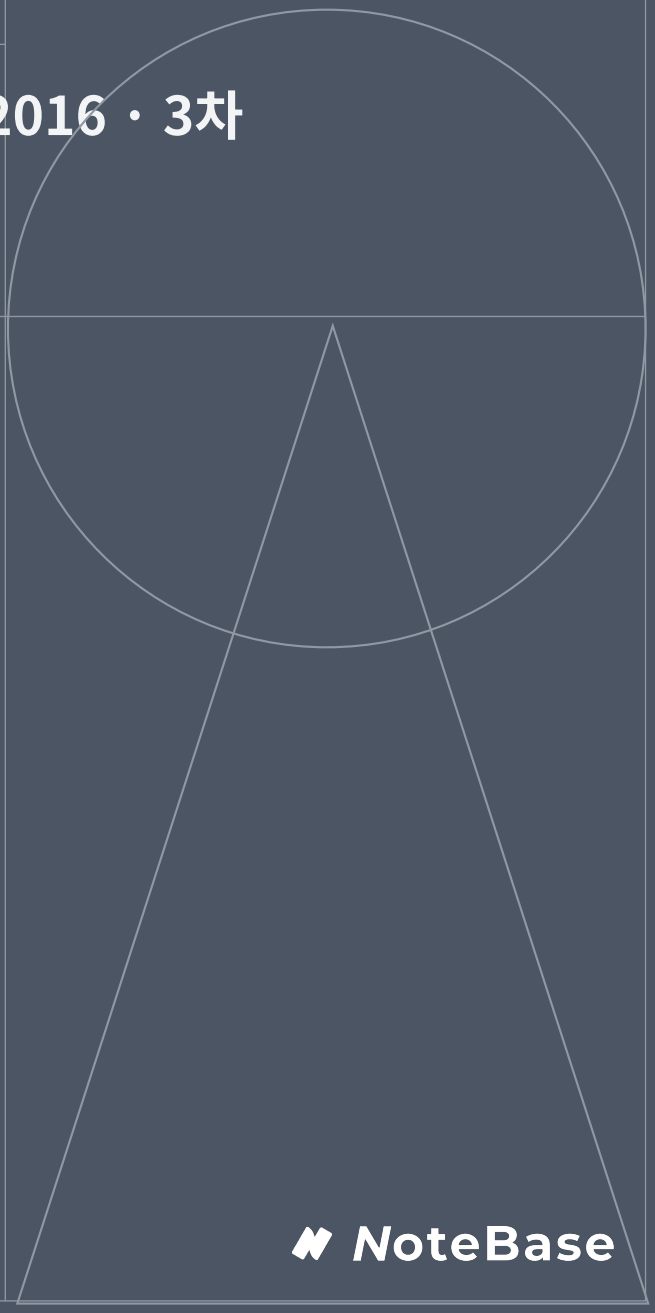
기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2016 · 3차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/해경/순경 · 수학 · 2016 · 3차

공무원/해경/순경 · 수학 · 2016 · 3차

문 1. $\log_4 8 + 16^{-\frac{1}{4}}$의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

정답 3번

출제 포인트

로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그식과 음의 분수 지수식을 각각 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\log_4 8 + 16^{-\frac{1}{4}}$이다. 두 항을 밑이 2인 거듭제곱으로 바꾸어 계산한다.

사용할 공식

$a^x = b$이면 $\log_a b = x$이고, $(a^m)^n = a^{mn}$이다. $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$이므로 두 공식을 바로 적용할 수 있다.

계산 과정

$\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$

$16^{-\frac{1}{4}} = (2^4)^{-\frac{1}{4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

따라서

$\log_4 8 + 16^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

선지 판단

① X — 계산 결과는 1이 아니라 2이다. 올바른 값은 2이다.

② X — 계산 결과는 $\sqrt{2}$가 아니라 2이다. 올바른 값은 2이다.

③ O — 계산 결과 2와 일치한다.

④ X — 계산 결과는 $2\sqrt{2}$가 아니라 2이다. 올바른 값은 2이다.

NoteBase

오답 포인트

$16^{-\frac{1}{4}}$에서 음의 지수를 빠뜨리거나, 네제곱근을 제곱근처럼 처리하면 오답이 된다. 이 항은 $16^{\frac{1}{4}}=2$의 역수이므로 $\frac{1}{2}$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

로그의 밑과 진수를 같은 밑의 거듭제곱으로 바꾸고, 음의 분수 지수는 거듭제곱근의 역수로 계산한 뒤 두 결과를 합한다.

암기 포인트

$\log_{a^m} a^n=\frac{n}{m}$, $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$이다.

NoteBase

문 2. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_7 + a_{11} = 20$을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

정답 1번

출제 포인트

등차수열의 일반항을 이용하여 공차를 구한 뒤 특정 항의 값을 계산하는 문제이다.

조건 정리

첫째항은 $a_1 = 2$이고, $a_7 + a_{11} = 20$이다. 구해야 할 값은 a_{10}이다. 등차수열에서 제n항은 첫째항에 공차를 $n-1$번 더한 값이라는 점에 주의한다.

사용할 공식

등차수열의 일반항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$이다. 각 항을 첫째항과 공차 d로 나타내면 주어진 두 항의 합에서 공차를 구할 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$a_7 = 2 + 6d$, $a_{11} = 2 + 10d$이므로
$a_7 + a_{11} = (2 + 6d) + (2 + 10d) = 4 + 16d = 20$
따라서 $16d = 16$이므로 $d = 1$이다. 그러므로
$a_{10} = 2 + 9d = 2 + 9 = 11$
이다.

선지 판단

① O — 계산한 a_{10}의 값이 11이므로 옳다.
② X — 12는 a_{10}을 $a_1 + 10d$로 잘못 계산할 때 나오는 값이다. 제10항은 공차를 9번 더하므로 올바른 값은 11이다.
③ X — 13은 계산 결과 11과 일치하지 않는다. 올바르게는 $a_{10} = 2 + 9 \cdot 1 = 11$이다.
④ X — 14는 계산 결과 11과 일치하지 않는다. 올바르게는 $a_{10} = 11$이다.

NoteBase

오답 포인트

일반항에서 공차에 곱하는 수를 n으로 착각하기 쉽다. 첫째항이 이미 제1항이므로 제n항까지 공차를 더하는 횟수는 $n-1$번이다.

다시 나오면 이렇게 판단

각 항을 $a_n = a_1 + (n-1)d$로 나타내고, 주어진 조건으로 공차를 구한 다음 목표 항에 대입한다. 마지막에는 항번호보다 공차의 개수가 1 작은지 확인한다.

암기 포인트

등차수열의 제n항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$이다.

NoteBase

문 3. 모든 실수 x에 대하여 이차식 $-x^2+2ax+1$의 값이 5보다 작도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<2$

② $-2\le a\le 2$

③ $0<a<4$

④ $2\le a\le 6$

정답 1번

출제 포인트

아래로 열린 이차식의 최댓값을 구하고, 모든 실수 x에서 부등식이 성립하도록 하는 매개변수 a의 범위를 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+2ax+1<5$이다.
구해야 할 값: 조건을 만족하는 실수 a의 범위이다.
주의할 조건: 부등호가 '작거나 같다'가 아니라 '작다'이므로 경계값 $a=\pm2$는 포함되지 않는다.

사용할 공식

완전제곱식을 이용하면
$-x^2+2ax+1=-(x-a)^2+a^2+1$
이다. -(x-a)^2≤0이고 $x=a$일 때 0이 되므로, 이 식의 최댓값은 a^2+1이다. 모든 실수 x에서 식의 값이 5보다 작으려면 이 최댓값 자체가 5보다 작아야 한다.

계산 과정

최댓값 조건을 세우면
$a^2+1<5$
이고, 이를 정리하면
$a^2<4$
이다. 따라서
$-2<a<2$
를 얻는다.

NoteBase

선지 판단

① O — $-2 < a < 2$는 계산한 범위와 정확히 일치한다.
② X — $a = \pm 2$이면 최댓값이 $a^2 + 1 = 5$가 되어 '5보다 작다'를 만족하지 않는다. 틀린 표현 -2≤ a≤2는 $-2 < a < 2$로 고쳐야 한다.
③ X — $0 < a < 4$에는 가능한 음수 a가 빠져 있고, $2 \le a < 4$처럼 조건을 만족하지 않는 값도 포함된다. 올바른 범위는 $-2 < a < 2$이다.
④ X — 2≤ a≤6에서는 모든 a에 대해 a^2+1≥5이므로 조건을 만족하지 않는다. 올바른 범위는 $-2 < a < 2$이다.

오답 포인트

②는 a^2≤4로 잘못 바꾸어 경계값을 포함하게 만드는 함정이다. 원래 조건이 엄격부등식이므로 최댓값도 반드시 $a^2 + 1 < 5$여야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

'모든 실수 x'에 대해 아래로 열린 이차식이 어떤 수보다 작다는 조건에서는 완전제곱으로 최댓값을 구한 뒤, 그 최댓값에 같은 방향의 엄격부등식을 적용한다.

암기 포인트

아래로 열린 이차식이 항상 k보다 작으려면 '최댓값 $< k$'를 확인하며, 엄격부등식의 경계값은 포함하지 않는다.

NoteBase

문 4. 함수 f(x)=casesx^3+ax&(x<1)\^2+x+1&(x≥ 1)cases이 $x=1$에서 미분 가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 2번

출제 포인트

조각함수가 경계점에서 미분 가능하려면 그 점에서 연속이고 좌우 미분계수가 같아야 한다는 조건을 이용해 $a+b$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $x=1$을 기준으로 식이 나뉜다. 구해야 할 값은 $a+b$이다. 미분 가능 조건에는 함수값의 연속 조건과 좌우 미분계수의 일치 조건이 모두 포함된다.

사용할 공식

$x=1$에서 미분 가능하려면
$\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)$
이고
$\lim_{x\to1^-} f'(x)=\lim_{x\to1^+} f'(x)$
이어야 한다. 조각함수의 경계점에서 미분 가능성을 판정하는 상황이므로 두 조건을 함께 사용한다.

계산 과정

1. 연속 조건을 적용하면 $1+a=b+2$이므로 $a=b+1$이다.
2. 왼쪽 식의 도함수는 $3x^2+a$, 오른쪽 식의 도함수는 $2bx+1$이다. 따라서 $x=1$에서 $3+a=2b+1$, 즉 $a=2b-2$이다.
3. $b+1=2b-2$이므로 $b=3$, $a=4$이다. 따라서 $a+b=7$이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 7이므로 6은 옳지 않다. 올바른 값은 7이다.

② O — $a=4$, $b=3$이므로 $a+b=7$이다.

③ X — 계산 결과는 7이므로 8은 옳지 않다. 올바른 값은 7이다.

④ X — 계산 결과는 7이므로 9는 옳지 않다. 올바른 값은 7이다.

NoteBase

오답 포인트

미분계수만 같게 놓고 연속 조건을 빠뜨리면 미지수 두 개를 결정할 수 없다. 또한 오른쪽 함수 $bx^2 + x + 1$의 $x = 1$에서의 함수값은 $b + 2$, 미분계수는 $2b + 1$이므로 두 값을 혼동하지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

조각함수의 경계점 미분 가능 문제는 먼저 좌우 함수값을 같게 놓아 연속 조건을 세우고, 다음으로 좌우 미분계수를 같게 놓아 미분 조건을 세운 뒤 연립한다.

암기 포인트

경계점에서 미분 가능하면 반드시 연속이며, 좌우 미분계수도 같다.

NoteBase

문 5. 좌표평면 위의 두 점 $A(0, 9)$, $B(0, 12)$에 대하여 점 A'와 점 B'는 모두 직선 $y = x$위의 점이며, $\overline{AA'}$와 $\overline{BB'}$는 점 $C(2, 8)$에서 만난다. 이때, $\overline{A'B'}$의 길이는?

① $\sqrt{2}$
② $2\sqrt{2}$
③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 세 점의 공선 조건으로 직선의 방정식을 세운 뒤, 직선 $y = x$와의 교점 및 두 점 사이의 거리를 구하는 문제이다.

조건 정리

점 A, C, A'는 한 직선 위에 있고, 점 B, C, B'도 한 직선 위에 있다. 또한 A'와 B'는 모두 직선 $y = x$ 위에 있다. 구해야 할 값은 두 교점 A', B' 사이의 거리이다.

사용할 공식

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$이고, 두 점 사이의 거리는 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이다. A'와 B'는 각각 AC, BC와 $y = x$의 교점이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 직선 AC의 기울기는 $\frac{8 - 9}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$이므로 방정식은 $y = 9 - \frac{1}{2}x$이다. $y = x$를 대입하면 $x = 9 - \frac{1}{2}x$에서 $x = 6$이므로 $A' = (6, 6)$이다.
2. 직선 BC의 기울기는 $\frac{8 - 12}{2 - 0} = -2$이므로 방정식은 $y = 12 - 2x$이다. $y = x$를 대입하면 $x = 12 - 2x$에서 $x = 4$이므로 $B' = (4, 4)$이다.
3. 따라서 $\overline{A'B'} = \sqrt{(6 - 4)^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

선지 판단

① X — $\sqrt{2}$는 계산된 거리 $2\sqrt{2}$와 다르다. ①의 $\sqrt{2}$는 잘못된 값이며, 올바른 값은 $2\sqrt{2}$이다.
② O — $A' = (6, 6), B' = (4, 4)$이므로 거리 공식의 결과가 $2\sqrt{2}$이다.
③ X — $3\sqrt{2}$는 계산된 거리와 다르다. ③의 $3\sqrt{2}$는 잘못된 값이며, 올바른 값은 $2\sqrt{2}$이다.
④ X — $4\sqrt{2}$는 계산된 거리와 다르다. ④의 $4\sqrt{2}$는 잘못된 값이며, 올바른 값은 $2\sqrt{2}$이다.

NoteBase

오답 포인트

점 C가 두 선분의 교점이라는 조건을 단순한 거리 정보로 보면 안 된다. 이 조건은 A, C, A'와 B, C, B'가 각각 일직선 위에 있다는 뜻이다. 또한 $y = x$ 위의 두 점 사이에서는 x좌표 차와 y좌표 차가 같지만, 거리는 좌표 차 하나가 아니라 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$로 계산한다.

다시 나오면 이렇게 판단

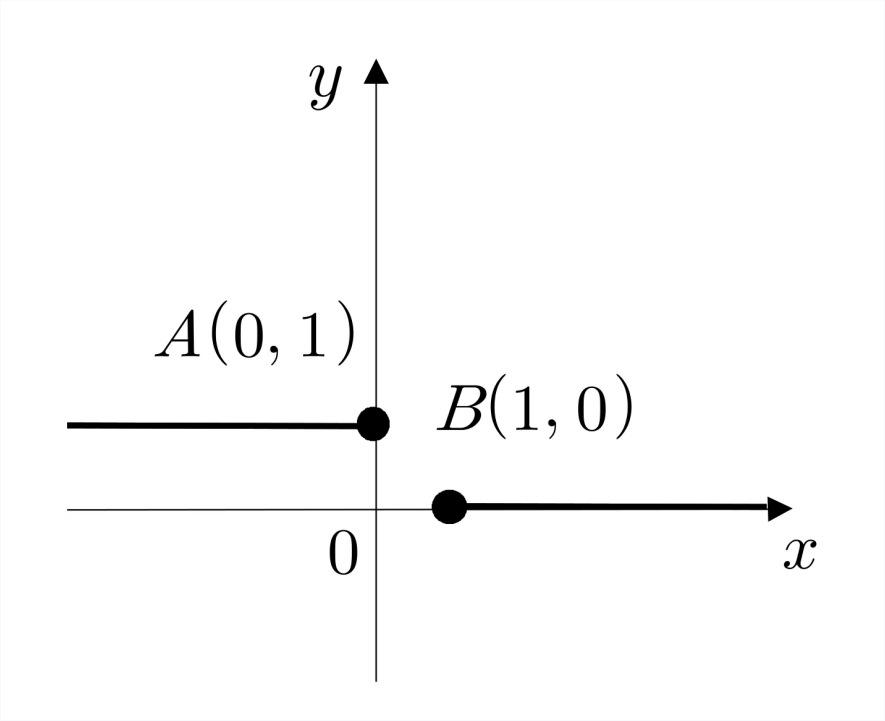
교점 조건에서 공선인 세 점을 먼저 묶고 각 직선의 방정식을 구한다. 이어서 공통 조건인 $y = x$를 연립해 교점의 좌표를 찾은 뒤 거리 공식으로 검산한다.

암기 포인트

직선 $y = x$ 위의 두 점 $(a, a), (b, b)$ 사이의 거리는 $|a - b|\sqrt{2}$이다.

NoteBase

문 6. 다음 그림은 함수 $y = 1$과 함수 $y = 0$의 그래프의 일부이다. 두 점 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$사이를 $0 \leq x \leq 1$에서 정의된 함수 $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$의 그래프를 구간 $(-\infty, \infty)$에서 미분가능 하도록 연결할 때, $a^2 + b^2 + c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① 11

② 13

③ 15

④ 17

정답 2번

출제 포인트

상수함수와 삼차함수를 두 연결점에서 미분가능하게 이을 때, 함수값과 미분계수가 모두 같아야 한다는 조건으로 계수를 구하는 문제이다.

조건 정리

구간 안의 함수는 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$이다.
점 $A(0, 1)$에서는 왼쪽의 상수함수 $y = 1$과 연결되고, 점 $B(1, 0)$에서는 오른쪽의 상수함수 $y = 0$과 연결된다.
상수함수의 미분계수는 0이므로 $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$을 만족해야 한다.

NoteBase

사용할 공식

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
연결한 전체 함수가 미분가능하려면 각 연결점에서 함수값이 같아 연속이어야 하고, 좌우 미분계수도 같아야 한다.

계산 과정

$f'(0) = c = 0$이다.
$f(1) = 0$에서 $a + b + c + 1 = 0$이므로 $a + b = -1$이다.
$f'(1) = 0$에서 $3a + 2b + c = 0$이므로 $3a + 2b = 0$이다.
$a + b = -1$과 $3a + 2b = 0$을 연립하면 $a = 2, b = -3, c = 0$이다.
따라서 $a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + (-3)^2 + 0^2 = 13$이다.

선지 판단

① X — 계산값은 11이 아니라 13이다. 틀린 값 11은 연결점의 함수값과 미분계수 조건을 모두 적용한 결과가 아니다. 올바르게는 $a^2 + b^2 + c^2 = 13$이다.
② O — $a = 2, b = -3, c = 0$이므로 $a^2 + b^2 + c^2 = 13$이다.
③ X — 계산값은 15가 아니라 13이다. 틀린 값 15는 연립방정식으로 구한 계수의 제곱합과 일치하지 않는다. 올바르게는 $a^2 + b^2 + c^2 = 13$이다.
④ X — 계산값은 17이 아니라 13이다. 틀린 값 17은 $2^2 + (-3)^2 + 0^2$의 값이 아니다. 올바르게는 $a^2 + b^2 + c^2 = 13$이다.

오답 포인트

두 점을 지나기만 하면 된다고 보고 $f(0) = 1, f(1) = 0$만 사용하면 계수가 결정되지 않는다. '미분가능하게 연결'이라는 표현에서 연결점의 좌우 기울기도 같아야 하므로 $f'(0) = f'(1) = 0$을 반드시 함께 사용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

구간별 함수의 연결 문제에서는 각 경계점마다 먼저 함수값을 맞추고, 미분가능 조건이 있으면 좌우 미분계수까지 맞춘 뒤 연립방정식을 푼다.

암기 포인트

미분가능한 연결은 '함수값 일치 + 기울기 일치'이다. 상수함수와 연결되는 점에서 기울기는 0이다.

NoteBase

문 7. 다음 중 참인 명제는?

① $x^2 = 1$이면 $x = 1$이다.

② 복소수 z에 대하여 $z^2 < 0$이다.

③ 고등학생은 키가 크다.

④ 4의 양의 약수의 개수는 3개이다.

정답 4번

출제 포인트

문장의 참과 거짓이 명확하게 결정되는지 판단하고, 참인 명제를 찾는 문제이다.

핵심 개념

명제는 참인지 거짓인지 객관적으로 판별할 수 있는 문장이다. 조건이나 대상이 불분명하여 진릿값을 정할 수 없는 문장은 명제가 아니다.

선지별 해설

① X

$x^2 = 1$의 해는 $x = 1$뿐 아니라 $x = -1$도 있으므로 거짓인 명제이다. 틀린 표현은 '$x = 1$이다'이며, 올바르게는 '$x = 1$ 또는 $x = -1$이다'이다.

② X

복소수 전체에는 실수에서와 같은 대소 관계를 일반적으로 적용하지 않으며, 모든 복소수에 대해 $z^2 < 0$이 성립하지도 않는다. 예를 들어 $z = 1$이면 $z^2 = 1$이다. 틀린 표현은 '복소수 z에 대하여 $z^2 < 0$이다'이며, 올바르게는 '복소수 전체에 대해 $z^2 < 0$이라고 할 수 없다'이다.

③ X

'키가 크다'는 판단 기준과 대상이 명확하지 않아 참과 거짓을 객관적으로 결정할 수 없으므로 명제가 아니다. 틀린 표현은 '키가 크다'이며, 올바르게는 대상을 특정하고 '학생 A의 키는 $180cm$ 이상이다'처럼 판정 기준을 명확히 제시해야 한다.

④ O

4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 그 개수는 3개이다. 참과 거짓을 판별할 수 있고 실제로 참이므로 참인 명제이다.

NoteBase

오답 포인트

①에서 제곱방정식의 음의 해를 빠뜨리거나, ③처럼 일상적으로 그럴듯한 문장을 참인 명제로 착각하기 쉽다. 명제인지 여부와 그 명제의 진릿값을 구분해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 문장의 조건과 대상이 분명하여 참·거짓을 판별할 수 있는지 확인한다. 명제라면 반례를 대입하거나 값을 직접 계산하여 진릿값을 결정한다.

암기 포인트

명제는 진릿값이 분명한 문장이고, 단 하나의 반례만 있어도 그 명제는 거짓이다.

NoteBase

문 8. 점 $(5, -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행 이동 하였더니 점 $(2, 4)$가 되었다. 이때, 상수 $a+b$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 평행이동 전후의 좌표 차를 이용해 x축 방향 이동량 a와 y축 방향 이동량 b를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 점: $(5, -1)$
이동한 점: $(2, 4)$
구해야 할 값: $a+b$
주의할 조건: 각 방향의 이동량은 도착 좌표에서 출발 좌표를 뺀 값이며, 음수는 해당 축의 음의 방향으로 이동했음을 뜻한다.

사용할 공식

점 (x, y)를 x축 방향으로 a, y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 $(x+a, y+b)$가 된다.

따라서 $(5+a, -1+b) = (2, 4)$를 사용한다. 출발 좌표에 각 축의 이동량을 더하면 도착 좌표가 되기 때문이다.

계산 과정

1. x좌표를 비교하면 $5+a=2$이므로 $a=-3$이다.
2. y좌표를 비교하면 $-1+b=4$이므로 $b=5$이다.
3. 따라서 $a+b=-3+5=2$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 2이므로 1은 맞지 않는다. 틀린 값 1 → 올바른 값은 2이다.
② O — $a = -3$, $b = 5$이므로 $a + b = 2$이다.
③ X — 계산 결과는 2이므로 3은 맞지 않는다. 틀린 값 3 → 올바른 값은 2이다.
④ X — 계산 결과는 2이므로 4는 맞지 않는다. 틀린 값 4 → 올바른 값은 2이다.

계산 결과가 2이므로 정답은 2번이다.

오답 포인트

x축 방향 이동량을 $5 - 2 = 3$으로 계산하면 이동 방향의 부호를 반대로 잡게 된다. 이동량은 항상 '도착 좌표−출발 좌표'이므로 $a = 2 - 5 = -3$이다. 또한 $-1 + b = 4$에서 $b = 3$으로 처리하지 않고, $b = 4 - (-1) = 5$로 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

평행이동 문제에서는 각 축별로 '도착 좌표−출발 좌표'를 계산해 이동량을 구한 뒤, 문제에서 요구한 식에 대입한다.

암기 포인트

평행이동량은 도착 좌표에서 출발 좌표를 뺀 값이다: $a = x' - x$, $b = y' - y$.

NoteBase

문 9. 서로 다른 두 이차방정식 $x^2 + kx + 5 = 0$, $x^2 + 5x + k = 0$이 오직 하나의 공통인 근 α를 가질 때, 상수 k와 근 α의 합 $k + \alpha$의 값은?

① -9

② -7

③ -5

④ -3

정답 3번

출제 포인트

두 이차방정식에 공통근을 대입한 두 식의 차를 이용하고, 두 방정식이 서로 다르다는 조건으로 불가능한 경우를 제외하는 문제이다.

조건 정리

공통근: α

주어진 조건: $x^2 + kx + 5 = 0$과 $x^2 + 5x + k = 0$은 서로 다른 이차방정식이며 공통근은 오직 하나이다.

구해야 할 값: $k + \alpha$

사용할 공식

공통근 α를 두 방정식에 대입하면

$\alpha^2 + k\alpha + 5 = 0, \qquad \alpha^2 + 5\alpha + k = 0$

이다. 두 식을 빼면 공통된 α^2 항이 없어져 k와 α의 관계를 바로 얻을 수 있다.

계산 과정

두 식의 차를 구하면

$(k - 5)\alpha + (5 - k) = 0$

이고, 이를 인수분해하면

$(k - 5)(\alpha - 1) = 0$

이다. 따라서 $k = 5$ 또는 $\alpha = 1$이다. 그런데 $k = 5$이면 두 방정식이 모두 $x^2 + 5x + 5 = 0$이 되어 서로 다른 두 방정식이라는 조건에 어긋난다. 그러므로 $\alpha = 1$이다. 이를 첫 번째 방정식에 대입하면

$1 + k + 5 = 0$

이므로 $k = -6$이다. 따라서

$k + \alpha = -6 + 1 = -5$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 -5이므로 '-9'는 틀린 값이다. 올바르게는 $k+\alpha=-5$이다.
② X — 계산 결과는 -5이므로 '-7'은 틀린 값이다. 올바르게는 $k+\alpha=-5$이다.
③ O — $k=-6, \alpha=1$이므로 $k+\alpha=-5$이다.
④ X — 계산 결과는 -5이므로 '-3'은 틀린 값이다. 올바르게는 $k+\alpha=-5$이다.

오답 포인트

$(k-5)(\alpha-1)=0$에서 $k=5$도 형식상 나오지만, 이 경우 두 방정식이 완전히 같아진다. '서로 다른 두 이차방정식'이라는 조건을 확인하지 않고 $k=5$를 허용하는 것이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 방정식이 공통근을 가지면 그 근을 각각 대입한 뒤 두 식을 빼서 관계식을 만든다. 인수분해로 나온 각 경우를 원래 조건에 다시 대입하여 두 방정식이 같아지는 경우나 공통근 개수에 어긋나는 경우를 제외한다.

암기 포인트

공통근 문제는 '공통근 대입 → 두 식의 차 → 인수분해 → 원래 조건 검산'의 순서로 판단한다.

NoteBase

문 10. 지진의 크기를 나타내는 규모는 지진이 발생한 지점으로부터 100km 떨어진 지점에서 관측하는데 가장 많이 사용되는 것이 리히터 규모이다. 지진이 발생할 때 대량의 에너지가 방출되는데 발생한 지진파의 에너지를 E, 리히터 규모를 M이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.
위의 식에서 $M = 7.2$일 때의 에너지 E_1과 $M = 9.0$일 때의 에너지 E_2 사이에 $E_2 = kE_1$이 성립한다. 상수 k의 값은?

$\log E = 11.8 + 1.5M$

① $10^{2.7}$

② $10^{2.8}$

③ $10^{2.9}$

④ $10^{3.0}$

정답 1번

출제 포인트

로그로 주어진 에너지 관계식에서 두 규모의 차를 이용하여 에너지의 비를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 관계식: $\log E = 11.8 + 1.5M$
규모: $M_1 = 7.2, M_2 = 9.0$
구해야 할 값: $E_2 = kE_1$을 만족하는 $k = E_2/E_1$

사용할 공식

두 식을 빼면 상수항 11.8이 소거된다.
$\log E_2 - \log E_1 = \log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = 1.5(M_2 - M_1)$
에너지 자체가 아니라 에너지의 비를 구하므로 로그의 뺄셈 법칙을 사용한다.

계산 과정

규모의 차는 $9.0 - 7.2 = 1.8$이다.
$\log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = 1.5 \times 1.8 = 2.7$
따라서 $E_2/E_1 = 10^{2.7}$이고, $E_2 = 10^{2.7}E_1$이므로 $k = 10^{2.7}$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $k = 10^{2.7}$이므로 옳다.
② X — 지수 2.8은 $1.5(9.0 - 7.2) = 2.7$과 일치하지 않는다. 틀린 표현 $10^{2.8}$은 $10^{2.7}$로 고쳐야 한다.
③ X — 지수 2.9는 규모 차 1.8에 1.5를 곱한 값이 아니다. 틀린 표현 $10^{2.9}$은 $10^{2.7}$로 고쳐야 한다.
④ X — $10^{3.0}$은 지수를 임의로 반올림한 값이다. 2.7은 이미 정확한 계산값이므로 틀린 표현 $10^{3.0}$은 $10^{2.7}$로 고쳐야 한다.

오답 포인트

각 에너지를 따로 구하려 하면 큰 수 때문에 계산이 복잡해진다. 또한 규모의 차 1.8을 그대로 지수로 쓰거나, 정확한 지수 2.7을 3.0으로 반올림하면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

같은 로그 관계식에서 두 양의 비를 구할 때는 두 식을 먼저 빼서 공통 상수항을 없앤 뒤, 로그의 차를 비의 로그로 바꾼다.

암기 포인트

$\log E = a + bM$이면 규모 차 ΔM에 따른 에너지비는 $10^{b\Delta M}$이다.

NoteBase

문 11. $\sin\theta$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\theta$가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② 1

③ $\sqrt{3}$

④ 3

정답 4번

출제 포인트

등비수열에서 세 연속항의 중항의 제곱은 양 끝항의 곱과 같다는 성질을 이용해 삼각함수 식의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 세 항은 $\sin\theta$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\theta$이고, 이 순서로 등비수열을 이룬다. 구해야 할 값은 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$이다.

사용할 공식

세 수 a, b, c가 이 순서로 등비수열이면 $b^2=ac$이다. 또한 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$이다. 주어진 세 항이 연속한 등비수열의 항이므로 첫 번째 공식을 적용하고, 구하려는 식을 $\sin\theta$와 $\cos\theta$로 바꾸기 위해 두 번째 식을 사용한다.

계산 과정

등비수열의 중항 관계를 적용하면 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\sin\theta\cos\theta$이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$이다. 따라서 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{1/3}=3$이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 3이므로 $\frac{1}{3}$이 아니다. $\frac{1}{3}$은 $\sin\theta\cos\theta$의 값이며, 구하는 식의 올바른 값은 3이다.
② X — 계산 결과는 3이므로 1이 아니다. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$은 분자의 값일 뿐이며, 분모 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$으로 나누면 올바른 값은 3이다.
③ X — 계산 결과는 3이므로 $\sqrt{3}$이 아니다. 중항 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 자체를 사용하는 것이 아니라 이를 제곱하여 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$을 구해야 하며, 구하는 식의 올바른 값은 3이다.
④ O — $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=3$이므로 옳다.

오답 포인트

등비수열의 중항 $\frac{\sqrt{3}}{3}$을 그대로 양 끝항의 곱으로 보거나, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$만 계산하고 분모를 빠뜨리기 쉽다. 중항은 반드시 제곱하여 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$을 얻어야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

세 항이 등비수열이면 먼저 중항 제곱과 양 끝항의 곱을 같게 놓는다. 그다음 구하려는 탄젠트 식을 사인과 코사인으로 통분하고, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 적용한다.

암기 포인트

등비수열의 세 연속항은 '중항 제곱 = 양 끝항의 곱'이고, $\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$이다.

문 12. 함수 $f(x)=\frac{x^2}{4}+a(x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$가 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 값의 범위는?

① $0\leq a<1$

② $a\geq 0$

③ $a<1$

④ $0<a<2$

정답 1번

출제 포인트

서로 역함수인 두 증가함수의 그래프가 만나는 점은 직선 $y=x$ 위에 있다는 성질을 이용하고, 이차방정식의 두 근이 서로 다르면서 모두 음이 아닐 조건을 구하는 문제이다.

조건 정리

$f(x)=\frac{x^2}{4}+a$는 $x\geq 0$에서 증가하므로 역함수가 존재한다. f와 그 역함수 g의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 함수가 모두 증가하므로, 두 그래프의 교점에서는 $f(x)=g(x)=x$가 성립한다. 따라서 $f(x)=x$의 서로 다른 두 근이 모두 음이 아닌 조건을 구하면 된다.

사용할 공식

고정점 방정식은

$\frac{x^2}{4}+a=x$

이고, 이를 정리하면

$x^2-4x+4a=0$

이다. 이차방정식의 두 근은

$x=2\pm 2\sqrt{1-a}$

이다. 두 교점이 서로 다르려면 판별식이 양수여야 하고, 두 교점이 음이 아니려면 작은 근이 0 이상이어야 한다.

NoteBase

계산 과정

두 근이 서로 다를 조건은

$1 - a > 0 \iff a < 1$

이다. 작은 근이 음이 아닐 조건은

2-2√(1-a)≥0

√(1-a)≤1 a≥0

이다. 이 두 조건을 동시에 만족하는 범위는

$0 \le a < 1$

이다. 이때 큰 근도 음이 아니며, $f(x) = x$이므로 각 근은 역함수 g의 정의역에도 속한다.

선지 판단

① O — $0 \le a < 1$은 서로 다른 두 근 조건 $a < 1$과 두 근의 비음수 조건 a≥0을 모두 만족한다.

② X — a≥0만으로는 두 근이 서로 다를 조건이 부족하다. $a = 1$이면 중근이고 $a > 1$이면 실근이 없으므로, 올바르게는 $0 \le a < 1$이다.

③ X — $a < 1$만으로는 작은 근이 음이 아님을 보장하지 못한다. $a < 0$이면 $2 - 2\sqrt{1 - a} < 0$이므로, 올바르게는 $0 \le a < 1$이다.

④ X — $0 < a < 2$는 가능한 끝점 $a = 0$을 제외하고, 중근 또는 실근이 없는 $1 \le a < 2$를 포함한다. 올바르게는 $0 \le a < 1$이다.

오답 포인트

판별식만 확인하면 ③을 고르기 쉽다. 그러나 문제는 두 실근이 단순히 존재하는지만 묻는 것이 아니라 두 근이 모두 음이 아니어야 한다고 했으므로, 작은 근 $2 - 2\sqrt{1 - a}$의 부호까지 확인해야 한다. 또한 $a = 0$일 때 두 근은 0과 4이므로 $a = 0$을 제외하면 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수와 역함수의 교점을 묻고 원함수가 증가함수이면 먼저 $y = x$, 즉 $f(x) = x$로 바꾼다. 이어서 서로 다른 두 실근 조건은 판별식으로, 근의 부호 조건은 작은 근이나 근과 계수의 관계로 각각 확인한다.

암기 포인트

증가함수와 역함수의 교점은 고정점 $f(x) = x$이고, '서로 다른 두 비음수근'은 판별식과 작은 근의 부호를 함께 확인한다.

NoteBase

문 13. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{2k}{n})^2$을 정적분으로 바르게 나타낸 것을 <보기>에서 있는 대로 모두 고른 것은?

<보기>
가. $\int_0^2(1+x)^2dx$
나. $\int_0^1(1+2x)^2dx$
다. $\frac{1}{2}\int_1^3x^2dx$

① 나
② 가, 나
③ 나, 다
④ 가, 나, 다

정답 3번

출제 포인트

리만합을 정적분으로 바꾸고, 치환적분으로 서로 다른 형태의 정적분이 같은 값을 나타내는지 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{2k}{n})^2$이다. 구간 [0, 1]을 n등분하면 $\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{k}{n}$이므로 함수는 $f(x)=(1+2x)^2$이다.

사용할 공식

리만합 공식은 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$이다. 주어진 합에서 $\Delta x=\frac{1}{n}$이고 표본점이 $x_k=\frac{k}{n}$이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 리만합을 그대로 바꾸면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{2k}{n})^2=\int_0^1(1+2x)^2dx$이므로 나는 옳다.
2. $u=1+2x$로 치환하면 $du=2dx$, 즉 dx=12du이고, 적분 구간은 $x=0\to u=1$, $x=1\to u=3$이 된다. 따라서 ∫ _0^1(1+2x)^2 dx=12 ∫ _1^3u^2 du이므로 다도 옳다. 적분변수는 임의의 문자이므로 이는 12 ∫ _1^3x^2 dx와 같다.
3. 극한값은 $\frac{13}{3}$이다. 반면 가는 $u=1+x$로 치환하면 $\int_1^3u^2du=\frac{26}{3}$이므로 극한값의 두 배가 되어 틀리다.

NoteBase

선지 판단

① X — ‘나’만 고르면 같은 적분을 치환해 나타낸 ‘다’를 누락한다. 틀린 표현 ‘나’ → 올바르게는 ‘나, 다’이다.
② X — ‘가, 나’에는 극한값의 두 배인 ‘가’가 포함되고 옳은 ‘다’가 빠져 있다. 틀린 표현 ‘가, 나’ → 올바르게는 ‘나, 다’이다.
③ O — ‘나’는 주어진 리만합을 직접 정적분으로 나타낸 것이고, ‘다’는 이를 $u = 1 + 2x$로 치환한 것이므로 둘 다 옳다.
④ X — ‘가, 나, 다’에는 값이 $\frac{26}{3}$인 ‘가’가 포함되어 있다. 틀린 표현 ‘가, 나, 다’ → 올바르게는 ‘나, 다’이다.

오답 포인트

가의 적분 구간 길이가 2라는 점만 보고 원래 합의 계수 $\frac{1}{n}$을 그대로 대응시키면 안 된다. 구간 $[0, 2]$을 n등분할 때는 $\Delta x = \frac{2}{n}$이므로 가는 원래 리만합의 두 배가 된다. 또한 치환할 때 적분 앞의 12과 새 구간 $[1, 3]$을 함께 바꾸어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

합 바깥의 계수를 Δx로 보고 표본점 x_k와 적분 구간을 먼저 정한다. 다른 적분 형태는 치환 후 미분계수와 양 끝점을 모두 바꾸어 같은 값인지 확인한다.

암기 포인트

리만합은 ‘함숫값 × 구간의 폭’이다. 치환적분에서는 ‘식, 미분계수, 적분 구간’을 한꺼번에 바꾼다.

NoteBase

문 14. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$에 대하여 조건 p, q가 $p : x$는 3의 배수, $q : x$는 4의 배수이다. 이때, 조건 "$\sim p$ 그리고 q"의 진리집합을 구하면?

① $\{4, 8, 16, 20\}$

② $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

③ $\{4, 8, 12, 16\}$

④ $\{3, 8, 9, 16\}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 명제의 부정과 논리곱을 집합의 여집합과 교집합으로 바꾸어 진리집합을 구하는 문제이다.

조건 정리

전체집합은 $U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$이다.
조건 p의 진리집합 P는 3의 배수의 집합이고, 조건 q의 진리집합 Q는 4의 배수의 집합이다.
구해야 할 것은 3의 배수가 아니면서 동시에 4의 배수인 원소의 집합이다.

사용할 원리

T(p 그리고 q)=(U P) Q=Q P
$\sim p$는 p의 진리집합의 여집합을 뜻하고, '그리고'는 두 조건을 모두 만족해야 하므로 교집합을 뜻한다.

계산 과정

1. 1부터 20까지의 4의 배수는 $Q = \{4, 8, 12, 16, 20\}$이다.
2. 이 가운데 3의 배수인 12를 제외한다.
3. 따라서 진리집합은 $Q \setminus P = \{4, 8, 16, 20\}$이다.

선지 판단

① O — $\{4, 8, 16, 20\}$은 4의 배수 중 3의 배수가 아닌 원소를 모두 모은 집합이므로 옳다.
② X — $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$은 3의 배수의 집합 P이다. '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합은 올바르게는 $\{4, 8, 16, 20\}$이다.
③ X — $\{4, 8, 12, 16\}$에는 3의 배수인 12가 들어 있고 20이 빠져 있다. 12를 제외하고 20을 포함한 $\{4, 8, 16, 20\}$이 올바른 집합이다.
④ X — 3과 9는 4의 배수가 아니므로 q를 만족하지 않으며, 4와 20이 빠져 있다. 올바르게는 $\{4, 8, 16, 20\}$이다.

NoteBase

오답 포인트

‘ $\sim p$ 그리고 q’를 단순히 4의 배수 전체로 보면 12를 제외하지 못한다. 또한 $\sim p$를 ‘3의 배수’로 잘못 읽으면 ②를 고르게 된다. 핵심은 q의 진리집합에서 p도 만족하는 원소를 빼는 것이다.

다시 나오면 이렇게 판단

조건의 부정은 여집합으로, ‘그리고’는 교집합으로 바꾼다. 따라서 ‘ $\sim p$ 그리고 q’는 먼저 q를 만족하는 원소를 찾고 그중 p를 만족하는 원소를 제외하여 판단한다.

암기 포인트

‘ $\sim p$ 그리고 q’의 진리집합은 $Q \setminus P$, 즉 q이면서 p는 아닌 원소의 집합이다.

NoteBase

문 15. 유리함수 $y=\frac{3ax}{2x-1}$ $(a\neq 0)$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=m$, $y=m$이다. $a+m$의 값은? (단, a, m은 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$

정답 4번

출제 포인트

유리함수의 수직점근선과 수평점근선을 각각 구한 뒤, 두 점근선에 공통으로 쓰인 상수 m을 이용하여 $a+m$을 계산하는 문제이다.

조건 정리

함수는 $y=\frac{3ax}{2x-1}$이고 $a\neq 0$이다. 수직점근선은 $x=m$, 수평점근선은 $y=m$이므로 두 점근선의 값이 모두 같은 m이다. 구해야 할 값은 $a+m$이다.

사용할 공식

분모가 0이 되는 값에서 분자가 0이 아니면 수직점근선이 생긴다. 분자와 분모의 차수가 같은 유리함수의 수평점근선은 최고차항 계수의 비이다. 따라서 이 함수에서는 $2x-1=0$으로 수직점근선을 구하고, 수평점근선은 $y=\frac{3a}{2}$로 구한다.

계산 과정

1. $2x-1=0$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로 $m=\frac{1}{2}$이다. 이때 분자는 $\frac{3a}{2}$이고 $a\neq 0$이므로 0이 아니다.
2. 수평점근선은 $y=\frac{3a}{2}$이다. 이것이 $y=m$이므로 $\frac{3a}{2}=\frac{1}{2}$이다.
3. 위 식에서 $a=\frac{1}{3}$이다. 따라서 $a+m=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$이다.

선지 판단

① X. $\frac{1}{6}$은 계산 결과 $\frac{5}{6}$과 다르다. 틀린 값 $\frac{1}{6}$ → 올바르게는 $\frac{5}{6}$이다.
② X. $\frac{1}{3}$은 a의 값일 뿐 $a+m$의 값이 아니다. 틀린 값 $\frac{1}{3}$ → 올바르게는 $a+m=\frac{5}{6}$이다.
③ X. $\frac{2}{3}$은 $m=\frac{1}{2}$를 잘못 더한 값이다. 틀린 값 $\frac{2}{3}$ → 올바르게는 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$이다.
④ O. 계산 결과 $a+m=\frac{5}{6}$이므로 옳다.

NoteBase

오답 포인트

수직점근선에서 구한 $m = \frac{1}{2}$만 확인하거나, 수평점근선 조건에서 구한 $a = \frac{1}{3}$을 최종 답으로 고르면 안 된다. 문제는 각각의 값이 아니라 $a + m$을 묻는다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모를 0으로 두어 수직점근선을 구하고, 최고차항 계수의 비로 수평점근선을 구한다. 두 점근선에 주어진 공통 조건으로 미지수를 정한 뒤, 마지막에 문제에서 요구한 식을 계산한다.

암기 포인트

유리함수에서 수직점근선은 분모가 0이 되는 값, 같은 차수의 수평점근선은 최고차항 계수의 비이다.

NoteBase

문 16. 프로야구의 한국 시리즈는 결승 진출팀 A, B가 7번 경기를 해서 4번 먼저 이기는 팀이 승자가 된다. 한 경기에서 A팀이 이길 확률이 $\frac{2}{3}$일 때, 한국 시리즈의 승자가 6번째 경기에서 결정될 확률은? (단, 비기는 경우는 없다.)

① $\frac{194}{729}$
② $\frac{196}{729}$
③ $\frac{198}{729}$
④ $\frac{200}{729}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 6번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 5번째 경기까지의 전적이 3승 2패여야 한다는 점을 이용하여 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

A팀의 한 경기 승리 확률은 $\frac{2}{3}$, B팀의 한 경기 승리 확률은 $\frac{1}{3}$이다.
6번째 경기에서 승자가 결정되는 경우는 두 가지이다.
A팀 우승: 처음 5경기에서 A팀이 3승 2패를 한 뒤 6번째 경기에서 이긴다.
B팀 우승: 처음 5경기에서 B팀이 3승 2패를 한 뒤 6번째 경기에서 이긴다.

사용할 공식

5경기 중 특정 팀이 3승을 거두는 경기 배열의 수는 $\binom{5}{3}$이다. 따라서
P(A팀이 6차전에서 우승)=53≤ft((2)/(3))^3≤ft((1)/(3))^2≤ft((2)/(3))
P(B팀이 6차전에서 우승)=53≤ft((1)/(3))^3≤ft((2)/(3))^2≤ft((1)/(3))
이 공식을 쓰는 이유는 처음 5경기의 3승이 어느 세 경기에 나타나는지 선택해야 하고, 마지막 6번째 경기는 그 3승 팀이 반드시 이겨야 하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

A팀이 6차전에서 우승할 확률은
$\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 10 \cdot \frac{16}{729} = \frac{160}{729}$
이다.

B팀이 6차전에서 우승할 확률은
$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \cdot \frac{4}{729} = \frac{40}{729}$
이다.

두 경우는 동시에 일어날 수 없으므로 합하면
$\frac{160}{729} + \frac{40}{729} = \frac{200}{729}$
이다.

선지 판단

① X — $\frac{194}{729}$라는 값이 틀렸다. 두 팀이 각각 6차전에서 우승하는 경우를 모두 합한 올바른 값은 $\frac{200}{729}$이다.
② X — $\frac{196}{729}$라는 값이 틀렸다. 올바른 값은 $\frac{200}{729}$이다.
③ X — $\frac{198}{729}$라는 값이 틀렸다. 올바른 값은 $\frac{200}{729}$이다.
④ O — 계산 결과가 $\frac{200}{729}$이므로 옳다.

오답 포인트

6차전까지 경기가 진행될 확률과 6차전에서 승자가 결정될 확률을 혼동하기 쉽다. 5경기까지 3승 2패인 것만으로 끝내지 않고, 6번째 경기에서 앞선 팀이 다시 이기는 확률까지 곱해야 한다. 또한 A팀이 우승하는 경우뿐 아니라 B팀이 우승하는 경우도 합해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

7전 4선승제에서 6차전에 승부가 끝나는 사건은 처음 5경기까지 3승 2패이고, 3승을 거둔 팀이 6차전도 이기는 사건이다. 각 팀이 우승하는 경우를 따로 계산한 뒤 합한다.

암기 포인트

정확히 6차전 종료는 '5경기까지 3승 2패 + 앞선 팀의 6차전 승리'이다.

NoteBase

문 17. 선박에서 매년 60mg의 M물질이 A해역으로 배출되고 있다. 연말에 A해역에 남아 있는 M물질을 측정하면 항상 전년도 말에 남아 있던 양과 올해 유입된 양의 합의 $\frac{3}{5}$이 없어지고 $\frac{2}{5}$만 남는다고 한다. 매년 말에 A해역에 남아 있는 M물질의 양을 계속해서 측정한다. n년 말에 측정된 M물질의 양을 $a_n$mg이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하면?

① 40

② 42

③ 44

④ 46

정답 1번

출제 포인트

매년 일정량이 유입된 뒤 일정 비율만 남는 상황을 점화식으로 나타내고, 수열의 극한을 고정점 방정식으로 구하는 문제이다.

조건 정리

매년 유입되는 양은 60mg이다. 전년도 말의 잔존량과 올해 유입량을 합한 뒤 그중 $\frac{2}{5}$만 남는다. 따라서 점화식은 $a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + 60)$이다.

사용할 공식

수열 a_n이 극한 L로 수렴하면 점화식의 a_n과 a_{n-1}에 모두 L을 대입한다. 이 문제에서는 남는 비율 $\frac{2}{5}$의 절댓값이 1보다 작으므로 이전 양의 영향이 점차 줄어들어 고정점으로 수렴한다.

계산 과정

점화식에 극한 L을 대입하면
$L = \frac{2}{5}(L + 60)$
이다. 이를 정리하면
$5L = 2L + 120, \quad 3L = 120, \quad L = 40$
이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 40$이다.

선지 판단

① O — 계산한 극한값이 40이므로 옳다.
② X — 42를 고정점으로 대입하면 $\frac{2}{5}(42 + 60) = 40.8$로 42와 같지 않다. 틀린 값 42는 40으로 고쳐야 한다.
③ X — 44를 고정점으로 대입하면 $\frac{2}{5}(44 + 60) = 41.6$으로 44와 같지 않다. 틀린 값 44는 40으로 고쳐야 한다.
④ X — 46을 고정점으로 대입하면 $\frac{2}{5}(46 + 60) = 42.4$로 46과 같지 않다. 틀린 값 46은 40으로 고쳐야 한다.

NoteBase

오답 포인트

없어지는 비율 $\frac{3}{5}$을 잔존 비율로 잘못 쓰는 것이 핵심 함정이다. 연말에 남는 양은 합계의 $\frac{2}{5}$이므로 점화식의 계수도 $\frac{2}{5}$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

매 기간 일정량이 들어오고 일정 비율이 남는 문제에서는 '이번 양 = 잔존 비율 × (직전 양 + 유입량)'으로 점화식을 세운다. 잔존 비율의 절댓값이 1보다 작으면 극한값을 점화식 양변에 대입해 고정점을 구한다.

암기 포인트

일정 유입량이 c, 잔존 비율이 r일 때 $a_n = r(a_{n-1} + c)$이고, $|r| < 1$이면 극한은 $\frac{rc}{1-r}$이다.

NoteBase

문 18. 남자 5명, 여자 4명 중에서 4명의 임원을 선출하려고 한다. 남자 회장 1명, 여자 회장 1명, 남녀 구분 없이 총무 2명을 선출하는 방법의 수는?

① 210

② 420

③ 630

④ 840

정답 2번

출제 포인트

서로 다른 직책인 남자 회장과 여자 회장을 각각 뽑은 뒤, 남은 사람 중 직책 구분이 없는 총무 2명을 조합으로 뽑는 경우의 수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 남자 5명, 여자 4명이다.
구해야 할 값: 남자 회장 1명, 여자 회장 1명, 총무 2명을 선출하는 방법의 수이다.
주의할 조건: 회장으로 뽑힌 사람은 총무로 다시 뽑을 수 없으므로 두 회장을 선출한 뒤 남은 사람은 7명이다. 총무 2명은 서로 같은 직책이므로 뽑는 순서를 구분하지 않는다.

사용할 공식

남자 회장은 5가지, 여자 회장은 4가지 방법으로 뽑는다. 그 뒤 남은 7명 중 총무 2명을 뽑는 방법은 $\binom{7}{2}$가지이다. 서로 이어지는 선택이므로 곱의 법칙을 사용한다.

계산 과정

1. 남자 회장 1명을 뽑는 방법은 5가지이다.
2. 여자 회장 1명을 뽑는 방법은 4가지이다.
3. 남은 7명 중 순서를 구분하지 않고 총무 2명을 뽑는 방법은 $\binom{7}{2} = 21$가지이다.
4. 따라서 전체 방법의 수는

$5 \times 4 \times \binom{7}{2} = 5 \times 4 \times 21 = 420$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 210은 계산 결과 420과 다르다. $\binom{7}{2}$가 이미 총무 두 명의 순서를 구분하지 않은 값인데 다시 2로 나누면 210이 된다. 올바른 값은 420이다.
② O — $5 \times 4 \times \binom{7}{2} = 420$이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X — 630은 회장 두 명을 뽑고 남은 7명 중 총무 2명을 고르는 곱의 법칙으로 얻어지는 값이 아니다. 올바른 값은 $5 \times 4 \times 21 = 420$이다.
④ X — 840은 총무 2명의 선출 순서를 구분하여 $5 \times 4 \times 7 \times 6$으로 계산한 값이다. 같은 직책인 총무끼리는 순서를 구분하지 않으므로 2로 나눈 420이 올바른 값이다.

오답 포인트

총무 두 자리를 서로 다른 직책처럼 취급하면 ④의 840이 나온다. 반대로 조합 $\binom{7}{2}$을 사용하고도 총무의 순서를 없앤다는 이유로 다시 2로 나누면 ①의 210이 나온다. 조합에는 이미 순서 중복 제거가 반영되어 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 직책이 서로 다른지 같은지를 구분한다. 서로 다른 회장 직책은 각각 뽑아 경우의 수를 곱하고, 같은 직책인 총무 여러 명은 남은 사람 중 조합으로 뽑는다.

암기 포인트

직책이 다르면 곱의 법칙, 같은 직책으로 여러 명을 뽑으면 조합을 사용한다.

NoteBase

문 19. 사차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{f(3)}{f(2)}$의 값은?

(가) $f(1) = f'(1) = 0$
(나) 임의의 실수 α에 대하여 $\int_{-1-\alpha}^{1+\alpha} f'(x)dx = 0$이다.

① $\frac{64}{9}$
② $\frac{81}{16}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{121}{36}$

정답 1번

출제 포인트

정적분 조건을 함수값의 차로 바꾸어 $f(x)$가 짝함수임을 알아내고, 중근 조건을 이용해 사차함수의 식을 정하는 문제이다.

조건 정리

(나)에서 미적분학의 기본정리를 적용하면 $f(1+\alpha) - f(-1-\alpha) = 0$이다. $1+\alpha$는 모든 실숫값을 가질 수 있으므로 $f(t) = f(-t)$이고, f는 짝함수이다. 또한 $f(1) = f'(1) = 0$이므로 $x = 1$은 $f(x)$의 중근이다.

사용할 공식

미적분학의 기본정리에 따라
$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$
이다. 사차 짝함수는 $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$로 나타낼 수 있다. 이 두 사실을 사용하면 적분 조건을 짝함수 조건으로 바꾸고, $f(1) = f'(1) = 0$으로 계수를 정할 수 있다.

계산 과정

사차 짝함수를 $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$라 둔다. 사차함수이므로 $A \neq 0$이다.
$f(1) = 0$에서 $A + B + C = 0$이고, $f'(x) = 4Ax^3 + 2Bx$이므로 $f'(1) = 0$에서 $4A + 2B = 0$, 즉 $B = -2A$이다. 따라서 $C = A$이고
$f(x) = A(x^4 - 2x^2 + 1) = A(x^2 - 1)^2$
이다. 그러므로
$\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{A(9-1)^2}{A(4-1)^2} = \frac{64A}{9A} = \frac{64}{9}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과가 $\frac{64}{9}$이므로 옳다.
② X — $\frac{81}{16}$은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $\frac{64}{9}$이다.
③ X — $\frac{1}{4}$은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $\frac{64}{9}$이다.
④ X — $\frac{121}{36}$은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $\frac{64}{9}$이다.

오답 포인트

적분 구간의 양 끝이 서로 반대인 $-1-\alpha=-(1+\alpha)$라는 점을 놓치면 짝함수 조건을 발견하기 어렵다. 또한 $f(1)=0$만 사용해서는 계수가 정해지지 않으며, $f'(1)=0$이 $x=1$을 중근으로 만든다는 조건까지 함께 사용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

도함수의 정적분은 먼저 양 끝점의 함수값 차로 바꾼다. 모든 실수에 대해 $f(t)=f(-t)$가 나오면 짝함수 꼴로 놓고, 함수값과 도함숫값이 동시에 0인 조건은 중근 조건으로 처리한다.

암기 포인트

$\int_{-t}^{t} f'(x)dx=0$이 모든 실수 t에 대해 성립하면 $f(t)=f(-t)$이므로 f는 짝함수이다.

NoteBase

문 20. A, B, C, D, E의 서로 다른 음료 5개 중에서 2개를 구입할 때, A음료는 구입하고 E음료는 구입하지 않을 확률은?

① $\frac{1}{10}$
② $\frac{1}{5}$
③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$

정답 3번

출제 포인트

서로 다른 5개 중 2개를 고르는 전체 경우와, A는 포함하고 E는 제외하는 경우를 각각 세어 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

전체 선택: A, B, C, D, E 중 서로 다른 2개를 구한다.
유리한 선택: A를 반드시 포함하고 E를 제외한다.
각 2개짜리 조합이 같은 확률로 선택된다고 본다.

사용할 공식

P=조건을 만족하는 경우의 수전체 경우의 수
순서를 고려하지 않고 음료 2개를 고르므로 조합을 사용한다.

계산 과정

전체 경우의 수는 $\binom{5}{2} = 10$이다.
A를 이미 선택하고 E를 제외하면, 나머지 한 개는 B, C, D 중에서 고르므로 유리한 경우는 (A, B), (A, C), (A, D)의 3가지이다.
따라서 $P = \frac{3}{10}$이다.

선지 판단

① X — $\frac{1}{10}$은 유리한 경우를 1가지로 잘못 센 값이다. 올바른 확률은 $\frac{3}{10}$이다.
② X — $\frac{1}{5}$가 아니다. A와 함께 고를 수 있는 음료는 E를 뺀 B, C, D의 3개이므로 올바른 확률은 $\frac{3}{10}$이다.
③ O — 전체 10가지 중 조건을 만족하는 경우가 3가지이므로 $\frac{3}{10}$이다.
④ X — $\frac{2}{5}$가 아니다. E를 제외한 뒤 A 외의 음료를 4개로 잘못 세면 나올 수 있으나, 실제 후보는 B, C, D의 3개이므로 올바른 확률은 $\frac{3}{10}$이다.

NoteBase

오답 포인트

A를 포함한다는 조건으로 한 자리를 고정한 뒤에도 E를 후보에서 반드시 제외해야 한다. 남은 한 자리의 후보를 B, C, D의 3개가 아니라 4개로 세면 ④를 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

'반드시 포함'인 대상은 먼저 고정하고, '포함하지 않음'인 대상은 후보에서 제거한 뒤 유리한 경우의 수를 센다. 마지막에 전체 조합의 수로 나눈다.

암기 포인트

포함 조건은 고정, 제외 조건은 삭제, 확률은 유리한 조합 수를 전체 조합 수로 나눈 값이다.

NoteBase