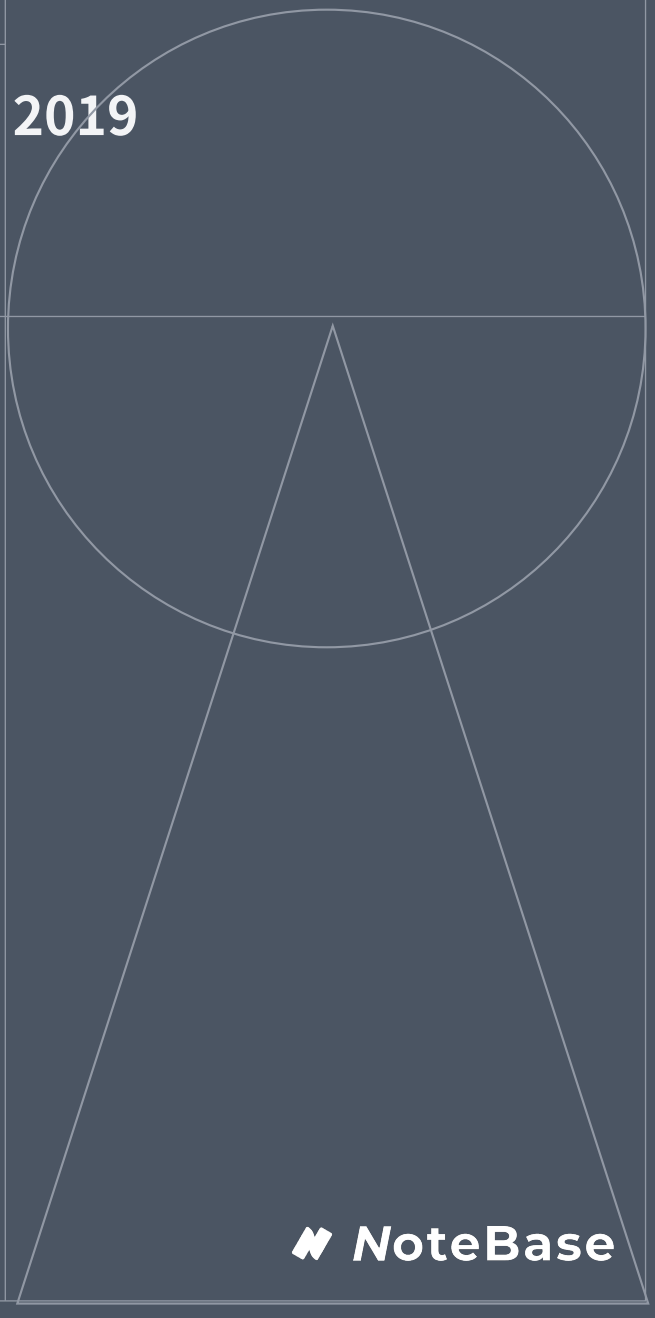
기출OX 해설집

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2019



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2019

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2019

문 1. $1+i$**가** x**에 대한 이차방정식** $x^2-2x+a=0$**의 한 근일 때, 실수** a**의 값은? (단,** $i=\sqrt{-1}$**)**

① -1

② 0

③ 1

④ 2

정답 4번

간단한 해설

방정식의 **근을 대입하면 좌변이 0**이 된다. $i^2=-1$을 이용해 $x=1+i$를 대입한 식을 정리하면 $a-2=0$이므로 $a=2$이다.

계산 과정

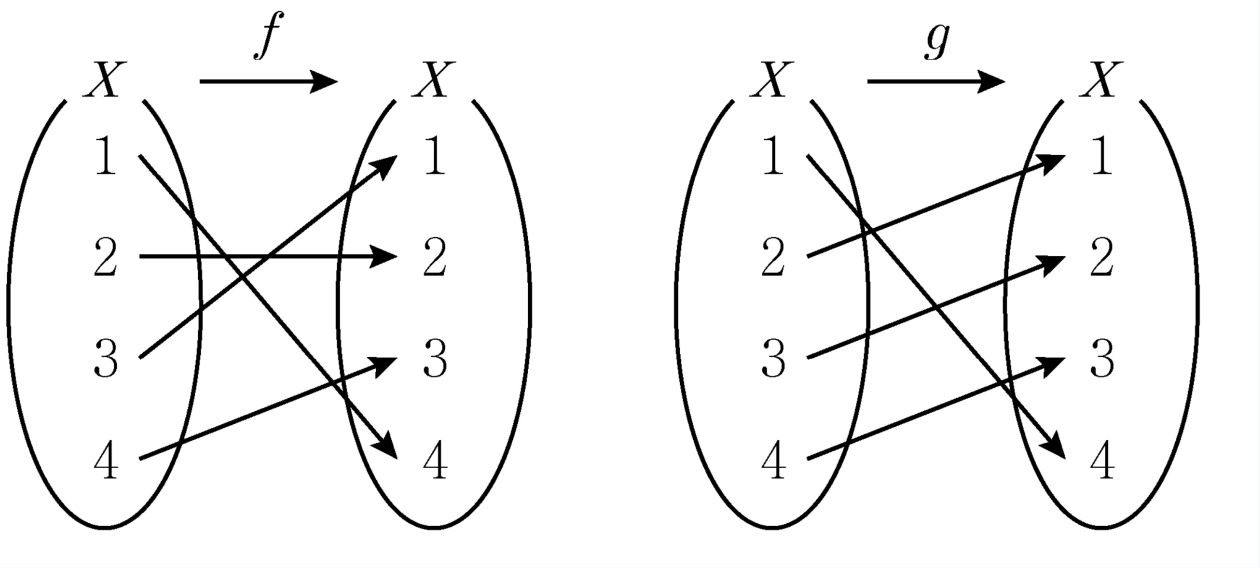
$1+i$가 주어진 방정식의 근이라는 것은 $x=1+i$**를 대입했을 때 등식이 성립한다**는 뜻이다. 따라서 $(1+i)^2-2(1+i)+a=0$이다.

$i=\sqrt{-1}$이므로 $i^2=-1$이다. 이를 이용하면 $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이다.

앞의 식에 대입하면 $2i-2-2i+a=0$이다. **허수항이 서로 소거**되어 $a-2=0$이므로 $a=2$이다. 이 값은 ④의 2에 해당한다.

NoteBase

문 2. 집합 $X=\{1,2,3,4\}$에 대하여 두 함수 $f: X \to X$, $g: X \to X$가 다음 그림과 같다.
$(g \circ f^{-1})^{-1}(2)$의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

합성함수의 역함수는 **함수의 순서를 뒤집어 각각의 역함수를 합성**한다. 따라서 $g^{-1}(2)=3$에 이어 $f(3)=1$을 구하면 된다.

NoteBase

계산 과정

그림에서 두 함수는 X의 각 원소를 서로 다른 원소에 대응시키는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 역함수는 원래 함수의 대응을 거꾸로 되돌린다. $g \circ f^{-1}$은 f^{-1}을 먼저, g를 나중에 적용하므로, 이를 되돌릴 때는 **나중에 적용한 함수부터 거꾸로** 적용한다. 따라서 $(g \circ f^{-1})^{-1} = f \circ g^{-1}$이다.

먼저 $g^{-1}(2)$를 구한다. 이는 g에 의해 2로 가는 원소를 찾는 것이다. 오른쪽 그림에서 g의 화살표가 3에서 2로 향하므로 $g(3) = 2$, 즉 $g^{-1}(2) = 3$이다.

다음으로 그 값 3에 f를 적용한다. 왼쪽 그림에서 f의 화살표는 3에서 1로 향하므로 $f(3) = 1$이다. 따라서 $(g \circ f^{-1})^{-1}(2) = f(3) = 1$이며, 이는 ①의 값과 같다.

NoteBase

문 3. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $p(x)$가
$p(-1)=p(0)=p(2)=0$
일 때, $p(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

정답 1번

간단한 해설

세 근이 $-1, 0, 2$이고 최고차항의 계수가 1이므로 $p(x)=x(x+1)(x-2)$이다. **나머지정리**에 따라 $x-1$로 나눈 나머지는 $p(1)$이며, 그 값은 -2이다.

계산 과정

인수정리에 따라 $p(-1)=p(0)=p(2)=0$이면 $x+1, x, x-2$가 각각 인수이다. 서로 다른 세 근을 가진 삼차다항식이므로 $p(x)=ax(x+1)(x-2)$로 놓을 수 있다. **최고차항의 계수가 1**이므로 $a=1$이고, $p(x)=x(x+1)(x-2)$이다.

$p(x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 $q(x)$, 나머지를 r라 하면 $p(x)=(x-1)q(x)+r$이다. 나누는 식이 일차식이므로 나머지는 상수이다. 여기에 **나누는 식을 0으로 만드는 값**인 $x=1$을 대입하면 몫이 포함된 항이 사라져 $r=p(1)$이 된다.

구한 다항식에 1을 대입하면 $p(1)=1\cdot(1+1)\cdot(1-2)$이므로 $p(1)=1\cdot 2\cdot(-1)=-2$이다. 따라서 나머지는 -2이며, ①에 해당한다.

NoteBase

문 4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

(가) f(x)=casesx^2-ax+2 & (0<x≤ 2)\\2x+b & (2<x≤ 3)cases
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+3)$이다.

① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 2번

간단한 해설

$x=2$에서의 **연속성**으로 $2a+b=2$를 얻고, **주기 조건과 연속성**으로 $f(3)=f(0)=2$를 얻는다. 이에 따라 $b=-4$, $a=3$이므로 $a+b=-1$이다.

계산 과정

1. 구간이 바뀌는 점에서 연속성을 적용한다. $x=2$에서는 (가)의 첫 번째 식에 따라 $f(2)=6-2a$이다. 오른쪽에서 2에 가까워질 때는 두 번째 식을 사용하므로 $\lim_{x\to 2+} f(x)=4+b$이다. 연속이려면 **함숫값과 우극한이 같아야 하므로** $6-2a=4+b$, 즉 $2a+b=2$이다.

2. 반복되는 구간의 양 끝을 연결한다. (가)의 첫 번째 식에서 $\lim_{x\to 0+} f(x)=2$이고, 0에서도 연속이므로 $f(0)=2$이다. (나)에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=f(3)$이므로 **구간 끝의 함숫값도 2**이다. (가)의 두 번째 식으로 $f(3)=6+b$이므로 $6+b=2$에서 $b=-4$를 얻는다.

3. 두 상수의 합을 구한다. $2a+b=2$에 $b=-4$를 대입하면 $2a-4=2$이므로 $a=3$이다. 따라서 $a+b=3+(-4)=-1$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_1 + a_2 = 0$일 때, $a_k = 3a_4$인 자연수 k의 값은?

① 5

② 7

③ 9

④ 11

정답 3번

간단한 해설

공차를 d라 하면 주어진 조건에서 $a_n = \frac{2n-3}{2}d$가 된다. **공차가 0이 아니므로** $a_k = 3a_4$에서 공차를 약분하면 $2k - 3 = 15$가 되어 $k = 9$이다.

계산 과정

공차를 d라 하자. 등차수열은 이웃한 두 항의 차가 일정하므로 $a_2 = a_1 + d$이다. 이를 $a_1 + a_2 = 0$에 대입하면 $2a_1 + d = 0$이므로 $a_1 = -\frac{d}{2}$이다.

첫째항에서 공차를 $n - 1$번 더하면 제n항이 되므로 $a_n = a_1 + (n - 1)d$이다. 앞에서 구한 첫째항을 대입하면 $a_n = \frac{2n-3}{2}d$이고, 특히 $a_4 = \frac{5}{2}d$이다.

이제 $a_k = 3a_4$에 대입하면 $\frac{2k-3}{2}d = \frac{15}{2}d$이다. **공차가 0이 아니라는 조건**에 따라 양변을 d로 나누고 2를 곱하면 $2k - 3 = 15$이다. 따라서 $2k = 18$, $k = 9$를 얻는다.

구한 자연수 k의 값 9는 선택지 ③에 해당한다.

NoteBase

문 6. x에 대한 방정식 $|x^2-9|-1=m$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 실수 m의 값은?

① 9

② 8

③ 7

④ 6

정답 2번

간단한 해설

0이 아닌 실근은 부호가 반대인 두 수가 짝을 이루므로, 서로 다른 세 실근을 가지려면 **0이 실근이어야 한다**.
주어진 방정식에 $x=0$을 대입하면 $m=8$이다.

계산 과정

절댓값 조건: 주어진 방정식을 정리하면 $|x^2-9|=m+1$이다. 절댓값은 0 이상이므로 실근이 있으려면 $m \geq -1$이어야 한다.

실근의 대칭성: 식에 x가 제곱으로만 나타나므로, 0이 아닌 수 a가 실근이면 $-a$도 실근이다. 따라서 0이 아닌 실근의 개수는 짝수이다. 서로 다른 실근이 세 개이려면 **0을 실근으로 포함**해야 한다.

매개변수 계산: $x=0$을 원래 방정식에 대입하면 $m=|0^2-9|-1=8$이다.

실근 확인: $m=8$일 때 $|x^2-9|=9$이므로 $x^2-9=9$ 또는 $x^2-9=-9$이다. 즉 $x^2=18$ 또는 $x^2=0$
이어서 실근은 $-3\sqrt{2}$, 0, $3\sqrt{2}$이다. **중복되는 0은 한 번만 세므로** 서로 다른 실근은 세 개이다. 따라서 구하는 값은 $m=8$이며, ②에 해당한다.

NoteBase

문 7. A학교 학생들이 수학 과제를 하는 데 소요되는 시간은 표준편차가 3분인 정규분포를 따른다고 한다. A학교 학생들 중 크기가 16인 표본을 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균의 신뢰구간이 $[a, b]$이다. $b-a$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이다)

① 2.90

② 2.94

③ 2.98

④ 3.02

정답 2번

간단한 해설

모평균의 95% 신뢰구간은 표본평균을 중심으로 좌우에 오차한계만큼 뻗으므로, **구간의 길이는 오차한계의 2배**이다. 표준오차는 $\frac{3}{\sqrt{16}} = 0.75$분이므로 구간의 길이는 $2 \times 1.96 \times 0.75 = 2.94$분이다.

계산 과정

표준오차: 모평균을 μ, 표본평균을 $\bar{X}$라 하자. 모집단이 정규분포를 따르고 모표준편차가 3분으로 주어졌으므로, 크기 16인 임의표본의 표본평균도 정규분포를 따른다. 표본평균의 표준편차인 **표준오차**는 (σ)/(n)=(3)/(√(16))=0.75분이다. 이는 학생 한 명의 소요 시간의 표준편차 3분과 구별된다.

오차한계: 표준정규분포의 대칭성에 의해 P(-1.96≤ Z≤1.96)=0.95이다. 따라서 모평균의 95% 신뢰구간을 구할 때 표준오차에 1.96을 곱하며, 오차한계는 $E = 1.96 \cdot 0.75 = 1.47$분이다. 이는 **표본평균에서 신뢰구간의 한쪽 끝까지의 거리**이다.

신뢰구간의 길이: 관측된 표본평균을 $\bar{x}$라 하면 양 끝점은 $a = \bar{x} - 1.47$, $b = \bar{x} + 1.47$이다. 따라서 $b - a = 2 \cdot 1.47 = 2.94$분이다. 표본평균은 양 끝점의 차에서 소거되므로 그 값을 몰라도 길이를 구할 수 있으며, 이 값은 ②의 2.94와 일치한다.

NoteBase

문 8. 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $2f(x) = xf'(x) + 2$이고, $f(1) = 3$일 때, $f(2)$의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

정답 3번

간단한 해설

주어진 등식이 모든 실수에서 성립하므로 이차함수의 **일차항의 계수는 0, 상수항은 1**이다. $f(1) = 3$을 적용하면 $f(x) = 2x^2 + 1$이므로 $f(2) = 9$이다.

계산 과정

이차함수를 $f(x) = ax^2 + bx + c$로 놓는다. 이때 $a \neq 0$이고, 미분하면 $f'(x) = 2ax + b$이다.

이를 $2f(x) = xf'(x) + 2$에 대입하고 양변의 $2ax^2$을 소거하면 $2bx + 2c = bx + 2$, 즉 $bx + 2c = 2$이다. 이 등식은 **모든 실수에서 성립하는 항등식**이므로 양변의 일차항 계수와 상수항이 각각 같아야 한다. 따라서 $b = 0$, $2c = 2$이므로 $c = 1$이다.

따라서 $f(x) = ax^2 + 1$이다. 여기에 $f(1) = 3$을 적용하면 $a + 1 = 3$이므로 $a = 2$이다. 즉, 조건을 만족하는 함수는 $f(x) = 2x^2 + 1$이다.

구하는 값은 $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$이며, ③의 9와 일치한다.

NoteBase

문 9. $10^a = \sqrt[3]{40}$, $1000^b = 400$**인 두 실수** a, b**에 대하여** $b - a$**의 값은?**

① 1
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$

정답 3번

간단한 해설

첫 식을 세제곱하면 두 식의 밑을 **1000으로 통일**할 수 있다. 두 식을 나누면 $1000^{b-a} = 10$이므로 $b - a = \frac{1}{3}$이다.

계산 과정

밑 통일: $10^a = \sqrt[3]{40}$의 양변을 세제곱하면 $10^{3a} = 40$이다. $10^{3a} = (10^3)^a$이므로 $1000^a = 40$을 얻는다. 이제 주어진 $1000^b = 400$과 밑이 같아진다.

지수 차 계산: **같은 밑의 거듭제곱을 나누면 지수를 뺀다**. 따라서 $1000^{b-a} = \frac{1000^b}{1000^a}$이고, 우변에 두 값을 대입하면 $\frac{400}{40} = 10$이다.

결과: $1000 = 10^3$이므로 $10^{3(b-a)} = 10^1$이다. 밑이 10인 두 거듭제곱의 값이 같으므로 지수도 같아 $3(b - a) = 1$이다. 따라서 $b - a = \frac{1}{3}$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = (2n+1)5^n$일 때, _n→∞(a_n)/(S_n)의 값은?

① $\frac{1}{5}$
② $\frac{2}{5}$
③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$

정답 4번

간단한 해설

일반항은 **연속한 부분합의 차**이므로 $\frac{a_n}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$이다. 이웃한 부분합의 비가 $\frac{1}{5}$로 수렴하므로, 구하는 극한은 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$이다.

계산 과정

부분합 S_n은 첫째항부터 제 n항까지 더한 값이므로, $n \geq 2$에서 **바로 앞 부분합을 빼면 제 n항만 남는다**. 따라서 $a_n = S_n - S_{n-1}$이다. 주어진 S_n은 양수이므로 양변을 S_n으로 나누면 $\frac{a_n}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$이다.

주어진 부분합 식의 n 대신 $n-1$을 넣으면 $S_{n-1} = (2n-1)5^{n-1}$이다. 따라서 $\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{2n-1}{5(2n+1)}$이다. 여기서 5^{n-1}을 5^n으로 나눈 값이 $\frac{1}{5}$임을 반영한다.

분자와 분모를 각각 n으로 나누면 $\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{2 - 1/n}{5(2 + 1/n)}$이다. $n \to \infty$일 때 $1/n \to 0$이므로, **앞 부분합이 현재 부분합에서 차지하는 비율**은 $\frac{2}{5 \cdot 2} = \frac{1}{5}$로 수렴한다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$이다. 이는 ④의 값과 같다.

NoteBase

문 11. $2a+5b=1$인 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{5}{a}+\frac{2}{b}$의 최솟값은?

① 10

② 20

③ 30

④ 40

정답 4번

간단한 해설

조건식을 이용해 구하는 식을 전개하면 $20+\frac{4a}{b}+\frac{25b}{a}$이다. 뒤의 두 양수의 곱은 100이므로 **두 항의 합은 20 이상**이고, 등호가 성립하는 양수도 존재하므로 최솟값은 40이다.

계산 과정

조건식으로 전개하기: $a, b>0$이고 $2a+5b=1$이다. 구하려는 값을 $S=\frac{5}{a}+\frac{2}{b}$라 하면, 값이 1인 조건식을 곱해도 값은 변하지 않는다. 따라서 $S=(2a+5b)(\frac{5}{a}+\frac{2}{b})$이고, 전개하면 $S=20+\frac{4a}{b}+\frac{25b}{a}$이다.

하한 구하기: $\frac{4a}{b}$와 $\frac{25b}{a}$는 모두 양수이고, 두 항의 곱은 $\frac{4a}{b}\cdot\frac{25b}{a}=100$이다. 양수 두 개의 산술평균은 기하평균 이상이므로 $\frac{4a}{b}+\frac{25b}{a}\geq 2\sqrt{100}=20$이다. 따라서 $S\geq 20+20=40$이다.

등호 성립 확인하기: 산술평균·기하평균의 부등식에서 등호는 **두 항이 같을 때** 성립한다. 즉, $\frac{4a}{b}=\frac{25b}{a}$에서 $4a^2=25b^2$이고, 두 수가 양수이므로 $2a=5b$이다. 이를 $2a+5b=1$과 함께 풀면 a=14, b=110이다. 이때 구하는 식의 값은 $\frac{5}{1/4}+\frac{2}{1/10}=20+20=40$으로, 하한 40이 실제로 달성된다.

따라서 최솟값은 40이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 두 점 P$(-2, 8)$, Q$(6, 0)$에 대하여 선분 PQ를 k:1로 내분하는 점이 직선 $y = 2x$ 위에 있을 때, 양수 k의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

내분점은 **세로좌표가 가로좌표의 2배**여야 한다. 내분점의 좌표를 $y = 2x$에 대입하면 $8 = 2(6k - 2)$가 되어 k = 1이다.

계산 과정

내분점의 좌표: 내분점을 R이라 하면 $PR : RQ = k : 1$이다. 내분점의 각 좌표는 **Q의 좌표에 k를, P의 좌표에 1을 곱해 더한 뒤** 비의 합 k + 1로 나눈다. 따라서 $x_R = \frac{6k-2}{k+1}$, $y_R = \frac{8}{k+1}$이다.

직선 위의 점이라는 조건: R이 직선 $y = 2x$ 위에 있으므로 $\frac{8}{k+1} = 2 \cdot \frac{6k-2}{k+1}$이다. k는 양수이므로 k + 1은 0이 아니며, 양변에 k + 1을 곱하면 $8 = 2(6k - 2)$를 얻는다.

k의 값: 괄호를 풀면 $8 = 12k - 4$이므로 $12k = 12$, $k = 1$이다. 양수 조건을 만족하며, 이 값은 ①의 1에 해당한다.

NoteBase

문 13. 유리함수 $y=\frac{ax+2}{x+b}$의 그래프의 점근선이 $x=1, y=0$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 실수)

① $\frac{3}{2}$

② 1

③ $\frac{1}{2}$

④ 0

정답 2번

간단한 해설

이 함수의 **수평 점근선**은 $y=a$, **수직 점근선**은 $x=-b$이다. 주어진 점근선과 비교하면 $a=0, b=-1$이므로 $a-b=1$이다.

계산 과정

수평 점근선에서 a 구하기: 분자를 분모로 나누면 $y=a+\frac{2-ab}{x+b}$로 나타낼 수 있다. x의 절댓값이 한없이 커질 때 **분수항이 0에 가까워지므로** 수평 점근선은 $y=a$이다. 주어진 수평 점근선이 $y=0$이므로 $a=0$이다.

수직 점근선에서 b 구하기: $a=0$을 대입하면 $y=\frac{2}{x+b}$이다. 분자가 0이 아닌 상수이므로 **분모가 0이 되는 위치**가 수직 점근선이다. 따라서 $x=-b$이고, 주어진 $x=1$과 비교하면 $-b=1$에서 $b=-1$이다.

구하는 값: $a-b=0-(-1)=1$이다. 이는 ②의 1과 일치한다.

NoteBase

문 14. 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=3$과 직선 $y=kx$가 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

기울기의 최댓값과 최솟값은 **직선이 원에 접할 때의 두 기울기**이다. 두 값은 $k^2-8k+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 따라 $Mm=1$이다.

계산 과정

원의 중심은 $C(2,2)$, 반지름은 $\sqrt{3}$이다. 직선을 $kx-y=0$으로 쓰면 중심에서 직선까지의 거리는 $d=\frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}$이다. 원과 직선이 적어도 한 점에서 만나려면 **중심에서 직선까지의 거리가 반지름 이하여야** 하므로 $d\le\sqrt{3}$이다.

거리 조건의 양변이 음이 아니고 $k^2+1>0$이므로, 양변을 제곱하여 정리하면 4(k-1)^2≤3(k^2+1), 즉 k^2-8k+1≤0이다. 이차방정식 $k^2-8k+1=0$의 두 근은 $4\pm\sqrt{15}$이므로 가능한 기울기의 범위는 4-√(15)≤ k≤4+√(15)이다. 양 끝에서는 직선이 원에 접하므로 **두 끝값도 포함된다**. 따라서 $M=4+\sqrt{15}$, $m=4-\sqrt{15}$이다.

M과 m은 $k^2-8k+1=0$의 두 근이다. 근과 계수의 관계를 적용하면 $Mm=\frac{1}{1}=1$이며, 이는 ①의 값 1에 해당한다.

NoteBase

문 15. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 두 부분집합 A, B가 다음을 만족한다.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$일 때, B의 모든 원소의 합은?

(가) $A \cap B$의 원소의 개수는 2이고, $A \cup B$의 원소의 개수는 5이다.
(나) A의 모든 원소의 곱은 B의 모든 원소의 곱과 같다.

① 10
② 11
③ 12
④ 13

정답 2번

간단한 해설

B는 A와 공통인 두 원소와 A에 없는 한 원소로 이루어지며, 원소의 곱은 24이다. A에 없는 원소 중 **24의 약수는 6뿐**이므로 $B = \{1, 4, 6\}$이고, 모든 원소의 합은 11이다.

계산 과정

1. 집합의 원소 수: (가)에서 $A \cup B$의 원소는 5개이고 $A = \{1, 2, 3, 4\}$의 원소는 4개이므로, **B에만 속하는 원소는 1개**이다. 또 $A \cap B$의 원소가 2개이므로 B는 A의 원소 2개와 A에 없는 원소 1개로 이루어진다.

2. A에 없는 원소 찾기: A의 모든 원소의 곱은 $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$이다. (나)에 따라 B의 원소의 곱도 24이다. B는 X의 부분집합이므로 A에 없는 원소는 5, 6, 7 중 하나이다. B의 원소는 모두 자연수이므로 각 원소는 **24의 약수**여야 한다. 이 중 24의 약수는 6뿐이므로 그 원소는 6이다.

3. 공통 원소 찾기: B의 나머지 두 원소의 곱은 $\frac{24}{6} = 4$이다. 1, 2, 3, 4 중 **서로 다른 두 원소**를 골라 곱이 4가 되는 경우는 1과 4뿐이다. 2를 두 번 고르는 것은 집합의 서로 다른 두 원소를 고르는 조건에 맞지 않는다. 따라서 $B = \{1, 4, 6\}$이다.

4. 원소의 합: B의 모든 원소의 합은 $1 + 4 + 6 = 11$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. f(0) ≠ 0인 다항함수 $f(x)$에 대하여
$F(x) = (x^2 + 2)\int_1^x f(t)dt$
라 하자. $F'(0) = F'(1)$일 때, $\frac{f(1)}{f(0)}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$

정답 3번

간단한 해설

곱의 미분법을 적용한 뒤 0과 1을 대입하면 **적분이 포함된 항이 각각 0**이 되어 $F'(0) = 2f(0), F'(1) = 3f(1)$이다. 두 값이 같으므로 $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{2}{3}$이다.

계산 과정

$G(x) = \int_1^x f(t)dt$라 두면, 다항함수 $f(x)$는 연속이므로 미적분의 기본정리에 의해 $G'(x) = f(x)$이다.
$F(x) = (x^2 + 2)G(x)$에 **곱의 미분법**을 적용하면 $F'(x) = 2xG(x) + (x^2 + 2)f(x)$이다.

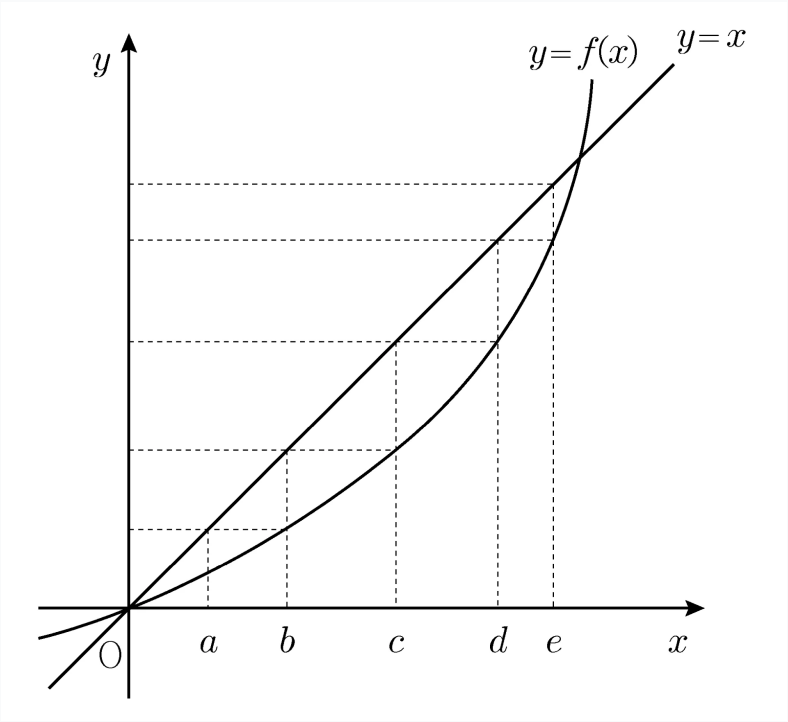
$x = 0$에서는 **첫째 항의 계수가 0**이므로 $G(0)$의 값을 구할 필요가 없다. 따라서 $F'(0) = 2f(0)$이다.

$x = 1$에서는 **적분 구간의 양 끝이 같아** $G(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0$이다. 따라서 $F'(1) = (1^2 + 2)f(1) = 3f(1)$이다.

조건 $F'(0) = F'(1)$을 대입하면 $2f(0) = 3f(1)$이다. $f(0) \neq 0$이므로 양변을 $3f(0)$으로 나누면 $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{2}{3}$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 직선 $y = x$와 역함수가 존재하는 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① $f^{-1}(c) = b$

② $(f \circ f)(d) = c$

③ $(f \circ f)(e) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b)$

④ $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(b) = e$

정답 4번

간단한 해설

역함수는 **함숫값에서 입력값을 거꾸로 찾는** 함수이다. 그림에서 $f(c) = b$, $f(d) = c$, $f(e) = d$이므로 b에 역함수를 세 번 적용하면 c, d, e를 차례로 얻는다.

NoteBase

선지별 해설

직선 $y = x$ 위의 점은 두 좌표가 같으므로, 이 직선과 점선을 이용하면 곡선 위의 점의 높이를 읽을 수 있다. 그림에서 $f(b) = a$, $f(c) = b$, $f(d) = c$, $f(e) = d$이다. 역함수에서는 **입력값과 함숫값의 대응을 뒤집으므로** $f(u) = v$이면 $f^{-1}(v) = u$이다. 합성함수는 오른쪽 함수부터 차례로 적용한다.

① X: $f(d) = c$이므로 $f^{-1}(c) = d$이다. c를 함숫값으로 갖는 입력값은 b가 아니라 d이다.

② X: $f(d) = c$에 이어 $f(c) = b$를 적용하면 $(f \circ f)(d) = f(c) = b$이다. 한 번 적용한 값은 c이지만 **두 번 적용한 값**은 b이다.

③ X: 왼쪽은 $(f \circ f)(e) = f(d) = c$이다. 오른쪽은 $f^{-1}(b) = c$, $f^{-1}(c) = d$이므로 $(f^{-1} \circ f^{-1})(b) = d$이다. $c < d$이므로 **두 값은 서로 다르다**.

④ O: $f^{-1}(b) = c$, $f^{-1}(c) = d$, $f^{-1}(d) = e$이다. 따라서 b에 역함수를 세 번 적용한 값은 e이므로 선지의 등식이 성립한다.

NoteBase

문 18. a를 세 번, b를 다섯 번 사용하여 만드는 8자리 문자열 중 다음을 만족하는 문자열의 개수는?

(가) a는 서로 이웃하지 않는다.
(나) 첫 문자가 a이면 마지막 문자는 b이다.

① 16
② 18
③ 20
④ 22

정답 1번

간단한 해설

b 다섯 개 사이와 양 끝의 **6개 빈틈 중 3곳**에 a를 넣으면 서로 이웃하지 않는 배열은 20개이다. 이 중 **첫 문자와 마지막 문자가 모두 a인 경우** 4개를 제외하므로 20 − 4 = 16개이다.

계산 과정

(가) 서로 이웃하지 않는 배열: 같은 문자끼리는 구별하지 않으므로 b 다섯 개를 먼저 일렬로 놓고 a가 들어갈 위치를 고른다. 빈틈은 b 사이의 4곳과 양 끝의 2곳으로 모두 6곳이다. a끼리 이웃하지 않으려면 **각 빈틈에 최대 한 개씩** 넣어야 하므로, 서로 다른 3곳을 고르는 경우의 수는 $\binom{6}{3} = 20$이다.

(나) 조건을 어기는 배열: 첫 문자가 b이면 마지막 문자에 추가 제한이 없다. 첫 문자가 a일 때만 마지막 문자가 b여야 하므로, 앞서 센 배열에서 제외할 것은 **양 끝이 모두 a인 경우**이다. 양 끝의 빈틈에 a를 한 개씩 넣고, 남은 a 한 개를 내부의 4개 빈틈 중 한 곳에 넣으면 된다. 따라서 제외할 배열은 $\binom{4}{1} = 4$개이다.

두 조건을 모두 만족하는 문자열은 20 − 4 = 16개이며, ①의 16에 해당한다.

NoteBase

문 19. 자연수 n에 대하여 함수 $y=\frac{n}{x}(x>0)$의 그래프와 한 점에서 만나고 중심이 $(0,0)$인 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} r_n^2$의 값은?

① 110

② 132

③ 156

④ 182

정답 1번

간단한 해설

그래프와 원이 모두 직선 $y=x$에 대칭이므로, 교점이 하나뿐이면 **교점의 두 좌표가 같아야 한다**. 이때 $r_n^2=2n$이므로 구하는 합은 110이다.

계산 과정

교점을 (x,y)라 하면 $x>0, y>0$이고 $xy=n$이다. 원의 중심이 원점이므로 거리 공식에 따라 $r_n^2=x^2+y^2$이다.

함수 $y=\frac{n}{x}(x>0)$의 그래프와 원점 중심의 원은 모두 직선 $y=x$에 대칭이다. 따라서 (x,y)가 교점이면 (y,x)도 교점이다. 두 좌표가 다르면 교점이 두 개이므로, 한 점에서만 만나려면 **두 좌표가 같아야 한다**. $xy=n$과 $x=y>0$에서 $x=y=\sqrt{n}$이고, 따라서 $r_n^2=n+n=2n$이다.

반대로 반지름의 제곱이 $2n$이면, 교점에서 $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=0$이다. 따라서 교점은 $(\sqrt{n},\sqrt{n})$ 하나뿐이므로 주어진 조건을 만족한다.

이를 $n=1$부터 10까지 더하면 $\sum_{n=1}^{10} r_n^2=2(1+2+\cdots+10)$이다. 1부터 10까지의 합은 $\frac{10\cdot 11}{2}=55$이므로 구하는 값은 $2\times 55=110$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 삼차함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은?

(가) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -1을 갖는다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)+f(x)=1$이다.

① 1
② $\frac{10}{9}$
③ $\frac{11}{9}$
④ $\frac{12}{9}$

정답 3번

간단한 해설

조건 (나)에서 $f(0)=2$이고, **대칭인 두 점에서의 기울기가 같으므로** $f'(0)=f'(1)=0$이다. 이를 극솟값 조건과 함께 적용하면 $f(x)=6x^3-9x^2+2$이므로 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{9}$이다.

계산 과정

(가)에서 $x=1$일 때 극솟값이 -1이므로 $f(1)=-1$이다. 다항함수는 미분 가능하므로 **극소인 점에서의 미분계수는 0**이며, $f'(1)=0$이다.

(나)에 $x=0$을 대입하면 $f(1)+f(0)=1$이므로 $f(0)=2$이다. 또한 (나)의 양변을 미분하면 $-f'(1-x)+f'(x)=0$이다. 합성함수 $f(1-x)$를 미분할 때는 안쪽 함수의 미분계수 -1을 곱한다. 따라서 $f'(0)=f'(1)=0$이다.

삼차함수를 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$으로 놓으면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이다. $f(0)=2$에서 $d=2$, $f'(0)=0$에서 $c=0$이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+2$로 쓸 수 있다.

$f(1)=-1$에서 $a+b=-3$이고, $f'(1)=0$에서 $3a+2b=0$이다. 두 번째 식에서 첫 번째 식의 2배를 빼면 $a=6$이고, 이를 대입하면 $b=-9$이다. 따라서 $f(x)=6x^3-9x^2+2$이다.

구한 함수에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}-1+2=\frac{11}{9}$이다. 이 값은 ③의 $\frac{11}{9}$과 일치한다.

NoteBase