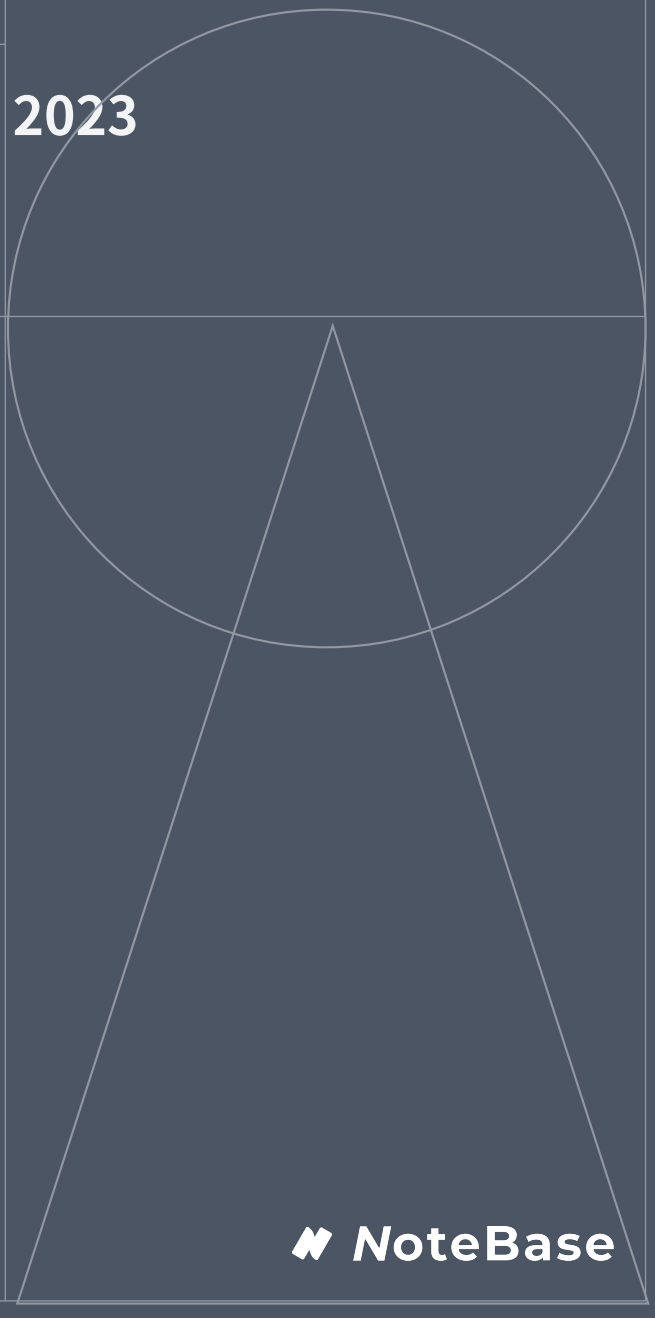
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2023



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2023

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2023

문 1. 부등식 $|x| + |x-2| \le 5$의 해가 $a \le x \le b$일 때, $a+b$의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

정답 4번

간단한 해설

0과 2를 기준으로 절댓값을 풀면 해의 범위는 $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{7}{2}$이다. 양 끝값을 더하면 $a+b=2$이다.

계산 과정

절댓값은 안의 식이 0 이상이면 그대로, 음수이면 부호를 바꾸어 푼다. 따라서 **절댓값 안의 식이 0이 되는 값**인 0과 2를 기준으로 구간을 나눈다.

$x<0$일 때: 두 식이 모두 음수이므로 $|x|=-x$, $|x-2|=2-x$이다. 부등식은 $2-2x \le 5$가 되고, 이를 풀면 $x \ge -\frac{3}{2}$이다. 구간 조건과 함께 보면 $-\frac{3}{2} \le x < 0$이다.

$0 \le x \le 2$일 때: $|x|=x$, $|x-2|=2-x$이므로 두 절댓값의 합은 항상 2이다. 2는 5 이하이므로 **이 구간 전체**가 부등식을 만족한다.

$x>2$일 때: 두 식이 모두 양수이므로 $|x|=x$, $|x-2|=x-2$이다. 부등식은 $2x-2 \le 5$가 되고, 이를 풀면 $x \le \frac{7}{2}$이다. 구간 조건과 함께 보면 $2 < x \le \frac{7}{2}$이다.

세 구간의 해를 합치면 $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{7}{2}$이다. 따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이고, $a+b=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=2$이다. 이는 ④의 값 2와 일치한다.

NoteBase

문 2. 방정식 $(\log\sqrt{x})^2 - \log x^2 + 3 = 0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 할 때, αβ의 값은?

① 10^6
② 10^7
③ 10^8
④ 10^9

정답 3번

간단한 해설

$t = \log x$로 치환하면 두 근에 대응하는 t의 값은 2와 6이다. 원래 두 근을 곱할 때는 **지수를 더하므로** $\alpha\beta = 10^{2+6} = 10^8$이다.

계산 과정

로그식 변형: $\log\sqrt{x}$가 정의되려면 $x > 0$이어야 한다. log는 밑이 10인 상용로그이며, **진수의 지수는 로그의 계수로 옮길 수 있다**. 따라서 $\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x$, $\log x^2 = 2\log x$이다.

치환한 방정식의 해: $t = \log x$로 놓으면 주어진 식은 $\frac{t^2}{4} - 2t + 3 = 0$이 된다. 양변에 4를 곱하면 $t^2 - 8t + 12 = 0$이고, 인수분해하면 $(t-2)(t-6) = 0$이다. 따라서 $t = 2$ 또는 $t = 6$이다. 이 값들은 **원래 근의 로그값**이다.

원래 두 근과 곱: $\log x = t$는 $x = 10^t$와 같으므로 원래 방정식의 두 근은 10^2과 10^6이다. 둘 다 양수이고 서로 다르므로 주어진 조건을 만족한다. 따라서 $\alpha\beta = 10^2 \cdot 10^6 = 10^8$이며, 이는 ③의 값이다.

NoteBase

문 3. 주사위 한 개를 두 번 던져서 처음에 나온 눈의 수를 m, 나중에 나온 눈의 수를 n이라고 하자. $m+n$이 짝수일 때, m이 3의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$

정답 2번

간단한 해설

$m+n$이 짝수이려면 **두 눈의 홀짝이 같아야** 한다. 이 조건을 만족하는 18가지 중 m이 3의 배수인 경우는 6가지이므로, 구하는 확률은 $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$이다.

계산 과정

조건을 만족하는 경우의 수: 두 번 던진 결과를 순서쌍 (m, n)으로 구별하면 전체 경우는 $6\times6=36$가지이고, 각 경우가 나올 가능성은 같다. $m+n$이 짝수인 것은 **둘 다 홀수이거나 둘 다 짝수인 경우**이다. 홀수는 1, 3, 5이고 짝수는 2, 4, 6이므로, 조건을 만족하는 경우는 $3\times3+3\times3=18$가지이다.

두 조건을 함께 만족하는 경우의 수: m이 3의 배수이면 $m=3$ 또는 $m=6$이다. $m=3$이면 n은 홀수 1, 3, 5 중 하나이고, $m=6$이면 n은 짝수 2, 4, 6 중 하나이다. 따라서 두 조건을 함께 만족하는 경우는 $3+3=6$가지이다.

조건부확률 계산: 이미 $m+n$이 짝수라는 조건이 주어졌으므로 **조건을 만족하는 18가지를 기준**으로 확률을 구한다. 이 중 m이 3의 배수인 경우가 6가지이므로 확률은 $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. 양의 실수 x에 대하여 $x+\frac{2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 1번

간단한 해설

산술평균·기하평균의 관계에서 두 항이 같을 때 최솟값을 갖는다. $x=\frac{2}{x}$에서 $a=\sqrt{2}$, 최솟값은 $b=2\sqrt{2}$ 이므로 $\frac{b}{a}=2$이다.

계산 과정

1. 최솟값 구하기: $x>0$이므로 x와 $\frac{2}{x}$는 모두 양수이고, 두 수의 곱은 2이다. 양수인 두 수의 합은 기하평균의 2배 이상이므로 $x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}$이다. 이 하한에 실제로 도달하는 조건을 확인하면 최솟값을 구할 수 있다.

2. 최솟값을 갖는 위치 구하기: 위 부등식의 등호는 **두 항이 같을 때** 성립한다. $x=\frac{2}{x}$의 양변에 양수 x를 곱하면 $x^2=2$이다. $x>0$이므로 $x=\sqrt{2}$이고, 이때 등호가 성립한다. 따라서 최솟값을 갖는 위치는 $a=\sqrt{2}$, 최솟값은 $b=2\sqrt{2}$이다.

3. 비율 계산하기: a는 최솟값 자체가 아니라 **최솟값을 갖게 하는 x의 값**이다. 따라서 $\frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. 함수 $f(x)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4\cos x+5$가 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $\sin a+b$의 값은? (단, $0<x<2\pi$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

정답 3번

간단한 해설

제곱항은 0 이상이고 $\cos x$는 -1 이상이며, $x=\pi$에서 **두 항이 동시에 최솟값**을 갖는다. 따라서 $a=\pi$, $b=1$이고, $\sin a+b=1$이다.

계산 과정

함숫값의 하한: 실수의 제곱은 0 이상이므로 $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\geq 0$이고, $\cos x\geq -1$이므로 $4\cos x\geq -4$이다. 두 부등식을 더하면 $f(x)\geq 0-4+5=1$이다.

최솟값을 갖는 위치: 하한 1이 실제 최솟값이 되려면 **두 부등식의 등호가 동시에 성립**해야 한다. 주어진 구간 $0<x<2\pi$에서 $\cos x=-1$이 되는 값은 $x=\pi$이다. 이때 $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}=0$이므로 제곱항도 0이 되어 $f(\pi)=1$이다. 따라서 $a=\pi$, $b=1$이다.

구하는 값: $\sin a=\sin\pi=0$이므로 $\sin a+b=0+1=1$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.
모든 자연수 n에 대하여 $S_n = n^2 + 1$을 만족시킬 때,
$\sum_{k=1}^{50} a_{2k-1}$의 값은?

① 4950

② 4951

③ 4952

④ 4953

정답 2번

간단한 해설

첫째항은 일반항 공식에 바로 대입하지 않고 **첫째항까지의 합**으로 구해야 하므로 $a_1 = S_1 = 2$이다. 나머지 홀수 번째 항 5, 9, ⋯, 197의 합에 2를 더하면 4951이다.

계산 과정

첫째항까지의 합은 첫째항 자체이므로 $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$이다. 주어진 합의 공식은 자연수에 대해 성립하므로, **첫째항은 따로 구한다**.

$n \geq 2$일 때는 제 n항까지의 합에서 제 $n-1$항까지의 합을 빼면 마지막 항만 남는다. 따라서 $a_n = S_n - S_{n-1}$이고, $a_n = (n^2 + 1) - \{(n-1)^2 + 1\} = 2n - 1$이다.

구하려는 합은 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{99}$이다. 첫째항을 제외하면 $a_3 = 5$, $a_5 = 9$, ⋯, $a_{99} = 197$이고, 항 번호가 2씩 커질 때 항의 값은 4씩 커진다. 따라서 이 49개 항은 **공차가 4인 등차수열**을 이룬다.

등차수열의 합은 항의 개수에 첫째항과 마지막 항의 평균을 곱해 구하므로, 이 49개 항의 합은 $\frac{49(5 + 197)}{2} = 4949$이다. 여기에 $a_1 = 2$를 더하면 $\sum_{k=1}^{50} a_{2k-1} = 2 + 4949 = 4951$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 좌표평면 위에서 두 직선 $l_1 : x + y - 2 = 0$, $l_2 : ax + by - 1 = 0$의 교점이 $(1, 1)$이며, 직선 l_1과 l_2가 이루는 각을 $\theta (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$라 할 때, $\cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$이다. $|a - b|$의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 4번

간단한 해설

교점 조건에서 $a + b = 1$이고, **두 직선이 이루는 각의 코사인**을 이용하면 $a^2 + b^2 = 25$이다. 합과 차의 제곱 관계를 적용하면 $(a - b)^2 = 49$이므로 $|a - b| = 7$이다.

계산 과정

1. 교점 조건: 교점 $(1, 1)$은 두 직선 위의 점이다. 이를 $l_2 : ax + by - 1 = 0$에 대입하면 $a + b - 1 = 0$, 즉 $a + b = 1$이다.

2. 각의 조건: 직선에 수직인 벡터를 법선벡터라고 한다. l_1, l_2의 법선벡터는 각각 $(1, 1)$, (a, b)이다. 두 직선 사이의 작은 각은 두 법선벡터가 이루는 각 또는 그 보각이므로, **내적의 절댓값**을 두 벡터의 크기의 곱으로 나누면 된다. 따라서 $\cos\theta = \frac{|a + b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}}$이다.

3. 제곱합 구하기: $a + b = 1$과 주어진 코사인 값을 적용하면 $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$이다. 따라서 $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$이고, $a^2 + b^2 = 25$이다.

4. 차의 절댓값 구하기: 합과 차의 제곱을 더하면 **곱의 항이 상쇄**된다. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$이므로 $(a - b)^2 = 2 \cdot 25 - 1^2 = 49$이다. 따라서 $|a - b| = 7$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8.
_n→∞≤ft((1)/(√(n^2+2n))+(1)/(√(n^2+4n))+(1)/(√(n^2+6n))+·s+(1)/(√(n^2+2n^2)))의 값은?

① $\sqrt{3}-1$

② $2\sqrt{3}-1$

③ 2

④ $2\sqrt{3}-2$

정답 1번

간단한 해설

각 항의 분모에서 n을 묶으면 전체 합이 **정적분을 나타내는 합**이 된다. 구하는 극한은 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx = \sqrt{3}-1$ 이다.

계산 과정

일반항 정리: 괄호 안의 합을 S_n이라 하자. 분모의 근호 안에서 더해지는 값이 $2n$씩 증가하므로, 항은 모두 n 개이고 일반항은 $\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$이다. 여기서 $k=1, 2, \ldots, n$이다. $n>0$이므로 $\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2k/n}}$으로 정리한다.

정적분으로 전환: 따라서 $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2k/n}}$이다. 이는 구간 $[0,1]$을 n등분하고, 각 소구간의 **길이와 오른쪽 끝점에서의 함수값을 곱해 더한 합**이다. 소구간의 길이는 $\frac{1}{n}$, 오른쪽 끝점은 $\frac{k}{n}$이며, 함수는 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$이다. 이 함수가 $[0,1]$에서 연속이므로 구분구적법에 의해 $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx$이다.

적분 계산: $\sqrt{1+2x}$를 미분하면 $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$이므로, 이 함수의 한 부정적분은 $\sqrt{1+2x}$이다. 따라서 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx = [\sqrt{1+2x}]_0^1$이고, 위끝과 아래끝의 함수값을 빼면 $\sqrt{3}-\sqrt{1}=\sqrt{3}-1$을 얻는다.

구하는 극한값은 $\sqrt{3}-1$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 좌표평면 위의 두 점 $A(2, 1)$, $B(4, 2)$에 대해 선분 AB를 빗변으로 하는 직각 삼각형의 넓이의 최댓값은?

① 1
② $\frac{5}{4}$
③ 2
④ $\frac{5}{2}$

정답 2번

간단한 해설

빗변의 길이가 정해진 직각삼각형은 **두 직각변의 길이가 같을 때** 넓이가 최대이다. 이때 넓이는 빗변 길이의 제곱의 1/4이므로 $\frac{5}{4}$이다.

계산 과정

빗변의 길이: 두 점 $A(2, 1)$, $B(4, 2)$의 x좌표 차이는 2, y좌표 차이는 1이므로 $AB^2 = 2^2 + 1^2 = 5$이다.

두 직각변의 관계: 두 직각변의 길이를 양수 a, b라 하면, 피타고라스 정리에 따라 $a^2 + b^2 = 5$이다. 두 변이 수직이므로 삼각형의 넓이는 $S = \frac{1}{2}ab$이다. 따라서 **두 직각변의 곱**을 최대로 만들면 된다.

넓이의 상한: (a-b)^2≥0을 전개하면 a^2+b^2≥2ab이다. 여기에 $a^2 + b^2 = 5$를 대입하면 $ab \le \frac{5}{2}$이므로 $S \le \frac{5}{4}$이다.

최댓값의 성립: 위 부등식에서 등호는 **두 직각변의 길이가 같을 때** 성립한다. 실제로 $a = b = \sqrt{\frac{5}{2}}$인 직각이등변삼각형의 빗변 길이는 $\sqrt{5}$이므로, 선분 AB를 빗변으로 하여 만들 수 있다. 따라서 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 <보기>의 조건을 만족시키는 X에서 X로 가는 함수 f의 개수는?

<보기>

· 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다.

· f(3)≥3

① 59

② 65

③ 78

④ 81

정답 4번

간단한 해설

함숫값이 **작아지지 않는 순서**이므로, $f(3)$을 고정하면 앞뒤 두 함숫값은 각각 중복조합으로 센다. $f(3) = 3, 4, 5$인 경우의 수를 더하면 36 + 30 + 15 = 81개이다.

계산 과정

첫째 조건은 1≤ f(1)≤ f(2)≤ f(3)≤ f(4)≤ f(5)≤5라는 뜻이다. 여기에 f(3)≥3을 적용하면 가운데 값은 3, 4, 5 중 하나이다. 가운데 값을 고정한 뒤 앞의 두 값과 뒤의 두 값을 각각 고른다. 서로 다른 n개 값에서 중복을 허용해 2개를 고르는 중복조합의 수는 $\binom{n+1}{2}$이다. 고른 두 값을 **작은 값부터 놓으면 위치가 결정**되므로 순서를 바꾸는 경우를 따로 곱하지 않는다.

$f(3) = 3$인 경우: $f(1)$, $f(2)$는 1, 2, 3에서 중복을 허용해 고르므로 $\binom{4}{2} = 6$가지이다. $f(4)$, $f(5)$는 3, 4, 5에서 같은 방식으로 고르므로 역시 6가지이다. 앞뒤의 선택은 서로 독립이므로 $6 \cdot 6 = 36$개이다.

$f(3) = 4$인 경우: $f(1)$, $f(2)$는 1, 2, 3, 4에서 고르므로 $\binom{5}{2} = 10$가지이다. $f(4)$, $f(5)$는 4, 5에서 고르므로 $\binom{3}{2} = 3$가지이다. 따라서 $10 \cdot 3 = 30$개이다.

$f(3) = 5$인 경우: $f(1)$, $f(2)$는 1, 2, 3, 4, 5에서 고르므로 $\binom{6}{2} = 15$가지이다. 뒤의 두 값은 **모두 5로 고정**되므로 1가지이다. 따라서 $15 \cdot 1 = 15$개이다.

세 경우는 서로 겹치지 않고 가능한 가운데 값을 모두 포함한다. 따라서 조건을 만족하는 함수는 36 + 30 + 15 = 81개이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 직선 $y = x + b$를 $y = x$에 대하여 대칭이동하면 원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$과 접한다. 이때 b의 값이 될 수 있는 것은?

① $2 - \sqrt{2}$
② 2
③ $4 - \sqrt{2}$
④ $4 + \sqrt{2}$

정답 1번

간단한 해설

대칭이동한 직선은 $y = x - b$이다. 이 직선이 원에 접하려면 **원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름과 같아야** 하므로 $b = 2 \pm \sqrt{2}$이다.

계산 과정

대칭이동한 직선: 직선 $y = x$에 대한 대칭이동은 **두 좌표를 서로 바꾸는** 변환이다. 따라서 $y = x + b$에서 x와 y를 바꾸면 $x = y + b$이고, 이를 정리하면 $y = x - b$, 즉 $x - y - b = 0$이다.

원의 중심과 반지름: 원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$의 중심은 $(2, 0)$이고 반지름은 1이다.

접할 조건: 원과 직선이 접하면 **중심에서 직선에 내린 수선의 길이가 반지름과 같다**. 점과 직선 사이의 거리 공식을 적용하면 중심 $(2, 0)$에서 직선 $x - y - b = 0$까지의 거리는 $\frac{|2 - 0 - b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 - b|}{\sqrt{2}}$이다. 따라서 접할 조건은 $\frac{|2 - b|}{\sqrt{2}} = 1$이다.

가능한 값: $|2 - b| = \sqrt{2}$이므로 $2 - b = \sqrt{2}$ 또는 $2 - b = -\sqrt{2}$이다. 따라서 $b = 2 - \sqrt{2}$ 또는 $b = 2 + \sqrt{2}$이며, 선택지 중 이에 해당하는 값은 ①의 $2 - \sqrt{2}$이다.

NoteBase

문 12. 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + 2ax + 5$를 $x + 1$로 나눈 나머지와 $f(x)$를 $x^2 + 2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 2번

간단한 해설

$x^2 + 2$로 나눈 나머지는 **상수 9**이다. 이 값이 $x + 1$로 나눈 나머지 $6 - 3a$와 같아야 하므로 $a = -1$이다.

계산 과정

1. $x + 1$로 나눈 나머지: 나머지정리에 따라 $x = -1$을 대입한 값이다. 따라서
$f(-1) = 1 - a - 2a + 5 = 6 - 3a$이다.

2. $x^2 + 2$로 나눈 나머지: 나머지의 차수는 나누는 다항식의 차수보다 작아야 하므로 일차식 또는 상수이다.
나머지를 구할 때 x^2를 -2로 바꾸면 x^3은 $-2x$로, x^4은 4로 바뀐다. 따라서 나머지는
$4 - 2ax + 2ax + 5 = 9$이며, **일차항이 서로 상쇄**되어 상수만 남는다.

3. 두 나머지가 같다는 조건: $6 - 3a = 9$이므로 $-3a = 3$, $a = -1$이다. 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. 함수 $f(x) = (a+1)x^2 + 2(1-a)x + a - 2$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 P라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 y절편은?

① −3

② −2

③ 2

④ 3

정답 1번

간단한 해설

모든 그래프가 지나는 점에서는 **매개변수의 계수가 0**이므로 $P = (1, 1)$이다. 이 점에서 접선의 기울기는 4이므로 접선은 $y = 4x - 3$이고, y절편은 −3이다.

계산 과정

1. 공통으로 지나는 점 구하기: 주어진 식을 매개변수 a에 관해 정리하면 $f(x) = a(x-1)^2 + x^2 + 2x - 2$이다. 같은 점을 a의 값과 관계없이 지나려면 **a가 곱해진 항이 항상 0**이어야 한다. 따라서 $(x-1)^2 = 0$에서 $x = 1$이고, $f(1) = 1$이므로 $P = (1, 1)$이다.

2. 접선의 기울기 구하기: a를 상수로 보고 x에 관해 미분하면 $f'(x) = 2(a+1)x + 2(1-a)$이다. 접선의 기울기는 접점에서의 미분계수이므로 $f'(1) = 2(a+1) + 2(1-a) = 4$이다. 즉, P에서의 접선 기울기도 a의 값과 관계없이 일정하다.

3. 접선과 y절편 구하기: 점 (1, 1)을 지나고 기울기가 4인 직선은 $y - 1 = 4(x-1)$, 즉 $y = 4x - 3$이다. y절편은 **x가 0일 때의 y값**이므로 −3이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$, $f'(0) = 1$을 만족할 때, $f(1)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{4}{3}$

④ 2

정답 3번

간단한 해설

주어진 등식을 **한 변수에 대해 미분**한 뒤 그 변수에 0을 대입하면 $f'(x) = 1 + x^2$을 얻는다. 이를 적분하고 $f(0) = 0$을 적용하면 $f(1) = \frac{4}{3}$이다.

계산 과정

주어진 등식에 $x = y = 0$을 대입하면 $f(0) = 2f(0)$이므로 $f(0) = 0$이다. 이 값은 적분한 뒤 **적분상수를 결정하는 조건**이 된다.

x를 상수로 두고 주어진 등식의 양변을 y에 대해 미분하면 $f'(x+y) = f'(y) + x^2 + 2xy$이다. 함수가 모든 실수에서 미분가능하므로 이 미분이 가능하다. 여기에 $y = 0$과 $f'(0) = 1$을 적용하면 $f'(x) = 1 + x^2$을 얻는다. 즉, 한 점에서 주어진 미분계수로부터 **모든 실수에서의 도함수**를 구할 수 있다.

$f'(x) = 1 + x^2$을 적분하면 $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + C$이다. 앞서 구한 $f(0) = 0$을 대입하면 $C = 0$이다. 따라서 $f(1) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. 좌표공간의 두 점 A(2, 1, 1), B(3, 2, 2)와 xy평면 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$
② $\sqrt{11}$
③ $\sqrt{10}$
④ 3

정답 2번

간단한 해설

A를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 A′를 이용하면, **P가 선분 A′B와 xy평면의 교점일 때** 거리의 합이 최소가 된다. 그 최솟값은 두 점 A′, B 사이의 거리인 $\sqrt{11}$이다.

계산 과정

1. 대칭이동으로 거리의 합 바꾸기: A(2, 1, 1)을 xy평면에 대하여 대칭이동하면 A′(2, 1, −1)이다. xy평면 위의 점 P는 대칭인 두 점 A, A′에서 같은 거리에 있으므로 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이다. 따라서 구하려는 거리의 합은 $\overline{A'P}+\overline{PB}$로 바꿀 수 있다.

2. 최솟값이 되는 조건: 삼각부등식에 따라 $\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$이고, 등호는 **P가 선분 A′B 위에 있을 때** 성립한다. A′의 z좌표는 −1, B의 z좌표는 2이므로 두 점은 xy평면의 서로 반대쪽에 있다. 따라서 선분 A′B는 xy평면과 만나며, 그 교점을 P로 잡으면 실제로 등호가 성립한다.

3. 두 점 사이의 거리 계산: A′(2, 1, −1)에서 B(3, 2, 2)까지 각 좌표의 차는 차례로 1, 1, 3이다. 공간의 두 점 사이의 거리 공식으로 $\overline{A'B}=\sqrt{1^2+1^2+3^2}=\sqrt{11}$이다. 따라서 거리의 합의 최솟값은 $\sqrt{11}$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 함수 $f(x)=2x+\int_0^3 f(t^2)dt$에 대하여 $f(10)$의 값은?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

정답 3번

간단한 해설

정적분 항은 x**와 무관한 상수**이다. 이를 C로 놓고 적분식에 다시 대입하면 $C=18+3C$에서 $C=-9$를 얻으므로 $f(10)=11$이다.

계산 과정

정적분 $\int_0^3 f(t^2)dt$는 적분 구간이 고정되어 있고 x를 포함하지 않으므로 **상수**이다. 이 값을 C로 놓으면 주어진 함수는 $f(x)=2x+C$이다.

이 식의 x **자리에** t^2**를 대입**하면 $f(t^2)=2t^2+C$이다. 따라서 C의 정의에 의해 $C=\int_0^3(2t^2+C)dt$가 성립한다.

t에 대해 적분할 때 C는 상수이므로 $C=\left[\frac{2}{3}t^3+Ct\right]_0^3$이다. 위끝 3과 아래끝 0을 대입하여 빼면 $C=18+3C$를 얻는다. 이를 정리하면 $-2C=18$, 즉 $C=-9$이다.

따라서 $f(x)=2x-9$이므로 $f(10)=2\cdot10-9=11$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 두 곡선 $y = -x^2 + 4$와 $y = x^2 - 2x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 4번

간단한 해설

두 곡선의 교점 사이에서는 $y = -x^2 + 4$가 위쪽에 있다. 이 구간에서 **위쪽 함수에서 아래쪽 함수를 뺀 식**을 정적분하면 둘러싸인 넓이는 9이다.

계산 과정

교점과 적분 구간: 두 함수의 값이 같은 곳을 구하면 $-x^2 + 4 = x^2 - 2x$이다. 정리하면 $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) = 0$이므로 교점의 x좌표는 −1과 2이다. 따라서 넓이를 구할 구간은 -1≤x≤2이다.

위아래 관계: 두 함수의 차는 $(-x^2 + 4) - (x^2 - 2x) = -2(x + 1)(x - 2)$이다. $-1 < x < 2$에서는 이 값이 양수이므로 $y = -x^2 + 4$가 위쪽, $y = x^2 - 2x$가 아래쪽에 있다. 두 곡선 사이의 세로 길이는 **위쪽 함수값에서 아래쪽 함수값을 뺀 값**이므로 이를 교점 사이에서 적분한다.

넓이 계산: 구하는 넓이를 S라 하면 $S = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx$이다. 원시함수는 $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x$이고, 양 끝점에서의 값은 $F(2) = \frac{20}{3}$, $F(-1) = -\frac{7}{3}$이다. 따라서 $S = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9$이며, 선택지 ④의 9와 일치한다.

NoteBase

문 18. 삼차함수 $f(x)=\int_0^x(t^2-4t+a)dt$가 모든 실수 x에 대하여 항상 증가하는 함수가 되도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

간단한 해설

도함수 $f'(x)=(x-2)^2+a-4$의 **최솟값이 0 이상**이어야 감소하는 구간이 생기지 않는다. 따라서 $a\geq 4$이고, 가능한 최솟값은 4이다.

계산 과정

정적분으로 정의된 함수를 미분하면 적분함수에 상한을 대입한 식을 얻는다. 따라서 $f'(x)=x^2-4x+a$이다.

완전제곱식으로 바꾸면 $f'(x)=(x-2)^2+a-4$이다. 제곱항은 항상 0 이상이므로 도함수는 $x=2$에서 **최솟값** $a-4$를 갖는다. $a<4$이면 $x=2$ 근처에서 도함수가 음수가 되어 감소하는 구간이 생긴다. 따라서 모든 실수에서 증가하려면 $a-4\geq 0$, 즉 $a\geq 4$이어야 한다.

경계값인 $a=4$일 때는 $f'(x)=(x-2)^2$이다. 도함수는 **한 점에서만 0**이고 나머지 모든 점에서 양수이므로, 함수가 일정하거나 감소하는 구간 없이 실수 전체에서 증가한다. 따라서 등호가 성립하는 경우도 포함한다.

따라서 조건을 만족하는 실수 a의 최솟값은 4이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, a, \frac{1}{\beta}$이 이 순서로 등비수열을 이루고, $\alpha, 4b, \beta$가 이 순서로 등차수열을 이룬다. $\beta-\alpha$의 값은?

① $\sqrt{3}$

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ $2\sqrt{2}$

정답 1번

간단한 해설

등차수열 조건에서 $-a=8b$, 등비수열 조건에서 $a^2b=1$을 얻는다. 이 두 관계로 구한 **두 근의 합과 곱**은 각각 2와 14이므로, 근의 차는 3이다.

계산 과정

근과 계수의 관계: 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=b$이다. 두 근의 역수가 주어져 있으므로 $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$이며 $b\neq 0$이다.

등차수열 조건: 세 수가 등차수열을 이루면 **가운데 항의 2배가 양 끝 항의 합**과 같다. 따라서 $2\cdot 4b=\alpha+\beta=-a$이므로 $a=-8b$이다.

등비수열 조건: 세 수가 등비수열을 이루면 **가운데 항의 제곱이 양 끝 항의 곱**과 같다. 따라서 a^2=1α·1β=1b이므로 $a^2b=1$이다.

계수 결정: $a=-8b$를 $a^2b=1$에 대입하면 $64b^3=1$이다. 따라서 b=14, $a=-2$이므로 두 근의 합은 2이고 곱은 14이다.

두 근의 차: $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$를 이용하면, (β-α)^2=2^2-4·14=3이다. **큰 근에서 작은 근을 뺀 값은 양수**이므로 β-α=3이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=1$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=-3$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

정답 3번

간단한 해설

무한대에서 비의 극한이 1이므로 $f(x)$는 **최고차항의 계수가 1인 이차함수**이다. 또 $x=1$에서의 유한한 극한으로 $x-1$을 인수로 가지며, 두 번째 극한을 적용하면 $f(x)=(x-1)(x-10)$이므로 $f(0)=10$이다.

계산 과정

1. 차수와 최고차항의 계수: 분모 x^2+x-2는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다. 다항식의 비가 $x\to\infty$일 때 0이 아닌 유한한 값 1로 수렴하려면 **분자와 분모의 차수가 같고 최고차항의 계수도 같아야 한다**. 따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.

2. 인수 구하기: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$이므로 $x\to 1$일 때 분모는 0으로 간다. 이때 비의 극한이 유한한 값 −3이 되려면 분자도 0으로 가야 한다. 다항함수는 연속이므로 $f(1)=0$이고, 인수정리에 따라 $x-1$**이 인수**이다. 따라서 상수 a에 대하여 $f(x)=(x-1)(x+a)$로 놓을 수 있다.

3. 나머지 상수 결정: 극한에서는 $x\neq 1$인 값으로 접근하므로 공통인수 $x-1$을 약분할 수 있다. 따라서 $\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{x+a}{x+2}$이다. 약분한 식의 분모는 $x=1$에서 3으로 0이 아니므로 직접 대입하면 $\frac{1+a}{3}=-3$이다. 이를 풀면 $1+a=-9$, $a=-10$이다.

4. 함숫값 계산: $f(x)=(x-1)(x-10)$에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=(-1)\cdot(-10)=10$이다. 이는 ③의 10과 일치한다.

NoteBase