \cdot 50 + 100 = 200$m이다. 따라서 최소 길이는 200m이다.

선지 판단

① O — 계산한 최소 길이 200m와 일치한다.

② X — $200\sqrt{10}$m는 최솟값과 일치하지 않는다. 틀린 값 $200\sqrt{10}$m는 200m로 고쳐야 한다.

③ X — $400\sqrt{5}$m는 최솟값과 일치하지 않는다. 틀린 값 $400\sqrt{5}$m는 200m로 고쳐야 한다.

④ X — $200\sqrt{30}$m는 최솟값과 일치하지 않는다. 틀린 값 $200\sqrt{30}$m는 200m로 고쳐야 한다.

NoteBase

오답 포인트

고속도로에 접한 한 변까지 포함해 둘레 $2x + 2y$를 최소화하면 안 된다. 실제 울타리는 고속도로에 수직인 두 변과 고속도로 반대편의 한 변뿐이므로 목적식은 $2x + y$이다. 또한 산술·기하평균의 등호 조건을 확인해야 계산한 하한이 실제 최솟값이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

울타리를 치는 변만 골라 목적식을 세우고, 넓이 조건으로 한 변수를 없앤 뒤 산술·기하평균의 등호 조건까지 확인한다.

암기 포인트

세 변만 막는 직사각형에서 넓이가 A이면 $L = 2x + \frac{A}{x}$이고, 최솟값은 $2\sqrt{2A}$이다.

NoteBase

문 5. 이차식 $x^2 + 4xy + y^2 - 6y + k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값은 얼마인가?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 이차식의 계수를 비교하여 두 일차식의 상수항을 정하고, 그 곱으로 k를 구하는 문제이다.

조건 정리

이차항 부분을 $(x + ay)(x + by)$로 보면 $a + b = 4, ab = 1$이다. 전체 식에는 x의 일차항이 없고 y의 일차항은 $-6y$이다. 구해야 할 값은 두 일차식의 상수항의 곱인 k이다.

사용할 공식

두 일차식을 $(x + ay + c)(x + by + d)$로 놓으면

$$(x + ay + c)(x + by + d) = x^2 + (a + b)xy + aby^2 + (c + d)x + (ad + bc)y + cd$$

주어진 식과 같은 다항식이므로 대응하는 항의 계수가 각각 같아야 한다.

계산 과정

1. $a + b = 4, ab = 1$이므로 $a, b = 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$이다.
2. x의 일차항이 없으므로 $c + d = 0$, 즉 $d = -c$이다.
3. $a = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}$로 두면 y의 일차항에서 $ad + bc = c(b - a) = -2\sqrt{3}c = -6$이므로 $c = \sqrt{3}$, $d = -\sqrt{3}$이다.
4. 따라서 $k = cd = (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3$이다. 실제로 주어진 식은 $(x + (2 + \sqrt{3})y + \sqrt{3})(x + (2 - \sqrt{3})y - \sqrt{3})$으로 인수분해된다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $k=-3$과 일치한다.
② X — -1은 상수항의 곱이 아니다. 올바르게는 $k=(\sqrt{3})(-\sqrt{3})=-3$이다.
③ X — 0이면 어느 한 일차식의 상수항이 0이어야 하지만, $-6y$를 만들면서 x의 일차항을 없애는 상수항은 $\sqrt{3}$과 $-\sqrt{3}$이다. 올바른 값은 -3이다.
④ X — 1은 부호가 틀린 값이다. 두 상수항은 서로 반대 부호이므로 그 곱인 k는 -3이다.

오답 포인트

$a+b=4$, $ab=1$에서 얻은 $ab=1$을 곧바로 k로 착각하기 쉽다. ab는 y^2의 계수이고, k는 별도의 상수항 c, d의 곱 cd이다. 또한 $c+d=0$이므로 c, d의 부호가 반대라는 점을 놓치면 3처럼 부호를 잘못 정할 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 일차식에 미지의 계수를 두고 전개한 뒤, 이차항부터 일차항과 상수항 순서로 같은 항의 계수를 비교한다. 특정 일차항이 없으면 그 계수가 0이라는 조건도 반드시 사용한다.

암기 포인트

인수분해의 상수 k는 두 일차식의 상수항의 곱이다. 빠진 항도 계수가 0인 조건이다.

NoteBase

문 6. $\int_{-1}^{2}(x^5+x^3+x+1)dx+\int_{2}^{1}(x^5+x^3+x+1)dx$
위의 정적분 함수를 계산한 값은 얼마인가?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

정답 4번

출제 포인트

정적분의 구간 방향을 바꾸는 성질과 대칭구간에서 홀함수의 정적분이 0이 되는 성질을 이용해 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=x^5+x^3+x+1$이다. 두 적분의 구간을 합치면 $[-1,1]$이 되며, x^5+x^3+x는 홀함수이고 상수항 1은 짝함수이다.

사용할 공식

정적분에는 $\int_{b}^{a}f(x)dx=-\int_{a}^{b}f(x)dx$와 $\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{b}^{c}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx$가 성립한다. 또한 홀함수 $g(x)$에 대하여 $\int_{-a}^{a}g(x)dx=0$이다. 두 적분의 연결 구간을 정리하고 대칭구간에서 홀수차 항을 소거할 수 있으므로 이 성질들을 사용한다.

계산 과정

먼저 둘째 적분의 방향을 바꾸면 다음과 같다.
$\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx-\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx$
따라서
$\int_{-1}^{1}(x^5+x^3+x+1)dx=0+\int_{-1}^{1}1dx=2$
이다.

선지 판단

① X — 계산값은 -1이 아니라 2이므로, -1을 2로 고쳐야 한다.

② X — 홀수차 항의 적분은 0이지만 상수항 1의 적분은 2이다. 따라서 전체 적분값 0을 2로 고쳐야 한다.

③ X — $[-1,1]$에서 상수항 1의 적분은 구간의 길이인 2이다. 따라서 1을 2로 고쳐야 한다.

④ O — 두 적분을 합친 뒤 대칭구간의 홀수차 항을 소거하면 값이 2가 된다.

NoteBase

오답 포인트

둘째 적분 $\int_{2}^{1}$의 상하한을 바꿀 때 음의 부호가 붙는다는 점이 핵심이다. 또한 홀함수 부분만 보고 전체 적분을 0으로 판단하면 상수항 1의 적분을 빠뜨리게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

정적분이 연속된 구간으로 주어지면 먼저 구간의 방향을 통일해 하나의 적분으로 합친다. 그 구간이 원점에 대칭이면 함수를 홀함수 부분과 짝함수 부분으로 나누어 계산한다.

암기 포인트

상하한을 바꾸면 부호가 바뀌고, 대칭구간에서 홀함수의 정적분은 0이다.

NoteBase

문 7. $\sum_{i=1}^{20}\left\{\sum_{j=1}^{10}(i+j+1)\right\}$**의 값은 얼마인가?**

① 3400

② 3500

③ 3600

④ 3700

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 안쪽 합을 먼저 정리한 뒤 바깥쪽 합을 계산하여 이중합의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

안쪽 합은 $j=1$부터 10까지이고, 바깥쪽 합은 $i=1$부터 20까지이다. 안쪽 합에서 i는 고정된 값으로 보아야 한다.

사용할 공식

자연수의 합 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$을 사용한다. 따라서 $\sum_{j=1}^{10} j=55$, $\sum_{i=1}^{20} i=210$이다. 각 합의 범위가 연속된 자연수이므로 이 공식을 사용할 수 있다.

계산 과정

먼저 안쪽 합을 계산하면

$$\sum_{j=1}^{10}(i+j+1)=10i+\sum_{j=1}^{10} j+10=10i+65$$

이다. 이를 바깥쪽 합에 대입하면

$$\sum_{i=1}^{20}(10i+65)=10\sum_{i=1}^{20} i+65\times 20=10\times 210+1300=3400$$

이 된다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 3400이므로 옳다.
② X — 3500은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 3500을 올바르게 고치면 3400이다.
③ X — 3600은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 3600을 올바르게 고치면 3400이다.
④ X — 3700은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 3700을 올바르게 고치면 3400이다.

오답 포인트

항 $+1$은 안쪽 합에서 한 번만 더하는 것이 아니라 j의 10개 값마다 더해지므로 총 10이 된다. 또한 i도 각 j마다 나타나므로 안쪽 합에서 $10i$가 된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

이중합은 안쪽 합의 변수부터 합산하고, 안쪽 합에서 다른 변수는 상수로 처리한 다음 바깥쪽 합을 계산한다.

암기 포인트

안쪽 합에서 i와 상수 1은 각각 10번 반복되므로 $10i$와 10이 된다.

NoteBase

문 8. 확률변수 X의 확률분포표가 다음과 같다.
$E(X)=2$일 때, $V(X)$의 값은 얼마인가?

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

① 1
② 2
③ 3
④ 4

정답 1번

출제 포인트

확률의 총합과 기댓값 조건으로 미지의 확률을 구한 뒤, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$을 이용해 분산을 계산하는 문제이다.

조건 정리

확률변수 X는 1, 2, 3, 4의 값을 가지며 각각의 확률은 a, b, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$이다.
확률의 총합은 1이고, $E(X)=2$이다.
구해야 할 값은 $V(X)$이다.

사용할 공식

확률의 총합: $a+b+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=1$
기댓값: $E(X)=\sum xP(X=x)$
분산: $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
확률의 총합과 주어진 기댓값으로 a, b를 결정할 수 있고, 분산은 제곱의 기댓값에서 기댓값의 제곱을 빼서 구할 수 있으므로 이 공식들을 사용한다.

NoteBase

계산 과정

1. 확률의 총합에서 $a+b=\frac{7}{10}$이다.
2. $E(X)=2$이므로 $a+2b+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2$이고, 따라서 $a+2b=1$이다. 두 식의 차를 구하면 $b=\frac{3}{10}$, $a=\frac{2}{5}$이다.
3. 제곱의 기댓값은 $E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{10}=5$이다.
4. 따라서 $V(X)=5-2^2=1$이다.

선지 판단

① O — 계산한 분산이 1이므로 옳다.
② X — 분산은 2가 아니라 1이다. $E(X)=2$를 분산으로 혼동하면 안 된다.
③ X — 분산은 3이 아니라 1이다. 확률의 총합과 기댓값 조건으로 구한 a, b를 반영하면 $E(X^2)=5$이고, 여기서 $\{E(X)\}^2=4$를 빼야 한다.
④ X — 분산은 4가 아니라 1이다. 4는 $\{E(X)\}^2$이며, 분산을 얻으려면 이를 $E(X^2)=5$에서 빼야 한다.

오답 포인트

②는 주어진 기댓값 2를 그대로 고른 경우이고, ④는 기댓값의 제곱 4를 분산으로 착각한 경우이다. 분산은 $E(X^2)$도 $\{E(X)\}^2$도 아니며 두 값의 차이다.

다시 나오면 이렇게 판단

미지의 확률이 있는 분산 문제는 먼저 확률의 총합과 기댓값 조건으로 미지수를 구하고, 다음으로 $E(X^2)$을 계산한 뒤, 마지막에 $\{E(X)\}^2$을 빼는 순서로 판단한다.

암기 포인트

분산은 '제곱의 평균에서 평균의 제곱을 뺀 값', 즉 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이다.

NoteBase

문 9. 실수 a, b에 대하여 $42^a = 3$, $42^b = 7$일 때, $a + b$의 값은 얼마인가?

① $\log_{21} 10$

② $\log_{21} 42$

③ $\log_{42} 10$

④ $\log_{42} 21$

정답 4번

출제 포인트

같은 밑의 거듭제곱을 곱할 때 지수가 더해지는 성질과 로그의 정의를 이용해 $a + b$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $42^a = 3$, $42^b = 7$이다.
구해야 할 값: $a + b$이다.
주의할 조건: 두 식의 밑이 모두 42이므로 두 식을 곱하면 지수의 합을 바로 만들 수 있다.

사용할 공식

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
$x^y = N \Longleftrightarrow y = \log_x N$
두 등식의 밑이 같고 구하려는 값이 지수의 합이므로 거듭제곱의 곱셈 법칙을 적용한 뒤 로그의 정의로 지수를 나타낸다.

계산 과정

1. 두 식을 곱하면 $42^a \cdot 42^b = 3 \cdot 7$이다.
2. 따라서 $42^{a+b} = 21$이다.
3. 로그의 정의에 의해 $a + b = \log_{42} 21$이다.

선지 판단

① X — $\log_{21} 10$은 $21^x = 10$을 만족하는 지수이므로 주어진 식에서 얻은 $42^{a+b} = 21$과 일치하지 않는다. 올바르게는 $\log_{42} 21$이다.
② X — $\log_{21} 42$는 밑과 진수를 뒤바꾼 값으로, $\log_{42} 21$의 역수이다. 올바르게는 $\log_{42} 21$이다.
③ X — $\log_{42} 10$은 $42^x = 10$을 만족하는 지수이지만, 우변은 $3 + 7$이 아니라 $3 \cdot 7 = 21$이어야 한다. 올바르게는 $\log_{42} 21$이다.
④ O — $42^{a+b} = 21$이므로 로그의 정의에 따라 $a + b = \log_{42} 21$이다.

NoteBase

오답 포인트

지수의 합 $a+b$를 만들 때 우변도 더해 $3+7=10$으로 처리하면 ①이나 ③을 고르게 된다. 같은 밑의 거듭제곱을 곱한 것이므로 우변은 $3\cdot 7=21$이며, $42^{a+b}=21$에서 로그의 밑은 42, 진수는 21이다.

다시 나오면 이렇게 판단

같은 밑을 가진 지수식에서 지수의 합을 구할 때는 식들을 곱해 하나의 거듭제곱으로 합친다. 그다음 밑^지수=결과를 지수=_밑(결과)로 바꾼다.

암기 포인트

지수의 합은 거듭제곱의 곱으로 만들며, $x^y=N$이면 $y=\log_x N$이다.

NoteBase

문 10. 등식 $(a+b+3)x+ab-1=0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$의 값은 얼마인가? (단, a, b는 실수이다.)

① -5

② -2

③ 1

④ -1

정답 1번

출제 포인트

항등식의 계수를 비교하여 $a+b$와 ab를 구한 뒤, 음수의 주제곱근을 복소수 범위에서 처리하는 문제이다.

조건 정리

주어진 등식: $(a+b+3)x+ab-1=0$
구해야 할 값: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
주의할 조건: 등식이 모든 x에 대하여 성립하므로 x의 계수와 상수항이 각각 0이다. 또한 $a+b=-3$, $ab=1$이므로 a와 b는 모두 음수이다.

사용할 공식

항등식의 계수 비교:
$a+b+3=0, \qquad ab-1=0$
완전제곱식의 전개:
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$
모든 x에서 일차식의 값이 0이 되려면 각 계수가 0이어야 하며, 구하려는 식은 완전제곱식 전개로 계산할 수 있다.

계산 과정

1. 계수를 비교하면 $a+b=-3$, $ab=1$이다.
2. 합이 음수이고 곱이 양수이므로 $a<0$, $b<0$이다. $a=-u$, $b=-v$라 두면 $u>0$, $v>0$, $uv=1$이다.
3. 음수의 주제곱근은 $\sqrt{a}=i\sqrt{u}$, $\sqrt{b}=i\sqrt{v}$이므로 $\sqrt{a}\sqrt{b}=i^2\sqrt{uv}=-1$이다.
4. 따라서
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=-3+2(-1)=-5$

NoteBase

선지 판단

① O

계산값이 -5이므로 옳다.

② X

계산값은 -2가 아니라 -5이다. 틀린 값 -2 → 올바르게는 -5이다.

③ X

$ab=1$은 중간 조건일 뿐 구하려는 완전제곱식의 값이 아니다. 틀린 값 1 → 올바르게는 -5이다.

④ X

a와 b가 모두 음수인데 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}=1$로 잘못 처리하면 -1이 나온다. 실제로는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-1$이다. 틀린 값 -1 → 올바르게는 -5이다.

오답 포인트

④의 -1은 실수의 제곱근 곱셈 성질을 음수 a, b에 그대로 적용한 함정이다. $a, b<0$일 때는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 부호가 바뀐다.

다시 나오면 이렇게 판단

항상 성립하는 일차식은 먼저 각 계수를 0으로 놓는다. 그 결과로 문자의 부호까지 확인한 다음, 제곱근의 곱을 처리하고 완전제곱식을 전개한다.

암기 포인트

$a, b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.

NoteBase

문 11. 다음 함수 $y = \sin^2 x - 4\sin x + 3$의 최댓값($M$)과 최솟값($m$)의 합 $M + m$의 값은 얼마인가? (단, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 2번

출제 포인트

$t = \sin x$로 치환한 뒤 t의 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 범위가 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$이므로 $0 \le \sin x \le 1$이다. 따라서 $t = \sin x$로 놓으면 $0 \le t \le 1$이고, 함수는 $f(t) = t^2 - 4t + 3$이 된다. 구해야 할 값은 이 구간에서의 최댓값 M과 최솟값 m의 합이다.

사용할 공식

$f(t) = t^2 - 4t + 3, \qquad f'(t) = 2t - 4$

$0 \le t \le 1$에서 $f'(t) < 0$이므로 $f(t)$는 감소한다. 따라서 최댓값은 왼쪽 끝점 $t = 0$, 최솟값은 오른쪽 끝점 $t = 1$에서 구한다.

계산 과정

1. $t = 0$일 때 $f(0) = 3$이므로 $M = 3$이다.
2. $t = 1$일 때 $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$이므로 $m = 0$이다.
3. 따라서 $M + m = 3 + 0 = 3$이다.

선지 판단

① X — 2는 계산 결과와 다르다. $M + m$의 올바른 값은 3이다.
② O — $M = 3, m = 0$이므로 $M + m = 3$이다.
③ X — 4는 계산 결과와 다르다. $M + m$의 올바른 값은 3이다.
④ X — 5는 계산 결과와 다르다. $M + m$의 올바른 값은 3이다.

오답 포인트

이차함수의 꼭짓점은 $t = 2$이지만, 치환변수의 범위는 $0 \le t \le 1$이므로 꼭짓점이 정의역 밖에 있다. $\sin x$의 범위를 반영하지 않고 꼭짓점만 대입하거나 최댓값과 최솟값의 끝점을 바꾸면 오답이 된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

삼각함수의 값으로 치환한 뒤 치환변수의 범위를 먼저 정하고, 도함수의 부호나 꼭짓점의 위치를 확인하여 구간 안의 끝점과 임계점에서 최댓값·최솟값을 비교한다.

암기 포인트

치환형 최댓값·최솟값 문제에서는 식보다 먼저 치환변수의 범위를 확정한다.

NoteBase

문 12. 두 함수 f, g에 대하여 $f(x)=3x+2$, $(g\circ f)(x)=x^2+1$일 때, $g(11)$의 값은 얼마인가?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

정답 1번

출제 포인트

합성함수의 값 $g(f(x))$이 주어졌을 때, $f(x)=11$이 되는 x를 찾아 $g(11)$을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=3x+2$, $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x^2+1$이다. 구해야 할 값은 $g(11)$이므로 먼저 $f(x)=11$을 만족하는 x를 찾는다.

사용할 공식

$f(x)=11$

$g(11)=g(f(x))=(g\circ f)(x)$

합성함수 식은 g의 입력이 $f(x)$인 값을 알려 주므로, $f(x)$를 11로 만드는 x를 대입한다.

계산 과정

1. $3x+2=11$에서 $3x=9$이므로 $x=3$이다.
2. 따라서 $g(11)=g(f(3))=(g\circ f)(3)$이다.
3. $(g\circ f)(3)=3^2+1=10$이므로 $g(11)=10$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 $g(11)=10$이므로 옳다.

② X — 11은 g에 넣는 입력값이지 함숫값이 아니다. 올바르게는 $g(11)=10$이다.

③ X — 계산 결과는 12가 아니다. 올바르게는 $g(11)=10$이다.

④ X — 계산 결과는 13이 아니다. 올바르게는 $g(11)=10$이다.

오답 포인트

$g(11)$의 11을 합성함수 식의 x에 곧바로 대입하면 안 된다. $(g\circ f)(x)$에서 g의 실제 입력은 $f(x)$이므로, 먼저 $f(x)=11$을 풀어야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

$g(a)$를 구할 때는 먼저 $f(x) = a$를 풀고, 그 해를 $(g \circ f)(x)$에 대입한다.

암기 포인트

합성함수에서 바깥 함수의 입력을 맞추려면 안쪽 함수의 식 $f(x) = a$부터 푼다.

NoteBase

문 13. 자연수 x, y에 대하여 $\log x$와 $\log y$의 정수부분을 각각 m, n이라고 할 때, $m^2 + n^2 = 4$를 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 16200

② 18400

③ 24600

④ 28600

정답 1번

출제 포인트

상용로그의 정수부분이 정해질 때 자연수의 범위를 구하고, 가능한 m, n의 순서쌍별로 x, y의 개수를 세는 문제이다.

조건 정리

자연수 x, y에 대해 $\log x \geq 0$, $\log y \geq 0$이므로 정수부분 m, n은 음이 아닌 정수이다.
$m^2 + n^2 = 4$를 만족하는 순서쌍은 $(m, n) = (2, 0), (0, 2)$뿐이다.

사용할 공식

$[\log a] = k$이면 $k \leq \log a < k + 1$이고, 따라서 $10^k \leq a < 10^{k+1}$이다.
상용로그의 정수부분 조건을 자연수 a의 범위로 바꾸기 위해 이 관계를 사용한다.

계산 과정

1. 정수부분이 0인 자연수는 $1 \leq a < 10$이므로 1부터 9까지 9개이다.
2. 정수부분이 2인 자연수는 $100 \leq a < 1000$이므로 100부터 999까지 900개이다.
3. $(m, n) = (2, 0)$일 때 (x, y)는 $900 \times 9 = 8100$개이고, $(m, n) = (0, 2)$일 때도 8100개이다.
4. 전체 개수는 $8100 + 8100 = 16200$이다.

선지 판단

① O — 가능한 두 경우에서 각각 8100개가 나오므로 전체 순서쌍은 $2 \times 900 \times 9 = 16200$개이다.
② X — 18400은 가능한 (m, n) 두 경우의 개수 합과 일치하지 않는다. 18400이 아니라 16200이 옳다.
③ X — 24600은 정수부분이 0인 자연수 9개와 정수부분이 2인 자연수 900개를 곱해 두 경우를 합한 값이 아니다. 24600이 아니라 16200이 옳다.
④ X — 28600은 $(m, n) = (2, 0), (0, 2)$에서 얻는 순서쌍의 총수와 일치하지 않는다. 28600이 아니라 16200이 옳다.

NoteBase

오답 포인트

$m^2 + n^2 = 4$에서 m, n이 음이 아닌 정수라는 점과 (2, 0), (0, 2)가 서로 다른 순서쌍이라는 점을 함께 반영해야 한다. 또한 정수부분이 0인 자연수에는 1부터 9까지가 포함되고, 정수부분이 2인 자연수는 100부터 999까지이므로 양 끝값을 빠뜨리지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 로그의 정수부분 후보를 구하고, 각 후보를 $10^k \le a < 10^{k+1}$ 꼴의 범위로 바꾼 뒤, 순서가 다른 경우를 각각 세어 합한다.

암기 포인트

a=k10^k≤ a<10^k+1이며, 이 구간의 자연수는 9×10^k개이다.

NoteBase

문 14. 포물선 $y = x^2 + x$를 평행이동 $f : (x, y) \to (x + a,\ y - 1)$에 의해 평행이동시킨 포물선과 직선 $y = 2x - 1$의 두 교점의 중점이 y축 위에 있을 때, a의 값은 얼마인가?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 평행이동한 포물선의 방정식을 세운 뒤, 직선과의 교점의 x좌표에 근과 계수의 관계를 적용하여 중점이 y축 위에 놓이는 조건을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 포물선은 $y = x^2 + x$이고, 평행이동은 $(x, y) \to (x + a,\ y - 1)$이다. 이동한 포물선과 직선 $y = 2x - 1$의 두 교점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 한다. 두 교점의 중점이 y축 위에 있으므로 중점의 x좌표는 0이다.

사용할 공식

평행이동한 포물선의 방정식은 원래 식에서 x를 $x - a$로, y를 $y + 1$로 바꾸어 얻는다. 따라서
$y = (x - a)^2 + (x - a) - 1$
이다. 두 교점의 x좌표는 이 식과 $y = 2x - 1$을 연립하여 얻는 이차방정식의 두 근이므로, 근과 계수의 관계 $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$를 사용할 수 있다.

계산 과정

두 식을 연립하면
$(x - a)^2 + (x - a) - 1 = 2x - 1$
이고, 정리하면
$x^2 - (2a + 1)x + a^2 - a = 0$
이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의해
$x_1 + x_2 = 2a + 1$
이다. 중점의 x좌표가 0이므로
$\frac{x_1 + x_2}{2} = 0$
이고, 이에 따라
$2a + 1 = 0, \qquad a = -\frac{1}{2}$
을 얻는다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a=-1$이면 중점의 x좌표는 $\frac{2a+1}{2}=-\frac{1}{2}$이므로 y축 위에 있지 않다. 틀린 값 -1은 올바르게는 $-\frac{1}{2}$이다.
② O — $a=-\frac{1}{2}$이면 $2a+1=0$이 되어 중점의 x좌표가 0이다.
③ X — $a=0$이면 중점의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이므로 y축 위에 있지 않다. 틀린 값 0은 올바르게는 $-\frac{1}{2}$이다.
④ X — $a=\frac{1}{2}$이면 중점의 x좌표는 1이므로 y축 위에 있지 않다. 틀린 값 $\frac{1}{2}$은 올바르게는 $-\frac{1}{2}$이다.

오답 포인트

평행이동 $(x,y)\to(x+a,\ y-1)$을 식에 반영할 때 이동한 식에는 역으로 $x-a$와 $y+1$을 대입해야 한다. 또한 중점이 y축 위에 있다는 조건은 두 교점의 x좌표가 각각 0이라는 뜻이 아니라 $x_1+x_2=0$이라는 뜻이다.

다시 나오면 이렇게 판단

평행이동한 곡선의 식을 먼저 구하고, 교점의 좌표를 직접 풀기보다 교점의 x좌표를 이차방정식의 두 근으로 본다. 중점이 y축 위에 있으면 두 근의 합을 0으로 두어 매개변수를 결정한다.

암기 포인트

교점의 중점이 y축 위에 있으면 $x_1+x_2=0$이고, 이차방정식에서는 일차항의 계수가 0이 된다.

NoteBase

문 15. 함수 $y = 2(\log_2 x)^2 + a\log_2 \frac{1}{x^2} + b$는 $x = \frac{1}{2}$일 때, 최솟값 1을 가진다. 이때, $a + b$의 값은 얼마인가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

출제 포인트

로그식을 이차함수로 바꾸고, 최솟값을 갖는 지점과 최솟값을 이용해 두 상수 a, b를 구하는 문제이다.

조건 정리

$t = \log_2 x$로 놓는다. $x > 0$일 때 t는 모든 실수가 될 수 있다.
$x = \frac{1}{2}$이면 $t = \log_2 \frac{1}{2} = -1$이다.
함수는 $t = -1$에서 최솟값 1을 가진다.

사용할 공식

로그의 성질에 따라
$\log_2 \frac{1}{x^2} = \log_2 x^{-2} = -2\log_2 x = -2t$
이므로 주어진 함수는
$y = 2t^2 - 2at + b = 2\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{2}$
가 된다. 이차항의 계수가 양수이므로 꼭짓점에서 최솟값을 가지며, 최솟값을 갖는 t는 $\frac{a}{2}$이다.

계산 과정

1. 최솟값을 갖는 지점이 $t = -1$이므로 $\frac{a}{2} = -1$이고, 따라서 $a = -2$이다.
2. $t = -1$, $a = -2$일 때 함수값이 1이라는 조건을 대입하면
$2(-1)^2 - 2(-2)(-1) + b = 1$
$2 - 4 + b = 1$
이므로 $b = 3$이다.
3. 따라서 $a + b = -2 + 3 = 1$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $a+b=1$이므로 옳다.
② X — 2는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 2가 아니라 올바른 값은 1이다.
③ X — 3은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 3이 아니라 올바른 값은 1이다.
④ X — 4는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 4가 아니라 올바른 값은 1이다.

오답 포인트

$\log_2(1/x^2) = -2\log_2 x$에서 음의 부호를 빠뜨리면 꼭짓점의 위치가 달라진다. 또한 $x=\frac{1}{2}$ 자체를 이차식의 변수로 쓰는 것이 아니라, $t=\log_2 x=-1$로 바꾸어 대입해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

로그식이 $\log x$에 관한 이차식이면 $t=\log x$로 치환한 뒤, 꼭짓점의 위치 조건으로 계수를 구하고 최솟값 조건으로 상수항을 구한다.

암기 포인트

At^2+Bt+C에서 $A>0$이면 최솟값을 갖는 지점은 $t=-\frac{B}{2A}$이다.

NoteBase

문 16. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중 원소 2 또는 3을 포함하는 부분집합의 개수는 몇 개인가?

① 16개

② 24개

③ 32개

④ 48개

정답 4번

출제 포인트

두 원소 중 적어도 하나를 포함하는 부분집합의 개수를 포함배제 원리로 구하는 문제이다.

조건 정리

전체 집합의 원소는 6개이다. 원소 2를 포함하는 부분집합과 원소 3을 포함하는 부분집합의 합집합을 구해야 한다. 여기서 '2 또는 3'은 둘 중 적어도 하나를 포함한다는 뜻이므로, 2와 3을 모두 포함하는 경우도 포함한다.

사용할 공식

원소 2를 포함하는 부분집합들의 모임을 B, 원소 3을 포함하는 부분집합들의 모임을 C라 하면

$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$

이다. 두 모임의 개수를 더하면 2와 3을 모두 포함하는 부분집합이 두 번 세어지므로 교집합의 개수를 한 번 빼야 한다.

계산 과정

1. 2를 반드시 포함하고 나머지 5개 원소를 자유롭게 선택하므로 $|B| = 2^5 = 32$이다.
2. 같은 방식으로 $|C| = 2^5 = 32$이다.
3. 2와 3을 모두 반드시 포함하면 나머지 4개 원소를 자유롭게 선택하므로 $|B \cap C| = 2^4 = 16$이다.
4. 따라서 $|B \cup C| = 32 + 32 - 16 = 48$이다.

선지 판단

① X — 16개는 2와 3을 모두 포함하는 부분집합의 개수 2^4일 뿐이다. '16개'는 '48개'로 고쳐야 한다.

② X — 포함배제 계산 결과는 $32 + 32 - 16 = 48$이므로 24개가 아니다. '24개'는 '48개'로 고쳐야 한다.

③ X — 32개는 2처럼 한 원소를 지정하여 포함시키고 나머지 5개를 자유롭게 고르는 경우의 수이다. 또한 2와 3 중 정확히 하나만 포함하는 경우도 32개이지만, 문제의 '또는'에는 둘 다 포함하는 16개도 들어간다. '32개'는 '48개'로 고쳐야 한다.

④ O — 적어도 하나를 포함하는 부분집합은 $32 + 32 - 16 = 48$개이다.

NoteBase

오답 포인트

‘2 또는 3’을 ‘둘 중 정확히 하나’로 해석하면 ③의 32개를 고르게 된다. 이 문항의 ‘또는’은 적어도 하나를 뜻하므로 두 원소를 모두 포함하는 경우도 세어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

‘특정 원소 중 적어도 하나를 포함’이라는 조건은 전체 부분집합에서 그 원소들을 하나도 포함하지 않는 경우를 빼거나, 포함배제 원리를 적용해 판단한다. 이 문제에서는 여집합을 이용해 $2^6 - 2^4 = 48$로도 바로 구할 수 있다.

암기 포인트

‘적어도 하나’는 전체에서 ‘하나도 없음’을 빼면 된다.

NoteBase

문 17. 다음 표는 어느 반에서 안경을 쓴 학생 수와 쓰지 않은 학생 수를 조사한 것이다. 이 반에서 학생을 한 명 뽑을 때, 안경을 쓴 학생이 뽑히는 사건을 A, 남학생이 뽑히는 사건을 B라 하자. 이때, $P(B \mid A)$의 값은 얼마인가?

안경 / 성별	안경을 쓴 학생의 수	안경을 안 쓴 학생의 수	합계
남학생	15	5	20
여학생	10	10	20
합계	25	15	40

① $\frac{1}{5}$
② $\frac{2}{5}$
③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$

정답 3번

출제 포인트

조건부확률의 의미를 이해하고, 안경을 쓴 학생만을 표본공간으로 제한하여 그중 남학생의 비율을 구하는 문제이다.

조건 정리

사건 A: 안경을 쓴 학생이 뽑히는 사건
사건 B: 남학생이 뽑히는 사건
안경을 쓴 학생은 25명이고, 그중 남학생은 15명이다.
구해야 할 값은 안경을 쓴 학생이 뽑혔다는 조건에서 남학생이 뽑힐 확률 $P(B \mid A)$이다.

사용할 공식

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
조건 A가 주어졌으므로 전체 40명이 아니라 안경을 쓴 학생 25명을 기준으로 삼는다. 그중 $A \cap B$에 해당하는 안경을 쓴 남학생은 15명이다.

NoteBase

계산 과정

$P(B \mid A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

선지 판단

① X — $\frac{1}{5}$은 $\frac{15}{25}$를 약분한 값이 아니다. 올바른 값은 $\frac{3}{5}$이다.

② X — $\frac{2}{5} = \frac{10}{25}$는 안경을 쓴 학생 중 여학생의 비율, 즉 $P(B^c \mid A)$이다. 남학생의 조건부확률은 $\frac{3}{5}$이다.

③ O — 안경을 쓴 25명 중 남학생이 15명이므로 $P(B \mid A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$이다.

④ X — $\frac{4}{5} = \frac{20}{25}$는 전체 남학생 수 20명을 분자로 잘못 사용한 값이다. 조건 A와 B를 모두 만족하는 15명을 분자로 사용해야 하므로 올바른 값은 $\frac{3}{5}$이다.

오답 포인트

조건부확률에서는 조건 뒤의 사건 A가 새로운 표본공간이 된다. 전체 학생 수 40명을 분모로 쓰거나, 전체 남학생 수 20명을 분자로 쓰면 안 된다. 이 문항에서는 안경을 쓴 학생 25명을 분모로, 안경을 쓴 남학생 15명을 분자로 사용한다.

다시 나오면 이렇게 판단

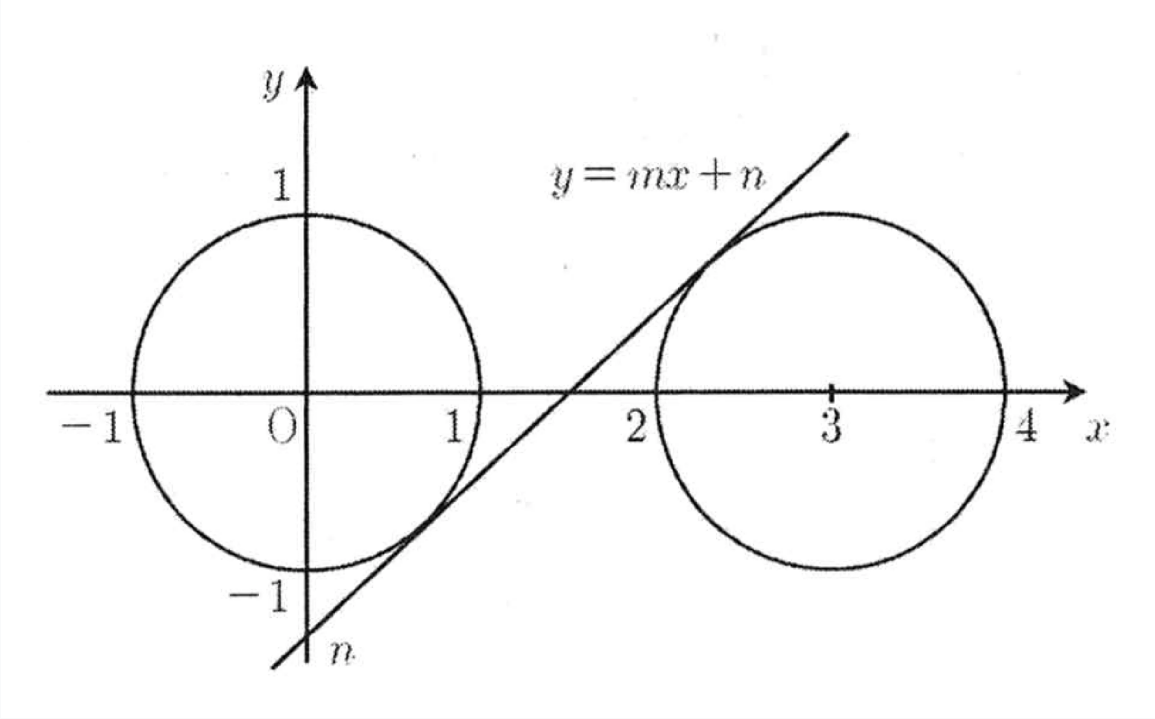
$P(B \mid A)$를 구할 때는 먼저 조건인 A에 해당하는 대상을 분모로 정하고, 그 안에서 $A \cap B$에 해당하는 대상을 분자로 정한다.

암기 포인트

조건부확률은 '조건 사건이 분모, 두 사건의 교집합이 분자'이다. 즉 $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$이다.

NoteBase

문 18. 기울기가 양수인 직선 $y = mx + n$이 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-3)^2 + y^2 = 1$에 동시에 접할 때 두 상수 m, n의 곱 mn의 값은 얼마인가?



① $-\frac{11}{10}$
② $-\frac{6}{5}$
③ $-\frac{13}{10}$
④ $-\frac{7}{5}$

정답 2번

출제 포인트

직선과 원의 접점에서 중심과 직선 사이의 거리가 반지름과 같다는 성질을 이용하여 두 접선 조건을 연립하는 문제이다.

조건 정리

두 원의 중심은 각각 $(0, 0)$, $(3, 0)$이고 반지름은 모두 1이다. 직선은 $mx - y + n = 0$으로 나타낼 수 있다.
그림의 공통 내접선에서는 두 원의 중심이 직선의 서로 반대쪽에 있고, 기울기는 양수이므로 $m > 0$, $n < 0$이다.

사용할 공식

점 (x_0, y_0)과 직선 $Ax + By + C = 0$ 사이의 거리는 $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$이다. 접선이면 중심에서 직선까지의 거리가 반지름 1과 같으므로 이 공식을 사용한다.

NoteBase

계산 과정

$s=\sqrt{m^2+1}$이라 둔다. 원점과 직선 사이의 거리가 1이고 $n<0$이므로 $n=-s$이다. 다른 중심 $(3,0)$은 직선의 반대쪽에 있으므로 $3m+n=s$이다. 따라서 $3m=2s$이고, 양변을 제곱하면 $9m^2=4(m^2+1)$이다. 이를 정리하면 $5m^2=4$이고 $m>0$이므로 $m=\frac{2}{\sqrt{5}}$이다. 따라서 $n=-\sqrt{m^2+1}=-\frac{3}{\sqrt{5}}$이고, $mn=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{6}{5}$이다.

선지 판단

① X — 제시된 값 $-\frac{11}{10}$은 계산 결과 $-\frac{6}{5}$와 다르다. 틀린 값 $-\frac{11}{10}$은 $-\frac{6}{5}$로 고쳐야 한다.
② O — 두 접선 조건을 연립하여 구한 곱이 $mn=-\frac{6}{5}$이므로 일치한다.
③ X — 제시된 값 $-\frac{13}{10}$은 계산 결과 $-\frac{6}{5}$와 다르다. 틀린 값 $-\frac{13}{10}$은 $-\frac{6}{5}$로 고쳐야 한다.
④ X — 제시된 값 $-\frac{7}{5}$은 계산 결과 $-\frac{6}{5}$와 다르다. 틀린 값 $-\frac{7}{5}$은 $-\frac{6}{5}$로 고쳐야 한다.

오답 포인트

거리 공식의 절댓값을 두 원에 똑같은 부호로 풀면 외접선 조건이 된다. 이 문항의 직선은 두 원 사이를 지나므로 중심들이 직선의 서로 반대쪽에 있고, $n=-s$, $3m+n=s$처럼 부호를 반대로 두어야 한다. 또한 $m>0$ 조건으로 제곱 후 생기는 음의 기울기를 제외한다.

다시 나오면 이렇게 판단

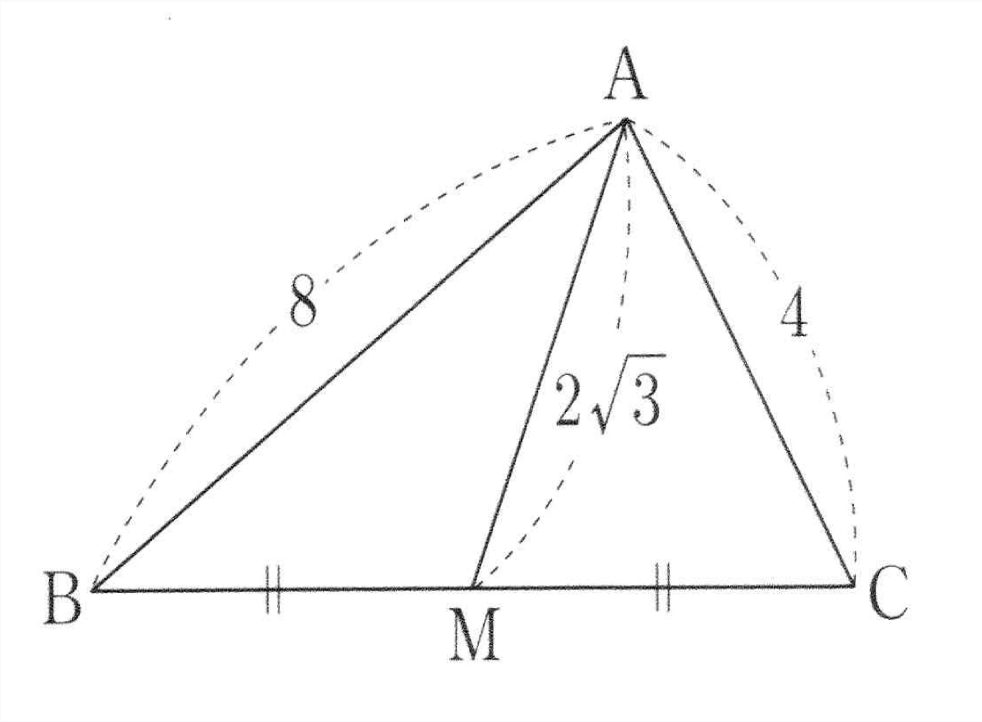
먼저 두 원의 중심이 접선의 같은 쪽인지 반대쪽인지 확인한 뒤, 각 중심에서 직선까지의 거리를 반지름과 같게 둔다. 그다음 부호 조건을 반영하여 연립하고 마지막에 기울기의 부호를 검산한다.

암기 포인트

공통 내접선은 두 중심의 부호가 반대이고, 접선 조건은 중심에서 직선까지의 거리와 반지름이 같다는 것이다.

NoteBase

문 19. 그림에서 점 M은 $\overline{BC}$ 중점이다. $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=4$, $\overline{AM}=2\sqrt{3}$일 때, $\overline{BM}$의 길이는 얼마인가?



① $\sqrt{5}$
② $\sqrt{7}$
③ $2\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{5}$

정답 3번

출제 포인트

삼각형에서 두 변의 길이와 그 두 변 사이 꼭짓점에서 그은 중선의 길이가 주어졌을 때, 아폴로니오스의 중선 정리를 이용해 나머지 변의 절반인 BM의 길이를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $AB=8$, $AC=4$, $AM=2\sqrt{3}$이다.
구해야 할 값: BM의 길이이다.
주의할 조건: M은 BC의 중점이므로 $BM=CM$이고, AM은 변 BC에 대한 중선이다.

NoteBase

사용할 공식

아폴로니오스의 중선 정리에 따라

$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

가 성립한다. M이 BC의 중점이므로 중선 AM과 반변 BM의 관계를 바로 나타내는 이 공식을 사용한다.

계산 과정

주어진 길이를 공식에 대입하면

$8^2 + 4^2 = 2\left((2\sqrt{3})^2 + BM^2\right)$

이다. 따라서

$80 = 2(12 + BM^2) = 24 + 2BM^2$

이므로

$BM^2 = 28$

이다. 길이는 양수이므로 $BM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$이다.

선지 판단

① X — $\sqrt{5}$의 제곱은 5이므로 계산에서 얻은 $BM^2 = 28$을 만족하지 않는다. 틀린 값 $\sqrt{5}$는 올바르게는 $2\sqrt{7}$이다.

② X — $\sqrt{7}$의 제곱은 7이므로 $BM^2 = 28$보다 4배 작다. 틀린 값 $\sqrt{7}$는 올바르게는 $2\sqrt{7}$이다.

③ O — $2\sqrt{7}$의 제곱은 28이므로 $BM^2 = 28$을 만족한다.

④ X — $4\sqrt{5}$의 제곱은 80으로, 이는 $AB^2 + AC^2$를 그대로 제곱 길이로 본 값이다. 중선항을 빼고 2로 나누어야 하므로 올바른 값은 $2\sqrt{7}$이다.

오답 포인트

④처럼 $AB^2 + AC^2 = 80$을 곧바로 BM^2로 놓으면 안 된다. 공식의 오른쪽 전체에 2가 곱해지고 $AM^2 = 12$도 포함되므로, $80 = 2(12 + BM^2)$에서 괄호와 계수를 정확히 처리해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

중점과 중선이 제시되면 아폴로니오스의 중선 정리 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$를 세우고, 제곱값을 대입한 뒤 마지막에 양의 제곱근을 취한다.

암기 포인트

중선 정리의 핵심은 '두 변의 제곱합 = 2 × (중선의 제곱 + 반변의 제곱)'이다.

NoteBase

문 20. x, y가 실수일 때, <보기>의 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ p: $\frac{1}{xy} < 1$ q: $xy > 1$
㉡ p: $x^2 + y^2 > 0$ q: $x + y > 0$
㉢ p: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ q: $x + y = xy$

① ㉠
② ㉡
③ ㉢
④ ㉠, ㉡

정답 4번

간단한 해설

㉠과 ㉡에서는 q가 성립하면 반드시 p도 성립하지만, **그 역은 성립하지 않는다**. ㉠은 곱이 음수인 경우, ㉡은 합이 음수인 경우에도 p를 만족할 수 있다.

보기별 해설

p가 q이기 위한 필요조건이면 $q \Rightarrow p$가 성립한다. 여기에 충분조건은 아니라는 조건이 붙으므로, p는 만족하지만 q는 만족하지 않는 반례도 있어야 한다.

㉠ O: q의 $xy > 1$이 성립하면 $0 < \frac{1}{xy} < 1$이므로 p도 성립한다. 그러나 **곱이 음수인 경우에도** p는 성립한다. 예를 들어 $x = 1$, $y = -1$이면 $\frac{1}{xy} = -1 < 1$이지만 $xy = -1$이므로 q는 성립하지 않는다. 따라서 p는 q의 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

㉡ O: 실수의 제곱은 0 이상이고, $x^2 + y^2 = 0$인 경우는 $x = y = 0$일 때뿐이다. q의 $x + y > 0$이 성립하면 두 수가 모두 0일 수 없으므로 $x^2 + y^2 > 0$, 즉 p가 성립한다. 반면 $x = -1$, $y = 0$이면 $x^2 + y^2 = 1 > 0$이지만 $x + y = -1$이므로 q는 성립하지 않는다. 따라서 p는 q의 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

㉢ X: p가 성립하려면 **두 분모가 모두 0이 아니어야 한다**. 이때 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$의 양변에 xy를 곱하면 $x + y = xy$가 되므로 $p \Rightarrow q$는 성립한다. 그러나 $x = y = 0$이면 q의 등식은 성립하지만 p의 분수는 정의되지 않아 p를 만족하지 않는다. 따라서 $q \Rightarrow p$는 성립하지 않으며, p는 q의 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

요구한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 관계에 해당하는 보기는 ㉠, ㉡이며, 이는 ④의 조합이다.

NoteBase