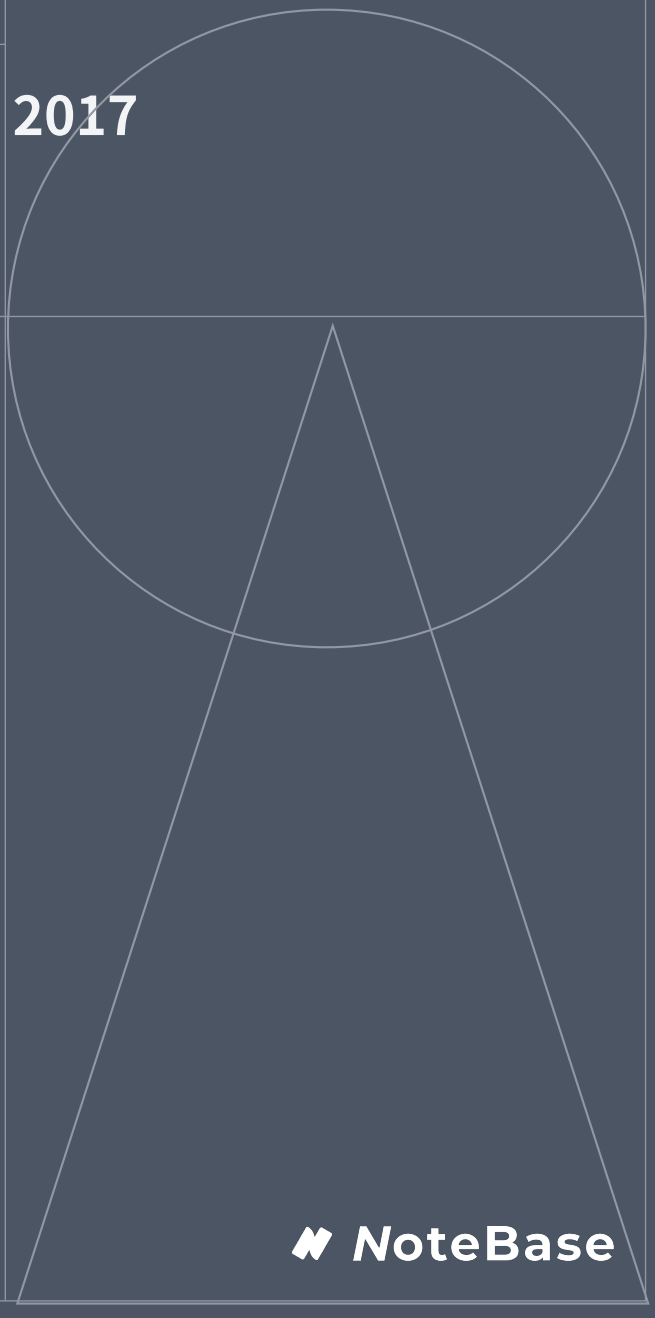
기출OX 해설집

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2017



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2017

공무원/지방직/9급 · 수학 · 2017

문 1. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중 2와 5는 원소로 가지고 3은 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수는?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

정답 3번

간단한 해설

2와 5는 반드시 포함하고 3은 제외하므로, **포함 여부를 정할 원소는 1, 4, 6의 세 개**이다. 각 원소를 넣거나 빼는 두 가지 선택이 있어 부분집합은 $2^3 = 8$개이다.

계산 과정

조건을 만족하는 부분집합에는 2와 5가 반드시 들어가고, 3은 들어가지 않는다. 이 세 원소의 포함 여부는 이미 정해져 있으므로 경우의 수를 늘리지 않는다.

남은 원소 1, 4, 6은 각각 **포함하거나 포함하지 않을 수 있다**. 한 원소의 선택은 다른 원소의 선택에 영향을 주지 않으므로 곱의 법칙에 따라 경우의 수는 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$이다. 세 원소를 모두 제외한 경우도 2와 5만 포함하는 부분집합이므로 조건을 만족한다.

따라서 조건을 만족하는 부분집합은 8개이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. 이항분포 $B(20, p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 확률변수 $2X+3$의 평균이 13일 때, p의 값은?

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$

정답 3번

간단한 해설

이항분포의 평균은 $E(X)=20p$이고, **평균의 선형성**에 따라 $E(2X+3)=2E(X)+3$이다. 주어진 평균 13에서 $E(X)=5$이므로 $p=\frac{1}{4}$이다.

계산 과정

이항분포 $B(20, p)$는 성공확률이 p인 독립 시행을 20번 할 때의 성공 횟수에 대한 분포이다. 이항분포의 평균은 **시행 횟수와 성공확률의 곱**이므로 $E(X)=20p$이다.

확률변수에 2를 곱하고 3을 더하면 **평균에도 2를 곱하고 3을 더한다**. 따라서 $E(2X+3)=2E(X)+3=13$이고, 이를 풀면 $E(X)=\frac{13-3}{2}=5$이다. 즉, 20번 시행에서 성공 횟수의 평균이 5라는 뜻이다.

$E(X)=20p=5$이므로 $p=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$이다. 이 값은 ③의 $\frac{1}{4}$과 일치한다.

NoteBase

문 3. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 부등식
$6n < (3n+1)a_n < 6n+5$
를 만족시킬 때, _n→∞(3a_n-2)의 값은?

① 4
② $\frac{14}{3}$
③ $\frac{16}{3}$
④ 6

정답 1번

간단한 해설

주어진 부등식에서 a_n을 둘러싼 두 경계가 모두 2로 수렴하므로, **샌드위치 정리**에 의해 a_n도 2로 수렴한다.
따라서 $3a_n - 2$의 극한값은 4이다.

계산 과정

자연수 n에 대하여 $3n+1 > 0$이므로, 주어진 부등식의 각 변을 $3n+1$로 나누어도 **부등호의 방향이 유지된다**.
따라서 $\frac{6n}{3n+1} < a_n < \frac{6n+5}{3n+1}$이다.

아래쪽 경계는 $\frac{6n}{3n+1} = 2 - \frac{2}{3n+1}$이고, 위쪽 경계는 $\frac{6n+5}{3n+1} = 2 + \frac{3}{3n+1}$이다. $n \to \infty$일 때 두 분수항이 모두 0으로 수렴하므로 **양쪽 경계가 같은 값 2로 수렴한다**. 그 사이에 있는 수열도 같은 값으로 수렴한다는 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$이다.

수열의 극한에 관한 상수배와 차의 성질을 적용하면 $\lim_{n\to\infty}(3a_n - 2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$이다. 구한 값 4는 ①에 해당한다.

NoteBase

문 4. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $-1 + \sqrt{2}$일 때, $3a + 2b$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

간단한 해설

계수가 유리수이므로 한 근이 $-1 + \sqrt{2}$이면 **무리수 부분의 부호가 반대인** $-1 - \sqrt{2}$도 근이다. 두 근의 합과 곱에서 a = 2, b = -1을 얻으므로 $3a + 2b = 4$이다.

계산 과정

다른 근 구하기: **계수가 유리수인 이차방정식**에서 $-1 + \sqrt{2}$가 근이면 $-1 - \sqrt{2}$도 근이다. 두 근을 각각 $\alpha = -1 + \sqrt{2}, \beta = -1 - \sqrt{2}$로 놓는다.

a 구하기: 두 근을 갖는 이차식은 $(x - \alpha)(x - \beta)$로 인수분해되므로, $x^2 + ax + b$와 계수를 비교하면 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$이다. 두 근을 더하면 무리수 부분이 없어져 $\alpha + \beta = -2$이므로 $-a = -2$, 즉 a = 2이다.

b 구하기: 두 근의 곱은 **합차공식**으로 계산한다. $\alpha\beta = (-1 + \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2})$이므로 $b = (-1)^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1$이다.

요구한 값 구하기: 구한 두 계수를 대입하면 $3a + 2b = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4$이다. 이 값은 ④의 4와 일치한다.

NoteBase

문 5. 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분을 $f(x)$, 소수 부분을 $g(x)$라 할 때, $f(a) = f(99)$, $g(a) = g(1200)$을 만족시키는 a의 양의 약수의 개수는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 2번

간단한 해설

두 조건은 $\log a$의 **정수 부분과 소수 부분을 각각 결정**하므로 $a = 12$이다. $12 = 2^2 \cdot 3$이므로 양의 약수의 개수는 $(2 + 1) \times (1 + 1) = 6$개이다.

계산 과정

정수 부분 구하기: 이 문제의 log는 밑이 10인 상용로그이다. $10 < 99 < 100$이므로 $1 < \log 99 < 2$이다. 따라서 $f(99) = 1$이고, 주어진 조건에 따라 $f(a) = 1$이다.

소수 부분 구하기: $1200 = 10^3 \cdot 1.2$이므로 $\log 1200 = 3 + \log 1.2$이다. $1 < 1.2 < 10$에서 $0 < \log 1.2 < 1$이므로, **소수 부분은 로그값에서 정수 부분 3을 뺀 값**인 $g(1200) = \log 1.2$이다. 따라서 $g(a) = \log 1.2$이다.

a 구하기: 로그값은 정수 부분과 소수 부분의 합이므로 $\log a = f(a) + g(a)$이다. 앞에서 구한 값을 넣으면 $\log a = 1 + \log 1.2 = \log 12$이다. 상용로그 함수는 서로 다른 양수에 서로 다른 값을 대응시키므로 $a = 12$이다.

양의 약수의 개수 구하기: $12 = 2^2 \cdot 3^1$이므로 모든 양의 약수는 $2^i \cdot 3^j$ 꼴이다. 이때 i는 0, 1, 2의 세 값 중 하나이고 j는 0, 1의 두 값 중 하나이다. 두 소수의 지수를 **독립적으로 선택**하므로 약수의 개수는 $3 \times 2 = 6$개이다. 이는 선택지 ②의 6과 일치한다.

NoteBase

문 6. 실수 a, b에 대하여 유리함수 $f(x)=\frac{ax+b}{x-3}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 점 $(1,\ -\frac{1}{2})$을 지날 때, $a-b$의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

정답 3번

간단한 해설

직선 $y=x$에 대한 대칭은 **두 좌표를 서로 바꾸는 것**이므로, 그래프는 $(-\frac{1}{2},\ 1)$도 지난다. 두 점을 함수식에 대입하면 $a=3$, $b=-2$이므로 $a-b=5$이다.

계산 과정

대칭 조건: 직선 $y=x$에 대하여 점 (p,q)와 대칭인 점은 (q,p)이다. 주어진 그래프가 이 직선에 대하여 대칭이므로, $(1,\ -\frac{1}{2})$뿐 아니라 **좌표를 서로 바꾼 점** $(-\frac{1}{2},\ 1)$도 그래프 위에 있다.

첫 번째 점 대입: $f(1)=-\frac{1}{2}$이므로 $\frac{a+b}{1-3}=-\frac{1}{2}$이다. 양변에 -2를 곱하면 $a+b=1$을 얻는다.

대칭인 점 대입: $f(-\frac{1}{2})=1$이므로 $\frac{-\frac{a}{2}+b}{-\frac{1}{2}-3}=1$이다. 따라서 $-\frac{a}{2}+b=-\frac{7}{2}$이다. 앞서 얻은 $a+b=1$에서 이 식을 빼면 $\frac{3a}{2}=\frac{9}{2}$이므로 $a=3$이다.

요구한 값: $a+b=1$에 $a=3$을 대입하면 $b=-2$이다. 따라서 $a-b=3-(-2)=5$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 다항식 $f(x)$를 $3x^2+5x-2$로 나눈 나머지가 $2x+5$일 때, 다항식 $f(6x-5)$를 $2x-1$로 나눈 나머지는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

$2x-1=0$의 해를 대입하면 구하는 나머지는 $f(-2)$이다. **−2는 원래 나누는 다항식의 근**이므로 $f(-2)=2(-2)+5=1$이다.

계산 과정

1. 구할 나머지 나타내기: 다항식을 일차식으로 나누면 나머지는 상수이다. 나머지정리에 따라 $f(6x-5)$를 $2x-1$로 나눈 나머지는 **나누는 식이 0이 되는 값** $x=\frac{1}{2}$을 대입하여 구한다. 이때 $6\cdot\frac{1}{2}-5=-2$이므로 구할 나머지는 $f(-2)$이다.

2. 주어진 나머지 조건 적용하기: $f(x)$는 나누는 다항식 $3x^2+5x-2$의 배수와 나머지 $2x+5$의 합이다. 여기에 −2를 대입하면 $3(-2)^2+5(-2)-2=0$이므로 **나누는 다항식의 배수 부분이 0**이 된다. 따라서 $f(-2)=2(-2)+5=1$이다.

구하는 나머지는 1이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x-2)f(x)=2x^2-x+k$를 만족시킬 때, $k+f(2)$의 값은? (단, k는 상수)

① -3

② -1

③ 1

④ 3

정답 3번

간단한 해설

주어진 식에 $x=2$를 대입하면 $k=-6$이다. **연속성**에 따라 $f(2)=\lim_{x\to 2}(2x+3)=7$이므로 $k+f(2)=1$이다.

계산 과정

1. 상수 k 구하기: 주어진 등식은 모든 실수에서 성립하므로 $x=2$를 대입한다. 왼쪽은 0이 되어 $0=2\cdot 2^2-2+k=6+k$이므로 $k=-6$이다.

2. 함수식 정리하기: $k=-6$을 대입하면 $(x-2)f(x)=2x^2-x-6$이다. 오른쪽을 인수분해하면 $2x^2-x-6=(x-2)(2x+3)$이므로, $x\neq 2$**일 때만** 양변을 $x-2$로 나누어 $f(x)=2x+3$을 얻는다.

3. 연속성으로 $f(2)$ 구하기: 약분한 식은 $x=2$에서 직접 적용할 수 없다. 그러나 f는 $x=2$**에서도 연속**이므로 그 점의 함숫값은 극한값과 같다. 따라서 $f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}(2x+3)=7$이다.

따라서 $k+f(2)=-6+7=1$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 _x→ 1(f(x)+1)/(x-1)=5, _x→ 1(g(x)-3)/(x-1)=2를 만족시킬 때, 함수 $h(x) = \{f(x)\}^2 + f(x)g(x)$에 대하여 $h'(1)$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

간단한 해설

극한 조건에서 $f(1) = -1$, $g(1) = 3$과 $f'(1) = 5$, $g'(1) = 2$를 얻는다. **곱의 미분법**을 적용하면 $h'(1) = 3$이다.

계산 과정

함숫값 구하기: 주어진 두 극한이 유한하고 분모가 0으로 수렴하므로 **각 분자도 0으로 수렴**한다. 다항함수는 연속이므로 $f(1) + 1 = 0$, $g(1) - 3 = 0$이다. 따라서 $f(1) = -1$, $g(1) = 3$이다.

미분계수 구하기: $f(x) + 1 = f(x) - f(1)$이므로 첫 번째 극한은 **미분계수의 정의**에 따라 $f'(1) = 5$를 뜻한다. 마찬가지로 $g(x) - 3 = g(x) - g(1)$이므로 두 번째 극한에서 $g'(1) = 2$를 얻는다.

h의 미분값 구하기: 다항함수는 미분 가능하므로 제곱항과 곱항을 각각 미분할 수 있다. 제곱항의 미분값은 $2f(1)f'(1)$이므로 $2 \cdot (-1) \cdot 5 = -10$이다. 곱항은 **각 인자를 한 번씩 미분한 두 항의 합**이므로 미분값은 $f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$이다. 여기에 값을 대입하면 $5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 13$이다. 두 값을 더하면 $h'(1) = -10 + 13 = 3$이며, 이는 ③의 값이다.

NoteBase

문 10. $z_1\overline{z_1}=1$, $z_2\overline{z_2}=1$을 만족시키는 복소수 z_1, z_2와 $z_0=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$에 대하여 다음 중 항상 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고 $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다)

ㄱ. $z_0\overline{z_0}=1$

ㄴ. $(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}=1$

ㄷ. $(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\neq 1$

① ㄱ, ㄴ

② ㄱ, ㄷ

③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 1번

간단한 해설

조건을 만족하도록 $z_1=z_0$, $z_2=\overline{z_0}$로 두면 두 수의 합이 1이 된다. 이때 합과 그 켤레복소수의 곱도 1이므로 ㄷ의 부등식에는 **성립하지 않는 반례**가 있다.

보기별 해설

실수 a, b에 대해 $z=a+bi$이면 z=a-bi이다. 따라서 z z=a^2+b^2이며, 이는 복소수의 절댓값의 제곱이다.

ㄱ. O: z_0의 실수부분은 12, 허수부분은 -(3)/(2)이다. 따라서 z_0z_0=≤ft(12)^2+≤ft(-(3)/(2))^2이고, 14+34=1이다.

ㄴ. O: **곱의 켤레는 켤레끼리의 곱**이므로 $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\overline{z_2}$이다. 곱셈 순서를 바꾸어 묶으면 $(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}=(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})$이다. 주어진 조건에서 두 괄호의 값이 각각 1이므로 전체 값도 1이다.

ㄷ. X: **항상 옳은지 판단하려면 조건을 만족하는 반례가 있는지** 확인해야 한다. $z_1=z_0$, $z_2=\overline{z_0}$로 두면 ㄱ의 계산에 따라 두 수 모두 주어진 조건을 만족한다. 이때 $z_1+z_2=z_0+\overline{z_0}=1$이므로 $(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=1$이다. 따라서 이 값은 1이 될 수도 있으며, 항상 1과 다른 것은 아니다.

항상 옳은 보기는 ㄱ, ㄴ이므로 ①의 조합에 해당한다.

NoteBase

문 11. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때 $(g\circ f\circ g)(2)$의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 4번

간단한 해설

역함수는 원래 함수의 작용을 되돌리므로 $f(g(2))=2$이다. 따라서 주어진 합성함수의 값은 $g(2)$**의 값**과 같고, $g(x)=3x+2$이므로 8이다.

계산 과정

합성함수는 **오른쪽 함수부터 차례로 적용**한다. 따라서 $(g\circ f\circ g)(2)$는 $g(f(g(2)))$를 뜻한다. g가 f의 역함수이므로 $f(g(x))=x$이고, 특히 $f(g(2))=2$이다. 이에 따라 구하는 값은 $g(2)$로 줄어든다.

역함수의 식을 구하기 위해 $y=\frac{1}{3}(x-2)$를 x에 대해 풀면 $3y=x-2$, 즉 $x=3y+2$이다. 입력과 출력의 역할을 바꾸면 역함수는 $g(x)=3x+2$이다.

따라서 $g(2)=3\cdot 2+2=8$이다. 구하는 합성함수의 값은 8이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 11$, $a_5 - a_7 = 4$일 때, a_{12}의 값은?

① −7

② −5

③ −3

④ −1

정답 1번

간단한 해설

공차가 **−2**이므로 셋째 항에서 열두째 항까지 아홉 번 이동하면 값이 18만큼 줄어든다. 따라서 $a_{12} = -7$이다.

계산 과정

공차 구하기: 등차수열은 이웃한 두 항의 차이가 일정한 수열이며, 이 차이를 공차 d라고 한다. 다섯째 항에서 일곱째 항까지는 **공차를 두 번 더하므로** $a_7 = a_5 + 2d$이다. 따라서 주어진 조건은 $a_5 - a_7 = -2d = 4$가 되고, 이를 풀면 $d = -2$이다.

열두째 항 구하기: 셋째 항에서 열두째 항까지는 $12 - 3 = 9$번 공차를 더한다. $a_3 = 11$, $d = -2$를 대입하면 $a_{12} = a_3 + 9d$이므로 $a_{12} = 11 + 9 \cdot (-2) = -7$이다. 구한 값 −7은 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. 실수 a, b에 대하여 이차부등식 $-x^2+5x+a>0$의 해가 $2<x<b$일 때, $a+b$의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

정답 1번

간단한 해설

이차식이 양수가 되는 구간의 **양 끝값은 이차방정식의 두 근**이다. 2가 근이라는 조건에서 $a=-6$이고, 다른 근은 3이므로 $a+b=-3$이다.

계산 과정

1. 해 구간의 끝값 확인: $y=-x^2+5x+a$의 그래프는 최고차항의 계수가 음수인 포물선이므로, 서로 다른 두 실근 사이에서 양수이다. 따라서 해가 $2<x<b$이면 **2와 b가 두 근**이고 $b>2$이다. 양 끝에서는 이차식의 값이 0이므로 부등식의 해에 포함되지 않는다.

2. a 계산: $x=2$가 $-x^2+5x+a=0$의 근이므로 대입하면 $-2^2+5\cdot 2+a=0$이다. 이를 정리하면 $6+a=0$이므로 $a=-6$이다.

3. b 계산: $a=-6$을 원래 부등식에 대입하면 $-x^2+5x-6>0$이다. 이차식을 인수분해하면 $-x^2+5x-6=-(x-2)(x-3)$이므로 두 근은 2와 3이다. 이 두 근 사이에서 양수가 되므로 해는 $2<x<3$이고, 주어진 해와 비교하면 $b=3$이다.

4. 합 계산: $a+b=-6+3=-3$이므로 선택지 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. 연립부등식

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ y - x \leq 3,\ y + 2x \leq 6$

을 만족시키는 점 (x, y)에 대하여 $x + y$의 최댓값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 2번

간단한 해설

y-x≤3과 y+2x≤6을 각각 1배, 2배 하여 더하면 x+y≤5를 얻는다. $(x, y) = (1, 4)$에서 모든 조건을 만족하며 **실제로 5가 되므로** 최댓값은 5이다.

계산 과정

1. 상한 구하기: 구하려는 $x + y$를 만들기 위해 **두 부등식의 합에서 두 변수의 계수를 같게** 한다. y+2x≤6의 양변에 양수 2를 곱한 뒤 y-x≤3과 더하면 (y-x)+2(y+2x)≤3+12이다. 정리하면 3x+3y≤15, 즉 x+y≤5이다. 따라서 조건을 만족하는 어떤 점에서도 그 합은 5를 넘을 수 없다.

2. 상한에 도달하는 점 확인: 합이 5가 되려면 두 부등식에서 동시에 등호가 성립해야 한다. $y - x = 3$, $y + 2x = 6$을 연립하여 두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 $3x = 3$이므로 $x = 1$, $y = 4$이다. 이 점은 x≥0, y≥0도 만족하므로 **주어진 모든 조건을 만족하는 점**이다.

3. 최댓값 결정: $(x, y) = (1, 4)$에서 $x + y = 1 + 4 = 5$이다. 5를 넘을 수 없고 실제로 5를 얻을 수 있으므로 최댓값은 5이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. 두 집합
$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0\}$
$B = \{(x, y) \mid x - y + k = 0\}$
에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$을 만족시키는 정수 k의 개수는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 4번

간단한 해설

원과 직선이 만나려면 **중심에서 직선까지의 거리가 반지름 이하**여야 하므로 $|k + 3| \leq 4$이다. 따라서 $-7 \leq k \leq 1$인 정수는 9개이다.

계산 과정

원의 중심과 반지름: 집합 A의 방정식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$이다. 따라서 A는 중심이 $(2, -1)$이고 반지름이 $2\sqrt{2}$인 원이다.

교점이 존재할 조건: 집합 B는 직선 $x - y + k = 0$이다. 원의 중심 $(2, -1)$에서 이 직선까지의 거리는 점과 직선 사이의 거리 공식에 따라 $d = \frac{|2 - (-1) + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$, 즉 $d = \frac{|k + 3|}{\sqrt{2}}$이다. 두 집합의 교집합이 공집합이 아니려면 원과 직선이 한 점 이상에서 만나야 한다. 따라서 **접하는 경우까지 포함**하여 중심과 직선 사이의 거리가 반지름 이하여야 하므로 $\frac{|k + 3|}{\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2}$이다. 양변에 양수 $\sqrt{2}$를 곱하면 $|k + 3| \leq 4$를 얻는다.

정수 k의 개수: 절댓값 부등식 $|k + 3| \leq 4$는 $-4 \leq k + 3 \leq 4$와 같으므로 $-7 \leq k \leq 1$이다. **양 끝값을 모두 포함**하여 정수를 세면 1 - (-7) + 1 = 9이므로, 조건을 만족하는 정수 k는 9개이며 ④에 해당한다.

NoteBase

문 16. A 아파트에 설치된 엘리베이터를 이용하는 주민의 몸무게는 평균이 61 kg, 표준편차가 18 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 아파트에 설치된 엘리베이터는 함께 탑승한 사람들의 몸무게의 합이 630 kg을 초과하면 운행되지 않는다. 1층에서 이 엘리베이터에 임의로 주민 9명이 함께 탑승할 때, 엘리베이터가 정상적으로 운행될 확률을 주어진 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 엘리베이터에 탑승하는 주민들은 별도의 짐을 가지고 탑승하지 않는다)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.3	0.4032
1.5	0.4332
1.7	0.4554
1.9	0.4713

① 0.9032

② 0.9332

③ 0.9554

④ 0.9713

정답 2번

간단한 해설

9명의 몸무게 합은 평균이 549 kg, 표준편차가 54 kg인 정규분포를 따르므로, 운행 한도인 630 kg을 표준화하면 1.5이다. 표의 값은 **0에서 1.5까지의 확률**이므로, 여기에 0.5를 더한 0.9332가 정상 운행 확률이다.

NoteBase

계산 과정

9명의 몸무게를 kg 단위의 확률변수 $X_1, \ldots, X_9$로 놓고, 그 합을 $S = X_1 + \cdots + X_9$로 놓는다. 임의로 탑승한 주민들의 몸무게를 서로 독립인 표본으로 본다. 별도의 짐이 없고 몸무게 합이 630 kg을 초과할 때만 운행되지 않으므로, 구할 확률은 $P(S \le 630)$이다.

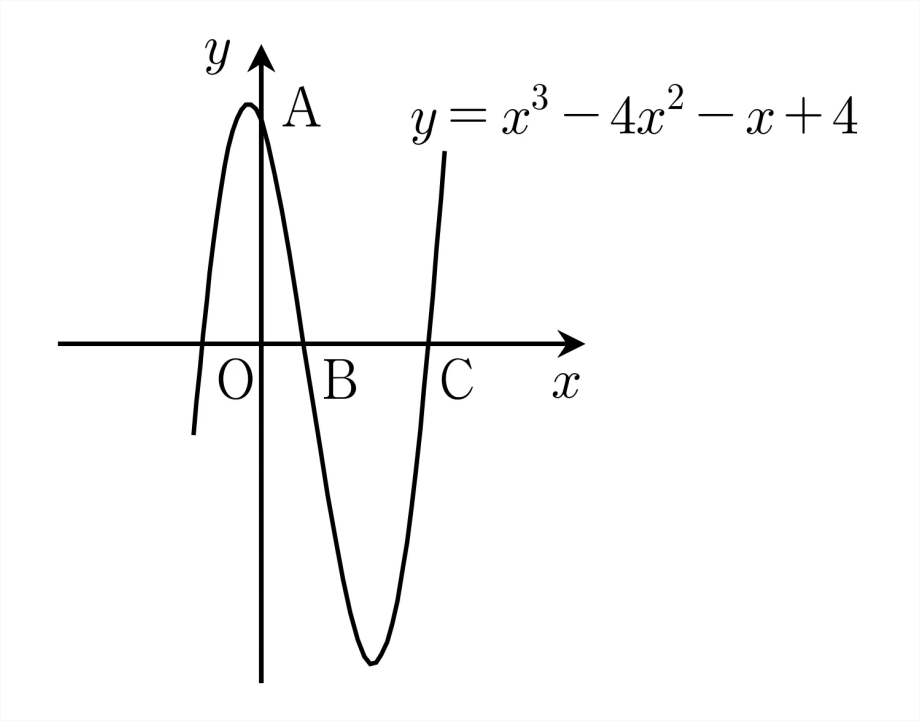
독립인 정규확률변수들의 합도 정규분포를 따르며, 합의 평균과 분산은 각각의 평균과 분산을 더해 구한다. 따라서 S의 평균은 $9 \times 61 = 549$ kg이고, 분산은 $9 \cdot 18^2$이다. **표준편차는 분산의 제곱근**이므로 $\sqrt{9 \cdot 18^2} = 54$ kg이다.

S에서 평균을 빼고 표준편차로 나누면 표준정규분포를 따르는 $Z = \frac{S - 549}{54}$를 얻는다. 운행 한도는 $\frac{630 - 549}{54} = 1.5$로 표준화된다. 즉, 630 kg은 평균보다 표준편차의 1.5배만큼 큰 값이므로, 구할 확률은 $P(Z \le 1.5)$이다.

주어진 표는 누적확률 전체가 아니라 **평균 0부터 z까지의 확률**을 나타낸다. z = 1.5인 행에서 $P(0 \le Z \le 1.5) = 0.4332$이다. 표준정규분포는 0을 중심으로 대칭이므로 $P(Z \le 0) = 0.5$이다. 따라서 정상 운행 확률은 0.5 + 0.4332 = 0.9332로, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 그림과 같이 삼차함수 $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 각각 B, C라 하자. 삼차함수 $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$의 그래프 위의 점 P(a,b)가 점 A에서 출발하여 점 B를 거쳐 점 C까지 움직일 때, $2a - b$의 최댓값과 최솟값의 합은?



① 4

② 6

③ 8

④ 10

정답 4번

간단한 해설

구하려는 식을 $g(a) = -a^3 + 4a^2 + 3a - 4$로 놓고, 점 P의 이동 범위인 0≤ a≤4에서 조사한다. **최댓값은 14, 최솟값은 −4**이므로 두 값의 합은 10이다.

NoteBase

계산 과정

이동 범위: 삼차식은 $x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x-4)(x-1)(x+1)$로 인수분해된다. 그림에서 양의 x절편 중 왼쪽이 B, 오른쪽이 C이므로 $B = (1, 0)$, $C = (4, 0)$이다. 또 y축과 만나는 점은 $A = (0, 4)$이다. 따라서 P가 A에서 B를 거쳐 C까지 움직일 때 a의 범위는 0≤ a≤4이다.

식을 한 변수로 나타내기: P가 주어진 그래프 위에 있으므로 $b = a^3 - 4a^2 - a + 4$이다. 이를 구하려는 식에 대입하여 $g(a) = 2a - b$로 놓으면 $g(a) = -a^3 + 4a^2 + 3a - 4$이다. 이제 **원래 그래프의 높이가 아니라 이 함수의 최댓값과 최솟값**을 구한다.

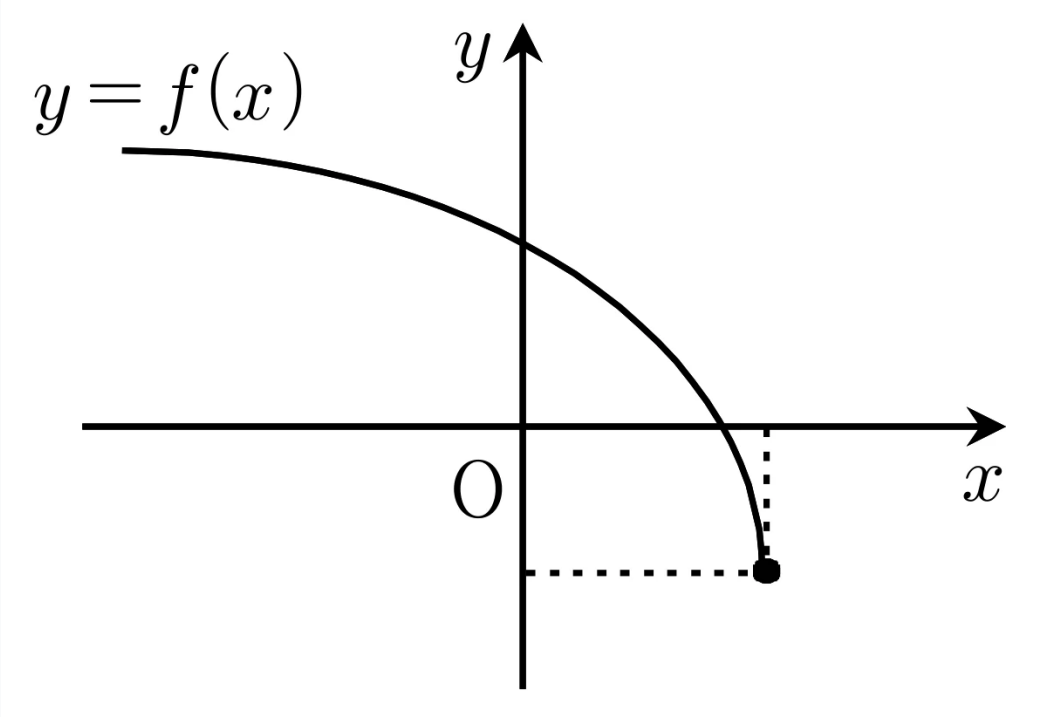
증가·감소 조사: 미분하면 $g'(a) = -3a^2 + 8a + 3$이고, 인수분해하면 $g'(a) = -(3a+1)(a-3)$이다. 구간 0≤ a≤4에서 $3a + 1 > 0$이므로, $0 \le a < 3$에서는 도함수가 양수이고 3<a≤4에서는 음수이다. 따라서 g는 a가 0에서 3까지 커질 때 증가하고, 3에서 4까지 커질 때 감소한다.

최댓값·최솟값 비교: 연속인 함수의 닫힌구간 최댓값과 최솟값을 구하므로 **증가·감소가 바뀌는 점과 양 끝점의 값**을 비교한다. $g(0) = -4$, $g(3) = -27 + 36 + 9 - 4 = 14$, $g(4) = -64 + 64 + 12 - 4 = 8$이다. 따라서 최댓값은 14이고 최솟값은 −4이다.

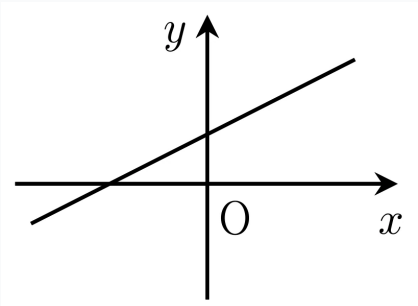
두 값의 합은 14 + (−4) = 10이며, 선택지 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

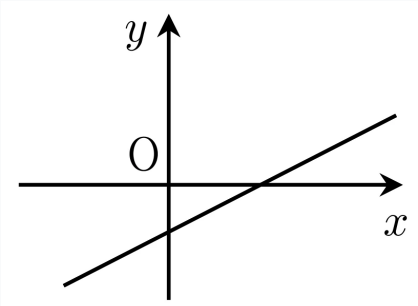
문 18. 실수 a, b, c, d에 대하여 무리함수 $f(x) = a\sqrt{bx - c} + d$의 그래프가 그림과 같을 때, 일차함수 $y = abx + cd$의 그래프의 개형은?



①

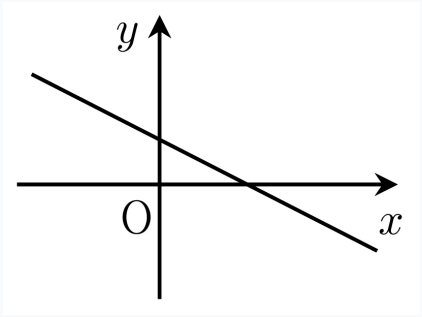


②

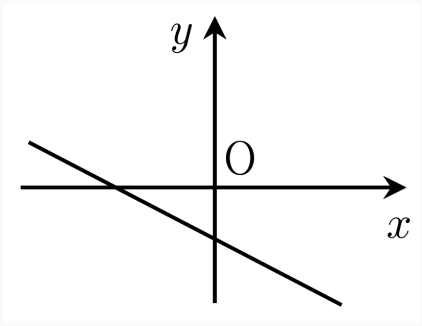


NoteBase

③



④



정답 3번

간단한 해설

무리함수의 그래프에서 $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$이므로 $ab < 0, cd > 0$이다. 따라서 일차함수는 **기울기가 음수**이고 y **절편이 양수**인 직선이다.

계산 과정

끝점의 좌표: 무리함수 $f(x) = a\sqrt{bx - c} + d$의 끝점에서는 루트 안의 값이 0이므로 $bx - c = 0$이다. 따라서 끝점의 좌표는 $(\frac{c}{b}, d)$이다. 그림에서 끝점이 **제4사분면**에 있으므로 $\frac{c}{b} > 0, d < 0$이다.

b, c의 부호: 제곱근이 실수가 되려면 bx-c≥0이어야 한다. 그래프가 **끝점의 왼쪽으로 뻗으므로** 정의역은 $x \leq \frac{c}{b}$이고, 이에 따라 $b < 0$이다. 앞에서 $\frac{c}{b} > 0$이므로 c와 b는 같은 부호여야 하며, 따라서 $c < 0$이다.

a의 부호: 끝점 이외의 그래프는 끝점보다 위에 있으므로 $f(x) > d$이다. 이때 $\sqrt{bx - c} > 0$이므로 $a\sqrt{bx - c} > 0$이 되려면 $a > 0$이어야 한다.

일차함수의 개형: $y = abx + cd$의 기울기는 ab, y 절편은 cd이다. $a > 0, b < 0$에서 $ab < 0$이고, $c < 0, d < 0$에서 $cd > 0$이다. 따라서 **오른쪽 아래로 내려가며 양의** y **축을 지나는 직선**이므로 ③의 그래프에 해당한다.

NoteBase

문 19. 실수 a에 대하여 곡선 $y = x^3 - ax^2$과 직선 $y = x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{11}{4}$일 때, a^2의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

정답 2번

간단한 해설

두 교점 사이에서 곡선과 직선의 위아래가 바뀌므로 **두 영역의 넓이를 양수로 합해야** 한다. 전체 넓이는 $\frac{a^4 + 6a^2 + 6}{12}$이므로, 이를 $\frac{11}{4}$와 같게 놓으면 $a^2 = 3$을 얻는다.

계산 과정

교점 구하기: 두 식을 같게 놓으면 $x(x^2 - ax - 1) = 0$이다. 이차방정식 $x^2 - ax - 1 = 0$은 판별식이 $a^2 + 4 > 0$이고 두 근의 곱이 −1이므로, 두 근을 $\alpha < 0 < \beta$로 둘 수 있다. 따라서 교점의 x좌표는 $\alpha, 0, \beta$이며, 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = -1$이다.

넓이의 적분식: 두 함수의 차이를 $f(x) = x^3 - ax^2 - x$라 하면 $f(x) = x(x - \alpha)(x - \beta)$이다. $\alpha < x < 0$에서는 $f(x) > 0$, $0 < x < \beta$에서는 $f(x) < 0$이므로 **구간별로 위쪽 함수에서 아래쪽 함수를 빼서** 적분한다. 전체 넓이 S는 $S = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{\beta} f(x)dx$이다.

적분값 정리: $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{ax^3}{3} - \frac{x^2}{2}$로 두면 $F(0) = 0$이므로 $S = -F(\alpha) - F(\beta)$이다. $t = \alpha, \beta$일 때 $t^2 - at - 1 = 0$이므로 $at^3 = t^4 - t^2$이다. 이를 대입하면 $F(t) = -\frac{t^4}{12} - \frac{t^2}{6}$이므로 $S = \frac{\alpha^4 + \beta^4}{12} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{6}$을 얻는다.

넓이를 a로 나타내기: 두 근을 직접 구하는 대신 **근의 합과 곱**을 이용한다.
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 + 2$이고, $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2$이므로
$\alpha^4 + \beta^4 = a^4 + 4a^2 + 2$이다. 따라서 전체 넓이는 $S = \frac{a^4 + 6a^2 + 6}{12}$이다.

조건 적용: $\frac{a^4 + 6a^2 + 6}{12} = \frac{11}{4}$에서 $a^4 + 6a^2 - 27 = 0$, 즉 $(a^2 - 3)(a^2 + 9) = 0$이다. a가 실수이므로 $a^2 + 9 > 0$이고, 따라서 $a^2 = 3$이다. 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 실수 a, b와 집합 $X = \{x \mid 1 \le x \le 2\}$, 실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f : X \to R$가 $f(x) = ax^2 + b$이다. 함수 f의 치역이 집합 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$의 부분집합이 되도록 하는 a, b에 대하여, 점 (a, b)가 좌표평면 위에 나타내는 전체 영역의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

정답 4번

간단한 해설

구간 1≤ x≤2에서는 함수의 최댓값과 최솟값이 양 끝점에서 나오므로, **두 끝점의 함숫값이 모두 −1 이상 1 이하**이면 된다. 이 조건을 만족하는 (a, b)의 영역은 평행사변형이며, 넓이는 $\frac{4}{3}$이다.

계산 과정

1. 치역 조건을 부등식으로 나타내기: 1≤ x≤2에서 x^2은 1부터 4까지 증가한다. 따라서 $ax^2 + b$는 $a > 0$이면 증가하고, $a < 0$이면 감소하며, $a = 0$이면 일정하다. 어느 경우든 모든 함숫값이 −1 이상 1 이하일 필요충분조건은 **양 끝점의 함숫값이 그 범위 안에 있는 것**이다. $f(1) = a + b$, $f(2) = 4a + b$이므로 조건은 -1≤ a+b≤1, -1≤4a+b≤1이다.

2. 영역의 꼭짓점 구하기: 좌표평면에서 가로축을 a, 세로축을 b로 놓는다. 위 조건은 두 평행선 $b = -a - 1$, $b = -a + 1$ 사이와 두 평행선 $b = -4a - 1$, $b = -4a + 1$ 사이의 공통 영역이므로 평행사변형을 이룬다. $a + b$와 $4a + b$가 모두 1이거나 모두 −1인 교점은 각각 $(0, 1)$, $(0, -1)$이다. 한쪽이 1이고 다른 쪽이 −1이면 두 식을 빼서 $3a = \pm 2$를 얻으므로, 나머지 꼭짓점은 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$이다.

3. 넓이 계산하기: 평행사변형을 $(0, 1)$과 $(0, -1)$을 잇는 대각선으로 나누면 두 삼각형이 된다. 두 삼각형의 공통 밑변 길이는 2이고, **높이는 각 꼭짓점에서 세로축까지의 수평거리**이므로 각각 $\frac{2}{3}$이다. 각 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$이다. 따라서 전체 넓이는 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$이며, 이는 ④의 값과 같다.

NoteBase