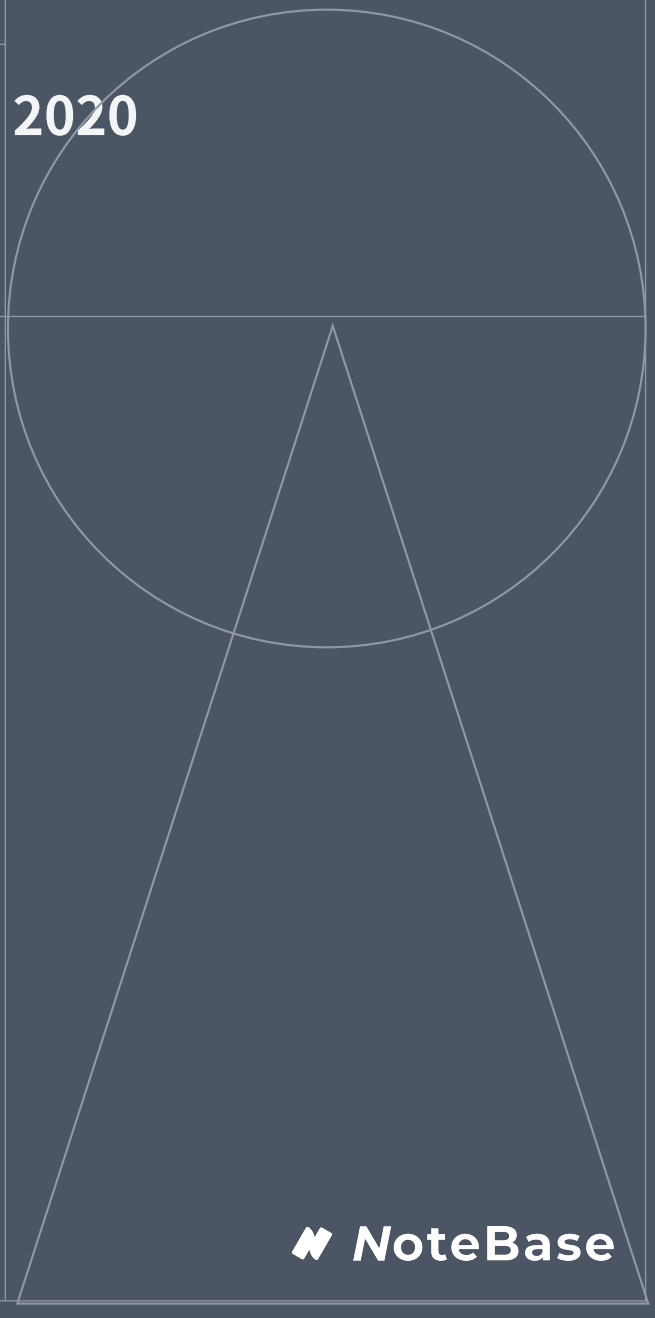
기출OX 해설집

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2020



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2020

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2020

문 1. $4^{\frac{1}{2}} + \log_2 8$**의 값은?**

① 3

② 4

③ 5

④ 6

정답 3번

간단한 해설

$4^{\frac{1}{2}}$은 4의 **양의 제곱근**인 2이고, $\log_2 8$은 **2를 몇 제곱하면 8이 되는지**를 나타내므로 3이다. 두 값을 더하면 5이다.

계산 과정

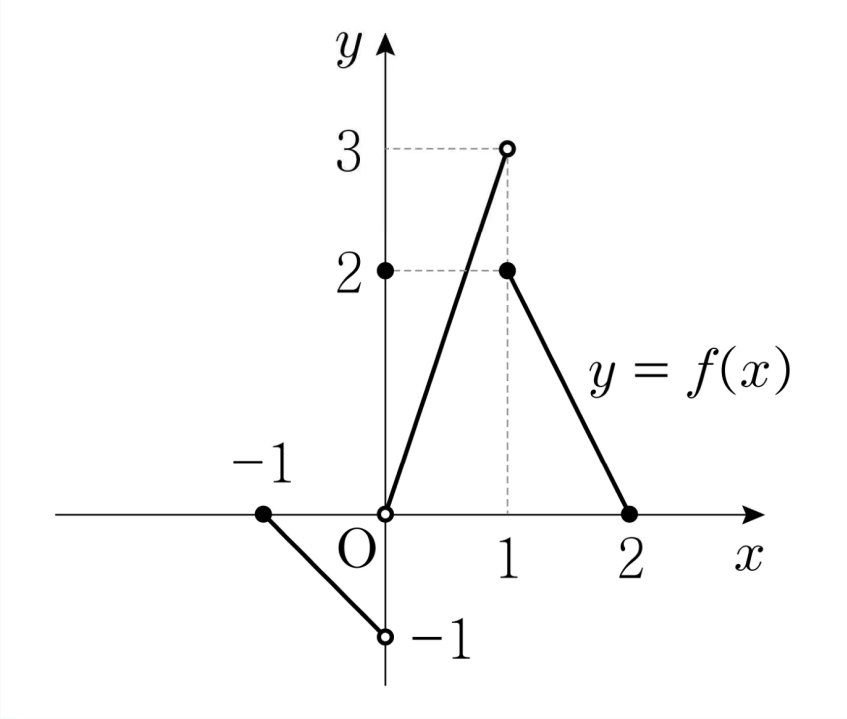
분수 지수 계산: 양수의 $\frac{1}{2}$제곱은 그 수의 **양의 제곱근**이다. 따라서 $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$이다. 제곱해서 4가 되는 수는 2와 −2이지만, 이 식의 값은 양수인 2이다.

로그 계산: $\log_2 8$은 **밑 2를 거듭제곱하여 8을 만드는 지수**이다. $2^3 = 8$이므로 $\log_2 8 = 3$이다.

두 값의 합: 구한 값을 더하면 2 + 3 = 5이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. 닫힌구간 [-1, 2]에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 1^+} f(x)$의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

극한값은 해당 점의 함수값이 아니라 **지정된 방향에서 다가갈 때의 높이**로 읽는다. 0의 왼쪽에서는 −1에, 1의 오른쪽에서는 2에 가까워지므로 두 극한값의 합은 1이다.

NoteBase

계산 과정

0에서의 좌극한: $x \to 0^-$는 0보다 작은 쪽에서 0에 다가간다는 뜻이다. 그래프의 왼쪽 선분은 빈 점 $(0, -1)$을 향하므로 $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$이다. 채워진 점으로 표시된 $f(0) = 2$와 **왼쪽에서 가까워지는 값**을 구별해야 한다.

1에서의 우극한: $x \to 1^+$는 1보다 큰 쪽에서 1에 다가간다는 뜻이다. 따라서 **1의 오른쪽에 있는 감소하는 선분**을 따라 읽으면 $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$이다. 빈 점 $(1, 3)$은 왼쪽 선분이 향하는 점이므로 이 우극한을 구할 때 사용하지 않는다.

두 극한값의 합은 $-1 + 2 = 1$이므로 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. $\sum_{k=1}^{5}(k^2-ak)=25$**일 때, 상수** a**의 값은?**

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

제곱의 합은 55이고, 상수 a가 곱해지는 자연수의 합은 15이다. 따라서 **주어진 합**을 $55-15a=25$로 나타내면 $a=2$이다.

계산 과정

k는 1부터 5까지 변하므로 제곱의 합은 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$이다.

a는 **합의 첨자에 관계없이 일정한 상수**이므로 각 항의 ak를 더할 때 공통인수로 묶을 수 있다. 따라서 $\sum_{k=1}^{5}ak=a(1+2+3+4+5)=15a$이다.

주어진 합은 제곱의 합에서 일차항의 합을 뺀 것이므로 $55-15a=25$이다. 이를 정리하면 $15a=30$, $a=2$를 얻는다. 이 값은 ②의 2와 일치한다.

NoteBase

문 4. 이차방정식 $x^2 - 3x - 2 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2$의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

정답 3번

간단한 해설

두 근을 직접 구하지 않고 **근과 계수의 관계**로 합과 곱을 구한다. 두 근의 합은 3, 곱은 −2이므로, 제곱식을 전개하여 정리하면 구하는 값은 9이다.

계산 과정

두 근이 α, β이므로 $(x - \alpha)(x - \beta)$를 전개하여 주어진 이차식의 계수와 비교한다. **근과 계수의 관계**에 따라 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = -2$이다.

두 근의 제곱의 합은 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$로 구한다. 합의 제곱에 포함된 곱의 2배를 빼는 것이다. 따라서 $\alpha^2 + \beta^2 = 3^2 - 2 \cdot (-2) = 13$이다.

구하는 식에서 각 제곱을 전개하면 두 근의 제곱의 합에서 **두 근의 합의 2배를 빼고 2를 더한다**. 따라서 $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 = 13 - 2 \cdot 3 + 2 = 9$이다. 이 값은 ③의 9와 일치한다.

NoteBase

문 5. 두 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,6,8\}$에 대하여 $(A\cap B)\cup X=X$, $(A\cup B)\cap X=X$를 만족시키는 집합 X의 개수는?

① 8

② 16

③ 32

④ 64

정답 3번

간단한 해설

두 조건은 X가 **2와 4를 반드시 포함**하면서 $A\cup B$ 안의 원소로만 이루어진다는 뜻이다. 나머지 5개 원소는 각각 포함하거나 제외할 수 있으므로, 가능한 집합은 $2^5=32$개이다.

계산 과정

첫째 조건: $(A\cap B)\cup X=X$는 $A\cap B$의 원소를 X에 합쳐도 새 원소가 생기지 않는다는 뜻이다. 따라서 $A\cap B\subseteq X$이다. 두 집합의 공통 원소는 $A\cap B=\{2,4\}$이므로, X는 **2와 4를 반드시 포함**한다.

둘째 조건: $(A\cup B)\cap X=X$는 X의 모든 원소가 $A\cup B$에도 속한다는 뜻이다. 따라서 $X\subseteq A\cup B$이고, $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$이다. 즉, X에는 **이 7개 이외의 원소를 넣을 수 없다**.

개수 계산: 두 조건을 합치면 $\{2,4\}\subseteq X\subseteq A\cup B$이다. 필수 원소 2와 4를 제외한 $\{1,3,5,6,8\}$의 각 원소는 서로 독립적으로 포함하거나 제외할 수 있다. 따라서 5개 원소 각각에 2가지 선택이 있으므로 가능한 집합 X는 $2^5=32$개이며, ③의 32에 해당한다.

NoteBase

문 6. 다음 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $a+4b$의 값은? (단, a, b는 상수)
f(x)=cases(x^3+a)/(x^2-1),&x≠1\,&x=1cases

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 1번

간단한 해설

$x=1$에서 연속이려면 **극한값과 함수값이 같아야 한다**. 분모가 0으로 가까워지므로 분자도 0으로 가까워져야 하며, 이 조건으로 $a=-1$, $b=\frac{3}{2}$를 얻어 $a+4b=5$가 된다.

계산 과정

1. 연속 조건으로 a 구하기: $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=b$가 성립해야 한다. 이때 분모 x^2-1은 0으로 가까워진다. 극한값이 유한한 상수 b가 되려면 **분자도 0으로 가까워져야 한다**. 따라서 $1+a=0$이므로 $a=-1$이다.

2. 극한값으로 b 구하기: $a=-1$을 대입하면 분자는 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, 분모는 $x^2-1=(x-1)(x+1)$로 인수분해된다. 극한에서는 x가 1에 가까워질 뿐 1은 아니므로 **공통인 인자를 약분한 뒤** 값을 구할 수 있다. 따라서 $b=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$이다. 이 값이 연속성을 만족시키는 $f(1)$의 값이다.

3. 요구한 값 계산하기: $a=-1$, $b=\frac{3}{2}$를 대입하면 $a+4b=-1+4\cdot\frac{3}{2}=5$이다. 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 양수 t와 좌표평면 위의 네 점 $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(1,2)$, $C(5,t)$에 대하여 삼각형 OAB의 넓이와 삼각형 OAC의 넓이가 같을 때, t의 값은?

① $\frac{7}{3}$
② $\frac{10}{3}$
③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{16}{3}$

정답 2번

간단한 해설

두 삼각형의 넓이가 같으므로 $|3t-5|=5$이다. 이 식의 두 해 중 **양수 조건**을 만족하는 값은 $t=\frac{10}{3}$이다.

계산 과정

원점 O와 두 점 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$가 만드는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$이다. 좌표를 교차하여 곱한 값의 차에 **절댓값**을 취하므로, 점들이 놓인 방향에 관계없이 넓이를 구할 수 있다.

삼각형 OAB: $A(3,1)$, $B(1,2)$를 대입하면 넓이는 $\frac{1}{2}|3\cdot 2-1\cdot 1|=\frac{5}{2}$이다.

삼각형 OAC: $A(3,1)$, $C(5,t)$를 대입하면 넓이는 $\frac{1}{2}|3t-5|$이다. 이 넓이가 $\frac{5}{2}$와 같아야 하므로, 양변에 2를 곱하면 $|3t-5|=5$를 얻는다.

절댓값 방정식은 $3t-5=5$ 또는 $3t-5=-5$로 나눈다. 각각 풀면 $t=\frac{10}{3}$ 또는 $t=0$이다. 문제에서 **t는 양수**라고 했으므로 0은 제외한다. 따라서 $t=\frac{10}{3}$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3x+1$이 $x=3$에서 극솟값을 가질 때, 극댓값을 b라 하자. $a+b$의 값은? (단, a는 상수)

① $\frac{11}{3}$

② 4

③ $\frac{13}{3}$

④ $\frac{14}{3}$

정답 3번

간단한 해설

극솟값을 갖는 지점에서는 **도함수가 0**이므로 $f'(3)=0$에서 $a=2$를 얻는다. 이때 극대가 되는 지점은 $x=1$이고 $b=f(1)=\frac{7}{3}$이므로 $a+b=\frac{13}{3}$이다.

계산 과정

1. 상수 a 구하기: 다항함수는 모든 실수에서 미분 가능하므로, 극솟값을 갖는 지점에서는 미분계수가 0이다. 주어진 함수를 미분하면 $f'(x)=x^2-2ax+3$이다. 따라서 $f'(3)=12-6a=0$이므로 $a=2$이다.

2. 극대가 되는 지점 찾기: $a=2$를 대입하면 $f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$이다. 도함수의 부호는 $x<1$에서 양수, $1<x<3$에서 음수, $x>3$에서 양수이다. 따라서 $x=1$에서는 함수가 **증가하다가 감소**하므로 극댓값을 갖고, $x=3$에서는 감소하다가 증가하므로 주어진 조건대로 극솟값을 갖는다.

3. 극댓값 b와 합 구하기: b는 극대가 되는 지점의 x좌표가 아니라 **그 지점의 함숫값**이다. 따라서 $b=f(1)=\frac{1}{3}-2+3+1=\frac{7}{3}$이다. 이를 이용하면 $a+b=2+\frac{7}{3}=\frac{13}{3}$이며, 선택지 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 양수 a와 이차함수 $f(x)=a(x-2)(x-4)$에 대하여 $\int_1^5 \{|f(x)|-f(x)\}dx=4$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{3}{2}$
③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$

정답 2번

간단한 해설

$|f(x)|-f(x)$는 **함수가 음수인 구간에서만** $-2f(x)$가 되고, 나머지 구간에서는 0이다. 따라서 주어진 적분은 $x=2$부터 $x=4$까지 그래프와 x축 사이의 넓이의 두 배이며, $\frac{8a}{3}=4$에서 $a=\frac{3}{2}$이다.

계산 과정

함수의 부호: $a>0$이고 $f(x)=a(x-2)(x-4)$이므로, $1\leq x\leq 2$와 $4\leq x\leq 5$에서 $f(x)\geq 0$이고 $2<x<4$에서 $f(x)<0$이다. 따라서 $f(x)\geq 0$이면 $|f(x)|-f(x)=0$이고, $f(x)<0$이면 $|f(x)|-f(x)=-2f(x)$이다.

적분 구간: 양 끝의 구간에서는 적분할 식이 0이므로, 주어진 적분은 $-2\int_2^4 f(x)dx$로 줄어든다. 이는 **x축 아래에 있는 부분의 넓이의 두 배**를 뜻한다.

적분 계산: $f(x)=a(x^2-6x+8)$로 전개하여 적분하면 $\int_2^4 f(x)dx=a\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_2^4$이다. 대괄호 안의 식은 위끝 4에서 $\frac{16}{3}$, 아래끝 2에서 $\frac{20}{3}$이므로, 적분값은 $a\left(\frac{16}{3}-\frac{20}{3}\right)=-\frac{4a}{3}$이다. 음수인 것은 해당 구간에서 그래프가 x축 아래에 있기 때문이다.

계수 결정: 주어진 적분값이 4이므로 $-2\left(-\frac{4a}{3}\right)=4$, 즉 $\frac{8a}{3}=4$이다. 이를 풀면 $a=4\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 곡선 $y = x^2 + 4$와 원점에서 이 곡선에 그은 두 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{10}{3}$

② 4

③ $\frac{14}{3}$

④ $\frac{16}{3}$

정답 4번

간단한 해설

접점의 x좌표는 ±2이고, 두 접선은 $y = 4x$, $y = -4x$이다. 도형이 **y축에 대칭**이므로 오른쪽 절반의 넓이 $\frac{8}{3}$을 두 배 하면 전체 넓이는 $\frac{16}{3}$이다.

계산 과정

접선의 방정식: 곡선 $y = x^2 + 4$ 위의 접점을 $(a, a^2 + 4)$라 하자. 도함수가 $y' = 2x$이므로 접선의 기울기는 $2a$이다. 따라서 접선은 $y = 2a(x - a) + a^2 + 4$, 즉 $y = 2ax - a^2 + 4$이다. 이 접선이 **원점 (0, 0)을 지나므로** $0 = -a^2 + 4$이고, $a = \pm 2$이다. 두 접점은 $(2, 8)$, $(-2, 8)$이며 접선은 각각 $y = 4x$, $y = -4x$이다.

넓이의 적분식: 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형은 y축에 대칭이다. 오른쪽 절반의 구간 $0 \le x \le 2$에서는 위쪽 경계가 $y = x^2 + 4$, 아래쪽 경계가 $y = 4x$이다. 두 경계의 높이 차는 $x^2 + 4 - 4x = (x - 2)^2$로 음수가 아니므로, **위쪽 함수에서 아래쪽 함수를 뺀 값**을 적분하면 넓이가 된다. 전체 넓이를 S라 하면 $S = 2\int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx$이다.

적분 계산: $S = 2\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_0^2$이므로 $S = 2\left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) = \frac{16}{3}$이다. 구한 넓이 $\frac{16}{3}$은 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 함수 $f(x)$가 $f(4x+3)=x^2-5x+6$일 때, $f(7)$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

$f(7)$을 구하려면 **함수의 입력이 7이 되도록** $4x+3=7$을 만족하는 $x=1$을 대입한다. 따라서 $f(7)=1-5+6=2$이다.

계산 과정

주어진 식 $f(4x+3)=x^2-5x+6$은 입력이 $4x+3$일 때의 함숫값을 나타낸다. $f(7)$을 구하려면 **괄호 안의 식을 7과 같게** 놓아야 한다. $4x+3=7$에서 $4x=4$이므로 $x=1$이다.

이때 오른쪽 식에도 같은 값 $x=1$을 대입하면 $f(7)=1^2-5\cdot 1+6$이다. 이를 계산하면 $f(7)=2$이므로 ②의 2와 일치한다.

NoteBase

문 12. 함수 $f(x)=2x+5$에 대하여 함수 $g(x)=f(3x+1)$이라 할 때, $g(x)$의 역함수 $h(x)$는?

① $h(x)=\frac{1}{6}(x+7)$
② $h(x)=\frac{1}{6}(x-7)$
③ $h(x)=\frac{1}{7}(x+6)$
④ $h(x)=\frac{1}{7}(x-6)$

정답 2번

간단한 해설

$g(x)=6x+7$이므로, 역함수는 함수값에서 **7을 뺀 뒤 6으로 나누는** 함수이다. 따라서 $h(x)=\frac{1}{6}(x-7)$이다.

계산 과정

1. 합성함수 구하기: $g(x)=f(3x+1)$은 $f(x)=2x+5$의 **입력값에** $3x+1$**을 대입**한 것이다. 따라서 $g(x)=2(3x+1)+5=6x+7$이다.

2. 입력값을 함수값으로 나타내기: $g(x)=6x+7$은 기울기가 0이 아닌 일차함수이므로 서로 다른 입력값에 서로 다른 함수값이 대응하여 역함수가 존재한다. $y=6x+7$로 놓고 원래 입력값 x에 관해 풀면, $y-7=6x$에서 $x=\frac{y-7}{6}$을 얻는다. 이는 **함수값에서 원래 입력값을 되찾는 관계**이다.

3. 역함수 나타내기: 역함수의 입력 변수를 x로 쓰면 $h(x)=\frac{x-7}{6}=\frac{1}{6}(x-7)$이다. 이 식은 ②와 일치한다.

NoteBase

문 13. 한 개의 주사위를 2번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a,b라 하자. $a+b \geq 10$일 때, $a=6$일 확률은?

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$

정답 1번

간단한 해설

합이 10 이상인 **6가지 순서쌍을 기준**으로 보면, 첫 번째 눈이 6인 경우는 3가지이다. 따라서 구하는 조건부확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

계산 과정

두 번 던져 나온 눈을 순서대로 (a, b)로 나타낸다. $(4, 6)$과 $(6, 4)$는 첫 번째 눈이 다르므로 **서로 다른 경우**이다. 가능한 순서쌍 36가지는 각각 일어날 가능성이 같다.

조건 $a+b \geq 10$을 만족하는 경우를 센다. 합이 10인 경우는 $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$로 3가지, 합이 11인 경우는 $(5, 6)$, $(6, 5)$로 2가지, 합이 12인 경우는 $(6, 6)$으로 1가지이다. 따라서 **주어진 조건을 만족하는 경우**는 모두 6가지이다.

이 6가지 중 $a=6$인 경우는 $(6, 4)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$으로 3가지이다. 두 번째 눈이 6인 경우까지 포함하는 것이 아니라, **첫 번째 눈이 6인 경우**만 센다.

조건부확률은 주어진 조건을 만족하는 경우 중 구하려는 사건이 일어나는 비율이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. 다항식 $P(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 나머지는 x^2+2이다. $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

정답 4번

간단한 해설

$x=-1$을 대입하면 x^3+1이 0이 되므로, $P(-1)$은 주어진 나머지에 같은 값을 대입하여 구한다. **나머지정리**에 따라 $x+1$로 나눈 나머지는 $P(-1)=(-1)^2+2=3$이다.

계산 과정

몫을 다항식 $Q(x)$라 하면, 주어진 조건을 $P(x)=(x^3+1)Q(x)+x^2+2$로 나타낼 수 있다.

이 식에 $x=-1$을 대입하면 $(-1)^3+1=0$이므로 **몫이 곱해진 항이 사라진다**. 따라서
$P(-1)=(-1)^2+2=3$이다.

$P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 상수이다. 나머지정리에 따라 그 값은 $P(-1)$이므로, 구하는 나머지는 3이며 ④에 해당한다.

NoteBase

문 15. $\log_3 2 = a,\ \log_2 5 = b$**라 할 때,** $\log_{60} 50$**을** a, b**로 나타낸 것은?**

① $\frac{a+2ab}{2a+ab+1}$
② $\frac{b+2ab}{2a+ab+1}$
③ $\frac{a+2ab}{2b+ab+1}$
④ $\frac{b+2ab}{2b+ab+1}$

정답 1번

간단한 해설

로그의 **밑을 3으로 통일**하면 $\log_3 5 = ab$이므로, $\log_{60} 50 = \frac{a+2ab}{1+2a+ab}$이다.

계산 과정

밑변환: 주어진 $a = \log_3 2$를 활용하기 위해 **분자와 분모의 밑을 모두 3으로** 바꾼다. 밑변환 공식에 따라 $\log_{60} 50 = \frac{\log_3 50}{\log_3 60}$이므로, 두 로그를 각각 a, b로 나타내면 된다.

$\log_3 5$ 구하기: $b = \log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2}$이다. 여기에 $\log_3 2 = a$를 대입하면 $\log_3 5 = ab$를 얻는다. 이 값으로 분자와 분모에 들어가는 5의 로그를 표현할 수 있다.

분자 구하기: $50 = 2 \cdot 5^2$이다. 로그에서 **곱은 합으로, 거듭제곱의 지수는 계수로** 바뀌므로 $\log_3 50 = \log_3 2 + 2\log_3 5$이다. 따라서 $\log_3 50 = a + 2ab$이다.

분모 구하기: $60 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5$이므로 $\log_3 60 = \log_3 3 + 2\log_3 2 + \log_3 5$이다. **3의 로그에서 나오는 1**을 포함하여 $\log_3 60 = 1 + 2a + ab$가 된다.

결과 연결: 두 값을 밑변환 식에 대입하면 $\log_{60} 50 = \frac{a+2ab}{1+2a+ab}$이다. 분모의 항 순서를 바꾸면 $\frac{a+2ab}{2a+ab+1}$로, ①의 식과 일치한다.

NoteBase

문 16. 닫힌구간 [0, 2π]에서 정의된 함수 $y = a\cos^2 x + 2a\sin x - 2$의 최댓값이 -1이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

정답 3번

간단한 해설

a의 **부호에 따라 최댓값을 만드는 위치가 달라진다**. $\cos^2 x + 2\sin x$의 범위가 $[-2, 2]$이므로 조건을 만족하는 값은 a=12과 a=-12이며, 두 값의 합은 0이다.

계산 과정

치환: $t = \sin x$로 놓으면 주어진 구간 0≤ x≤2π에서 -1≤ t≤1이다. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이므로 함수는 $y = a(1 - t^2 + 2t) - 2$로 바뀐다.

삼각함수 부분의 범위: 완전제곱식으로 고치면 $1 - t^2 + 2t = 2 - (t - 1)^2$이다. -1≤ t≤1에서 0≤(t-1)^2≤4이므로 이 식의 범위는 $[-2, 2]$이다. 최댓값 2는 $t = 1$, 최솟값 -2는 $t = -1$일 때 얻으며, 각각 $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$에서 실제로 달성된다.

$a > 0$인 경우: 양수를 곱하면 대소 관계가 유지되므로 **괄호 안의 값이 최대일 때** 함수도 최대가 된다. 따라서 최댓값은 $2a - 2$이고, $2a - 2 = -1$을 풀면 a=12이다. 이 값은 양수 조건을 만족한다.

$a < 0$인 경우: 음수를 곱하면 대소 관계가 뒤집히므로 **괄호 안의 값이 최소일 때** 함수가 최대가 된다. 따라서 최댓값은 $-2a - 2$이고, $-2a - 2 = -1$을 풀면 a=-12이다. 이 값은 음수 조건을 만족한다.

가능한 값의 합: $a = 0$이면 함수가 항상 -2이므로 조건을 만족하지 않는다. 따라서 가능한 모든 값의 합은 12+≤ft(-12)=0이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 주머니에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀있는 4개의 흰 공과 5, 6, 7의 숫자가 하나씩 적혀있는 3개의 검은 공이 들어있다. 이 주머니에서 임의로 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 합이 짝수일 때, 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공의 개수가 2개 이상일 확률은?

① $\frac{9}{19}$
② $\frac{10}{19}$
③ $\frac{11}{19}$
④ $\frac{12}{19}$

정답 4번

간단한 해설

세 수의 합이 짝수가 되려면 **홀수 공을 0개 또는 2개** 뽑아야 한다. 이 조건을 만족하는 19가지 중 흰 공이 2개 이상인 경우는 12가지이므로, 구하는 조건부확률은 $\frac{12}{19}$이다.

계산 과정

조건부확률의 기준: 세 수의 합이 짝수인 사건을 B, 흰 공이 2개 이상인 사건을 A라 하자. 서로 다른 7개의 공에서 3개를 임의로 꺼내므로, 순서를 구별하지 않은 각 공의 조합은 같은 확률로 뽑힌다. 따라서 **B를 만족하는 경우 중 A도 만족하는 경우의 비율**을 구한다.

합이 짝수인 경우: 홀수 공은 1, 3, 5, 7의 4개이고, 짝수 공은 2, 4, 6의 3개이다. 세 수의 합이 짝수가 되려면 홀수 공이 0개 또는 2개여야 한다. 홀수 공이 0개이면 짝수 공 3개를 모두 뽑는 1가지이고, 홀수 공이 2개이면 홀수 공 4개 중 2개와 짝수 공 3개 중 1개를 고른다. 따라서 B를 만족하는 경우는 $1 + \binom{4}{2}\binom{3}{1} = 19$가지이다.

흰 공 2개와 검은 공 1개인 경우: 검은 공이 짝수인 6이면 흰 공 두 수의 합도 짝수여야 하므로, 흰 공은 {1, 3} 또는 {2, 4}의 2가지이다. 검은 공이 홀수인 5 또는 7이면 흰 공 두 수의 합이 홀수여야 하므로, 흰 홀수 공 {1, 3}에서 1개와 흰 짝수 공 {2, 4}에서 1개를 고른다. 이때는 $2 \times 2 \times 2 = 8$가지이므로, 합이 짝수인 경우는 모두 $2 + 8 = 10$가지이다.

흰 공 3개인 경우: 흰 공 중 짝수는 2, 4의 2개뿐이므로 짝수 공만 3개 뽑을 수는 없다. 따라서 흰 홀수 공 1, 3을 모두 뽑고, 흰 짝수 공 2 또는 4를 뽑아야 한다. 합이 짝수인 경우는 {1, 2, 3}, {1, 3, 4}의 2가지이다.

확률 계산: 합이 짝수이면서 흰 공이 2개 이상인 경우는 $10 + 2 = 12$가지이다. **합이 짝수인 19가지를 기준**으로 하면 $P(A \mid B) = \frac{12}{19}$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 부등식 $2|x+3|+|x-2| \le 8$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 1번

간단한 해설

절댓값 안의 식이 0이 되는 $x=-3$, $x=2$**를 기준**으로 구간을 나누어 풀면, 전체 해는 $-4 \le x \le 0$이다. 이 범위의 정수는 −4, −3, −2, −1, 0으로 5개이다.

계산 과정

절댓값은 안의 식이 0 이상이면 그대로, 음수이면 부호를 바꾸어 없앤다. $x+3$과 $x-2$의 부호가 바뀌는 지점이 각각 −3과 2이므로, **각 구간의 부호를 따로 확인**한다.

$x<-3$인 경우: 두 식이 모두 음수이므로 $|x+3|=-x-3$, $|x-2|=-x+2$이다. 주어진 부등식은 $2(-x-3)+(-x+2) \le 8$, 즉 $-3x-4 \le 8$이 된다. 이를 풀면 $x \ge -4$이고, 구간 조건과 합치면 $-4 \le x < -3$이다. 이 구간의 정수는 −4 하나이다.

$-3 \le x < 2$인 경우: $x+3 \ge 0$, $x-2<0$이므로 $|x+3|=x+3$, $|x-2|=-x+2$이다. 따라서 $2(x+3)+(-x+2) \le 8$, 즉 $x+8 \le 8$에서 $x \le 0$을 얻는다. **처음 나눈 구간 조건과 함께 적용**하면 $-3 \le x \le 0$이므로, 정수는 −3, −2, −1, 0의 4개이다.

$x \ge 2$인 경우: 두 식이 모두 0 이상이므로 $2(x+3)+(x-2) \le 8$, 즉 $3x+4 \le 8$이다. 이를 풀면 $x \le \frac{4}{3}$인데, $x \ge 2$와 동시에 만족할 수 없으므로 이 구간에는 해가 없다.

세 구간에서 얻은 정수를 합치면 −4, −3, −2, −1, 0으로 총 5개이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 집합 $X=\{1,2,3,4\}$에서 $Y=\{5,6,7,8,9\}$로의 함수 $f: X \to Y$ 중에서 다음을 모두 만족시키는 f의 개수는?

(가) $f(1)+f(2)=12$
(나) $f(1)<f(3)$
(다) $f(2)<f(4)$

① 20
② 25
③ 30
④ 35

정답 2번

간단한 해설

조건 (가)를 만족하는 $(f(1), f(2))$는 (5, 7), (6, 6), (7, 5)이다. 각 경우에 **두 부등식을 만족하는 함수값의 선택 수를 곱하면** 각각 8개, 9개, 8개이므로 전체 함수는 25개이다.

계산 과정

조건 (가): 함수값은 모두 $Y=\{5,6,7,8,9\}$에 속한다. 따라서 $f(1)+f(2)=12$를 만족하는 순서쌍 $(f(1), f(2))$는 (5, 7), (6, 6), (7, 5)뿐이다. 서로 다른 원소의 함수값이 같아도 되므로 **(6, 6)도 포함한다**.

조건 (나)·(다): $f(1)$, $f(2)$를 정하면 $f(3)$은 $f(1)$보다 큰 값 중에서, $f(4)$는 $f(2)$보다 큰 값 중에서 고른다. 두 선택은 **서로 독립적**이므로 선택 수를 곱한다. 네 원소의 함수값을 모두 정하면 함수 하나가 결정된다.

$(f(1), f(2))=(5,7)$인 경우: $f(3)$은 6, 7, 8, 9의 4가지이고, $f(4)$는 8, 9의 2가지이다. 따라서 $4 \times 2 = 8$개의 함수가 있다.

$(f(1), f(2))=(6,6)$인 경우: $f(3)$과 $f(4)$는 각각 7, 8, 9의 3가지이다. 두 함수값이 같아도 되므로 $3 \times 3 = 9$개의 함수가 있다.

$(f(1), f(2))=(7,5)$인 경우: $f(3)$은 8, 9의 2가지이고, $f(4)$는 6, 7, 8, 9의 4가지이다. 따라서 $2 \times 4 = 8$개의 함수가 있다.

세 경우는 서로 겹치지 않으므로 전체 함수의 개수는 $8+9+8=25$개이며, ②의 25에 해당한다.

NoteBase

문 20. 집합 A를 A=\(x,y) z=x+yi, (z-2)^2의 실수부분이 0, x,y는 실수\라고 할 때, 다음 중 집합 A와의 교집합이 공집합이 되는 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① \(x,y) (x-2)^2+y^2=4, x,y는 실수\

② \(x,y) (x+2)^2+y^2=4, x,y는 실수\

③ \(x,y) x^2+(y-2)^2=4, x,y는 실수\

④ \(x,y) x^2+(y+2)^2=4, x,y는 실수\

정답 2번

간단한 해설

집합 A는 두 직선 $y=x-2$, $y=-x+2$의 합집합이다. 중심이 $(-2,0)$인 원은 중심에서 두 직선까지의 거리가 모두 $2\sqrt{2}$로 반지름 2보다 크므로 **어느 직선과도 만나지 않는다**.

계산 과정

집합 A의 조건: $z=x+yi$를 대입하면 $(z-2)^2=(x-2)^2-y^2+2(x-2)yi$이다. 실수부분이 0이므로 $(x-2)^2-y^2=0$, 즉 $y=x-2$ 또는 $y=-x+2$이다. 따라서 집합 A는 **두 직선 위의 모든 점**으로 이루어진다.

교점의 존재 조건: 각 선택지는 반지름이 2인 원이다. 원의 중심에서 직선까지의 수직거리는 중심과 직선 사이의 최단거리이므로, 이 거리가 반지름보다 크면 원과 직선은 만나지 않는다. 집합 A가 두 직선의 합집합이므로 교집합이 공집합이 되려면 **두 직선 모두와 만나지 않아야 한다**.

중심이 $(-2,0)$인 원: 두 직선을 각각 $x-y-2=0$, $x+y-2=0$으로 쓴다. 점과 직선 사이의 거리 공식으로 구한 거리는 두 경우 모두 $d=\frac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$이다. $2\sqrt{2}>2$이므로 이 원은 두 직선 모두와 교점이 없다.

나머지 원의 확인: ①의 중심 $(2,0)$은 두 직선 위에 있고, ③의 중심 $(0,2)$는 $y=-x+2$ 위에 있으며, ④의 중심 $(0,-2)$는 $y=x-2$ 위에 있다. **원의 중심을 지나는 직선**은 원과 두 점에서 만나므로 이 세 원은 모두 집합 A와의 교집합이 공집합이 아니다.

따라서 집합 A와의 교집합이 공집합인 것은 ②의 $(x+2)^2+y^2=4$인 원이다.

NoteBase