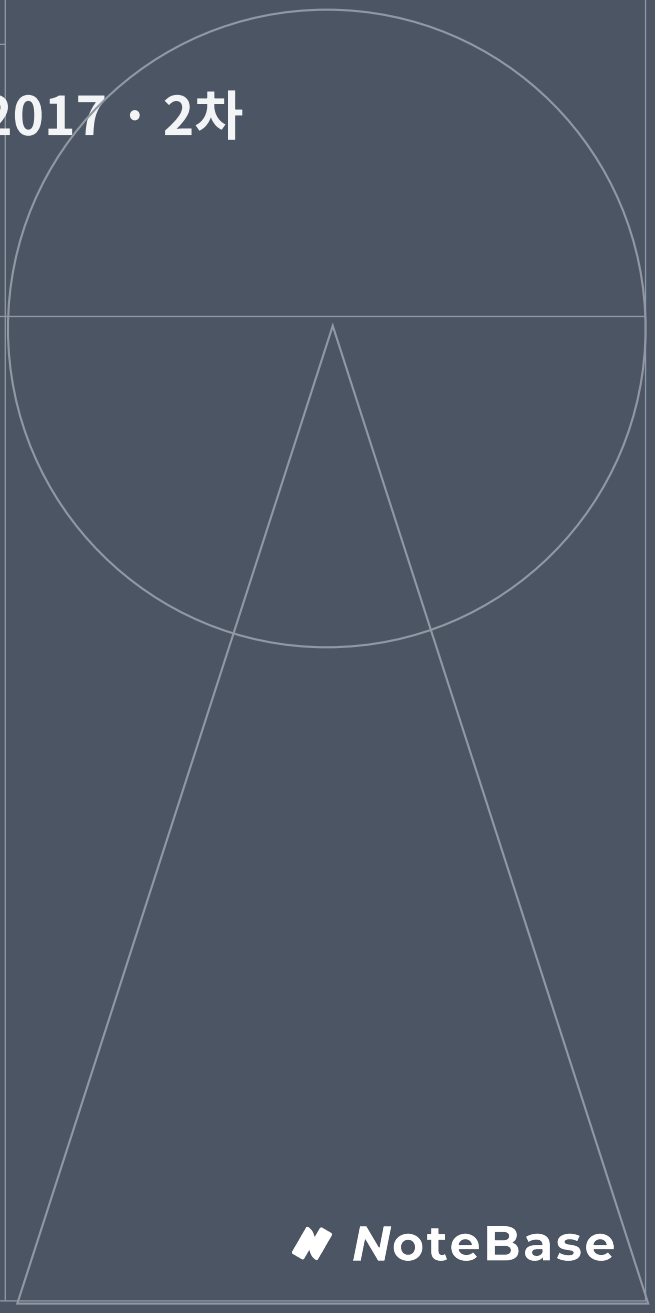
기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2017 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2017 · 2차

공무원/해경/순경 · 수학 · 2017 · 2차

문 1. $x-y=2,\ y-z=4$**일 때,** $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$**의 값은?**

① 50

② 52

③ 54

④ 56

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 연속한 두 차를 더해 나머지 차를 구한 뒤 세 차의 제곱합을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $x-y=2, y-z=4$이다. 구해야 할 값은 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$이다. $z-x$는 $x-z$와 부호가 반대이지만 제곱하면 같은 값이 된다.

사용할 공식

$x-z=(x-y)+(y-z)$
따라서 $z-x=-[(x-y)+(y-z)]$이다. 중간의 y가 소거되어 $x-z$를 구할 수 있으므로 이 관계를 사용한다.

계산 과정

$x-z=2+4=6, \qquad z-x=-6$
$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2^2+4^2+(-6)^2=4+16+36=56$

선지 판단

① X — 계산 결과는 56이므로 선지의 50은 틀린 값이다. ‘50’은 ‘56’으로 고쳐야 한다.
② X — 계산 결과는 56이므로 선지의 52는 틀린 값이다. ‘52’는 ‘56’으로 고쳐야 한다.
③ X — 계산 결과는 56이므로 선지의 54는 틀린 값이다. ‘54’는 ‘56’으로 고쳐야 한다.
④ O — 계산 결과 56과 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

$z-x$를 구할 때 두 식을 더하면 먼저 $x-z=6$이 된다. 따라서 $z-x=-6$이지만, 제곱항은 $(-6)^2=36$이다. 부호를 바꾸는 과정과 음수의 제곱을 혼동하면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

연속한 차가 주어지면 두 식을 더해 중간 문자를 소거하고, 구한 차의 방향을 확인한 뒤 각 항을 제곱하여 합한다.

암기 포인트

$x-z=(x-y)+(y-z)$, 그리고 $(z-x)^2=(x-z)^2$이다.

NoteBase

문 2. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x^n+1}$에 대하여 $f(9)+f\left(\frac{1}{9}\right)$의 값은?

① 11

② 10

③ 9

④ 8

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 x의 범위에 따라 지수항 x^n의 극한이 달라진다는 점을 이용하여 함수값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x^n+1}$이다.
구해야 할 값은 $f(9)+f\left(\frac{1}{9}\right)$이다.
$9>1$이므로 9^n은 무한히 커지고, $0<\frac{1}{9}<1$이므로 $\left(\frac{1}{9}\right)^n$은 0으로 수렴한다.

사용할 공식

$x>1$일 때 분자와 분모를 x^n으로 나누면
$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{-n}}{1+x^{-n}}=x$.
$0<x<1$일 때는 $x^n\to 0$, $x^{n+1}\to 0$이므로
$f(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1$.
밑 x가 1보다 큰지 작은지에 따라 지수항의 극한이 달라지므로 경우를 나누어 계산한다.

계산 과정

1. $9>1$이므로 $f(9)=9$이다.
2. $0<\frac{1}{9}<1$이므로 $f\left(\frac{1}{9}\right)=-1$이다.
3. 따라서 $f(9)+f\left(\frac{1}{9}\right)=9+(-1)=8$이다.

선지 판단

① X — 11은 계산 결과 8과 다르다. 올바른 값은 8이다.
② X — 10은 계산 결과 8과 다르다. 올바른 값은 8이다.
③ X — 9는 $f(9)$만 계산하고 $f\left(\frac{1}{9}\right)=-1$을 더하지 않을 때 나오는 값이다. 올바른 합은 8이다.
④ O — 계산 결과가 8이므로 옳다.

NoteBase

오답 포인트

$f\left(\frac{1}{9}\right)$을 단순히 $\frac{1}{9}$로 보는 것이 함정이다. $0 < x < 1$에서는 분자와 분모의 지수항이 모두 0으로 수렴하므로 함수값은 -1이다.

다시 나오면 이렇게 판단

지수항이 포함된 극한은 먼저 밑이 1보다 큰지, 1인지, 0과 1 사이인지 구분한다. $x > 1$이면 최고차 지수항으로 나누고, $0 < x < 1$이면 지수항을 0으로 보내 계산한다.

암기 포인트

이 함수는 $x > 1$에서 $f(x) = x$, $0 < x < 1$에서 $f(x) = -1$이다.

NoteBase

문 3. 다항식 $f(x)$는 다음 세 조건을 만족한다.
$f(x)$를 $x-3$으로 나눌 때의 나머지 값은?

㉠ $f(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 1이다.
㉡ $f(x)$를 $x-2$로 나누면 나머지가 7이다.
㉢ $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누면 몫과 나머지가 서로 같다.

① 9
② 27
③ 45
④ 54

정답 3번

출제 포인트

나머지정리와 다항식의 나눗셈 관계를 이용하여 나머지 다항식을 먼저 정한 뒤 $f(3)$을 구하는 문제이다.

조건 정리

$f(-1)=1$, $f(2)=7$이다. 또한 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눌 때의 몫과 나머지가 서로 같으며, 나머지는 일차 이하의 다항식이다. 구해야 할 값은 $f(3)$이다.

사용할 공식

나머지 다항식을 $r(x)$라 하면 몫도 $r(x)$이므로
$f(x)=(x+1)(x-2)r(x)+r(x)=\{(x+1)(x-2)+1\}r(x)$
이다. $(x+1)(x-2)$의 두 근에서는 곱셈항이 0이 되어 $r(-1)=f(-1)$, $r(2)=f(2)$가 되므로 이 관계를 사용한다.

계산 과정

$r(x)=ax+b$라 두면
$-a+b=1, \qquad 2a+b=7$
이다. 두 식을 빼면 $3a=6$이므로 $a=2$, $b=3$이고, 따라서 $r(x)=2x+3$이다. 그러므로 $r(3)=9$이며
$f(3)=\{(3+1)(3-2)+1\}r(3)=(4+1)\cdot 9=45$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 9는 $r(3)$의 값일 뿐 $f(3)$이 아니다. ‘9’는 ‘45’로 고쳐야 한다.
② X — 계산 결과는 27이 아니라 45이다. ‘27’은 ‘45’로 고쳐야 한다.
③ O — $f(3) = 45$이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — 계산 결과는 54가 아니라 45이다. ‘54’는 ‘45’로 고쳐야 한다.

오답 포인트

몫과 나머지가 같다는 조건에서 $r(x)$만 구한 뒤 $r(3) = 9$를 곧바로 답으로 선택하면 ①에 빠진다. 실제로는 $f(x) = \{(x+1)(x-2)+1\}r(x)$이므로 $x = 3$에서 곱해지는 계수 5를 반영해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

‘몫과 나머지가 같다’는 조건이 나오면 공통 다항식을 $r(x)$로 두고 원래 다항식을 나눗셈 등식으로 표현한다. 이어 제수의 근을 대입해 $r(x)$를 정한 뒤, 마지막에 구하려는 값을 원래 등식에 대입한다.

암기 포인트

제수가 $g(x)$이고 몫과 나머지가 모두 $r(x)$이면 $f(x) = \{g(x)+1\}r(x)$이다.

NoteBase

문 4. $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2-3x+1}{3x^2+2}=\frac{2}{3}$**를 만족할 때,** a**의 값은?**

① $\frac{2}{3}$

② 1

③ $\frac{4}{3}$

④ 2

정답 4번

출제 포인트

분자와 분모의 차수가 같은 유리함수의 무한대 극한에서 최고차항의 계수비를 이용해 a의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2-3x+1}{3x^2+2}=\frac{2}{3}$이다.
구해야 할 값: a이다.
주의할 조건: 분자와 분모의 최고차항은 각각 ax^2, $3x^2$로 차수가 같다.

사용할 공식

분자와 분모의 차수가 같을 때 무한대 극한은 최고차항의 계수비와 같다.
$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\cdots}{b_nx^n+\cdots}=\frac{a_n}{b_n}$
분자와 분모를 x^2으로 나누면 $1/x$, $1/x^2$이 0으로 수렴하므로 이 공식을 사용할 수 있다.

계산 과정

분자와 분모를 x^2으로 나눈다.
$\lim_{x\to\infty}\frac{a-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{a}{3}$
주어진 극한값과 같게 두면
$\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$
이고, 양변에 3을 곱하면 $a=2$이다.

NoteBase

선지 판단

① X

- 선지의 $a = \frac{2}{3}$은 최고차항의 계수비 $a/3$ 자체와 a를 혼동한 값이다. 올바르게는 $a/3 = 2/3$에서 $a = 2$이다.

② X

- $a = 1$을 대입하면 극한은 1/3이므로 주어진 2/3과 다르다. 올바른 값은 $a = 2$이다.

③ X

- $a = \frac{4}{3}$을 대입하면 극한은 4/9이므로 주어진 2/3과 다르다. 올바른 값은 $a = 2$이다.

④ O

- $a = 2$를 대입하면 최고차항의 계수비가 2/3이 되어 주어진 극한값과 일치한다.

오답 포인트

①의 $\frac{2}{3}$을 그대로 a로 고르는 것이 핵심 함정이다. 주어진 극한값은 a가 아니라 최고차항의 계수비 $a/3$이므로 $a/3 = 2/3$을 풀어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

유리함수의 무한대 극한에서는 먼저 분자와 분모의 차수를 비교한다. 차수가 같으면 최고차항의 계수비를 극한값과 같게 놓고 미지수를 구한다.

암기 포인트

분자·분모의 차수가 같으면 무한대 극한은 최고차항의 계수비이다.

NoteBase

문 5. 자유투 성공률이 80%인 농구 선수가 100개의 자유투를 던졌을 때, 86개 이상 성공시킬 확률은? (단, $P(0 \le Z \le 1.5) = 0.43$)

① 1%

② 3%

③ 5%

④ 7%

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 이항분포의 평균과 표준편차를 구한 뒤 정규분포로 근사하여 자유투를 86개 이상 성공시킬 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

성공 횟수를 X라 하면 $X \sim B(100, 0.8)$이다.
주어진 값은 시행 횟수 $n = 100$, 성공확률 $p = 0.8$, 실패확률 $q = 0.2$이다.
구해야 할 값은 $P(X \ge 86)$이다.

사용할 공식

이항분포의 평균과 표준편차는 각각 $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$이다. 표준화 공식은 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$이다.
시행 횟수가 100으로 충분히 크므로 성공 횟수의 이항분포를 평균 np, 분산 npq인 정규분포로 근사한다.

계산 과정

1. 평균은 $\mu = 100 \times 0.8 = 80$이다.
2. 표준편차는 $\sigma = \sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2} = 4$이다.
3. 86개를 표준화하면 $Z = \frac{86 - 80}{4} = 1.5$이다.
4. 따라서 $P(X \ge 86) \approx P(Z \ge 1.5) = 0.5 - P(0 \le Z \le 1.5) = 0.5 - 0.43 = 0.07$이다.
5. 구한 확률을 백분율로 바꾸면 7%이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 7%이므로 1%는 일치하지 않는다. 틀린 값 1% → 올바르게는 7%이다.
② X — 계산 결과는 7%이므로 3%는 일치하지 않는다. 틀린 값 3% → 올바르게는 7%이다.
③ X — 계산 결과는 7%이므로 5%는 일치하지 않는다. 틀린 값 5% → 올바르게는 7%이다.
④ O — $P(Z \ge 1.5) = 0.07$이므로 7%와 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

주어진 0.43은 P(0≤ Z≤1.5)이지 오른쪽 꼬리확률이 아니다. 86개 이상은 평균보다 큰 구간이므로 $0.5 - 0.43$을 계산해야 하며, 확률 0.07을 백분율로 바꾸면 7%이다.

다시 나오면 이렇게 판단

이항분포의 정규근사 문제는 np로 평균을 구하고, $\sqrt{npq}$로 표준편차를 구한 뒤, 기준값을 표준화하고 문제에서 요구한 꼬리의 방향을 확인하여 확률을 계산한다.

암기 포인트

이항분포의 정규근사는 평균 np, 표준편차 $\sqrt{npq}$이며, 오른쪽 꼬리는 $0.5 - P(0 \le Z \le z)$이다.

NoteBase

문 6. $x+y=2, xy=-1$**일 때,** x^3+y^3**의 값은?**

① 13

② 14

③ 15

④ 16

정답 2번

출제 포인트

두 수의 합과 곱이 주어졌을 때 세제곱의 합 항등식을 이용해 x^3+y^3의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $x+y=2, xy=-1$이다. 구해야 할 값은 x^3+y^3이다. xy가 음수이므로 항등식에 대입할 때 부호에 주의한다.

사용할 공식

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
이 항등식은 $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$를 정리한 것이다. 문제에서 $x+y$와 xy가 직접 주어졌으므로 x, y를 각각 구하지 않고 바로 적용할 수 있다.

계산 과정

주어진 값을 항등식에 대입하면
$x^3+y^3=2^3-3(-1)(2)=8+6=14$
이다. 따라서 구하는 값은 14이다.

NoteBase

선지별 해설

① X

13은 계산 결과 14와 일치하지 않는다. 틀린 값 13은 올바르게는 14이다.

② O

$2^3 - 3(-1)(2) = 14$이므로 계산 결과와 일치한다.

③ X

15는 계산 결과 14와 일치하지 않는다. 틀린 값 15는 올바르게는 14이다.

④ X

16은 계산 결과 14와 일치하지 않는다. 틀린 값 16은 올바르게는 14이다.

오답 포인트

$-3xy(x+y)$에 $xy=-1$을 대입하면 $-3\times(-1)\times 2=+6$이 된다. 음수인 xy를 대입한 뒤에도 빼기 부호를 그대로 유지하면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

$x+y$와 xy가 주어지고 x^3+y^3를 물으면 세제곱의 합 항등식에 두 값을 직접 대입한 뒤 부호를 검산한다.

암기 포인트

세제곱의 합은 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이다.

NoteBase

문 7. 원 $x^2+y^2+6x-4y+4=0$을 원 $x^2+y^2=9$로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $y=-2x+1$이 $\alpha x+y+\beta=0$으로 옮겨질 때, 두 상수 α,β의 합 $\alpha+\beta$의 값은?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

정답 3번

출제 포인트

원의 중심을 비교하여 평행이동 벡터를 구하고, 같은 벡터로 이동한 직선의 방정식을 구하는 문제이다.

조건 정리

첫 번째 원을 완전제곱식으로 고치면 $(x+3)^2+(y-2)^2=9$이므로 중심은 $(-3,2)$이다. 옮긴 원 $x^2+y^2=9$의 중심은 $(0,0)$이다. 따라서 평행이동 벡터는 $(3,-2)$이고, 구해야 할 값은 이동한 직선 $\alpha x+y+\beta=0$의 $\alpha+\beta$이다.

사용할 공식

평행이동 $(x,y)\mapsto(x+a,y+b)$으로 도형 $F(x,y)=0$이 이동하면 새 도형의 방정식은 $F(x-a,y-b)=0$이다. 새 점의 좌표에서 이동벡터를 빼면 이동 전 점의 좌표가 되므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 두 원의 중심을 비교하면 이동벡터는 $(0-(-3),0-2)=(3,-2)$이다.
2. 원래 직선을 $2x+y-1=0$으로 쓴다. $(a,b)=(3,-2)$를 적용하면 새 직선은 $2(x-3)+(y+2)-1=0$이다.
3. 정리하면 $2x+y-5=0$이므로 $\alpha=2,\beta=-5$이다. 따라서 $\alpha+\beta=2+(-5)=-3$이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 -3이므로 -5는 틀린 값이다. 올바르게는 $\alpha+\beta=-3$이다.
② X — 계산 결과는 -3이므로 -4는 틀린 값이다. 올바르게는 $\alpha+\beta=-3$이다.
③ O — $\alpha=2,\beta=-5$이므로 $\alpha+\beta=-3$이다.
④ X — 계산 결과는 -3이므로 -2는 틀린 값이다. 올바르게는 $\alpha+\beta=-3$이다.

NoteBase

오답 포인트

직선을 옮길 때 식에 이동벡터 $(3, -2)$를 그대로 더하는 것이 함정이다. 새 좌표에서 이동벡터를 빼야 하므로 x에는 $x-3$, y에는 $y+2$를 대입한다.

다시 나오면 이렇게 판단

원을 완전제곱식으로 고쳐 두 중심의 차로 이동벡터를 구한 뒤, 원래 도형의 식에 이동벡터를 뺀 좌표를 대입하고 마지막에 계수와 부호를 검산한다.

암기 포인트

도형을 (a, b)만큼 옮기면 방정식에는 $x-a$, $y-b$를 대입한다.

NoteBase

문 8. 양수 x, y, z에 대하여 $\sqrt{2^x} = 9^y = 125^z = \alpha$, $\frac{2}{x} + \frac{3}{2y} + \frac{1}{3z} = 1$일 때, 양수 α의 값을 구하면?

① 270

② 280

③ 290

④ 300

정답 1번

출제 포인트

서로 다른 밑의 지수식이 같은 값일 때 로그를 이용해 각 지수를 공통값의 로그로 나타내고, 주어진 분수식을 정리하여 공통값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $2^{x/2} = 3^{2y} = 5^{3z} = \alpha$와 $\frac{2}{x} + \frac{3}{2y} + \frac{1}{3z} = 1$이다. 구해야 할 값은 양수 α이다.

사용할 공식

$a^t = \alpha$이면 $t\ln a = \ln \alpha$이다. 이 관계를 쓰면 서로 다른 밑을 가진 세 식의 지수 x, y, z를 모두 $\ln \alpha$로 나타낼 수 있다.

계산 과정

$L = \ln \alpha$로 놓는다. 그러면

$\frac{x}{2}\ln 2 = L, \qquad 2y\ln 3 = L, \qquad 3z\ln 5 = L$

이므로

$x = \frac{2L}{\ln 2}, \qquad y = \frac{L}{2\ln 3}, \qquad z = \frac{L}{3\ln 5}$

이다. 이를 주어진 식에 대입하면

$\frac{2}{x} + \frac{3}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{\ln 2}{L} + \frac{3\ln 3}{L} + \frac{\ln 5}{L} = 1$

이다. 따라서

$L = \ln 2 + 3\ln 3 + \ln 5 = \ln(2 \cdot 3^3 \cdot 5) = \ln 270$

이고, $L = \ln \alpha$이므로 $\alpha = 270$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 $\alpha = 270$이므로 옳다.

② X — 280은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 270이다.

③ X — 290은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 270이다.

④ X — 300은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 270이다.

NoteBase

오답 포인트

$9^y = 3^{2y}$, $125^z = 5^{3z}$로 바꿀 때 지수 2와 3을 빠뜨리면 $\frac{3}{2y}$와 $\frac{1}{3z}$가 각각 $\frac{3\ln 3}{L}$, $\frac{\ln 5}{L}$로 정리되는 과정을 놓치게 된다. 또한 $\ln 2 + 3\ln 3 + \ln 5$는 $\ln(2 \cdot 3^3 \cdot 5)$이지 로그 안의 수를 단순히 더한 값이 아니다.

다시 나오면 이렇게 판단

공통값의 로그를 하나의 문자로 놓고 각 지수를 그 문자로 표현한 뒤, 주어진 관계식에 대입하여 로그를 하나로 합친다.

암기 포인트

같은 지수값을 로그로 통일한 뒤 $p\ln a + q\ln b = \ln(a^p b^q)$로 합친다.

NoteBase

문 9. 무한급수 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(2+\frac{2k}{n})^3$의 값은?

① 90

② 60

③ 30

④ 0

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 주어진 합을 정적분의 정의인 리만합으로 바꾸어 극한값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(2+\frac{2k}{n})^3$이다. 구간 $[0,1]$을 n등분하면 $\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{k}{n}$이므로 합의 핵심 부분은 함수 $f(x)=(2+2x)^3$의 리만합이다.

사용할 공식

리만합의 정의는 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$이다. 주어진 합에서 $f(\frac{k}{n})=(2+\frac{2k}{n})^3$이므로 이 공식을 사용할 수 있다. 합 밖의 상수 3은 정적분 밖에 그대로 둔다.

계산 과정

먼저 리만합을 정적분으로 바꾸면

$3\int_0^1(2+2x)^3dx$

이다. $u=2+2x$로 놓으면 $du=2dx$이고, $x=0$일 때 $u=2$, $x=1$일 때 $u=4$이다. 따라서

$3\int_0^1(2+2x)^3dx=\frac{3}{2}\int_2^4u^3du=\frac{3}{8}[u^4]_2^4=\frac{3}{8}(256-16)=90$

이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 90이므로 옳다.

② X — 60은 계산 결과와 일치하지 않는다. 올바른 값은 90이다.

③ X — 30은 $\int_0^1(2+2x)^3dx$만 계산하고 합 밖의 계수 3을 곱하지 않았을 때의 값이다. 올바른 값은 $3\times30=90$이다.

④ X — 각 항이 양수이므로 극한값이 0일 수 없다. 올바른 값은 90이다.

NoteBase

오답 포인트

주어진 식에서 $\frac{1}{n}$은 리만합의 구간 폭이고, 그 앞의 3은 정적분 전체에 곱해지는 계수이다. 정적분값 30을 구한 뒤 계수 3을 빠뜨리면 ③을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 꼴을 먼저 $\int_0^1 f(x)dx$로 바꾸고, 합 밖의 상수까지 반영한 뒤 적분값을 계산한다.

암기 포인트

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)dx$이며, 합 밖의 계수는 끝까지 함께 계산한다.

NoteBase

문 10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3n$을 만족할 때, $a_k = 110$이 되는 k의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

정답 2번

출제 포인트

점화식의 증가량을 첫째항부터 누적하여 일반항을 구하고, $a_k = 110$을 만족하는 자연수 k를 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $a_1 = 2$, $a_{n+1} - a_n = 3n$이다.
구해야 할 값: $a_k = 110$이 되는 자연수 k이다.
주의할 조건: a_1에서 a_k까지의 증가량은 $n = 1$부터 $n = k - 1$까지 더한다.

사용할 공식

$a_k = a_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (a_{n+1} - a_n) = 2 + 3\sum_{n=1}^{k-1} n = 2 + \frac{3k(k-1)}{2}$
연속한 두 항의 차가 $3n$으로 주어졌으므로, 첫째항에 각 단계의 증가량을 누적하면 a_k를 구할 수 있다.

계산 과정

$2 + \frac{3k(k-1)}{2} = 110$
$\frac{3k(k-1)}{2} = 108$
$k(k-1) = 72$
$k^2 - k - 72 = (k-9)(k+8) = 0$
따라서 $k = 9$ 또는 $k = -8$인데, k는 자연수이므로 $k = 9$이다.

선지 판단

① X — $k = 8$이면 $a_8 = 2 + \frac{3 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 86$이므로 110이 아니다. 8이 아니라 9가 되어야 한다.
② O — $k = 9$이면 $a_9 = 2 + \frac{3 \cdot 9 \cdot 8}{2} = 110$이므로 조건을 만족한다.
③ X — $k = 10$이면 $a_{10} = 2 + \frac{3 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 137$이므로 110이 아니다. 10이 아니라 9가 되어야 한다.
④ X — $k = 11$이면 $a_{11} = 2 + \frac{3 \cdot 11 \cdot 10}{2} = 167$이므로 110이 아니다. 11이 아니라 9가 되어야 한다.
계산 결과 $k = 9$이므로 정답은 2번이다.

NoteBase

오답 포인트

증가량을 $n=1$부터 $n=k$까지 더하면 항 번호가 하나 밀린다. a_k에 도달하기 위해 더하는 증가량은 a_2-a_1부터 a_k-a_{k-1}까지이므로 마지막 지수는 $k-1$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

점화식에서 $a_{n+1}-a_n$을 분리한 뒤, $a_k=a_1+\sum_{n=1}^{k-1}(a_{n+1}-a_n)$으로 누적하고 자연수 조건에 맞는 해만 선택한다.

암기 포인트

a_k까지의 증가량은 $k-1$개이며, $1+2+\cdots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}$이다.

NoteBase

문 11. 다음은 어느 백화점에서 판매하고 있는 운동화에 대한 제조회사별 고객의 선호도를 조사한 표이다. 192명의 고객이 각각 한 켤레씩 운동화를 산다고 할 때, C회사 제품을 선택할 고객이 39명 이상일 확률을 주어진 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

제조회사	A	B	C	D	계
선호도(%)	20	28	25	27	100

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.9332

② 0.8256

③ 0.7745

④ 0.6915

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 이항분포를 정규분포로 근사하고 표준화하여 특정 인원 이상일 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

C회사 제품의 선호도는 25%이므로 한 고객이 C회사 제품을 선택할 확률은 $p = 0.25$이다. 192명 중 C회사 제품을 선택하는 고객 수를 X라 하면 X는 이항분포 $B(192, 0.25)$를 따른다. 구해야 할 값은 $P(X \ge 39)$이다.

사용할 공식

이항분포 $B(n, p)$의 평균과 분산은 각각 np, $np(1-p)$이다. 따라서 X를 정규분포로 근사하면 표준화 변수는 $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$이다. 여기서는 $np = 48$, $n(1-p) = 144$로 모두 충분히 크므로 정규근사를 적용한다.

NoteBase

계산 과정

평균과 표준편차는 다음과 같다.

$\mu = np = 192 \times 0.25 = 48$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{192 \times 0.25 \times 0.75} = 6$

39명을 표준화하면 다음과 같다.

$z = \frac{39-48}{6} = -1.5$

따라서 표준정규분포의 대칭성을 이용하면 다음과 같다.

P(X≥39) P(Z≥-1.5)=0.5+P(0≤ Z≤1.5)

주어진 표에서 P(0≤ Z≤1.5)=0.4332이므로 P(X≥39)0.5+0.4332=0.9332이다.

선지 판단

① O — 정규근사와 표준화로 구한 확률이 0.9332이므로 옳다.

② X — 0.8256은 계산 결과와 일치하지 않는다. 0.8256이 아니라 0.9332가 올바른 값이다.

③ X — 0.7745는 계산 결과와 일치하지 않는다. 0.7745가 아니라 0.9332가 올바른 값이다.

④ X — 0.6915는 $0.5 + 0.1915$, 즉 표의 $z = 0.5$ 값을 사용한 결과이다. 이 문항의 표준화 값은 -1.5이므로 0.6915가 아니라 0.9332가 올바른 값이다.

오답 포인트

‘39명 이상’을 표준화할 때 분자에 $39 - 48$을 넣어 $z = -1.5$를 얻어야 한다. 또한 구하는 구간은 평균보다 왼쪽인 -1.5 이상 전체이므로 표의 0.4332만 쓰거나 0.5에서 빼지 않고, 0.5에 더한다.

다시 나오면 이렇게 판단

이항분포의 평균 np와 표준편차 $\sqrt{np(1-p)}$를 구한 뒤 기준값을 표준화하고, 구하는 구간이 평균의 어느 쪽인지 확인하여 표의 확률을 0.5에 더할지 뺄지 결정한다.

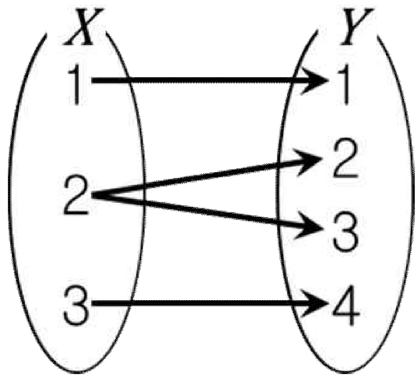
암기 포인트

이항분포의 정규근사는 평균 np, 분산 $np(1-p)$, 표준화 $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$를 사용한다.

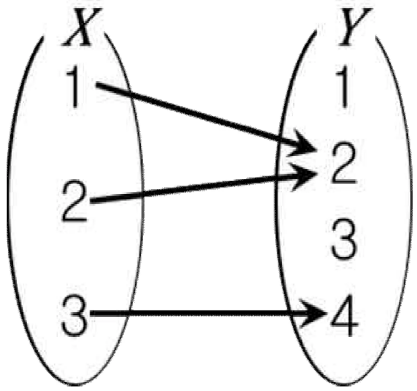
NoteBase

문 12. 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수인 것만을 모두 고른 것으로 가장 옳은 것은?

㉠



㉡



㉢ $f(x)=2x, x\in X$

㉣ $f(x)=x+1, x\in X$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하는지를 확인하여 함수인지 판별하는 문제이다.

NoteBase

핵심 개념

X에서 Y로의 함수는 정의역 X의 모든 원소에 대하여 그 함숫값이 Y 안에서 하나씩만 정해지는 대응이다. 서로 다른 두 입력이 같은 값에 대응하는 것은 허용되지만, 한 입력이 두 값에 대응하거나 함숫값이 Y 밖에 있으면 함수가 아니다.
㉠: 2가 2와 3 두 값에 대응하므로 함수가 아니다.
㉡: 1,2,3이 각각 하나의 값에 대응하고 그 값이 모두 Y에 속하므로 함수이다. 1과 2가 모두 2에 대응하는 것은 허용된다.
㉢: $f(3)=6$인데 $6 \notin Y$이므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.
㉣: $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$이고 모든 함숫값이 Y에 속하므로 함수이다.

선지별 해설

① X — '㉠, ㉡' 중 ㉠은 입력 2에 출력이 두 개이므로 틀린 조합이다. 올바르게는 ㉠을 제외하고 ㉣을 포함한 '㉡, ㉣'이다.
② X — '㉠, ㉢'은 둘 다 함수가 아니다. ㉠은 한 입력에 출력이 두 개이고, ㉢은 $f(3)=6 \notin Y$이다. 올바른 조합은 '㉡, ㉣'이다.
③ O — ㉡은 정의역의 각 원소에 출력이 하나씩 대응하고, ㉣은 함숫값 2,3,4가 모두 Y에 속하므로 둘 다 함수이다.
④ X — '㉡, ㉢, ㉣'에는 함수가 아닌 ㉢이 포함되어 있어 틀린 조합이다. ㉢을 제외한 '㉡, ㉣'이 올바른 조합이다.

오답 포인트

㉠에서는 화살표의 총개수가 아니라 각 입력에서 나가는 화살표의 개수를 확인해야 한다. ㉡처럼 서로 다른 입력이 같은 출력에 대응해도 함수가 될 수 있다. ㉢에서는 식이 함숫값을 하나씩 정한다는 사실만 보고 넘어가기 쉽지만, 공역이 Y로 제한되어 있으므로 모든 함숫값이 Y에 속하는지도 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 정의역의 모든 원소가 빠짐없이 대응하는지 확인하고, 다음으로 각 입력의 출력이 정확히 하나인지 확인한다. 식으로 주어지면 마지막으로 각 함숫값이 공역에 속하는지 확인한다.

암기 포인트

함수 판별의 핵심은 '정의역의 모든 원소, 입력마다 출력 하나, 출력은 공역 안'이다.

NoteBase

문 13. 다항함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $\frac{f'(1)}{f(1)}$의 값은?

㉠ 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$
㉡ $f'(0)=2$

① 1
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{4}$

정답 1번

출제 포인트

가법성 $f(x+y)=f(x)+f(y)$과 도함숫값 $f'(0)=2$를 이용하여 다항함수 f를 결정하고 비 $\frac{f'(1)}{f(1)}$을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$이고, $f'(0)=2$이다.
구해야 할 값: $\frac{f'(1)}{f(1)}$이다.
주의할 조건: $x=y=0$을 대입하면 $f(0)=0$임을 먼저 알 수 있다.

사용할 공식

가법성 식을 x에 대하여 미분하면
$f'(x+y)=f'(x)$
이다. 이 식에 $x=0$을 대입하면 모든 실수 y에 대하여 $f'(y)=f'(0)=2$가 된다. 따라서 f는 기울기가 2인 일차함수이고, $f(0)=0$이므로 $f(x)=2x$이다.

계산 과정

1. $f(0)=f(0)+f(0)$이므로 $f(0)=0$이다.
2. $f'(y)=f'(0)=2$이므로 $f(x)=2x+C$이다.
3. $f(0)=0$에서 $C=0$이므로 $f(x)=2x$이다.
4. $f'(1)=2$, $f(1)=2$이므로
$\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{2}{2}=1$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산값이 1이므로 옳다.
② X — $\frac{1}{2}$은 계산값 1과 다르다. 틀린 값 $\frac{1}{2}$이 아니라 올바른 값은 1이다.
③ X — $\frac{3}{4}$은 계산값 1과 다르다. 틀린 값 $\frac{3}{4}$이 아니라 올바른 값은 1이다.
④ X — $\frac{1}{4}$은 계산값 1과 다르다. 틀린 값 $\frac{1}{4}$이 아니라 올바른 값은 1이다.

오답 포인트

$f'(0) = 2$만 확인하고 $f(1)$을 별개의 값으로 두면 오답 분수들을 고르기 쉽다. 가법성 식을 미분하면 도함수가 모든 점에서 2이고, $f(0) = 0$까지 이용해야 $f(1) = 2$가 확정된다.

다시 나오면 이렇게 판단

미분 가능한 함수의 가법성 문제가 나오면 먼저 $f(0) = 0$을 구하고, 가법성 식을 미분하여 도함수가 상수인지 확인한 뒤 함수를 결정한다.

암기 포인트

미분 가능한 가법함수는 $f(x) = ax$ 꼴이며, $a = f'(0)$이다.

NoteBase

문 14. 이차식 $2x^2-5x+1$을 복소수의 범위에서 인수분해한 것으로 가장 옳은 것은?

① $\left(x+\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$
② $2\left(x+\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$
③ $\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$
④ $2\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 근의 공식을 이용해 이차방정식의 두 근을 구하고, 최고차항의 계수까지 포함하여 이차식을 인수분해하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $2x^2-5x+1$이다. $2x^2-5x+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 인수분해 결과는 최고차항의 계수 2를 포함한 $2(x-\alpha)(x-\beta)$의 꼴이어야 한다.

사용할 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이다. 주어진 이차식의 영점을 구하면 각 일차인수 $x-\alpha, x-\beta$를 정할 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$a=2,\ b=-5,\ c=1$이므로 판별식은 $b^2-4ac=25-8=17$이다. 따라서 두 근은
$x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$
이다. 최고차항의 계수 2를 붙이면
$2x^2-5x+1=2\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$
이 된다.

선지 판단

① X — $\left(x+\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)=x^2+5x+2$이므로 원래 식과 계수와 부호가 모두 맞지 않는다. 올바르게는 앞에 2를 붙이고, 분모를 4로 하며, 두 인수의 부호를 빼기로 써야 한다.
② X — 전개하면 $2x^2+5x+1$이 되어 일차항의 부호가 원래 식의 $-5x$와 반대이다. 두 인수의 $+$를 $-$로 고치면 올바른 인수분해가 된다.
③ X — 전개하면 x^2-5x+2이므로 최고차항과 상수항의 계수가 원래 식과 다르다. 올바르게는 앞에 2를 붙이고 두 분모를 2가 아니라 4로 써야 한다.
④ O — 두 근 $\frac{5+\sqrt{17}}{4}, \frac{5-\sqrt{17}}{4}$에 대해 $2(x-\alpha)(x-\beta)$로 쓴 식이며, 전개하면 정확히 $2x^2-5x+1$이 된다.

NoteBase

오답 포인트

근의 공식에서 분모는 $2a = 4$이고, 근이 α이면 인수는 $x - \alpha$이다. 분모를 2로 쓰는 실수, 근의 부호를 인수에 그대로 쓰는 실수, 최고차항의 계수 2를 빠뜨리는 실수가 각각 오답으로 이어진다.

다시 나오면 이렇게 판단

이차식 인수분해 문제에서는 판별식을 계산해 두 근을 구한 뒤 $a(x-\alpha)(x-\beta)$로 쓰고,
최고차항·일차항·상수항을 전개하여 검산한다.

암기 포인트

근은 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, 인수분해는 $a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

문 15. 삼차방정식 $x^3 + ax + 2 = 0$의 세 근이 모두 정수일 때, a의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 비에타의 정리를 이용해 정수인 세 근의 합과 곱을 동시에 만족시키고, 그 근들로부터 계수 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

세 근을 r, s, t라 하면 $r + s + t = 0$, $rs + rt + st = a$, $rst = -2$이다. 세 근은 모두 정수이므로 곱의 절댓값이 2인 세 정수의 절댓값은 1, 1, 2이어야 한다.

사용할 공식

삼차방정식 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$의 세 근이 r, s, t일 때 비에타의 정리에 따라 $r + s + t = -b$, $rs + rt + st = c$, $rst = -d$이다. 이 문제에서는 근이 모두 정수라는 조건과 근의 합·곱을 함께 사용하면 가능한 세 근을 결정할 수 있다.

계산 과정

1. $rst = -2$이므로 세 근의 절댓값은 1, 1, 2이다.
2. 곱이 음수이고 합이 0이 되는 부호 조합은 $1, 1, -2$뿐이다. 실제로 $1 + 1 - 2 = 0$, $1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2$이다.
3. 따라서 $a = rs + rt + st = 1 - 2 - 2 = -3$이다. 또한 $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$이므로 세 근 $1, 1, -2$가 모두 정수임을 확인할 수 있다.

선지 판단

① O — 비에타의 정리로 구한 값이 $a = -3$이므로 옳다.

② X — $a = -2$가 아니라 $a = -3$이다. 세 근 $1, 1, -2$의 두 근씩의 곱을 모두 더하면 $1 - 2 - 2 = -3$이다.

③ X — $a = -1$가 아니라 $a = -3$이다. 근의 곱 $rst = -2$뿐 아니라 근의 합 $r + s + t = 0$도 함께 만족시키면 세 근이 $1, 1, -2$로 결정된다.

④ X — $a = 0$이 아니라 $a = -3$이다. $a = 0$이면 방정식은 $x^3 + 2 = 0$이고 실근 $-\sqrt[3]{2}$가 정수가 아니므로 조건에 맞지 않는다.

NoteBase

오답 포인트

상수항 2만 보고 근의 곱만 맞추거나, a를 근 하나와 혼동하면 오답이 된다. a는 세 근의 합이나 곱이 아니라 두 근씩 곱한 세 항의 합 $rs + rt + st$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

최고차항의 계수가 1인 삼차방정식에서 모든 근이 정수라고 하면 먼저 상수항으로 가능한 정수근 조합을 좁히고, 근의 합 조건으로 조합을 확정한 뒤 비에타의 정리로 요구한 계수를 계산한다.

암기 포인트

삼차식의 비에타 관계는 '근의 합은 $-b$, 두 근씩 곱한 합은 c, 세 근의 곱은 $-d$'이다.

NoteBase

문 16. 분수함수 $y=\frac{1}{x+1}+a$의 그래프의 점근선 방정식이 $x=b, y=2$라고 할 때, a^2+b^2의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

정답 3번

출제 포인트

분수함수의 분모가 0이 되는 곳에서 수직점근선을, 분수 부분이 0에 가까워질 때 남는 상수에서 수평점근선을 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $y=\frac{1}{x+1}+a$이다. 수직점근선은 $x=b$, 수평점근선은 $y=2$이고, 구해야 할 값은 a^2+b^2이다.

사용할 공식

함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 점근선은 $x=p, y=q$이다. 주어진 식을 $y=\frac{1}{x-(-1)}+a$로 보면 이 형태와 바로 비교할 수 있다.

계산 과정

분모 $x+1$이 0이 되는 값은 $x=-1$이므로 수직점근선은 $x=-1$이고 $b=-1$이다. 또한 x의 절댓값이 커지면 $\frac{1}{x+1}$은 0에 가까워지므로 수평점근선은 $y=a$이다. 따라서 $a=2$이다.
$a^2+b^2=2^2+(-1)^2=4+1=5$

선지 판단

① X — 선지의 값 1은 계산 결과 5와 다르다. 올바른 값은 $a^2+b^2=5$이다.
② X — 선지의 값 3은 계산 결과 5와 다르다. 올바른 값은 $a^2+b^2=5$이다.
③ O — $a=2, b=-1$이므로 $a^2+b^2=5$이다.
④ X — 선지의 값 7은 계산 결과 5와 다르다. 올바른 값은 $a^2+b^2=5$이다.

오답 포인트

수직점근선에서 $x+1=0$을 풀면 $x=-1$이다. 이를 $b=1$로 잘못 읽기 쉽지만, 이 문제에서는 제곱하므로 부호 실수가 최종값을 바꾸지는 않는다. 실제 핵심은 수평점근선 $y=a=2$와 수직점근선의 위치 $b=-1$을 각각 정확히 대응시키는 데 있다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

분수함수를 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 꼴로 바꾸어 수직점근선 $x = p$와 수평점근선 $y = q$를 먼저 찾은 뒤, 요구한 식에 값을 대입한다.

암기 포인트

$y = \frac{k}{x-p} + q$의 점근선은 세로 $x = p$, 가로 $y = q$이다.

NoteBase

문 17. 어느 항공 노선을 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않을 확률이 0.1이라 한다. 좌석 수가 60이고 62명이 예약하였을 때, 좌석이 부족하게 될 확률은?
(단, $0.9^{61} = 0.0016$, $0.9^{62} = 0.0015$로 계산한다.)

① 0.01138

② 0.01140

③ 0.01142

④ 0.01144

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 탑승 인원을 이항분포로 나타내고, 좌석이 부족해지는 두 경우의 확률을 더하는 문제이다.

조건 정리

예약자는 62명이고 좌석은 60석이다. 한 사람이 탑승할 확률은 $1 - 0.1 = 0.9$이다. 좌석이 부족하려면 실제 탑승 인원이 61명 또는 62명이어야 한다.

사용할 공식

탑승 인원을 X라 하면 $X \sim B(62, 0.9)$이다. 따라서

$$P(X \geq 61) = P(X = 61) + P(X = 62)$$

를 사용한다. 좌석이 60석이므로 60명이 탑승하는 경우까지는 좌석이 부족하지 않고, 61명 이상이 탑승하는 경우만 구해야 하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

61명이 탑승하려면 62명 중 1명만 탑승하지 않아야 하므로

P(X=61)=6261(0.9)^61(0.1)=62×0.0016×0.1=0.00992

이다. 62명 모두 탑승할 확률은

$P(X = 62) = (0.9)^{62} = 0.0015$

이다. 따라서

P(X≥61)=0.00992+0.0015=0.01142

이다.

선지 판단

① X — 0.01138은 계산 결과 0.01142와 다르다. 틀린 값 0.01138은 올바르게는 0.01142이다.
② X — 0.01140은 계산 결과 0.01142와 다르다. 틀린 값 0.01140은 올바르게는 0.01142이다.
③ O — 61명이 탑승할 확률 0.00992와 62명이 탑승할 확률 0.0015를 더하면 0.01142이다.
④ X — 0.01144는 계산 결과 0.01142와 다르다. 틀린 값 0.01144는 올바르게는 0.01142이다.

오답 포인트

좌석이 60석이라는 조건에서 60명 탑승까지 포함하거나, 61명 탑승의 경우에 어느 1명이 탑승하지 않는지를 나타내는 조합의 수 6261=62를 빠뜨리면 안 된다. 또한 문제에서 준 거듭제곱의 근삿값을 그대로 사용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

좌석 수가 s석이면 좌석 부족 사건은 탑승 인원 X에 대하여 $X > s$이다. 최대 예약 인원까지 가능한 탑승 인원을 나누어 각각의 이항확률을 더한다.

암기 포인트

좌석 부족은 '탑승 인원 > 좌석 수'이며, 이 문제에서는 61명 또는 62명 탑승이다.

NoteBase

문 18. $x > 2$일 때, $4x - 4 + \frac{4}{x-2} \geq k$이 항상 성립하기 위한 k의 최댓값을 m, 그 때의 x의 값을 n이라 할 때, $m + n$의 값은?

① 15

② 16

③ 17

④ 18

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 양수 조건에서 산술평균과 기하평균의 관계를 이용해 식의 최솟값과 등호 성립 조건을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $x > 2$이므로 $t = x - 2$로 놓으면 $t > 0$이다.
구해야 할 값: 부등식이 모든 $x > 2$에서 성립하게 하는 k의 최댓값 m, 그때의 x값 n, 그리고 $m + n$이다.
주의할 조건: n은 t의 값이 아니라 원래 변수 x의 값이다.

사용할 공식

양수 a, b에 대하여 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$이고, 등호는 $a = b$일 때 성립한다.
$t = x - 2 > 0$로 치환하면 주어진 식의 변하는 두 항이 모두 양수이므로 이 공식을 사용할 수 있다.

계산 과정

$4x - 4 + \frac{4}{x-2} = 4(t+2) - 4 + \frac{4}{t} = 4t + 4 + \frac{4}{t}$
$4t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{4t \cdot \frac{4}{t}} = 8$
따라서 주어진 식의 최솟값은 $8 + 4 = 12$이다. 등호는 $4t = \frac{4}{t}$, 즉 $t = 1$일 때 성립한다. 그러므로 $x = t + 2 = 3$이고, $m = 12, n = 3$이므로 $m + n = 15$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 $m + n = 12 + 3 = 15$이므로 옳다.
② X — ‘16’은 계산 결과와 다르다. 올바르게는 $m + n = 15$이다.
③ X — ‘17’은 계산 결과와 다르다. 올바르게는 $m + n = 15$이다.
④ X — ‘18’은 계산 결과와 다르다. 올바르게는 $m + n = 15$이다.

NoteBase

오답 포인트

식의 최솟값 12만 구하고 끝내거나, 치환변수 $t = 1$을 그대로 n으로 보는 것이 함정이다. 문제의 n은 원래 변수의 값이므로 $x = t + 2 = 3$으로 되돌려야 한다. 또한 $4t + 4/t$ 바깥의 상수항 4를 빠뜨리지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모에 $x - a$가 있고 $x > a$인 최솟값 문제에서는 $t = x - a > 0$로 치환한 뒤 산술평균과 기하평균의 관계를 적용한다. 최솟값뿐 아니라 등호 성립 조건을 구하고, 마지막에는 치환을 원래 변수로 되돌린다.

암기 포인트

양수 t에 대하여 $at + b/t \geq 2\sqrt{ab}$이고, 등호는 $at = b/t$일 때 성립한다.

NoteBase

문 19. 100명의 학생에게 A, B, C 세 개의 수학 문제를 풀게 하였다. 그 중에서 A 문제를 맞힌 학생이 48명, B 문제를 맞힌 학생이 52명, C 문제를 맞힌 학생이 45명, A, B, C 세 문제를 모두 맞힌 학생이 13명, A, B, C 세 문제 중 한 문제도 맞히지 못한 학생이 8명이라고 한다. 이때, A, B, C 세 문제 중 두 문제만을 맞힌 학생의 수는?

① 26

② 27

③ 33

④ 66

정답 2번

출제 포인트

세 집합의 합집합 원소 수와 각 학생이 맞힌 문제 수의 총합을 이용하여 정확히 두 문제만 맞힌 학생 수를 구하는 문제이다.

조건 정리

전체 학생은 100명이고, 한 문제도 맞히지 못한 학생은 8명이므로 적어도 한 문제를 맞힌 학생은 92명이다.
각 문제를 맞힌 학생 수의 합은 $48 + 52 + 45 = 145$명이다.
세 문제를 모두 맞힌 학생은 13명이다.
정확히 한 문제만 맞힌 학생 수를 x, 정확히 두 문제만 맞힌 학생 수를 y로 둔다.

사용할 공식

적어도 한 문제를 맞힌 학생 수를 세면
$x + y + 13 = 92$
이다. 각 문제의 정답자 수를 모두 더하면 한 문제 정답자는 한 번, 두 문제 정답자는 두 번, 세 문제 정답자는 세 번 집계되므로
$x + 2y + 3 \times 13 = 145$
이다. 같은 학생이 맞힌 문제 수만큼 중복 집계된다는 점을 반영하기 위해 이 두 식을 사용한다.

NoteBase

계산 과정

두 식을 정리하면
$x + y = 79$
$x + 2y = 106$
이다. 두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면
$y = 106 - 79 = 27$
을 얻는다. 따라서 두 문제만 맞힌 학생은 27명이다.

선지 판단

① X — 26명은 계산 결과 27명과 일치하지 않는다. ①의 26은 틀린 값이며, 올바르게는 27명이다.
② O — 두 식 $x + y = 79$, $x + 2y = 106$의 차로 구한 y가 27이므로 옳다.
③ X — 33명은 계산 결과 27명과 일치하지 않는다. ③의 33은 틀린 값이며, 올바르게는 27명이다.
④ X — 66명은 계산 결과 27명과 일치하지 않는다. ④의 66은 틀린 값이며, 올바르게는 27명이다.

오답 포인트

48 + 52 + 45에는 두 문제를 맞힌 학생이 두 번, 세 문제를 맞힌 학생이 세 번 포함된다. 또한 한 문제도 맞히지 못한 8명은 합집합에서 제외되므로 적어도 한 문제를 맞힌 학생 수를 $100 - 8 = 92$로 두어야 한다. 이 중복 횟수와 합집합의 범위를 혼동하면 오답값을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

정확히 한 개, 두 개, 세 개에 속하는 사람 수를 각각 구분하고, 합집합의 인원수 식과 소속 횟수를 센 식을 세운 뒤 두 식의 차로 정확히 두 개에 속하는 사람 수를 구한다.

암기 포인트

세 집합에서 전체 소속 횟수의 합은 '정확히 1개인 수 + 정확히 2개인 수의 2배 + 정확히 3개인 수의 3배'이다.

NoteBase

문 20. 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x축 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프가 점 $(a, 3)$을 지날 때, a의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

정답 2번

출제 포인트

함수의 그래프를 대칭이동·평행이동한 뒤 식을 구하고, 주어진 점의 좌표를 대입하여 미지수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $y=\sqrt{x+2}$이다. 먼저 y축에 대하여 대칭이동하고, 이어서 x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한다. 최종 그래프가 점 $(a, 3)$을 지나므로 변환된 식에 $x=a, y=3$을 대입한다.

사용할 공식

$y=f(x)$를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=f(-x)$가 되고, x축의 양의 방향으로 h만큼 평행이동하면 식의 x를 $x-h$로 바꾼다. 좌우 이동은 함수식 안의 x를 바꾸어 나타내기 때문이다.

계산 과정

1. $y=\sqrt{x+2}$를 y축에 대하여 대칭이동하면 x를 $-x$로 바꾸므로 $y=\sqrt{-x+2}$이다.
2. 이 그래프를 오른쪽으로 1만큼 평행이동하면 x를 $x-1$로 바꾸므로 $y=\sqrt{-(x-1)+2}=\sqrt{3-x}$이다.
3. 점 $(a, 3)$을 대입하면 $3=\sqrt{3-a}$이다. 양변을 제곱하면 $9=3-a$이므로 $a=-6$이다.

선지 판단

① X — $a=-5$를 대입하면 $y=\sqrt{3-(-5)}=\sqrt{8}$이므로 $y=3$이 아니다. 올바른 값은 $a=-6$이다.
② O — $a=-6$을 대입하면 $y=\sqrt{3-(-6)}=\sqrt{9}=3$이므로 점 $(-6, 3)$은 최종 그래프 위에 있다.
③ X — $a=-7$을 대입하면 $y=\sqrt{3-(-7)}=\sqrt{10}$이므로 $y=3$이 아니다. 올바른 값은 $a=-6$이다.
④ X — $a=-8$을 대입하면 $y=\sqrt{3-(-8)}=\sqrt{11}$이므로 $y=3$이 아니다. 올바른 값은 $a=-6$이다.

오답 포인트

y축 대칭에서 x를 $-x$로 바꾸는 것과 오른쪽 평행이동에서 x를 $x-1$로 바꾸는 것을 식의 바깥에 적용하면 부호나 이동 방향을 잘못 처리하게 된다. 특히 $-x$가 있는 식에 $x-1$을 대입할 때 $-(x-1)=-x+1$임을 빠뜨리지 않아야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

대칭이동과 평행이동이 연속되면 문제에 제시된 순서대로 함수식의 x를 치환한다. 변환된 식을 먼저 완성한 뒤 주어진 점의 좌표를 대입하고, 마지막에 구한 좌표를 원식에 다시 대입해 검산한다.

암기 포인트

y축 대칭은 $x \to -x$, 오른쪽으로 h만큼 이동은 $x \to x-h$이다.

NoteBase