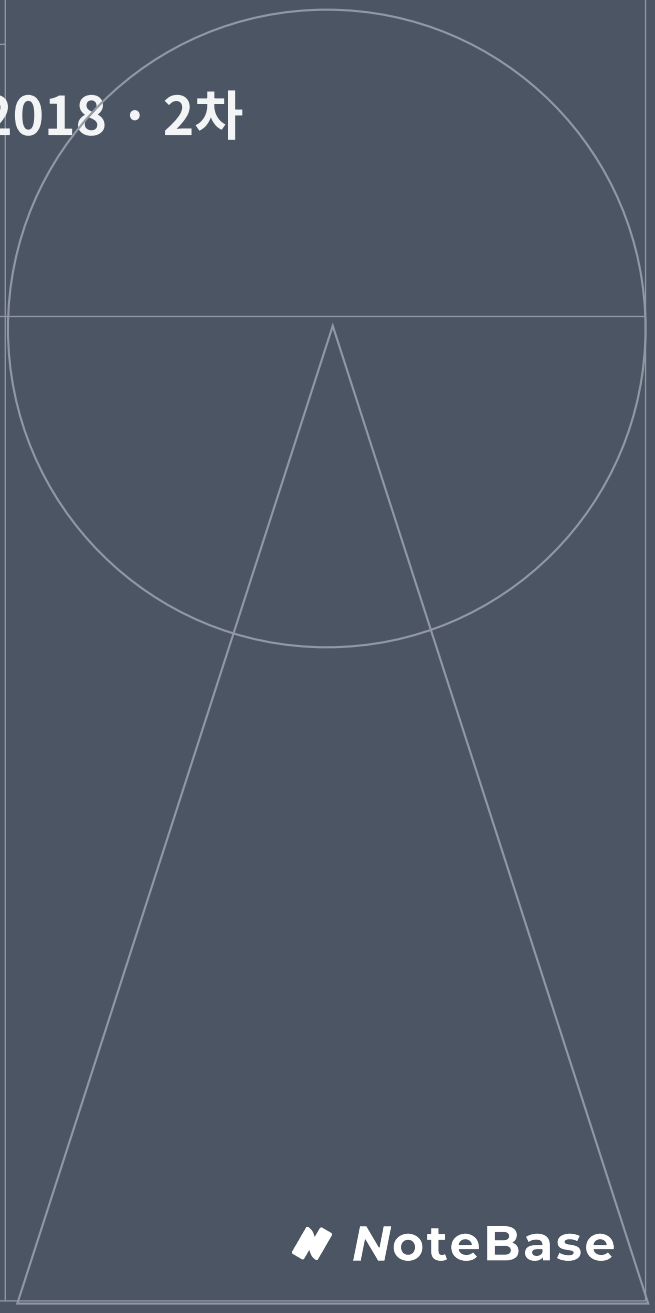
기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2018 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2018 · 2차

공무원/해경/순경 · 수학 · 2018 · 2차

문 1. 두 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7,8\}$에 대하여 $X-B=\emptyset$, $(B-A)\cup X=X$를 만족하는 집합 X의 개수는?

① 4

② 6

③ 8

④ 16

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 집합의 차와 합집합 조건을 포함관계로 바꾸어 집합 X의 개수를 구하는 문제이다.

조건 정리

$X-B=\emptyset$이므로 $X\subseteq B$이다. 또한 $(B-A)\cup X=X$이므로 $B-A\subseteq X$이다.
$B-A=\{6,7,8\}$, $B\cap A=\{4,5\}$이므로 X는 6, 7, 8을 반드시 포함하고 4, 5는 각각 포함 여부를 자유롭게 정할 수 있다.

사용할 공식

필수 원소를 모두 포함한 상태에서 선택 가능한 원소가 n개이면 가능한 집합의 수는 2^n개이다. 각 선택 원소마다 포함과 제외의 두 경우가 서로 독립적으로 생기기 때문이다.

계산 과정

1. $X-B=\emptyset$에서 $X\subseteq B=\{4,5,6,7,8\}$를 얻는다.
2. $(B-A)\cup X=X$에서 $B-A=\{6,7,8\}\subseteq X$를 얻는다.
3. 따라서 $X=\{6,7,8\}\cup Y$이고, Y는 $\{4,5\}$의 임의의 부분집합이다.
4. Y의 수는 $2^2=4$이므로 가능한 X의 개수는 4개이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 필수 원소 6, 7, 8에 4와 5의 포함 여부를 각각 정하면 $2^2 = 4$개가 된다.
② X — 6개가 아니라 4개이다. 선택 가능한 원소는 4와 5의 2개뿐이므로 올바른 값은 $2^2 = 4$이다.
③ X — 8개가 아니라 4개이다. 필수 원소 6, 7, 8까지 선택 가능한 원소로 세어 2^3으로 계산하면 안 되며, 올바른 값은 $2^2 = 4$이다.
④ X — 16개가 아니라 4개이다. 집합 B의 원소 5개 중 6, 7, 8은 반드시 포함해야 하므로 자유롭게 선택하는 원소는 2개이고, 올바른 값은 $2^2 = 4$이다.

오답 포인트

$B - A = \{6, 7, 8\}$의 원소들은 선택 대상이 아니라 반드시 X에 들어가는 원소이다. 이를 자유 선택 원소로 잘못 세면 ③의 8이 나오고, B의 부분집합을 제한 없이 세면 조건을 무시하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

차집합이 공집합이라는 조건은 부분집합 관계로, $C \cup X = X$라는 조건은 $C \subseteq X$로 바꾼다. 그다음 반드시 포함할 원소와 자유롭게 선택할 원소를 구분하여 자유 선택 원소의 수만큼 2의 거듭제곱을 계산한다.

암기 포인트

X-B= X B, C X=X C X이다.

NoteBase

문 2. 두 집합 $A=\{a, 2a\}, B=\{b, b^2\}$에 대하여 $A=B$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은? (단, $0<b<1$)

① 2
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{8}$

정답 2번

출제 포인트

두 원소로 이루어진 집합의 상등에서 가능한 원소의 대응을 나누어 확인하고, 주어진 범위 조건으로 올바른 대응을 결정하는 문제이다.

조건 정리

두 집합이 같으므로 A의 원소 a, $2a$는 순서와 관계없이 B의 원소 b, b^2와 각각 같아야 한다. 또한 $0<b<1$이므로 $b^2<b$이다.

사용할 원리

집합은 원소의 순서를 구분하지 않으므로 두 대응을 모두 확인한다.
(1) $a=b$, $2a=b^2$
(2) $a=b^2$, $2a=b$
첫 번째 대응은 $2b=b^2$, 즉 $b=2$가 되어 $0<b<1$에 어긋난다. 따라서 두 번째 대응을 사용한다.

계산 과정

두 번째 대응에서 $2a=b$이고 $a=b^2$이므로
$2b^2=b$
이다. $b>0$이므로 양변을 b로 나누면 $2b=1$, 따라서 $b=\frac{1}{2}$이다. 이어서 $a=b^2=\frac{1}{4}$이므로
$\frac{a}{b}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$
이다.

선지 판단

① X — 2는 $\frac{a}{b}$가 아니라 그 역수인 $\frac{b}{a}$의 값이다. 올바른 값은 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$이다.
② O — 계산한 $\frac{a}{b}$의 값이 $\frac{1}{2}$와 일치한다.
③ X — $\frac{1}{4}$은 비 $\frac{a}{b}$가 아니라 a의 값이다. 올바른 비는 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$이다.
④ X — $\frac{1}{8}$은 ab의 값이다. 올바른 비는 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$이다.

NoteBase

오답 포인트

집합의 원소가 적힌 순서대로만 대응시키면 범위 조건에 어긋나는 $b = 2$가 나온다. 또한 구한 a, b를 최종 비와 혼동하면 ③이나 ④를 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 원소 집합의 상등 문제에서는 가능한 두 대응을 모두 식으로 세운 뒤, 범위 조건을 만족하는 경우만 남기고 요구한 값을 다시 계산한다.

암기 포인트

집합은 순서가 없으므로 원소 대응을 바꾸어 확인하고, 조건에 맞지 않는 해는 제외한다.

NoteBase

문 3. 다항식 $P(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.
$P(x)$를 $(x-1)^2(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(5)$의 값은?

㉠ $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누면 나머지가 $2x-1$이다.
㉡ $P(x)$를 $(x+1)$로 나누면 나머지가 3이다.

① 32
② 33
③ 34
④ 35

정답 2번

출제 포인트

나머지정리와 미분을 이용하여 중근을 포함한 나눗셈의 나머지 조건을 세우고, 나머지 다항식을 결정하는 문제이다.

조건 정리

나누는 다항식 $(x-1)^2(x+1)$의 차수는 3이므로 $R(x)=ax^2+bx+c$로 둔다.
㉠에서 $P(x)-(2x-1)$은 $(x-1)^2$의 배수이므로 $P(1)=1$, $P'(1)=2$이다. 따라서 $R(1)=1$, $R'(1)=2$이다.
㉡에서 $P(-1)=3$이므로 $R(-1)=3$이다.

사용할 공식

$P(x)$를 $(x-r)^2$으로 나눈 나머지가 $L(x)$이면 $P(r)=L(r)$, $P'(r)=L'(r)$이다.
또한 $P(x)$와 $R(x)$의 차는 $(x-1)^2(x+1)$의 배수이므로 $x=1$에서 함수값과 미분값이 같고, $x=-1$에서 함수값이 같다. 이 때문에 세 조건으로 이차식 $R(x)$의 세 계수를 결정할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

$R(x) = ax^2 + bx + c$이면
$R(1) = a + b + c = 1$
$R'(1) = 2a + b = 2$
$R(-1) = a - b + c = 3$
첫째 식에서 셋째 식을 빼면 $2b = -2$이므로 $b = -1$이다. 이어서 $2a + b = 2$에 대입하면 $a = \frac{3}{2}$이고, $a + b + c = 1$에 대입하면 $c = \frac{1}{2}$이다.
따라서
$R(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$
이고,
$R(5) = \frac{3}{2} \cdot 25 - 5 + \frac{1}{2} = 33$
이다.

선지 판단

① X — 32는 계산 결과 33과 일치하지 않는다. ①의 32는 틀린 값이며 올바른 값은 33이다.
② O — 위 조건으로 구한 $R(5)$가 33이므로 옳다.
③ X — 34는 계산 결과 33과 일치하지 않는다. ③의 34는 틀린 값이며 올바른 값은 33이다.
④ X — 35는 계산 결과 33과 일치하지 않는다. ④의 35는 틀린 값이며 올바른 값은 33이다.

오답 포인트

㉠을 단순히 $R(1) = 1$이라는 한 조건으로만 처리하면 이차식의 계수를 결정할 수 없다. 제수가 $(x-1)^2$처럼 중근을 가지므로 함수값 조건과 함께 미분값 조건 $R'(1) = 2$도 사용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

나누는 식의 차수보다 낮게 나머지의 차수를 정한 뒤, 일차인수에서는 함수값 조건을 세우고 중복된 일차인수에서는 함수값과 미분값 조건을 함께 세운다. 마지막에는 구한 나머지를 각 조건에 다시 대입하여 검산한다.

암기 포인트

$(x-r)^2$으로 나눈 나머지 조건은 $x = r$에서 함수값과 미분값 두 개를 준다.

NoteBase

문 4. 유리함수 $y=\frac{2x+5}{x+1}$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동 한 후, 원점에 대하여 대칭이동 하였더니 유리함수 $y=b+\frac{k}{x-5}$의 그래프와 겹쳐졌다. 이때, $a+b+k$의 값은? (단, a, b, k는 정수이다.)

① -6

② -4

③ 4

④ 6

정답 1번

출제 포인트

유리함수를 표준형으로 고친 뒤 평행이동과 원점대칭을 차례로 적용하여 상수항, 분모의 기준값, 분자의 상수를 비교하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=\frac{2x+5}{x+1}=2+\frac{3}{x+1}$이다.
그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 3만큼 옮긴 뒤 원점에 대하여 대칭이동한다.
최종 함수 $y=b+\frac{k}{x-5}$와 항별로 비교하여 a, b, k를 구한다.

사용할 공식

함수 $y=f(x)$를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=f(x-a)+3$이 된다.
그 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 $y=-g(-x)$가 된다. 원점대칭은 그래프의 각 점 (x, y)를 $(-x, -y)$로 보내기 때문이다.

계산 과정

먼저 평행이동한 함수를 $g(x)$라 하면
$g(x)=f(x-a)+3=5+\frac{3}{x-a+1}$
이다. 이를 원점에 대하여 대칭이동하면
$-g(-x)=-5+\frac{3}{x+a-1}$
이 된다. 최종 함수 $b+\frac{k}{x-5}$와 비교하면
$x+a-1=x-5, \quad b=-5, \quad k=3$
이므로 $a=-4$이다. 따라서
$a+b+k=-4-5+3=-6$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $a+b+k=-6$이므로 옳다.
② X — -4는 a의 값일 뿐 $a+b+k$의 값이 아니다. 올바른 합은 -6이다.
③ X — 상수 $b=-5$와 $k=3$까지 포함하여 계산하면 4가 아니라 -6이다. 올바르게는 $a+b+k=-6$이다.
④ X — 원점대칭 뒤 상수항은 -5이고 분수항의 분자는 3이므로 합은 6이 아니라 -6이다. 올바르게는 $a+b+k=-6$이다.

오답 포인트

②의 -4는 분모를 비교해 얻은 a만을 답으로 고를 때 나오는 함정이다. 또한 원점대칭에서는 단순히 함수 전체에 마이너스만 붙이는 것이 아니라 입력도 x에서 $-x$로 바꾸어 $-g(-x)$를 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

유리함수를 먼저 $q+\frac{r}{x-p}$ 꼴로 정리한 뒤 평행이동은 입력과 출력에, 원점대칭은 $-g(-x)$에 적용한다.
마지막에는 상수항, 분모, 분자를 각각 비교하고 문제에서 요구한 합까지 계산한다.

암기 포인트

오른쪽으로 a만큼 이동하면 $f(x-a)$, 원점대칭은 $-f(-x)$이다.

NoteBase

문 5. 방정식 $|x-1|+|2x-5|=10$을 만족하는 모든 x의 값의 합은?

① $-\frac{10}{3}$

② -2

③ $-\frac{4}{3}$

④ 4

정답 4번

출제 포인트

절댓값의 기준점에서 수직선을 구간으로 나눈 뒤 각 구간의 일차방정식을 풀어 모든 해의 합을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: $|x-1|+|2x-5|=10$
구해야 할 값: 방정식을 만족하는 모든 x의 합
주의할 조건: 절댓값 안이 0이 되는 기준점은 $x=1, x=\frac{5}{2}$이므로 세 구간으로 나누며, 각 구간에서 얻은 해가 그 구간에 속하는지 확인한다.

사용할 공식

절댓값은 $a \geq 0$이면 $|a|=a$, $a<0$이면 $|a|=-a$이다. 따라서 $x-1$과 $2x-5$의 부호가 일정한 구간마다 절댓값을 풀어 쓴다.

계산 과정

1. $x<1$에서는 $(1-x)+(5-2x)=10$이므로 $6-3x=10$, 따라서 $x=-\frac{4}{3}$이다. 이 값은 $x<1$을 만족한다.
2. $1 \leq x<\frac{5}{2}$에서는 $(x-1)+(5-2x)=10$이므로 $4-x=10$, 따라서 $x=-6$이다. 이 값은 해당 구간에 속하지 않으므로 해가 아니다.
3. $x \geq \frac{5}{2}$에서는 $(x-1)+(2x-5)=10$이므로 $3x-6=10$, 따라서 $x=\frac{16}{3}$이다. 이 값은 $x \geq \frac{5}{2}$를 만족한다.
4. 모든 해의 합은 $-\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{12}{3}=4$이다.

NoteBase

선지 판단

① X
- $-\frac{10}{3}$은 모든 해의 합이 아니다. 틀린 값 $-\frac{10}{3}$ → 올바르게는 두 해 $-\frac{4}{3}$, $\frac{16}{3}$의 합인 4이다.

② X
- -2는 모든 해의 합이 아니다. 틀린 값 -2 → 올바르게는 $-\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=4$이다.

③ X
- $-\frac{4}{3}$은 두 해 중 하나일 뿐 모든 해의 합이 아니다. 틀린 값 $-\frac{4}{3}$ → 올바르게는 다른 해 $\frac{16}{3}$도 더한 4이다.

④ O
- 방정식의 두 해를 더하면 $-\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=4$이므로 옳다.

오답 포인트

③의 $-\frac{4}{3}$처럼 한 구간에서 구한 해만 답으로 고르기 쉽다. 또한 가운데 구간에서 나온 $x=-6$은 그 구간의 조건을 만족하지 않으므로 해에 포함하면 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

절댓값 안이 0이 되는 점을 먼저 찾고, 구간별로 절댓값을 풀어 방정식을 계산한 뒤, 각 후보가 해당 구간에 속하는지 검산하고 유효한 해만 합한다.

암기 포인트

절댓값 방정식은 기준점 찾기 → 구간 분리 → 후보 계산 → 구간 검산의 순서로 판단한다.

NoteBase

문 6. 두 함수 f, g에 대하여, $f(x)=3x+2$, $(g\circ f)(x)=x^2+1$일 때, $g(14)$의 값은?

① 17

② 18

③ 19

④ 20

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 합성함수의 입력 관계를 이용해 $g(14)$의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=3x+2$이고, 합성함수는 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x^2+1$이다. 구해야 할 값은 $g(14)$이므로 먼저 $f(x)=14$가 되는 x를 찾는다.

사용할 공식

합성함수의 정의는 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$이다. 따라서 $f(x)=14$인 x를 구하면 $g(14)=(g\circ f)(x)$로 바꾸어 계산할 수 있다.

계산 과정

$3x+2=14$

$3x=12, \quad x=4$

따라서

$g(14)=g(f(4))=(g\circ f)(4)=4^2+1=17$

선지 판단

① O — 계산 결과가 17이므로 옳다.

② X — 18은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 17이다.

③ X — 19는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 17이다.

④ X — 20은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 17이다.

계산 결과 $g(14)=17$이므로 정답은 1번이다.

오답 포인트

$(g\circ f)(x)=x^2+1$에서 x는 함수 g에 직접 들어가는 값이 아니라 f에 들어가는 값이다. $g(14)$를 구할 때는 14를 곧바로 x^2+1에 대입하지 않고, $f(x)=14$가 되는 $x=4$를 먼저 찾는다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

$g(a)$를 묻고 $(g \circ f)(x)$가 주어지면, 먼저 $f(x) = a$를 풀고 그 x를 합성함수 식에 대입한다.

암기 포인트

$g(a)$는 $f(x) = a$인 입력을 찾아 $(g \circ f)(x)$로 계산한다.

NoteBase

문 7. 다음 <보기>에서 수렴하는 것만을 고른 것은?

(보기)

㉠ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

㉡ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3^3}{5^n}$

㉢ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

㉣ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉢

④ ㉢, ㉣

정답 3번

출제 포인트

각 무한급수에 조화급수, 등비급수, 부분분수, 유리화에 의한 망원급수 판정을 적용하여 수렴 여부를 구분하는 문제이다.

조건 정리

㉠은 조화급수이고, ㉡은 두 등비급수의 합으로 나눌 수 있다. ㉢은 부분분수로 망원급수를 만들 수 있고, ㉣은 분모를 유리화하면 망원합이 나타난다. 각 급수의 일반항이 0으로 가는지만 보는 데 그치지 않고 부분합이 유한한 값으로 수렴하는지 확인해야 한다.

사용할 공식

등비급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$에서 $|r| < 1$이면 수렴한다. 또한

$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

이고,

(1)/(√(n+1)+ n)=√(n+1)- n

이다. 앞뒤 항이 소거되는 급수는 부분합의 극한으로 수렴 여부를 판정한다.

NoteBase

계산 과정

㉠ Σ_n=1^∞1n은 조화급수이므로 발산한다.
㉡은
Σ_n=1^∞((-1)^n+3^3)/(5^n)=Σ_n=1^∞≤ft(-15)^n+27Σ_n=1^∞≤ft(15)^n
으로 나뉜다. 두 등비급수의 공비의 절댓값이 모두 1/5 < 1이므로 수렴한다.
㉢의 제N부분합은
12Σ_n=1^N≤ft(1n-1n+2)=12≤ft(1+12-1N+1-1N+2)→34
이므로 수렴한다.
㉣의 제N부분합은
Σ_n=1^N(√(n+1)- n)=√(N+1)-1
이고 이는 무한대로 커지므로 발산한다. 따라서 수렴하는 것은 ㉡, ㉢이다.

선지 판단

① X — ㉠, ㉡ 중 ㉠은 조화급수이므로 발산한다. 틀린 조합 '㉠, ㉡'은 '㉡, ㉢'으로 고쳐야 한다.
② X — ㉠, ㉢ 중 ㉠은 발산하고 ㉢만 수렴한다. 틀린 조합 '㉠, ㉢'은 '㉡, ㉢'으로 고쳐야 한다.
③ O — ㉡은 공비의 절댓값이 1/5인 등비급수들의 합이고, ㉢은 합이 3/4로 가는 망원급수이므로 둘 다 수렴한다.
④ X — ㉢은 수렴하지만 ㉣의 부분합은 $\sqrt{N+1}-1$로 무한히 커진다. 틀린 조합 '㉢, ㉣'은 '㉡, ㉢'으로 고쳐야 한다.

오답 포인트

㉣의 일반항이 0으로 간다는 사실만으로 급수가 수렴한다고 판단하면 4번을 고르기 쉽다. 급수의 일반항이 0으로 가는 것은 수렴의 필요조건일 뿐 충분조건이 아니다. 유리화한 뒤 부분합 $\sqrt{N+1}-1$이 발산함을 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 조화급수와 등비급수의 표준형을 확인하고, 곱 형태는 부분분수로, 근호 차이는 유리화로 망원급수를 만든다. 마지막에는 일반항이 아니라 부분합의 극한이 유한한지를 판정한다.

암기 포인트

조화급수는 발산하고, $|r|<1$인 등비급수는 수렴한다. '일반항이 0'은 급수 수렴의 필요조건일 뿐이며, 망원급수는 부분합의 남은 항을 확인한다.

NoteBase

문 8. 평면위의 세 점 $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(0,-2)$가 있고 점 A를 지나는 직선 l이 있다. 직선 l에서 점 B까지의 거리와 직선 l에서 점 C까지의 거리의 합이 최대가 되는 값은?

① $\sqrt{5}$
② $2\sqrt{5}$
③ $3\sqrt{5}$
④ $4\sqrt{5}$

정답 3번

출제 포인트

한 점을 지나는 직선까지의 거리를 단위 법선벡터와의 내적으로 나타내고, 두 절댓값의 합의 최댓값을 구하는 문제이다.

조건 정리

점 A를 기준으로 하면 $\vec{AB}=(2,2)$, $\vec{AC}=(-1,-4)$이다.
직선 l의 단위 법선벡터를 n이라 하면, 점 B, C에서 직선 l까지의 거리는 각각 | n·AB|, | n·AC|이다.

사용할 공식

두 벡터를 u, v라 할 때
_\| n\|=1≤ft(| n· u|+| n· v|)=\\| u+ v\|,\| u- v\|\.
절댓값의 부호 조합에 따라 내적의 대상이 u+ v 또는 u- v가 되고, 단위벡터와의 내적은 그 벡터와 같은 방향일 때 벡터의 크기까지 커질 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

u=(2,2), v=(-1,-4)로 놓는다.
u+ v=(1,-2), \| u+ v\|=√(1^2+(-2)^2)=5.
u- v=(3,6), \| u- v\|=√(3^2+6^2)=35.
따라서 두 거리의 합의 최댓값은 \5,35\=35이다.

선지 판단

① X — 5는 \| u+ v\|일 뿐 두 부호 조합 중 큰 값이 아니다. ①의 5는 틀린 값이며, 올바른 최댓값은 35이다.
② X — 계산된 두 후보 5, 35 중 25는 없다. ②의 25는 틀린 값이며, 올바른 최댓값은 35이다.
③ O — \| u- v\|=35가 두 거리의 합이 가질 수 있는 가장 큰 값이다.
④ X — 두 거리의 합은 \\| u+ v\|,\| u- v\|\=35를 넘을 수 없다. ④의 45는 틀린 값이며, 올바른 최댓값은 35이다.

NoteBase

오답 포인트

절댓값을 같은 부호로만 처리하면 \| u+ v\|=5만 구해 ①을 고르기 쉽다. 두 거리의 합에서는 같은 부호와 반대 부호를 모두 고려하여 u+ v와 u- v의 크기를 비교해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

한 점을 지나는 직선까지의 거리 합을 최대로 하는 문제에서는 그 점을 기준으로 두 벡터를 만든 뒤, 두 벡터의 합과 차의 크기 중 큰 값을 선택한다.

암기 포인트

직선까지의 두 거리 합의 최댓값은 기준 벡터의 합·차 중 더 긴 것의 길이이다.

NoteBase

문 9. $4^{\log_2 3} + \log_3 27$**의 값은?**

① 6

② 9

③ 12

④ 15

정답 3번

출제 포인트

지수와 로그의 역관계 및 밑의 거듭제곱 변환을 이용해 식의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $4^{\log_2 3} + \log_3 27$이다. 첫째 항의 지수는 $\log_2 3$까지만이며, $\log_3 27$은 첫째 항과 더하는 별도의 항이다.

사용할 공식

$a^{\log_a b} = b$이고, $(a^m)^{\log_a b} = b^m$이다. 또한 $27 = 3^3$이므로 $\log_3 27 = 3$이다. 밑 4를 2^2으로 바꾸면 로그의 밑 2와 맞출 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$따라서
$4^{\log_2 3} + \log_3 27 = 9 + 3 = 12$이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 6이 아니라 12이다. 올바른 값은 12이다.
② X — 계산 결과는 9가 아니라 12이다. 9는 첫째 항 $4^{\log_2 3}$의 값일 뿐이며, 둘째 항 3을 더해야 한다. 올바른 값은 12이다.
③ O — $9 + 3 = 12$이므로 식의 값과 일치한다.
④ X — 계산 결과는 15가 아니라 12이다. 올바른 값은 12이다.

오답 포인트

지수의 범위를 잘못 읽거나 첫째 항만 계산하면 오답이 된다. 특히 ②의 9는 $4^{\log_2 3}$만 계산하고 $\log_3 27 = 3$을 더하지 않은 값이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

거듭제곱의 밑과 로그의 밑을 먼저 맞춘 뒤 $a^{\log_a b} = b$를 적용하고, 지수의 범위와 식의 나머지 항을 끝까지 확인한다.

암기 포인트

$a^{\log_a b} = b$, $(a^m)^{\log_a b} = b^m$이다.

문 10. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_6 = 17$이고 $a_{20} = -25$일 때, 합이 최대가 되는 항은?

① 제 10항

② 제 11항

③ 제 12항

④ 제 13항

정답 2번

출제 포인트

등차수열의 일반항을 구한 뒤, 부분합은 다음 항이 양수인 동안 증가하고 음수가 되는 순간부터 감소한다는 성질로 합이 최대가 되는 항을 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $a_6 = 17$, $a_{20} = -25$이다.
구해야 할 값: 부분합 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$이 최대가 되는 n이다.
주의할 조건: 특정 항의 값이 아니라 첫째 항부터 어느 항까지 더한 부분합의 최댓값을 찾는다.

사용할 공식

등차수열의 일반항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$이다. 따라서
$a_{20} - a_6 = 14d$
로 공차 d를 구한다. 부분합은 $S_n - S_{n-1} = a_n$이므로 $a_n > 0$이면 증가하고 $a_n < 0$이면 감소한다. 이 공식을 쓰는 이유는 연속한 두 부분합의 차가 새로 더하는 항 a_n과 같기 때문이다.

계산 과정

1. $a_{20} - a_6 = -25 - 17 = -42$이므로 $14d = -42$, 즉 $d = -3$이다.
2. $a_6 = a_1 + 5d = 17$에 $d = -3$을 대입하면 $a_1 = 32$이다.
3. 일반항은 $a_n = 32 - 3(n-1) = 35 - 3n$이다. 따라서 $a_{11} = 2 > 0$, $a_{12} = -1 < 0$이다.
4. S_{11}까지는 양의 항을 더하므로 증가하지만, a_{12}부터 음의 항을 더하므로 감소한다. 따라서 부분합은 S_{11}에서 최대이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 제10항까지의 합은 최대가 아니다. $a_{11} = 2 > 0$을 더하면 $S_{11} > S_{10}$이 된다. 틀린 표현 '제10항'은 '제11항'으로 고쳐야 한다.
② O — $a_{11} = 2 > 0$이고 바로 다음 항 $a_{12} = -1 < 0$이므로 부분합은 제11항까지 더했을 때 최대이다.
③ X — 제12항까지 더하면 음수인 $a_{12} = -1$이 추가되어 $S_{12} = S_{11} - 1$이 된다. 틀린 표현 '제12항'은 '제11항'으로 고쳐야 한다.
④ X — $a_{12} = -1$, $a_{13} = -4$가 연이어 더해져 $S_{13} < S_{11}$이다. 틀린 표현 '제13항'은 '제11항'으로 고쳐야 한다.
계산 결과 부분합은 제11항까지 더했을 때 최대이므로 정답은 2번이다.

오답 포인트

공차가 음수라는 사실만 보고 중간 항을 임의로 고르면 안 된다. 특히 제12항은 처음으로 음수가 되는 항이므로, 그 항을 더하기 직전인 제11항까지의 합이 최대이다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 두 항의 차로 공차를 구하고 일반항을 만든다. 그다음 $S_n - S_{n-1} = a_n$을 이용하여 항의 부호가 양수에서 음수로 바뀌는 경계를 찾는다. 마지막 양의 항까지 더한 부분합이 최대이다.

암기 포인트

부분합의 증감은 새로 더하는 항의 부호로 결정된다: $a_n > 0$이면 증가, $a_n < 0$이면 감소한다.

NoteBase

문 11. 두 회사 A, B의 직원은 각각 100명이고, 연수 프로그램에 참가한 직원 수와 참가하지 않은 직원 수는 다음과 같다. 두 회사의 직원 200명 중에서 임의로 선택한 한 명이 연수 프로그램에 참가했을 때, 이 직원이 회사 A의 직원일 확률이 $\frac{1}{4}$이다. 두 회사의 직원 200명 중에서 임의로 선택한 한 명이 회사 B의 직원이었을 때, 이 직원이 연수 프로그램에 참가하지 않은 직원일 확률은?

구분	회사 A	회사 B
참가한 직원 수	$100-2a$	$100-a$
참가하지 않은 직원 수	$2a$	a
합계	100	100

① $\frac{3}{10}$
② $\frac{2}{5}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$

정답 2번

출제 포인트

조건부확률을 표의 인원수로 나타내어 미지수 a를 구한 뒤, 회사 B 직원 중 연수 프로그램에 참가하지 않은 직원의 비율을 계산하는 문제이다.

조건 정리

회사 A의 참가 직원 수는 $100 - 2a$, 회사 B의 참가 직원 수는 $100 - a$이다.
따라서 전체 참가 직원 수는 $200 - 3a$이다.
구해야 할 값은 회사 B 직원 100명 중 불참 직원 a명의 비율이다.

사용할 공식

조건부확률은 $P(A \mid T) = \frac{n(A \cap T)}{n(T)}$로 계산한다. 여기서 T는 연수 프로그램 참가 사건이다. 참가자 중 회사 A 직원일 확률이 주어졌으므로 전체 참가 직원 수를 분모, 회사 A의 참가 직원 수를 분자로 둔다.

NoteBase

계산 과정

주어진 조건에서 (100-2a)/((100-2a)+(100-a))=(100-2a)/(200-3a)=14이다.
양변을 교차하여 계산하면 $4(100-2a)=200-3a$ $400-8a=200-3a$ $5a=200,\quad a=40$이다.
회사 B 직원 중 불참 직원의 비율은 (a)/(100)=(40)/(100)=25이다.

선지 판단

① X — 계산값은 25이므로 310은 틀린 값이다. 올바르게는 25이다.
② O — 회사 B의 불참 직원은 40명이고 회사 B의 전체 직원은 100명이므로 (40)/(100)=25이다.
③ X — 계산값은 25이므로 12은 틀린 값이다. 올바르게는 25이다.
④ X — 계산값은 25이므로 35는 틀린 값이다. 올바르게는 25이다.

오답 포인트

주어진 14은 전체 직원 중 회사 A 참가자의 비율이 아니라, 참가한 직원 중 회사 A 직원의 비율이다. 따라서 분모를 200으로 두지 않고 전체 참가 직원 수 $200-3a$로 두어야 한다. 마지막에는 회사 B 직원이라는 조건이 있으므로 분모를 회사 B의 전체 직원 수 100으로 둔다.

다시 나오면 이렇게 판단

‘B일 때 불참’처럼 ‘~일 때’가 붙은 조건부확률은 조건에 해당하는 집단을 분모로 둔다. 먼저 주어진 조건부확률로 미지수를 구하고, 구하려는 조건에 맞추어 분모와 분자를 새로 정한다.

암기 포인트

조건부확률은 조건 사건이 분모이다. $P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$이다.

NoteBase

문 12. 양수 x, y, z에 대하여 $\sqrt{2^x} = 9^y = 125^z = a$, $\frac{2}{x} + \frac{3}{2y} + \frac{1}{3z} = 2$일 때, 양수 a의 값은?

① $\sqrt{30}$
② $2\sqrt{30}$
③ $3\sqrt{30}$
④ $4\sqrt{30}$

정답 3번

출제 포인트

서로 다른 밑의 지수식을 공통값 a의 로그로 나타내어 x, y, z를 소거하고 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $2^{x/2} = 3^{2y} = 5^{3z} = a$이다.
구해야 할 값: 양수 a이다.
주의할 조건: x, y, z, a가 양수이므로 로그와 나눗셈을 사용할 수 있다.

사용할 공식

$b^t = a$이면 $t\ln b = \ln a$이다. 따라서
$x = \frac{2\ln a}{\ln 2}$, $y = \frac{\ln a}{2\ln 3}$, $z = \frac{\ln a}{3\ln 5}$
이다. 밑이 서로 다른 세 등식의 공통값이 a이므로 로그를 취하면 각 지수를 $\ln a$에 관한 식으로 통일할 수 있다.

계산 과정

위 식을 조건에 대입하면
$\frac{2}{x} = \frac{\ln 2}{\ln a}$, $\frac{3}{2y} = \frac{3\ln 3}{\ln a}$, $\frac{1}{3z} = \frac{\ln 5}{\ln a}$
이다. 따라서
$\frac{\ln 2 + 3\ln 3 + \ln 5}{\ln a} = 2$
이고, 로그의 성질에 따라 분자는 $\ln(2 \cdot 3^3 \cdot 5) = \ln 270$이다. 그러므로
a=12 270, a=√(270)=3√(30)
이다.

선지 판단

① X — $\sqrt{30}$은 계산 결과 $3\sqrt{30}$의 13이므로 틀리다. 올바른 값은 $3\sqrt{30}$이다.
② X — $2\sqrt{30}$은 계산 결과보다 $\sqrt{30}$만큼 작으므로 틀리다. 올바른 값은 $3\sqrt{30}$이다.
③ O — $a = \sqrt{270} = \sqrt{9 \cdot 30} = 3\sqrt{30}$이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — $4\sqrt{30}$은 계산 결과보다 $\sqrt{30}$만큼 크므로 틀리다. 올바른 값은 $3\sqrt{30}$이다.

NoteBase

오답 포인트

$\frac{3}{2y}$에 $y=\frac{\ln a}{2\ln 3}$를 대입할 때 계수 3을 빠뜨리면 안 된다. 이 항은 $\frac{3\ln 3}{\ln a}$가 되며, 분자의 로그는 $\ln(2\cdot 3^3\cdot 5)=\ln 270$으로 합쳐진다.

다시 나오면 이렇게 판단

공통값을 a로 둔 지수식은 각 등식에 로그를 취해 지수를 $\ln a$로 나타낸 뒤, 주어진 분수식에 대입하여 $\ln a$를 구한다. 마지막에는 근호 안의 완전제곱수를 꺼내 선지와 비교한다.

암기 포인트

같은 값으로 묶인 지수식은 로그로 지수를 소거한다. $\ln 2+3\ln 3+\ln 5=\ln 270$, $\sqrt{270}=3\sqrt{30}$이다.

NoteBase

문 13. 세 점 $A(k-1, 2k)$, $B(k, 3k+2)$, $C(k+1, k+5)$가 한 직선 위에 있을 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{6}$
② $\frac{1}{5}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$

정답 4번

출제 포인트

세 점의 x좌표가 같은 간격으로 놓였을 때, 세 점이 한 직선 위에 있으려면 대응하는 y좌표의 변화량도 같아야 한다는 성질을 이용해 k의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

세 점의 x좌표는 $k-1, k, k+1$이므로 각각 1씩 증가한다. 따라서 A에서 B로 갈 때와 B에서 C로 갈 때의 y좌표 변화량이 같아야 한다.

사용할 공식

$y_B - y_A = y_C - y_B$

이는 두 구간의 x좌표 변화량이 모두 1이므로, 세 점이 한 직선 위에 있기 위한 두 구간의 기울기 조건이 곧 y좌표 변화량의 일치로 바뀌기 때문이다.

계산 과정

A에서 B까지의 y좌표 변화량은
$(3k+2) - 2k = k + 2$
이다. B에서 C까지의 y좌표 변화량은
$(k+5) - (3k+2) = 3 - 2k$
이다. 두 변화량을 같게 두면
$k + 2 = 3 - 2k$
$3k = 1$
$k = \frac{1}{3}$
을 얻는다.

NoteBase

선지 판단

① X — $k=\frac{1}{6}$은 방정식 $k+2=3-2k$를 만족하지 않는다. 틀린 값이며, 올바르게는 $k=\frac{1}{3}$이다.
② X — $k=\frac{1}{5}$는 두 구간의 y좌표 변화량을 같게 만들지 않는다. 올바르게는 $k=\frac{1}{3}$이다.
③ X — $k=\frac{1}{4}$는 방정식 $3k=1$의 해가 아니다. 올바르게는 $k=\frac{1}{3}$이다.
④ O — $k=\frac{1}{3}$을 대입하면 두 구간의 y좌표 변화량이 모두 $\frac{7}{3}$이 되어 세 점이 한 직선 위에 놓인다.

오답 포인트

x좌표가 각각 1씩 증가한다는 점을 놓치거나, $(k+5)-(3k+2)$에서 부호를 잘못 처리하면 오답이 나온다. 두 기울기를 비교할 때는 반드시 같은 방향인 $A\to B$, $B\to C$의 변화량을 사용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

세 점의 x좌표가 등간격이면 가운데 점의 y좌표가 양 끝점의 y좌표 평균인지 확인하거나, 연속한 두 구간의 y좌표 변화량을 같게 두어 판단한다.

암기 포인트

x좌표가 등간격인 세 점의 공선 조건은 $2y_B=y_A+y_C$이다.

NoteBase

문 14. f(x)=casesx^2+1 & (x≥ 0)\\-x^3+1 & (x<0)cases일 때, 정적분 $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$의 값은?

① $\frac{1}{20}$
② $\frac{1}{10}$
③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{15}$

정답 1번

출제 포인트

구간별로 정의된 함수를 경계점에서 나누어 정적분하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수: $x < 0$에서는 $f(x) = -x^3 + 1$, $x \geq 0$에서는 $f(x) = x^2 + 1$이다.
구해야 할 값: $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$이다.
주의할 조건: 함수식이 $x = 0$을 기준으로 달라지므로 적분 구간을 $[-1, 0]$과 $[0, 1]$로 나눈다.

사용할 공식

$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{0} x(-x^3 + 1)dx + \int_{0}^{1} x(x^2 + 1)dx$
각 구간에서 적용되는 $f(x)$의 식이 다르므로 경계점 0에서 적분을 나누어야 한다.

계산 과정

1. 음의 구간에서는 $xf(x) = -x^4 + x$이므로
$\int_{-1}^{0} (-x^4 + x)dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\frac{7}{10}$
이다.

2. 양의 구간에서는 $xf(x) = x^3 + x$이므로
$\int_{0}^{1} (x^3 + x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{3}{4}$
이다.

3. 두 값을 더하면
$-\frac{7}{10} + \frac{3}{4} = \frac{-14 + 15}{20} = \frac{1}{20}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과가 $\frac{1}{20}$이므로 옳다.
② X — $\frac{1}{10} = \frac{2}{20}$은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 $\frac{1}{10}$은 $\frac{1}{20}$으로 고쳐야 한다.
③ X — $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 $\frac{1}{5}$은 $\frac{1}{20}$으로 고쳐야 한다.
④ X — $\frac{4}{15}$은 계산 결과 $\frac{1}{20}$과 다르다. 틀린 값 $\frac{4}{15}$은 $\frac{1}{20}$으로 고쳐야 한다.

오답 포인트

하나의 함수식을 전 구간에 적용하거나, 음의 구간에서 나온 값 $-\frac{7}{10}$의 부호를 빠뜨리면 오답이 된다. 이 문항의 핵심 함정은 $f(x)$가 아니라 $xf(x)$를 적분해야 한다는 점과 $x = 0$에서 구간을 나누어야 한다는 점이다.

다시 나오면 이렇게 판단

구간별 함수의 정적분은 먼저 함수식이 바뀌는 경계점에서 구간을 나누고, 각 구간의 피적분함수를 정확히 만든 뒤 계산 결과를 합한다.

암기 포인트

구간별 함수는 경계점에서 나누어 적분하고, 바깥에 곱해진 x까지 포함해 피적분함수를 정리한다.

NoteBase

문 15. 한 은행은 고객으로부터 연초에 100만원을 연이율 5%의 3년 만기 정기예금으로 받으면 그 중에서 90만원을 연이율 r%로 3년 동안 연초에 대출하고 나머지 10만원은 예비비로 보관한다. 3년 후 은행은 대출금을 이자와 함께 연말에 회수하고 고객에게 정기예금을 이자와 함께 연말에 지불하여 20만원의 수익을 얻으려고 한다. 이때, 대출 이율 r를 구하는 식은? (단, 모든 이자는 1년마다 복리로 계산한다.)

① $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^3-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^3=10^5$

② $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^3-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^3=3\times10^5$

③ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^3-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^3=10^5$

④ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^3-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^3=2\times10^5$

정답 3번

출제 포인트

복리로 계산한 대출 회수액과 예금 지급액에 보관한 예비비를 함께 반영하여 은행의 수익식을 세우는 문제이다.

조건 정리

예금 원금은 100만원이고 연이율은 5%이므로 3년 후 예금 지급액은 $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$원이다.
대출 원금은 90만원이고 연이율은 r%이므로 3년 후 대출 회수액은 $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$원이다.
예비비 10만원은 따로 보관하므로 3년 후 은행이 가진 금액에 10^5원을 더한다. 목표 수익은 20만원이다.

사용할 공식

은행의 수익은 '대출 회수액 + 예비비 - 예금 지급액'이다. 따라서
$9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^3+10^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^3=2\times10^5$
이다. 대출금과 예금은 모두 3년 동안 매년 복리로 계산되므로 각각의 원금에 연이율의 복리계수를 세 번 곱한다.

계산 과정

위 식에서 예비비 10^5원을 우변으로 이항하면
$9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^3-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^3=10^5$
을 얻는다. 이는 3번의 식과 같다.

NoteBase

선지 판단

① X — 예금 지급액에서 대출 회수액을 뺀 식으로 두 금액의 차감 순서가 반대이다. 올바르게는 대출 회수액에서 예금 지급액을 빼서 10^5원이 되어야 한다.
② X — 차감 순서가 반대이고 우변도 3×10^5원으로 잘못 잡았다. 올바르게는 $9 \times 10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 - 10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 = 10^5$이다.
③ O — 대출 회수액에 예비비 10만원을 더한 뒤 예금 지급액을 빼면 수익 20만원이므로, 대출 회수액과 예금 지급액의 차이는 10만원이다.
④ X — 우변을 목표 수익 20만원으로 그대로 둔 식이다. 예비비 10만원이 이미 수익에 보태지므로 올바른 우변은 $2 \times 10^5 - 10^5 = 10^5$원이다.

오답 포인트

목표 수익 20만원을 곧바로 대출 회수액과 예금 지급액의 차이로 두면 ④를 고르게 된다. 보관한 예비비 10만원도 기말에 은행이 가진 자산이므로 그만큼을 목표 수익에서 먼저 빼야 한다. 또한 수익을 계산할 때는 예금 지급액에서 대출 회수액을 빼는 것이 아니라 대출 회수액에서 예금 지급액을 뺀다.

다시 나오면 이렇게 판단

은행의 기말 수익은 '기말에 회수하거나 보유한 모든 금액 - 기말에 지급할 금액'으로 정리한다. 각 금액의 복리 기간을 반영한 뒤 별도로 보관한 금액까지 포함하여 목표 수익과 같게 놓는다.

암기 포인트

수익은 수입과 보유액의 합에서 지급액을 뺀 값이다. 예비비가 남아 있으면 목표 수익 전체를 대출과 예금의 차이로 두지 않는다.

NoteBase

문 16. 두 함수 $f(x)=x^4+x^3+x^2+k$, $g(x)=x^3-x^2+3$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k값의 합은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 2번

출제 포인트

방정식을 정리해 k를 x의 식으로 나타낸 뒤, 열린구간에서 그 식이 갖는 값의 범위에 포함되는 정수를 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 방정식은 $x^4+x^3+x^2+k=x^3-x^2+3$이다. 이를 정리하면 $k=3-2x^2-x^4$이고, 조건은 $0<x<1$이며 구해야 할 값은 가능한 모든 정수 k의 합이다. 구간의 양 끝점 0과 1은 포함되지 않는다는 점에 주의한다.

사용할 공식

$h(x)=3-2x^2-x^4$로 놓으면 $h'(x)=-4x-4x^3=-4x(1+x^2)$이다. $0<x<1$에서 $h'(x)<0$이므로 h는 연속이고 엄격히 감소한다. 따라서 끝점에서의 극한값으로 열린구간에서의 치역을 구할 수 있다.

계산 과정

1. $f(x)=g(x)$를 정리하면 $x^4+2x^2+k-3=0$이므로 $k=3-2x^2-x^4$이다.
2. $h(x)=3-2x^2-x^4$는 $(0,1)$에서 연속이고 엄격히 감소한다.
3. $x\to 0+$일 때 $h(x)\to 3$, $x\to 1-$일 때 $h(x)\to 0$이다. 양 끝점이 제외되므로 치역은 $0<k<3$이다.
4. 이 범위의 정수는 1과 2이므로 그 합은 $1+2=3$이다.

선지 판단

① X — 가능한 정수 k의 합은 2가 아니라 3이다. 틀린 값 2 → 올바르게는 3이다.
② O — $0<k<3$을 만족하는 정수는 1, 2이고, 그 합이 3이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X — 가능한 정수 k의 합은 4가 아니라 3이다. 틀린 값 4 → 올바르게는 3이다.
④ X — 가능한 정수 k의 합은 5가 아니라 3이다. 틀린 값 5 → 올바르게는 3이다.

NoteBase

오답 포인트

$(0, 1)$을 닫힌구간처럼 다루어 끝점에서 나오는 $k = 3$ 또는 $k = 0$을 포함하면 오답이 된다. 또한 가능한 정수 k의 개수 2와 그 정수들의 합 3을 혼동하면 ①을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

매개변수가 있는 방정식은 먼저 매개변수를 x의 함수로 나타내고, 주어진 구간에서 그 함수의 연속성·증감과 치역을 확인한 다음 치역에 속하는 정수만 추린다. 열린구간이면 끝점의 함수값은 포함하지 않는다.

암기 포인트

매개변수의 가능 범위는 '식 정리 → 치역 결정 → 끝점 포함 여부 확인 → 정수 추리기'의 순서로 구한다.

NoteBase

문 17. x, y**가 세 부등식** $x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 4$**를 만족할 때,** $2y - 3x$**의 최댓값을** M**, 최솟값을** m**이라 하자.** Mm**의 값은?**

① -21

② -24

③ -27

④ -31

정답 1번

출제 포인트

연립부등식이 나타내는 영역의 꼭짓점에서 일차식의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 4$이다.
가능한 영역은 세 직선 $x = 1, y = 1, x + y = 4$로 둘러싸인 삼각형이며, 꼭짓점은 $(1, 1), (1, 3), 3, 1)$이다.
구해야 할 값은 $2y - 3x$의 최댓값 M과 최솟값 m의 곱 Mm이다.

사용할 원리

일차식은 닫힌 다각형 영역에서 최댓값과 최솟값을 꼭짓점에서 갖는다. 따라서 세 꼭짓점에 $2y - 3x$를 대입해 값을 비교한다.

계산 과정

$(1, 1) : \ 2(1) - 3(1) = -1$
$(1, 3) : \ 2(3) - 3(1) = 3$
$(3, 1) : \ 2(1) - 3(3) = -7$
따라서 $M = 3, m = -7$이고,
$Mm = 3 \times (-7) = -21$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $Mm = -21$이므로 옳다.
② X — -24는 계산 결과와 다르다. 세 꼭짓점에서 얻는 최댓값과 최솟값은 각각 3, -7이므로 올바른 값은 -21이다.
③ X — -27은 계산 결과와 다르다. $M = 3$, $m = -7$을 곱하면 올바른 값은 -21이다.
④ X — -31은 계산 결과와 다르다. 가능한 영역의 세 꼭짓점을 모두 대입하면 극값은 3과 -7이므로 올바른 값은 -21이다.

오답 포인트

경계식 $x + y = 4$만 조사하거나 M과 m의 부호를 놓치면 오답이 된다. 세 경계선의 교점 중 조건을 만족하는 꼭짓점을 빠짐없이 찾고, 최솟값 $m = -7$의 음수 부호를 유지해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

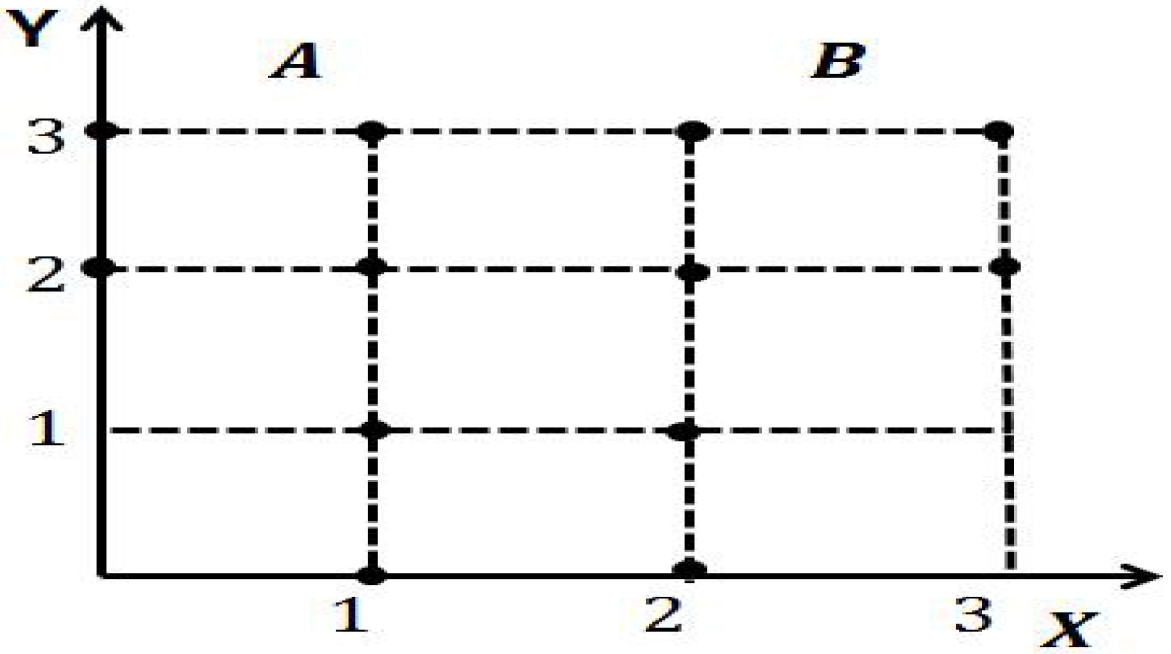
일차식의 최댓값·최솟값 문제에서는 먼저 부등식의 공통 영역을 정하고, 그 영역의 모든 꼭짓점을 구한 뒤 목적식에 각각 대입하여 가장 큰 값과 가장 작은 값을 비교한다.

암기 포인트

다각형 영역에서 일차식의 최댓값과 최솟값은 꼭짓점에서 확인한다.

NoteBase

문 18. 아래 그림과 같이 좌표평면에 12개의 점이 있다. 이 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는?



① 50
② 100
③ 200
④ 250

정답 3번

출제 포인트

12개의 점에서 세 점을 고르는 전체 경우의 수를 구한 뒤, 세 점이 한 직선 위에 있어 삼각형이 되지 않는 경우를 빼는 문제이다.

조건 정리

주어진 점은 12개이다.
구해야 할 값은 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수이다.
세 점이 한 직선 위에 놓인 경우에는 삼각형이 만들어지지 않으므로 제외한다.

NoteBase

사용할 공식

서로 다른 세 점을 고르는 경우의 수는 $\binom{12}{3}$이다. 따라서
삼각형의 개수=123-공선인 세 점을 고르는 경우의 수
로 계산한다. 세 점을 고른 모든 경우 중 넓이가 0인 경우만 제외하면 나머지는 모두 삼각형이 되기 때문이다.

계산 과정

1. 세 점을 고르는 전체 경우의 수는
$\binom{12}{3} = 220$
이다.
2. 가로 방향에서는 $y = 2, y = 3$에 각각 점이 4개씩 있으므로 공선인 세 점의 선택은
$2\binom{4}{3} = 8$
가지이다.
3. 세로 방향에서는 $x = 1, x = 2$에 각각 점이 4개씩 있으므로 마찬가지로
$2\binom{4}{3} = 8$
가지이다.
4. 그 밖의 사선 방향 공선 세 점은 $(0, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 0), (2, 1), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$의 4가지이다.
5. 따라서 삼각형의 개수는
$220 - (8 + 8 + 4) = 200$
이다.

선지 판단

① X — 50은 전체 220가지에서 공선인 20가지만 제외한 값과 일치하지 않는다. 틀린 값 50은 올바르게는 200이다.
② X — 100은 계산값 200과 다르다. 틀린 값 100은 올바르게는 200이다.
③ O — 전체 $\binom{12}{3} = 220$가지에서 가로·세로·사선의 공선 경우 20가지를 빼면 200이므로 맞다.
④ X — 250은 세 점을 고르는 전체 경우의 수 220보다도 크므로 성립할 수 없다. 틀린 값 250은 올바르게는 200이다.

오답 포인트

가로와 세로의 공선 경우만 빼고 사선으로 나란한 4가지 경우를 빠뜨리기 쉽다. 또한 한 직선 위에 점이 4개이면 제외할 세 점의 선택은 1가지가 아니라 $\binom{4}{3} = 4$가지이다.

다시 나오면 이렇게 판단

점 세 개로 만드는 삼각형의 개수는 먼저 전체 조합을 구하고, 가로·세로·사선별로 세 점 이상이 공선인 경우를 빠짐없이 세어 뺀다.

NoteBase

암기 포인트

삼각형의 개수 = 세 점을 고르는 전체 경우의 수 - 공선인 세 점의 선택 수이다.

NoteBase

문 19. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-3}{x^2-1}=1$을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다. 이 때 두 상수 a, b에 대하여 $2a+b$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

출제 포인트

주어진 극한에서 함수값 $f(3)$과 미분계수 $f'(3)$을 차례로 구한 뒤 접선의 방정식에 대입하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-3}{x^2-1}=1$이다. 분모가 0으로 수렴하면서 전체 극한이 유한하므로 분자도 0으로 수렴해야 한다. 미분가능한 함수는 연속이므로 $f(3)-3=0$, 즉 $f(3)=3$이다. 구해야 할 것은 점 $(3, f(3))$에서의 접선 $y=ax+b$에 대하여 $2a+b$이다.

사용할 공식

미분계수의 정의는 $f'(3)=\lim_{t\to 3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}$이고, 점 $(3, f(3))$에서의 접선은 $y-f(3)=f'(3)(x-3)$이다. 주어진 극한의 분자에 $f(x+2)-f(3)$이 나타나므로 미분계수의 정의를 적용할 수 있다.

계산 과정

$f(3)=3$이고 $x^2-1=(x-1)(x+1)$이므로

$$1=\lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-f(3)}{(x-1)(x+1)}=f'(3)\cdot\frac{1}{2}.$$

따라서 $f'(3)=2$이다. 접선은

$$y-3=2(x-3),\qquad y=2x-3$$

이므로 $a=2, b=-3$이다. 따라서 $2a+b=2\cdot 2-3=1$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산한 $2a+b$의 값이 1이므로 옳다.
② X — ②의 2는 계산 결과 1과 다르다. 올바른 값은 1이다.
③ X — ③의 3은 계산 결과 1과 다르다. 올바른 값은 1이다.
④ X — ④의 4는 계산 결과 1과 다르다. 올바른 값은 1이다.

오답 포인트

극한식을 곧바로 미분계수로 보면 분모의 $x+1$을 빠뜨리기 쉽다. $x \to 1$일 때 이 인자는 2로 수렴하므로 주어진 극한은 $f'(3)$이 아니라 $f'(3)/2$이다. 또한 접선의 기울기 $a=2$만 구하고 요구값 $2a+b$와 혼동하지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0으로 가는 함수의 극한이 유한하면 먼저 분자도 0이 되는 조건으로 함수값을 정한다. 그다음 분모를 인수분해하여 미분계수 꼴을 분리하고, 구한 함수값과 미분계수를 접선 공식에 대입한다.

암기 포인트

유한한 0/0형 극한에서는 함수값을 먼저 정하고, 남은 식을 미분계수의 정의로 바꾼다.

NoteBase

문 20. 남자 3명, 여자 2명을 일렬로 세울 때, 여자들끼리 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는?

① 64

② 68

③ 70

④ 72

정답 4번

출제 포인트

서로 다른 남자 3명을 먼저 세운 뒤 남자 사이와 양끝의 빈자리에 서로 다른 여자 2명을 배치하여, 여자끼리 이웃하지 않는 순열의 수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 서로 다른 남자 3명과 서로 다른 여자 2명이다.
구해야 할 값: 여자 두 명이 서로 이웃하지 않는 일렬 배치의 수이다.
주의할 조건: 여자들은 남자들 사이 또는 양끝에 생기는 서로 다른 빈자리 두 곳에 한 명씩 들어가야 한다.

사용할 공식

$3! \times \binom{4}{2} \times 2!$

남자 3명을 먼저 배열하면 4개의 빈자리가 생긴다. 여자끼리 이웃하지 않으려면 이 중 서로 다른 2곳을 고르고, 여자 2명을 그 자리에 배열해야 하므로 곱의 법칙을 사용한다.

계산 과정

1. 남자 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$이다.
2. 배열된 남자들의 양끝과 남자 사이에 생기는 빈자리는 4곳이며, 여자들이 들어갈 2곳을 고르는 경우의 수는 $\binom{4}{2} = 6$이다.
3. 선택한 두 자리에 여자 2명을 배열하는 경우의 수는 $2! = 2$이다.
4. 따라서 전체 경우의 수는 $3! \times \binom{4}{2} \times 2! = 6 \times 6 \times 2 = 72$이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 72이므로 선지의 64는 틀린 값이며, 올바른 값은 72이다.
② X — 계산 결과는 72이므로 선지의 68은 틀린 값이며, 올바른 값은 72이다.
③ X — 계산 결과는 72이므로 선지의 70은 틀린 값이며, 올바른 값은 72이다.
④ O — 계산 결과 72와 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

여자들이 들어갈 빈자리를 고르는 것만으로 끝내면 여자 2명의 자리 교환 2!을 빠뜨리게 된다. 또한 빈자리는 남자 사이 2곳뿐 아니라 양끝 2곳까지 포함하여 모두 4곳이다.

다시 나오면 이렇게 판단

특정 집단끼리 이웃하지 않는 배열은 나머지 사람을 먼저 배열하고, 그 사이와 양끝의 빈자리를 센 뒤 빈자리 선택 수와 특정 집단의 배열 수를 곱한다.

암기 포인트

서로 다른 n명을 먼저 세우면 빈자리는 $n+1$개이며, 이웃하면 안 되는 사람들은 서로 다른 빈자리에 한 명씩 배치한다.

NoteBase