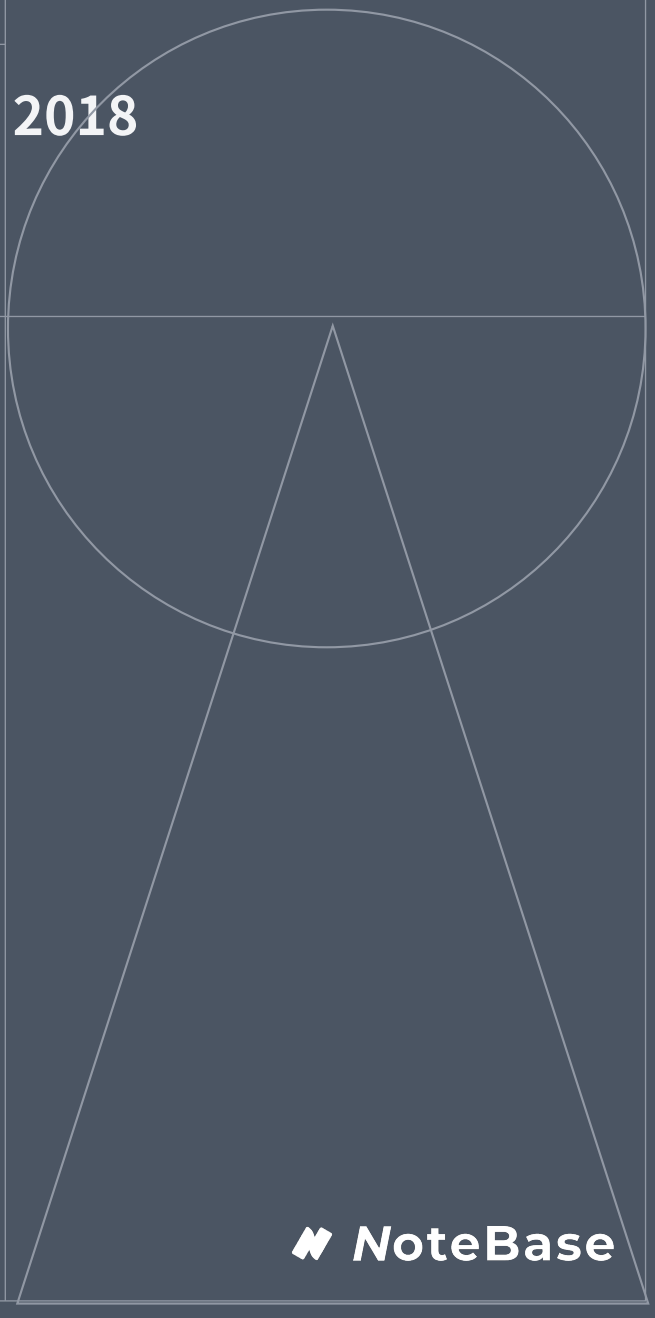
기출OX 해설집

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2018



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2018

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2018

문 1. 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x + a$를 $x - 2$로 나눈 나머지가 8일 때, 상수 a의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

나머지정리에 따라 $f(2) = 8$이다. 이를 정리하면 $5a - 2 = 8$이므로 $a = 2$이다.

계산 과정

나머지 조건: 일차식 $x - 2$로 나눈 나머지는 상수이므로, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 r라 하면
$f(x) = (x - 2)Q(x) + r$로 쓸 수 있다. 여기에 **나누는 식을 0으로 만드는 값**인 $x = 2$를 대입하면 몫이 포함된 항이 사라져 $f(2) = r$가 된다. 주어진 나머지가 8이므로 $f(2) = 8$이다.

대입과 정리: 주어진 다항식에 $x = 2$를 대입하면 $f(2) = 8 + 4a - 10 + a$이다. 같은 종류의 항끼리 모으면 $f(2) = 5a - 2$가 된다. 이는 나머지를 상수 a로 나타낸 식이다.

상수의 값: 나머지가 8이라는 조건에서 $5a - 2 = 8$이다. 양변에 2를 더하면 $5a = 10$, 5로 나누면 $a = 2$이다. 구한 값은 ②의 2와 일치한다.

NoteBase

문 2. 두 양수 a, b에 대하여 $\log_2 ab = 6$, $\log_2 \frac{a}{b} = 2$일 때, $a - b$의 값은?

① 16

② 12

③ 8

④ 4

정답 2번

간단한 해설

주어진 로그식은 두 수의 **곱이 64이고 비가 4**라는 뜻이다. 이를 함께 만족하는 값은 $a = 16$, $b = 4$이므로 $a - b = 12$이다.

계산 과정

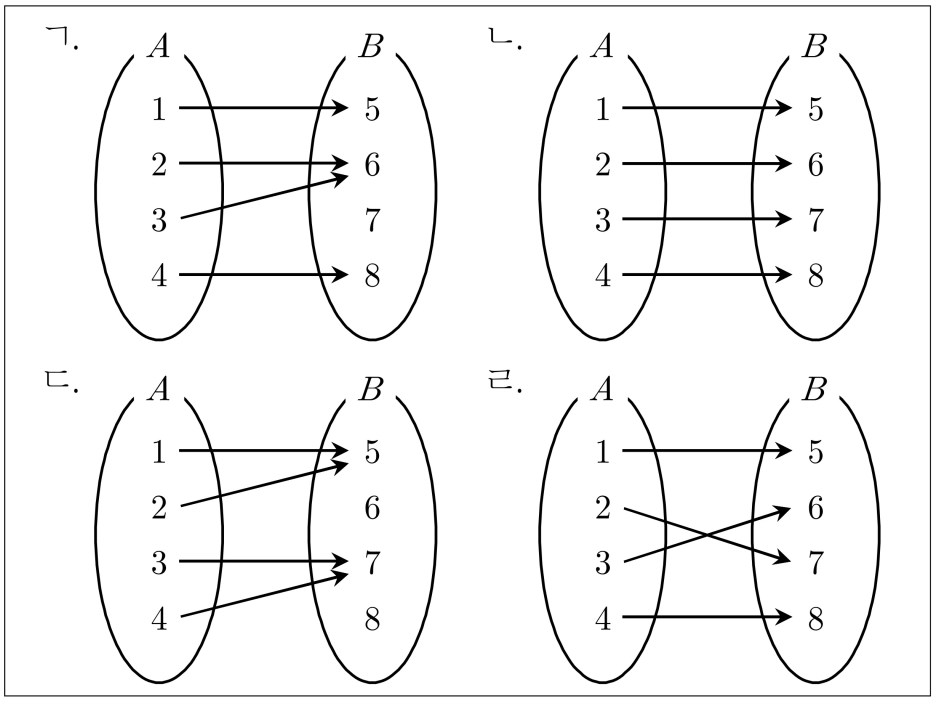
1. 곱과 비 구하기: 로그의 정의에 따라 $\log_2 x = c$는 $x = 2^c$를 뜻한다. 따라서 $ab = 2^6 = 64$, $\frac{a}{b} = 2^2 = 4$이다. 두 번째 식에서 $a = 4b$를 얻는다.

2. 두 수 구하기: $a = 4b$를 $ab = 64$에 대입하면 $4b^2 = 64$이므로 $b^2 = 16$이다. 이때 b는 **양수**이므로 $b = 4$이고, $a = 4b = 16$이다.

3. 차 구하기: 구한 두 값을 빼면 $a - b = 16 - 4 = 12$이다. 이는 ②의 12와 일치한다.

NoteBase

문 3. 두 집합 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{5,6,7,8\}$에 대하여, A에서 B로의 함수 중 역함수가 존재하는 것만을 모두 고르면?



① ㄱ, ㄴ

② ㄱ, ㄷ

③ ㄴ, ㄷ

④ ㄴ, ㄹ

정답 4번

간단한 해설

역함수가 존재하려면 **공역의 각 원소에 정의역의 원소가 하나씩만 대응**해야 한다. 화살표가 교차하더라도 이 조건을 만족하면 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

NoteBase

보기별 해설

함수 $f: A \to B$의 역함수는 원래의 대응을 거꾸로 하여 B에서 A로 가는 함수이다. 따라서 **공역의 모든 원소가 빠짐없이, 각각 단 하나의 원소와 연결되는 일대일대응**이어야 한다. 화살표를 거꾸로 했을 때 한 원소에서 두 갈래로 나가거나 대응할 원소가 없어지면 역함수가 될 수 없다.

ㄱ X: 2와 3이 모두 6에 대응한다. 화살표를 거꾸로 하면 6이 2와 3에 동시에 대응하므로 함수가 되지 않는다. 또한 7에 대응하는 원소도 없다. 원래 함수는 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

ㄴ O: 1, 2, 3, 4가 각각 5, 6, 7, 8에 대응한다. 공역의 각 원소에 화살표가 하나씩 도착하므로, 거꾸로 해도 각 원소의 대응값이 하나씩 정해진다. 따라서 일대일대응이며 역함수가 존재한다.

ㄷ X: 1과 2는 모두 5에, 3과 4는 모두 7에 대응한다. 거꾸로 하면 5와 7 각각에 대응값이 두 개씩 생기며, 6과 8에는 대응값이 없다. 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

ㄹ O: 1은 5에, 2는 7에, 3은 6에, 4는 8에 대응한다. **화살표가 교차해도 같은 원소로 모이지 않으며** 공역의 모든 원소에 하나씩 도착한다. 거꾸로 하면 5는 1에, 6은 3에, 7은 2에, 8은 4에 대응하므로 역함수가 존재한다.

역함수가 존재하는 것은 ㄴ과 ㄹ이며, 이 조합은 ④에 해당한다.

NoteBase

문 4. $x^2 - 4x + 1 = 0$**일 때,** $5x^2 + \frac{5}{x^2}$**의 값은?**

① 70

② 75

③ 80

④ 85

정답 1번

간단한 해설

주어진 식을 0이 아닌 x로 나누면 $x + \frac{1}{x} = 4$이다. **합의 제곱에서 교차항 2를 빼면** $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$이므로, 구하는 값은 $5 \times 14 = 70$이다.

계산 과정

1. 주어진 식에서 $x = 0$이면 좌변이 1이므로 $x \neq 0$이다. 따라서 **양변을 x로 나눌 수 있다.** $x - 4 + \frac{1}{x} = 0$으로 정리하면 $x + \frac{1}{x} = 4$를 얻는다.

2. 합의 제곱을 전개하면 $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$이다. 교차항은 $2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 2$이므로, **제곱한 값에서 2를 빼야** 두 제곱의 합이 된다. 따라서 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 4^2 - 2 = 14$이다.

3. 구하는 식은 $5x^2 + \frac{5}{x^2} = 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$이다. 앞서 구한 14에 5를 곱하면 $5 \times 14 = 70$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f(x)=cases-3x & (x는 유리수)\^2 & (x는 무리수)cases에 대하여 $(f \circ f)(\sqrt{5})$의 값은?

① −15

② −5

③ 5

④ 15

정답 1번

간단한 해설

$\sqrt{5}$는 무리수이므로 제곱하여 $f(\sqrt{5}) = 5$를 얻는다. 두 번째 입력인 **5는 유리수**이므로 −3을 곱하며, 합성함수의 값은 −15이다.

계산 과정

합성함수 $(f \circ f)(\sqrt{5})$는 $f(f(\sqrt{5}))$를 뜻한다. 안쪽 함수의 값을 먼저 구하고, 그 결과를 바깥쪽 함수의 입력으로 넣는다. 이 함수는 입력이 유리수인지 무리수인지에 따라 적용하는 식이 달라진다.

1. 안쪽 함수 계산: $\sqrt{5}$는 무리수이므로 $f(x) = x^2$를 적용한다. 따라서 $f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5$이다. 이 5가 두 번째로 함수에 넣을 값이다.

2. 바깥쪽 함수 계산: **새 입력 5는 유리수**이므로 이번에는 $f(x) = -3x$를 적용한다. 따라서 $f(5) = -3 \cdot 5 = -15$이다.

따라서 $(f \circ f)(\sqrt{5}) = -15$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 20 이하의 자연수 n에 대하여, $\left\{\frac{2(1+i)}{1-i}\right\}^n = -2^n i$를 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 45

② 50

③ 55

④ 60

정답 3번

간단한 해설

괄호 안을 정리하고 양변을 2^n으로 나누면 $i^n = -i$이다. 허수단위의 거듭제곱은 **4를 주기로 반복**하므로 조건을 만족하는 자연수는 3, 7, 11, 15, 19이고, 그 합은 55이다.

계산 과정

① 밑의 복소수 정리: $i^2 = -1$이므로 $(1+i)^2 = 2i$이다. 분모와 분자에 $1+i$를 곱하면 $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$이므로, 주어진 식의 괄호 안은 $2i$로 정리된다.

② 지수 조건 도출: 주어진 등식은 $2^n i^n = -2^n i$이다. **양변을 0이 아닌 공통인수로 나누면** 등식이 유지되므로, 2^n으로 나누어 $i^n = -i$를 얻는다.

③ 가능한 자연수 찾기: i, i^2, i^3, i^4의 값은 차례로 i, -1, $-i$, 1이고, 이후에도 이 순서가 반복된다. 따라서 $i^n = -i$일 조건은 **n을 4로 나눈 나머지가 3**인 것이다. 20 이하의 자연수 중 이에 해당하는 값은 3, 7, 11, 15, 19이다.

④ 합 계산: 가능한 모든 값의 합은 3 + 7 + 11 + 15 + 19 = 55이다. 이는 선택지 ③의 55와 일치한다.

NoteBase

문 7. 다항함수 $f(x)$가 $f(1)=-3$, _h→0(f(1+h)-f(1-h))/(h)=8을 만족시킨다. 함수 $g(x)=(x^2+1)f(x)$에 대하여, $g'(1)$의 값은?

① −2

② −1

③ 1

④ 2

정답 4번

간단한 해설

주어진 극한은 **미분계수의 2배**이므로 $f'(1)=4$이다. 곱의 미분법을 적용하면 $g'(1)=2(-3)+2\cdot 4=2$이다.

계산 과정

1. 미분계수 구하기: 다항함수는 모든 실수에서 미분 가능하다. 주어진 극한의 분자에 $f(1)$을 더하고 빼면, 차분몫을 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$와 $\frac{f(1)-f(1-h)}{h}$의 합으로 나눌 수 있다. 첫째 항은 $h\to 0$일 때 $f'(1)$로 수렴한다. 둘째 항도 분자와 분모의 부호를 바꾸어 $\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$로 쓰면, $-h\to 0$이므로 $f'(1)$로 수렴한다. 따라서 주어진 극한은 **두 미분계수의 합**이고, $2f'(1)=8$에서 $f'(1)=4$를 얻는다.

2. 곱의 미분법 적용하기: $g(x)=(x^2+1)f(x)$는 두 미분 가능한 함수의 곱이다. **각 함수를 한 번씩 미분한 두 항을 더하면** $g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$이다. 여기에 $x=1$, $f(1)=-3$, $f'(1)=4$를 대입하면 $g'(1)=2(-3)+2\cdot 4=2$이다.

구한 $g'(1)$의 값은 2이므로 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 파란 공 4개와 노란 공 6개 중에서 임의로 공 3개를 동시에 뽑을 때, 뽑힌 3개의 공 중에 노란 공이 한 개 이상일 확률은?

① $\frac{17}{30}$
② $\frac{19}{30}$
③ $\frac{23}{30}$
④ $\frac{29}{30}$

정답 4번

간단한 해설

노란 공이 한 개 이상 나오는 사건의 여사건은 **3개가 모두 파란 공인 경우**이다. 전체 확률 1에서 이 여사건의 확률을 빼면 $\frac{29}{30}$이다.

계산 과정

전체 경우의 수: 파란 공 4개와 노란 공 6개를 합하면 총 10개이다. 각 공을 구별하여 세면, 임의로 뽑히는 각 3개 묶음의 가능성은 같다. 동시에 뽑으므로 **뽑는 순서를 구분하지 않는 조합**을 사용하며, 전체 경우의 수는 $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$이다.

여사건의 확률: '노란 공이 한 개 이상'은 노란 공이 1개, 2개 또는 3개인 경우를 모두 포함한다. 이 사건이 일어나지 않으려면 **노란 공이 0개**, 즉 3개 모두 파란 공이어야 한다. 파란 공 4개 중 3개를 뽑는 경우의 수는 $\binom{4}{3} = 4$이므로, 여사건의 확률은 $\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$이다.

구하는 확률: 어떤 사건과 그 여사건의 확률의 합은 1이다. 따라서 노란 공이 한 개 이상일 확률은 $1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 Σ _k=1^nka_k=\n(n+1)\^2이 성립할 때, _n→∞(12)/(n^3)Σ _k=1^na_k의 값은?

① 8

② 16

③ 24

④ 32

정답 2번

간단한 해설

주어진 합에서 **이웃한 두 부분합의 차**를 구하면 $a_n = 4n^2$이다. 이를 합한 식의 최고차항은 $\frac{4}{3}n^3$이므로 구하는 극한값은 16이다.

계산 과정

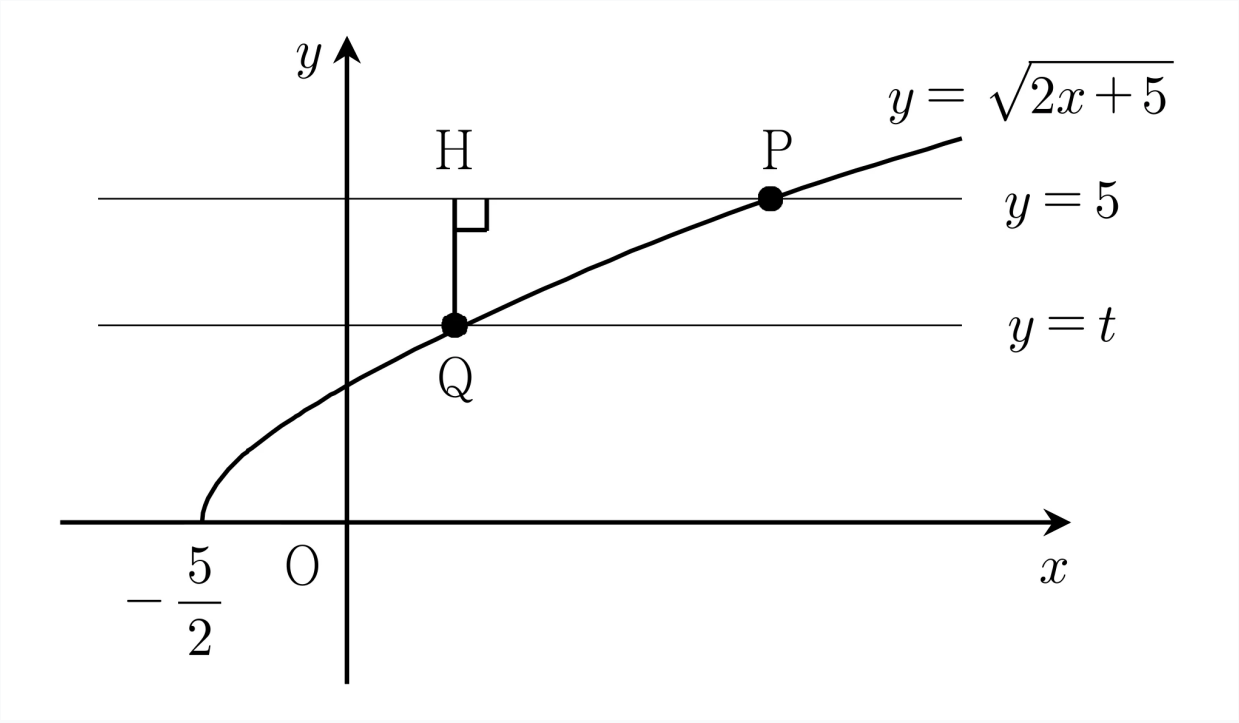
1. 일반항 구하기: 주어진 식에 $n = 1$을 대입하면 $a_1 = 4$이다. $n \geq 2$에서는 **이웃한 두 부분합을 빼면 마지막 항만 남으므로** $na_n = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k$이다. 따라서 $na_n = n^2\{(n+1)^2 - (n-1)^2\}$이다. 중괄호 안은 $4n$이므로 $na_n = 4n^3$, 즉 $a_n = 4n^2$이다. 이 식은 $n = 1$에서도 성립한다.

2. 일반항의 합 구하기: 제곱의 합 공식 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 이용한다. 각 항이 $a_k = 4k^2$이므로 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$이다. 이는 계수 k가 붙은 주어진 합과 달리, **일반항 자체를 더한 합**이다.

3. 극한 계산하기: 앞에서 구한 합에 $\frac{12}{n^3}$을 곱하면 $\frac{8n(n+1)(2n+1)}{n^3}$이다. 이를 $8\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$로 나타내면, $n \to \infty$일 때 $\frac{1}{n} \to 0$이므로 극한값은 $8 \times 1 \times 2 = 16$이다. 이 값은 ②의 16과 일치한다.

NoteBase

문 10. 곡선 $y=\sqrt{2x+5}$와 두 직선 $y=5,\ y=t\ (0<t<5)$의 교점을 각각 P, Q라 하자. 점 Q에서 직선 $y=5$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{t\to5^-}\frac{\overline{PQ}}{\overline{QH}}$의 값은?



① $2\sqrt{5}$
② $\sqrt{22}$
③ $2\sqrt{6}$
④ $\sqrt{26}$

정답 4번

간단한 해설

직각삼각형 PHQ에서 **가로 길이와 세로 길이의 비**가 $t\to5^-$일 때 5로 수렴한다. 피타고라스 정리를 적용하면 빗변과 세로 길이의 비는 $\sqrt{1+5^2}=\sqrt{26}$으로 수렴한다.

NoteBase

계산 과정

교점의 좌표: 곡선의 식을 제곱하여 정리하면 $x = \frac{y^2 - 5}{2}$이다. 따라서 $P = (10, 5)$, $Q = \left(\frac{t^2 - 5}{2}, t\right)$이다. H는 Q에서 수평선 $y = 5$에 내린 수선의 발이므로 Q와 x좌표가 같고, P와 y좌표가 같다.

두 직각변의 길이: $0 < t < 5$이므로 $\overline{QH} = 5 - t > 0$이다. 또한 $\overline{PH} = 10 - \frac{t^2 - 5}{2} = \frac{25 - t^2}{2}$이다. **가로 길이와 세로 길이의 비**를 구하면 $\frac{\overline{PH}}{\overline{QH}} = \frac{25 - t^2}{2(5 - t)}$이다. 분자의 인수분해 $25 - t^2 = (5 - t)(5 + t)$를 이용하고, $t \neq 5$이므로 약분하면 이 비는 $\frac{5 + t}{2}$이다.

빗변과 세로 길이의 비: 삼각형 PHQ는 H에서 직각이므로 피타고라스 정리에 따라 $\overline{PQ}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{QH}^2$이다. 양변을 $\overline{QH}^2$으로 나누고, 길이의 비가 양수인 점을 이용하여 제곱근을 취하면 $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QH}} = \sqrt{1 + \left(\frac{5 + t}{2}\right)^2}$이다.

극한값: $t \to 5^-$일 때 $\frac{5 + t}{2} \to 5$이므로, 구하는 극한값은 $\sqrt{1 + 5^2} = \sqrt{26}$이다. 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 집합 $A - (B \cap C)$와 같은 것은?

① $(A - B) \cap (A - C)$

② $(A - B) \cup (A - C)$

③ $(A - B) \cap (B - C)$

④ $(A - B) \cup (B - C)$

정답 2번

간단한 해설

교집합에 속하지 않는다는 것은 두 집합 중 **적어도 하나에 속하지 않는다**는 뜻이다. 따라서 A에서 $B \cap C$를 뺀 집합은 $(A - B) \cup (A - C)$이다.

계산 과정

차집합을 여집합으로 표현: 여집합은 전체집합 U에서 해당 집합에 속하지 않는 원소들의 집합이다. 따라서 $A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c$이다. 이는 A에 속하면서 B와 C에 동시에 속하지는 않는 원소들을 뜻한다.

드모르간 법칙 적용: B와 C에 동시에 속하지 않으려면 **둘 중 적어도 하나에 속하지 않으면 된다**. 그러므로 $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$이고, 구하는 집합은 $A \cap (B^c \cup C^c)$이다.

분배법칙 적용: A와의 교집합을 합집합의 각 항에 분배하면 $(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$를 얻는다. 여기서 $A \cap B^c = A - B$, $A \cap C^c = A - C$이므로 구하는 집합은 $(A - B) \cup (A - C)$이다. 이는 ②의 식과 같다.

NoteBase

문 12. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$의 그래프와 직선 $y = 2x + 3$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, $a + 2b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 12

② 16

③ 20

④ 24

정답 1번

간단한 해설

교점의 x좌표 1, 5는 **두 함수식을 같게 놓아 얻은 이차방정식의 두 근**이다. 근과 계수의 관계로 $a = -4$, $b = 8$이므로 $a + 2b = 12$이다.

계산 과정

교점에서는 **같은 x에 대한 두 함수의 y값이 같다**. 따라서 $x^2 + ax + b = 2x + 3$이고, 이항하여 정리하면 $x^2 + (a - 2)x + (b - 3) = 0$이다.

이 방정식의 두 근은 1, 5이고 최고차항의 계수는 1이므로, 좌변은 $(x - 1)(x - 5)$로 인수분해된다. 이를 전개하면 $x^2 - 6x + 5$이다.

두 다항식의 **같은 차수의 계수**를 비교하면 $a - 2 = -6$, $b - 3 = 5$이다. 따라서 $a = -4$, $b = 8$이다.

구하는 값은 $a + 2b = -4 + 2 \cdot 8 = 12$이며, ①의 12와 일치한다.

NoteBase

문 13. 수직선 위의 두 점 $A(-1)$, $B(5)$에 대하여, 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 $P(x_1)$, 3:2로 외분하는 점을 $Q(x_2)$, 선분 AB의 중점을 $M(x_3)$이라고 할 때, x_1, x_2, x_3의 관계로 옳은 것은?

① $x_1 < x_2 < x_3$

② $x_1 < x_3 < x_2$

③ $x_3 < x_1 < x_2$

④ $x_3 < x_2 < x_1$

정답 3번

간단한 해설

2:1 내분점은 **중점보다 오른쪽**에 있고, 3:2 외분점은 **B의 오른쪽**에 있다. 따라서 세 좌표의 관계는 $x_3 < x_1 < x_2$이다.

계산 과정

P의 좌표: 두 점의 좌표가 −1과 5이므로 선분 AB의 길이는 $5-(-1)=6$이다. $AP:PB=2:1$이므로 **전체 길이를 3등분한 것 중 2만큼**을 A에서 오른쪽으로 이동한다. 따라서 $x_1=-1+\frac{2}{2+1}\cdot 6=3$이다.

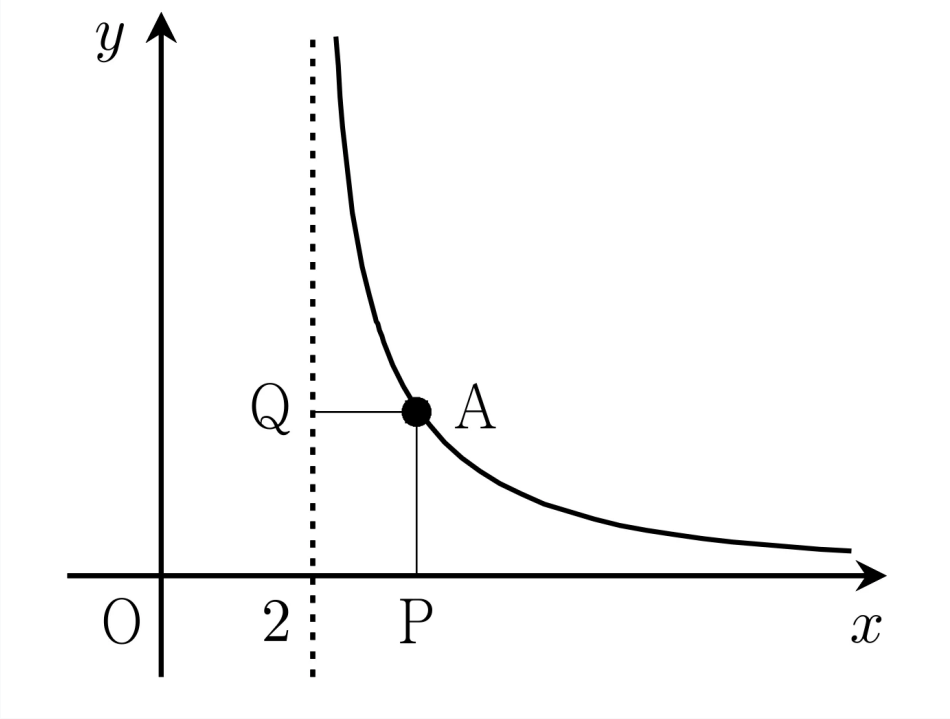
Q의 좌표: 외분점 Q는 선분 AB 밖에 있고, $AQ:BQ=3:2$이므로 A보다 B에 더 가깝다. 따라서 Q는 **B의 오른쪽**에 있다. 이때 $AQ-BQ=AB=6$이고, 비의 차인 $3-2=1$에 해당하는 길이가 6이다. 그러므로 $BQ=2\cdot 6=12$이고, $x_2=5+12=17$이다.

M의 좌표: 중점의 좌표는 양 끝점 좌표의 평균이므로 $x_3=\frac{-1+5}{2}=2$이다.

좌표의 대소 관계: $x_3=2, x_1=3, x_2=17$이므로 $x_3<x_1<x_2$이다. 이는 ③의 관계와 일치한다.

NoteBase

문 14. 유리함수 $y = \frac{4}{x-2}$ $(x > 2)$의 그래프 위의 점 A에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{AP} + \overline{AQ}$의 최솟값은?



① 3

② 4

③ 5

④ 6

정답 2번

간단한 해설

두 수선의 길이는 양수이고 그 곱이 4이므로, **두 길이가 같을 때** 합이 최소가 된다. 각각의 길이가 2일 때 합의 최솟값은 4이다.

NoteBase

계산 과정

두 점근선은 $x = 2$와 $y = 0$이다. 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 $a > 2$, $b = \frac{4}{a-2} > 0$이다. 그림에서 P는 수평 점근선 위에, Q는 수직 점근선 위에 있으므로 $\overline{AP} = b$, $\overline{AQ} = a - 2$이다. 특히 수평 거리는 원점이 아니라 **점근선에서부터** 재므로 $a - 2$가 된다.

두 길이를 각각 $u = b$, $v = a - 2$라 놓으면 둘 다 양수이며, 함수식에서 $uv = b(a - 2) = 4$를 얻는다. 즉, 점 A가 움직여도 **두 길이의 곱은 일정하다**. 양수에 대한 산술평균·기하평균의 관계에 따라 $u + v \geq 2\sqrt{uv} = 4$이다.

등호는 $u = v$일 때 성립한다. $uv = 4$이고 두 수가 양수이므로 이때 $u = v = 2$이다. 실제로 $a = 4$, $b = 2$인 점은 주어진 그래프 위에 있으므로 두 길이의 합 4를 얻을 수 있다. 따라서 최솟값은 4이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합은 8이고, 곱은 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 곱은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

정답 2번

간단한 해설

원래 두 근을 α, β라 하면, 새 방정식의 근은 **각 근에서 1을 뺀 뒤 2로 나눈 값**이다. 따라서 두 근의 곱은 $\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{4}=\frac{3-8+1}{4}=-1$이다.

계산 과정

원래 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 두면, 주어진 조건은 $\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=3$이다.

$f(2x+1)=0$이 성립하려면 **입력값이 원래 방정식의 근**이어야 하므로, $2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$이다. 이를 각각 풀면 새 방정식의 두 근은 $\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$이다.

새 두 근의 곱은 $\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}$이다. 분자를 전개하면 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$이므로, **원래 두 근을 직접 구하지 않고** 주어진 합과 곱을 대입할 수 있다. 계산하면 $\frac{3-8+1}{4}=\frac{-4}{4}=-1$이다.

따라서 새 방정식의 두 근의 곱은 -1이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 등비수열 2, a_1, a_2, a_3, a_4, 36에 대하여
$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 2^m \times 3^n$
을 만족시키는 자연수 m과 n의 합 $m+n$의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

정답 3번

간단한 해설

등비수열에서 **양 끝에서 같은 거리의 두 항의 곱**은 같으므로, a_1a_4와 a_2a_3는 각각 $2 \times 36 = 72$이다. 따라서 네 항의 곱은 $72^2 = 2^6 \cdot 3^4$이고, $m+n = 6+4 = 10$이다.

계산 과정

공비를 r라 하면 첫째항이 2이고 여섯째항이 36이므로 $2r^5 = 36$이다. 따라서 $r^5 = 18$이다.

네 항의 곱은 **양 끝에서 같은 거리의 항끼리 묶어** 구한다. $a_1a_4 = (2r)(2r^4) = 4r^5$이고, $a_2a_3 = (2r^2)(2r^3) = 4r^5$이다. 두 곱은 각각 $4 \times 18 = 72$이므로 $a_1a_2a_3a_4 = 72^2$이다.

$72 = 2^3 \cdot 3^2$이므로 $72^2 = 2^6 \cdot 3^4$이다. 이를 $2^m \cdot 3^n$과 비교하면 **각 소인수의 지수**가 같아야 하므로 $m = 6$, $n = 4$이다. 따라서 $m+n = 10$이며, 이는 ③의 값이다.

NoteBase

문 17. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (1 + 2a)x + a$에 대하여 $y = f(x)$의 그래프는 실수 a의 값에 관계없이 항상 점 P를 지난다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 $y = mx + n$이라 할 때, $m - n$의 값은? (단, m, n은 상수)

① −8

② −4

③ 4

④ 8

정답 3번

간단한 해설

함숫값이 실수 a에 관계없이 일정하려면 **a의 계수가 0**이어야 하므로 공통으로 지나는 점은 $P(1, 0)$이다. 이 점에서 접선의 기울기는 2이고 접선은 $y = 2x - 2$이므로, $m - n = 4$이다.

계산 과정

점 P의 좌표: 주어진 함수를 a에 관한 식으로 정리하면 $f(x) = x^3 - x + a(x - 1)^2$이다. a가 어떤 실수이든 같은 점을 지나려면 그 점의 x좌표에서 **a의 계수가 0**이어야 한다. 따라서 $(x - 1)^2 = 0$에서 $x = 1$이고, $f(1) = 0$이므로 $P(1, 0)$이다.

접선의 기울기: 다항함수는 미분 가능하므로 점 P에서 접선의 기울기는 **그 점의 x좌표에서의 미분계수**이다. a를 상수로 보고 미분하면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax - (1 + 2a)$이다. 따라서 $m = f'(1) = 3 + 2a - (1 + 2a) = 2$이다.

접선의 방정식과 구하는 값: 기울기가 2이고 $P(1, 0)$을 지나는 직선은 $y - 0 = 2(x - 1)$, 즉 $y = 2x - 2$이다. 이를 $y = mx + n$과 비교하면 $m = 2$, $n = -2$이므로 $m - n = 2 - (-2) = 4$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 두 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2}$의 최솟값은?

① $\sqrt{17}$
② $\sqrt{15}$
③ $\sqrt{13}$
④ $\sqrt{11}$

정답 1번

간단한 해설

주어진 식은 점 $P(x,y)$에서 두 점 $A(1,1), B(0,5)$까지의 거리의 합이다. **삼각부등식**에 따라 이 합은 $AB=\sqrt{17}$ 이상이며, P가 **선분 AB 위**에 있으면 그 값에 도달한다.

계산 과정

점 $P(x,y), A(1,1), B(0,5)$를 잡는다. 두 점 사이의 거리 공식에 따라 $AP=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$, $PB=\sqrt{x^2+(y-5)^2}$이므로, 구하려는 값은 거리의 합 $AP+PB$의 최솟값이다.

A에서 P를 거쳐 B로 가는 거리는 A에서 B로 곧바로 가는 거리보다 짧을 수 없다. 따라서 **삼각부등식**에 의해 $AP+PB \geq AB$이다. A와 B의 가로 방향 거리 차는 1, 세로 방향 거리 차는 4이므로 $AB=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$이다.

이 하한이 실제로 가능한지도 확인해야 한다. P가 **선분 AB 위에 있을 때** $AP+PB=AB$가 성립한다. 예를 들어 $x=1, y=1$이면 P가 A와 일치하여 $AP=0, PB=\sqrt{17}$이므로 거리의 합은 $\sqrt{17}$이다.

따라서 최솟값은 $\sqrt{17}$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
f(x)=4x^3+x ∫ _0^1 f(t) dt
를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

정답 4번

간단한 해설

정적분 $\int_0^1 f(t)dt$를 **상수로 놓고 양변을 0부터 1까지 적분**하면 그 값은 2이다. 따라서 $f(x) = 4x^3 + 2x$이므로 $f(1) = 6$이다.

계산 과정

정적분 $\int_0^1 f(t)dt$는 **변수 x와 관계없는 상수**이다. 이를 C라 놓으면 주어진 식은 $f(x) = 4x^3 + Cx$가 된다.

이 식의 양변을 0부터 1까지 적분한다. 적분 변수의 이름만 바꾼 것이므로 왼쪽의 $\int_0^1 f(x)dx$도 C이다.
오른쪽에서는 $\int_0^1 4x^3dx = [x^4]_0^1 = 1$이고, C는 상수이므로 $\int_0^1 Cxdx = \frac{C}{2}$이다. 따라서 $C = 1 + \frac{C}{2}$를 얻으며, 이를 풀면 $\frac{C}{2} = 1$, 즉 $C = 2$이다.

구한 값을 대입하면 $f(x) = 4x^3 + 2x$이다. 여기에 $x = 1$을 대입하면 $f(1) = 4 + 2 = 6$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 한 개의 주사위를 18번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. X^2의 평균은?

① 136

② 140

③ 144

④ 148

정답 4번

간단한 해설

구하는 값은 평균의 제곱이 아니라 **제곱의 평균**이므로, $E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$를 이용한다. $E(X) = 12$, $V(X) = 4$이므로 X^2의 평균은 148이다.

계산 과정

1. 이항분포 설정: 주사위의 눈 중 6의 약수는 1, 2, 3, 6으로 네 개이므로, 한 번 던져 6의 약수가 나올 확률은 $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$이다. 각 시행이 독립이고 이 확률이 일정하므로, 18번 중 해당 눈이 나오는 횟수 X는 **이항분포** $B\left(18, \frac{2}{3}\right)$을 따른다.

2. 평균과 분산 계산: 이항분포 $B(n, p)$의 평균은 np, 분산은 $np(1-p)$이다. 따라서 $E(X) = 18 \cdot \frac{2}{3} = 12$, $V(X) = 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 4$이다. 평균 12는 18번 던질 때 6의 약수가 나오는 횟수의 기댓값이고, 분산 4는 그 횟수가 평균 주위에 흩어지는 정도를 나타낸다.

3. 제곱의 평균 계산: 분산의 정의를 전개하면 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$이므로, **평균의 제곱에 분산을 더해야** 제곱의 평균을 얻는다. 따라서 $E(X^2) = 4 + 12^2 = 148$이며, 이는 ④의 148에 해당한다.

NoteBase