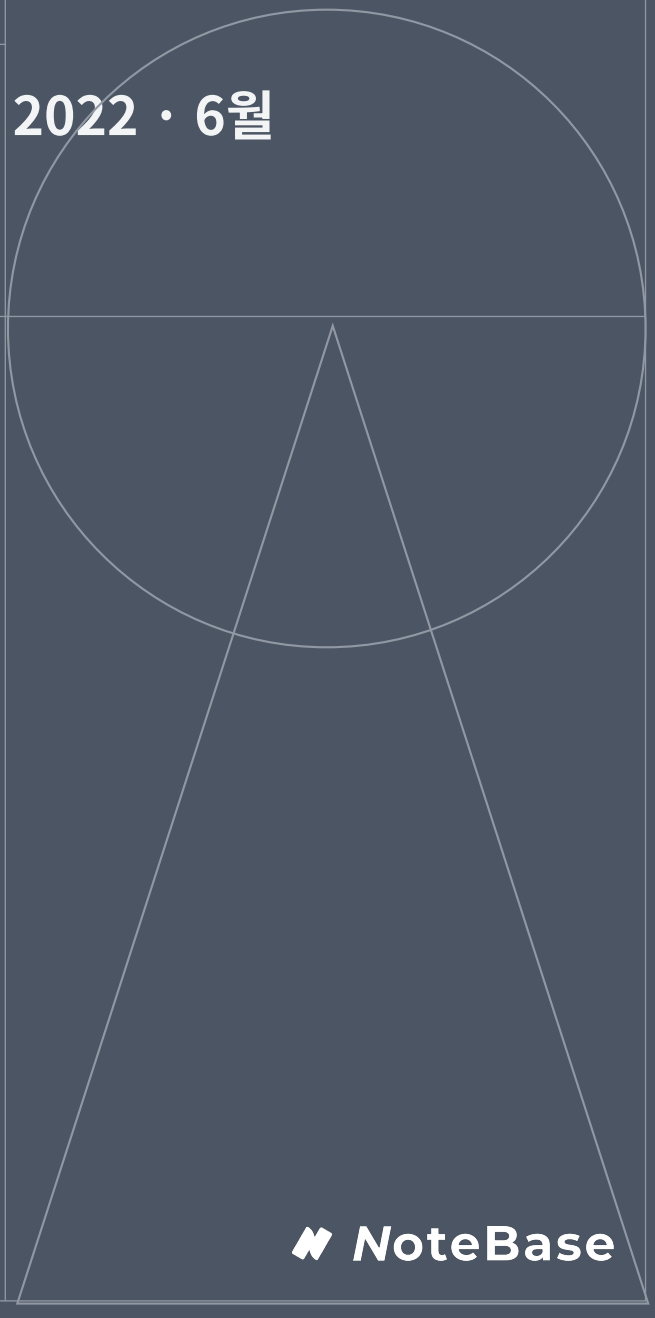
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2022 · 6월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2022 · 6월

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2022 · 6월

문 1. 곡선 $y=g(x)$의 그래프는 유리함수 $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. $(g\circ f)(x)=x$일 때, $a+b$의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

정답 3번

간단한 해설

$(g\circ f)(x)=x$이므로 g는 f의 **역함수**이다. 역함수의 식을 평행이동한 식과 비교하면 $a=3, b=-3$이므로 $a+b=0$이다.

계산 과정

1. 역함수 구하기: $g(f(x))=x$는 g가 f의 출력을 원래 입력으로 되돌린다는 뜻이다. $y=\frac{2x-1}{x+1}$에서 양변에 $x+1$을 곱하면 $x(y-2)=-(y+1)$이므로 $x=\frac{y+1}{2-y}$이다. 이때 $x\neq -1, y\neq 2$이다. 입력과 출력의 문자를 바꾸어 정리하면 $g(x)=-1-\frac{3}{x-2}$이다.

2. 평행이동한 식 세우기: 원래 함수를 정리하면 $f(x)=2-\frac{3}{x+1}$이다. 그래프를 가로로 a만큼, 세로로 b만큼 옮길 때는 **입력에서 가로 이동량을 빼고 출력에 세로 이동량을 더한다**. 따라서 $g(x)=f(x-a)+b$이고, 이를 대입하면 $g(x)=2+b-\frac{3}{x-a+1}$이다.

3. 이동량 비교하기: 역함수의 수직점근선은 $x=2$이고 수평점근선은 $y=-1$이다. 평행이동한 식의 점근선은 각각 $x=a-1, y=2+b$이므로 $a-1=2, 2+b=-1$이다. 따라서 $a=3, b=-3$이며, 두 값을 대입하면 분수항까지 역함수의 식과 일치한다.

4. 합 구하기: $a+b=3+(-3)=0$이므로 구한 값은 ③의 0과 일치한다.

NoteBase

문 2. 실수 x, y에 대하여 $18^x = 9, 4^y = 3$일 때, $\frac{2}{x} - \frac{1}{2y}$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

두 조건을 **밑이 3인 거듭제곱**으로 바꾸면 $18 = 3^{2/x}$, $2 = 3^{1/(2y)}$이다. 두 식을 나눈 값이 $9 = 3^2$이므로 구하는 지수의 차는 2이다.

계산 과정

주어진 등식에서 $x = 0$ 또는 $y = 0$이면 좌변이 1이 되므로 x, y는 모두 0이 아니다. $18^x = 9$의 양변을 $1/x$ 제곱하면 $18 = 9^{1/x} = 3^{2/x}$이다.

$4^y = 3$을 $2^{2y} = 3$으로 바꾼 뒤 양변을 $1/(2y)$제곱하면 $2 = 3^{1/(2y)}$이다. 이제 18과 2를 모두 **같은 밑 3의 거듭제곱**으로 나타냈다.

같은 밑의 거듭제곱을 나누면 지수를 뺀다는 성질을 적용하면 $3^{\frac{2}{x} - \frac{1}{2y}} = \frac{18}{2} = 9 = 3^2$이다. 밑 3은 1보다 크므로 지수가 같아야 하며, $\frac{2}{x} - \frac{1}{2y} = 2$이다.

구한 값 2는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. 이차방정식 $x^2 - px + p = 0$의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$일 때, $p^2 - 2p$의 값은?

① 1

② 2

③ −1

④ −2

정답 1번

간단한 해설

근과 계수의 관계에 따라 $p^2 - 2p$는 **두 근의 제곱의 합**이다. 따라서 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 의해 그 값은 1이다.

계산 과정

두 근을 $a = \sin\theta$, $b = \cos\theta$로 놓는다. 이차방정식 $x^2 - px + p = 0$에서 **근과 계수의 관계**에 따라 두 근의 합은 $a + b = p$, 곱은 $ab = p$이다.

구하려는 식에 두 근의 합과 곱을 대입하면 $p^2 - 2p = (a + b)^2 - 2ab$이다. 합의 제곱을 전개할 때 생기는 $2ab$를 빼면 **두 근의 제곱의 합**만 남으므로 $p^2 - 2p = a^2 + b^2$이다.

$a^2 + b^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$이고, 삼각함수의 기본 관계식 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이 성립한다. 따라서 $p^2 - 2p = 1$이며, 이는 ①의 1에 해당한다.

NoteBase

문 4. 방정식 $x^2+y^2+2mx+2(m+1)y+4m^2+10m+7=0$이 원을 나타내기 위한 실수 m에 대하여 이 원의 반지름의 최댓값은?

① 1
② $\sqrt{2}$
③ 2
④ $\sqrt{3}$

정답 2번

간단한 해설

반지름의 제곱은 $r^2=2-2(m+2)^2$이므로, **제곱항이 0이 되는** $m=-2$에서 최대가 된다. 이때 $r^2=2$이므로 반지름의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

계산 과정

반지름을 r로 놓는다. 주어진 식에서 x에 관한 항에는 m^2을, y에 관한 항에는 $(m+1)^2$을 더해 완전제곱식으로 묶으면 $(x+m)^2+(y+m+1)^2=r^2$ 꼴이 된다. 이때 우변은 $r^2=-2m^2-8m-6$이다.

원이 되려면 **반지름의 제곱이 양수**여야 한다. m에 관한 식을 다시 완전제곱식으로 정리하면
$r^2=2-2(m+2)^2$이므로, $(m+2)^2<1$, 즉 $-3<m<-1$이어야 한다.

$(m+2)^2$은 항상 0 이상이므로 r^2은 2 이하이다. $m=-2$는 위 범위에 속하고 이때 제곱항이 0이 되므로, 반지름의 제곱은 실제로 최댓값 2를 갖는다. 따라서 반지름의 최댓값은 $\sqrt{2}$이며, ②에 해당한다.

NoteBase

문 5. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라고 할 때, $\frac{\omega^{4k}+1}{\omega^{8k}}+1=0$을 만족하는 100 이하의 자연수 k의 개수는?

① 63

② 65

③ 67

④ 71

정답 3번

간단한 해설

$\omega^3=1$이고 $\omega\neq1$이므로 주어진 등식은 k가 **3의 배수가 아닌 경우**에만 성립한다. 1부터 100까지의 자연수에서 3의 배수 33개를 제외하면 67개이다.

계산 과정

1. 근의 성질: $\omega^2+\omega+1=0$이므로 $\omega\neq0$, $\omega\neq1$이다. 인수분해 공식 $\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)$에서 $\omega^3=1$을 얻는다. 따라서 **거듭제곱의 값은 지수를 3으로 나눈 나머지에 따라 반복**된다.

2. 주어진 등식 변형: $\omega\neq0$이므로 분모 ω^{8k}를 양변에 곱하면 $\omega^{4k}+1+\omega^{8k}=0$이다. $\omega^3=1$에서 $\omega^{4k}=\omega^k$, $\omega^{8k}=\omega^{2k}$이므로 조건은 $\omega^{2k}+\omega^k+1=0$으로 바뀐다.

3. 조건을 만족하는 자연수: k가 3의 배수이면 $\omega^k=\omega^{2k}=1$이므로 위 식의 좌변은 3이 되어 조건을 만족하지 않는다. k를 3으로 나눈 나머지가 1이면 좌변은 $\omega^2+\omega+1=0$이다. 나머지가 2이면 좌변은 $\omega^4+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$이다. 따라서 **3의 배수만 제외**하면 된다.

4. 개수 계산: 100 이하의 자연수는 100개이고, 그중 3의 배수는 3, 6, ⋯, 99로 $99\div3=33$개이다. 조건을 만족하는 자연수는 $100-33=67$개이며, 이는 ③의 67에 해당한다.

NoteBase

문 6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} 2^{a_k} = \frac{1}{1024}$, $\sum_{k=11}^{20} 2^{a_k} = \frac{1}{512}$일 때, $\sum_{k=1}^{30} 2^{a_k}$의 값은?

① $\frac{5}{1024}$
② $\frac{3}{512}$
③ $\frac{7}{1024}$
④ $\frac{1}{128}$

정답 3번

간단한 해설

지수인 등차수열에서 10항 간격의 차가 일정하므로, 10항씩 묶은 합은 **앞 묶음의 2배**가 된다. 따라서 처음 30항의 합은 $\frac{1+2+4}{1024} = \frac{7}{1024}$이다.

계산 과정

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_{k+10} = a_k + 10d$이다. 따라서 $2^{a_{k+10}} = 2^{10d} \cdot 2^{a_k}$이므로, **10항 뒤의 항은 원래 항의 일정한 배수**가 된다.

제11항부터 제20항까지의 합은 제1항부터 제10항까지의 합의 2^{10d}배이다. 주어진 두 합을 나누면 $2^{10d} = \frac{1}{512} \div \frac{1}{1024} = 2$이다. 즉, 10항씩 묶은 합도 다음 묶음으로 갈 때마다 2배가 된다.

같은 관계를 한 번 더 적용하면 제21항부터 제30항까지의 합은 $\sum_{k=21}^{30} 2^{a_k} = 2 \cdot \frac{1}{512} = \frac{1}{256}$이다.

구하는 값은 세 묶음의 합이므로 $\sum_{k=1}^{30} 2^{a_k} = \frac{1+2+4}{1024} = \frac{7}{1024}$이다. 이는 ③의 값과 같다.

NoteBase

문 7. 두 함수 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$과 g(x)=cases(x^2-1)/(x-1) & (x≠ 1)\\2 & (x=1)cases에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

① 두 함수 모두 $x=1$에서 연속이다.

② 두 함수 모두 $x=1$에서 불연속이다.

③ $x=1$에서 $f(x)$는 연속이고, $g(x)$는 불연속이다.

④ $x=1$에서 $f(x)$는 불연속이고, $g(x)$는 연속이다.

정답 4번

간단한 해설

$f(x)$는 $x=1$**에서 함수값이 정의되지 않아** 연속이 아니다. $g(x)$는 그 점에서 **극한값과 함수값이 모두 2**이므로 연속이다.

선지별 해설

함수가 $x=1$에서 연속이려면 $x=1$에서 함수값이 정의되고, 극한값이 존재하며, 그 둘이 같아야 한다. $x\neq 1$이면 $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$이므로 두 함수의 $x=1$에서의 극한값은 모두 2이다. 다만 **약분한 식은 원래 식과 정의역이 다를 수 있다**. 약분으로 $f(1)$이 새로 정의되는 것은 아니다.

① X: $f(x)$는 $x=1$에서 분모가 0이 되어 **함수값이 정의되지 않는다**. 따라서 두 함수가 모두 연속인 것은 아니며, $g(x)$만 연속이다.

② X: $g(x)$는 $g(1)=2$로 정의되어 있고 $\lim_{x\to 1}g(x)=2$이다. **극한값과 함수값이 같으므로** $g(x)$는 연속이며, 두 함수가 모두 불연속인 것은 아니다.

③ X: 두 함수의 연속 여부를 반대로 설명했다. $f(x)$는 함수값이 정의되지 않아 불연속이고, $g(x)$는 극한값 2와 함수값 2가 같아 연속이다.

④ O: $f(x)$는 $x=1$에서 함수값이 없어 불연속이다. $g(x)$는 $\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)=2$이므로 그 점에서 연속이다.

NoteBase

문 8. 다항식 $x^{22}+2x+5$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때, 나머지는 $ax+b$이다. b의 값은?

① -16

② -14

③ -12

④ -10

정답 1번

간단한 해설

$t=x-1$로 놓으면 나누는 식은 t^2이므로 **상수항과 일차항만 나머지에 남는다**. 주어진 다항식에서 이 두 항은 $8+24t$이므로 나머지는 $24x-16$이고, $b=-16$이다.

계산 과정

1. 나머지의 형태: $t=x-1$, 즉 $x=1+t$로 놓으면 나누는 식 $(x-1)^2$은 t^2이 된다. 나머지 $ax+b$는 $at+(a+b)$로 바뀐다. 따라서 주어진 다항식을 t에 관해 전개하여 **상수항과 일차항의 계수**를 구하면 된다. 이차 이상의 항은 모두 t^2으로 나누어떨어진다.

2. 필요한 항의 계산: $(1+t)^{22}$은 $(1+t)$를 22번 곱한 식이다. 상수항은 모든 인수에서 1을 골라 얻는 1이고, 일차항은 22개 인수 중 하나에서만 t를 골라 얻는 $22t$이다. 나머지 항들은 $t^2P(t)$로 묶을 수 있으므로, 어떤 다항식 $P(t)$에 대하여 $(1+t)^{22}=1+22t+t^2P(t)$이다. 여기에 $2(1+t)+5$를 더하면 주어진 다항식은 $8+24t+t^2P(t)$가 된다.

3. 계수 비교: t^2으로 나눈 나머지는 $8+24t$이다. 이를 $at+(a+b)$와 비교하면 $a=24$, $a+b=8$이므로 $b=8-24=-16$이다. 원래 변수로 나타낸 나머지는 $24(x-1)+8=24x-16$이며, 구한 b의 값 -16은 ①에 해당한다.

NoteBase

문 9. 점 $(0, 2)$와 직선 $y = -3$에서 같은 거리에 있는 점의 자취의 방정식을 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 $x = 5$에서 접선의 기울기 값은?

① -2

② 1

③ 2

④ 3

정답 2번

간단한 해설

점과 직선까지의 거리가 같다는 조건으로 자취의 식을 구하면 $f(x) = \frac{x^2 - 5}{10}$이다. **접선의 기울기는 미분계수**이므로 $f'(5) = 1$이다.

계산 과정

자취 위의 점을 $P(x, y)$라 하자. 점 $(0, 2)$까지의 거리는 $\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$이고, 직선 $y = -3$까지의 거리는 수직 방향의 거리인 $|y + 3|$이다. 따라서 **두 거리가 같다는 조건**은 $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 3|$이다.

양변이 모두 음이 아니므로 제곱해도 같은 조건을 나타낸다. $x^2 + (y-2)^2 = (y+3)^2$을 전개하면 $x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 6y + 9$이다. 이를 정리하면 $10y = x^2 - 5$이므로 자취는 포물선 $y = f(x) = \frac{x^2 - 5}{10}$이다.

함수의 한 점에서 **미분계수는 그 점에서 접선의 기울기**이다. $f(x) = \frac{x^2 - 5}{10}$을 미분하면 $f'(x) = \frac{x}{5}$이므로, $x = 5$에서 접선의 기울기는 $f'(5) = \frac{5}{5} = 1$이다. 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 이차함수 $y = ax^2 - 2ax + a + 1$ $(a > 0)$의 그래프와 직선 $y = k$는 서로 다른 두 점에서 만나며 그 두 교점을 각각 A, B라 하고, 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점을 C라 하자. 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 정삼각형일 때, $a(k-1)$의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

정답 4번

간단한 해설

정삼각형에서 **높이는 밑변의 절반의 $\sqrt{3}$배**이다. 밑변의 절반을 t, 높이를 h라 하면 $h^2 = 3t^2$이고, 포물선의 식에서 $h = at^2$이므로 $a(k-1) = ah = 3$이다.

계산 과정

이차함수의 식을 완전제곱식으로 고치면 $y = a(x-1)^2 + 1$이다. 따라서 꼭짓점은 $C(1, 1)$이고 대칭축은 $x = 1$이다. $a > 0$이므로 그래프는 아래로 볼록하며, 수평선 $y = k$와 서로 다른 두 점에서 만나려면 $k > 1$이어야 한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 대칭성에 의해 $M(1, k)$이고 CM은 AB에 수직이다. $AM = BM = t > 0$, $CM = h = k - 1 > 0$으로 놓는다. 교점의 x좌표는 $1 - t$, $1 + t$이므로 포물선의 식에 대입하면 $k = at^2 + 1$, 즉 $h = at^2$이다.

삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $AC = AB = 2t$이다. 직각삼각형 AMC에서 **피타고라스 정리**를 적용하면 $h^2 + t^2 = (2t)^2$이므로 $h^2 = 3t^2$이다.

$t > 0$이고 $h = at^2$이므로 $ah = \frac{h^2}{t^2} = 3$이다. 따라서 구하는 값은 $a(k-1) = 3$이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 다항식 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여
∫_1^x(x^2-t^2)f'(t) dt=x^4+2ax^3+bx^2
일 때, _h→0(f(1+h)-f(1-h))/(h)의 값은?

① −2

② −1

③ 1

④ 2

정답 4번

간단한 해설

적분식과 그 식을 한 번 미분한 식에 각각 $x=1$을 대입하면 $a=-1,\ b=1$을 얻는다. 이때 $f'(1)=1$이고, 구하는 극한은 **미분계수의 두 배**인 2이다.

계산 과정

1. 적분 구간의 양 끝이 같으면 적분값은 0이다. 따라서 주어진 식에 $x=1$을 대입하면 $1+2a+b=0$을 얻는다.

2. 주어진 적분식의 좌변을 $I(x)$라 하자. 좌변을 $x^2\int_1^x f'(t)dt$와 $\int_1^x t^2 f'(t)dt$의 차로 나누어 미분한다. 곱의 미분법과 미적분의 기본정리를 적용하면 두 항에서 생기는 $x^2f'(x)$가 서로 소거되므로 $I'(x)=2x\int_1^x f'(t)dt$이다. 여기서 $\int_1^x f'(t)dt=f(x)-f(1)$이다. 우변을 미분한 식과 같게 놓고 **0이 아닌** $2x$로 나누면 $f(x)-f(1)=2x^2+3ax+b$를 얻는다. 이 관계는 $x=1$ 근처에서 성립한다.

3. 위 관계에 $x=1$을 대입하면 $2+3a+b=0$이다. 여기서 처음 얻은 $1+2a+b=0$을 빼면 $1+a=0$이므로 $a=-1$이다. 이를 처음 식에 대입하면 $b=1$이다.

4. 따라서 $x=1$ 근처에서 $f(x)-f(1)=2x^2-3x+1$이다. 양변을 미분하면 $f'(x)=4x-3$이므로 $f'(1)=1$이다. 이는 구하는 극한을 계산하는 데 필요한 미분계수이다.

5. 다항식은 미분 가능하므로 미분계수의 정의를 적용할 수 있다. 분자를 $f(1)$을 기준으로 나누면 $\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$는 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$와 $\frac{f(1)-f(1-h)}{h}$의 합이다. 두 번째 식은 분자와 분모에 각각 −1을 곱하면 $\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$가 된다. 따라서 **두 항의 극한이 모두** $f'(1)$이고, 구하는 값은 $2f'(1)=2$이다. 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 연속확률변수 X는 함숫값을 [0, 12]에서 갖는다. P(a ≤ X ≤ b)는 (b − a)에 비례하고, 비례상수를 k라 하자. 이때 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, 0 ≤ a ≤ b ≤ 12)

<보기>

ㄱ. 비례상수 k는 모든 실숫값을 취할 수 있다.

ㄴ. P(a ≤ X ≤ b)는 구간 [a, b]에서 상수함수 f(x) = k의 그래프와 x축 사이의 넓이이다.

ㄷ. 전체구간 [0, 12]에서 상수함수 f(x) = k의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

정답 4번

간단한 해설

전체 구간에 속할 확률이 1이므로 비례상수는 $k = \frac{1}{12}$로 정해진다. 구간별 확률은 **밑변이 구간의 길이이고 높이가 k인 직사각형의 넓이**이며, 전체 구간의 넓이는 1이다.

보기별 해설

확률이 구간의 길이에 비례하므로, 주어진 조건 0≤ a≤ b≤12에서 $P(a \le X \le b) = k(b - a)$이다.

ㄱ. X: X가 취하는 값은 모두 구간 [0, 12]에 있으므로 P(0≤ X≤12)=1이다. 비례식에 a = 0, b = 12를 대입하면 $12k = 1$이므로 $k = \frac{1}{12}$이다. 따라서 k는 모든 실숫값을 취하는 것이 아니라 **하나의 양수로 정해진다**.

ㄴ. O: 구간 $[a, b]$에서 상수함수 $f(x) = k$의 그래프와 x축 사이의 도형은 밑변의 길이가 $b - a$, 높이가 k인 직사각형이다. k가 양수이므로 그 넓이는 $k(b - a)$이며, 이는 **주어진 비례식의 확률과 같다**. a = b이면 넓이와 확률은 모두 0이다.

ㄷ. O: 전체 구간 [0, 12]에서 직사각형의 넓이는 $12k = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1$이다. 이는 X가 전체 구간에 속할 **확률이 1**이라는 사실과 일치한다.

따라서 옳은 보기는 ㄴ, ㄷ이며, 이를 모두 고른 선택지는 ④이다.

NoteBase

문 13. 곡선 $y=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\ (0\le x\le 2)$의 길이는?

① $\frac{10}{3}$
② $\frac{11}{3}$
③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$

정답 3번

간단한 해설

곡선의 길이 공식에 도함수 $y'=2\sqrt{x}$를 대입하면, 구간 $0\le x\le 2$에서 $\sqrt{1+4x}$를 적분하면 된다. 이 정적분의 값은 $\frac{13}{3}$이다.

계산 과정

길이 공식: 도함수가 연속인 곡선 $y=f(x)$의 구간 $a\le x\le b$에서의 길이를 L이라 하면 $L=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이다. 이는 곡선을 잘게 나눈 선분의 길이를 피타고라스 정리로 구하여 더한 뒤 극한을 취한 것이다. 따라서 **함숫값이 아니라 도함수**를 공식에 넣는다.

미분과 대입: 주어진 함수 $y=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$를 미분하면 $y'=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}$이다. 이 도함수는 구간 $0\le x\le 2$에서 연속이고 $(y')^2=4x$이므로, 구할 길이는 $L=\int_0^2\sqrt{1+4x}\,dx$이다.

정적분 계산: $(1+4x)^{\frac{3}{2}}$를 미분하면 $6\sqrt{1+4x}$이므로, 피적분함수의 한 원시함수는 $\frac{1}{6}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$이다. 여기에 **위끝 값에서 아래끝 값을 빼면** $L=\frac{1}{6}(9^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{27-1}{6}=\frac{13}{3}$이다. 이 값은 ③의 $\frac{13}{3}$과 일치한다.

NoteBase

문 14. 확률변수 X가 이항분포 $B(n,p)$를 따를 때, $E(X(X-1))$의 값은?

① n^2p

② np^2

③ n^2p^2

④ $n(n-1)p^2$

정답 4번

간단한 해설

$X(X-1)=X^2-X$이므로 **제곱의 기댓값에서 평균을 빼면** 된다. 이항분포의 평균과 분산을 이용하면 $E(X(X-1))=n(n-1)p^2$이다.

계산 과정

이항분포 $B(n,p)$에서 X는 성공확률이 p인 독립시행을 n번 했을 때의 성공 횟수이다. 따라서 평균은 $E(X)=np$, 분산은 $V(X)=np(1-p)$이다.

분산의 정의에 따라 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이다. 이를 옮겨 쓰면 $E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$이므로, 제곱의 기댓값은 **분산에 평균의 제곱을 더한 값**이다. 이항분포의 평균과 분산을 대입하면 $E(X^2)=np(1-p)+n^2p^2$이다.

$X(X-1)=X^2-X$에 기댓값의 선형성을 적용하면 $E(X(X-1))=E(X^2)-E(X)$이다. 앞에서 구한 값을 대입하면 $np(1-p)+n^2p^2-np$이고, 이를 정리하면 $(n^2-n)p^2=n(n-1)p^2$이다. 이는 ④의 식과 일치한다.

NoteBase

문 15. 극한 _n→∞(1)/(n)Σ_k=2^n≤ft((n+2(k+3))/(n))^3의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② 10

③ $\frac{65}{4}$

④ 20

정답 2번

간단한 해설

합을 **정적분의 구분구적법**으로 해석하면 $\int_0^1 (1+2x)^3 dx$가 되어 극한값은 10이다. 첨자가 3만큼 이동하고 처음 몇 항이 빠져도, 그 차이는 극한에서 0으로 수렴한다.

계산 과정

주어진 합을 S_n이라 하고 $f(x) = (1+2x)^3$으로 놓는다. $j = k+3$으로 첨자를 바꾸면 $k=2$일 때 $j=5$, $k=n$일 때 $j=n+3$이므로 다음과 같다.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=5}^{n+3} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

이를 $T_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$과 비교한다. 충분히 큰 n에서 S_n은 T_n의 $j=1, 2, 3, 4$인 네 항을 빼고 $j = n+1, n+2, n+3$인 세 항을 더한 것이다. 이 일곱 항의 함수값은 일정한 범위 안에 있고 각 항에 $\frac{1}{n}$이 곱해지므로 **두 합의 차이는 0으로 수렴**한다. 따라서 두 합의 극한은 같다.

T_n은 구간 $[0, 1]$을 폭 $\frac{1}{n}$인 n개의 소구간으로 나누고, 각 소구간의 오른쪽 끝점 $\frac{j}{n}$에서 함수값을 취한 합이다. f는 다항함수이므로 연속이고, **이 합의 극한은 정적분**과 같다.

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \int_0^1 (1+2x)^3 dx$$

$(1+2x)^4$를 미분하면 $8(1+2x)^3$이므로 원시함수는 $\frac{(1+2x)^4}{8}$이다. 따라서 적분값은 다음과 같다.

$$\int_0^1 (1+2x)^3 dx = \left[\frac{(1+2x)^4}{8}\right]_0^1$$
$$\frac{3^4 - 1^4}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

구하는 극한값은 10이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 공비가 $\sqrt[4]{3}$인 등비수열이고, $b_n = a_n + a_{n+1} + 1$을 만족한다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 232일 때, b_1의 값은?

① $\sqrt[4]{3} - 1$

② $\sqrt{3} - 1$

③ $\sqrt[4]{3} + 1$

④ $\sqrt{3}$

정답 2번

간단한 해설

관계식에서 **홀수 번째 항만 더하면** a_1부터 a_{20}까지가 한 번씩 포함되어 그 합은 242가 된다. 이때 $b_1, b_3, \ldots, b_{19}$는 공비가 $\sqrt{3}$인 10개 항이므로, 등비수열의 합을 이용하면 $b_1 = \sqrt{3} - 1$이다.

계산 과정

1. 주어진 합을 이용할 수 있도록 $b_n = a_n + a_{n+1} + 1$에 $n = 1, 3, \ldots, 19$를 대입하여 더한다. 그러면 $(a_1 + a_2), (a_3 + a_4), \ldots, (a_{19} + a_{20})$처럼 **20개 항이 중복 없이 두 항씩 묶인다**. 홀수 번째 항의 합을 $T = b_1 + b_3 + \cdots + b_{19}$라 하면, 상수 1도 10번 더해지므로 T = 232 + 10 = 242이다.

2. 수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\sqrt[4]{3}$이다. 홀수 번째 항끼리는 두 칸씩 떨어져 있으므로 **공비를 두 번 곱한다**. 따라서 $b_1, b_3, \ldots, b_{19}$는 공비가 $(\sqrt[4]{3})^2 = \sqrt{3}$인 10개 항의 등비수열이다. 공비가 1이 아니므로 등비수열의 합 공식에 따라 $T = b_1\frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{\sqrt{3} - 1}$이다.

3. $(\sqrt{3})^{10} = 3^5 = 243$이므로 $T = \frac{242b_1}{\sqrt{3} - 1}$이다. 앞에서 구한 T = 242를 대입하면 $\frac{242b_1}{\sqrt{3} - 1} = 242$이고, 양변에 $\sqrt{3} - 1$을 곱한 뒤 242로 나누면 $b_1 = \sqrt{3} - 1$이다. 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 실수 t에 대하여 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-tx^2+tx+1$에 접하는 직선의 기울기가 최소가 될 때, 이 접선의 y 절편을 $f(t)$라고 하자. $f'(1)+f(1)$의 값은? (단, f'은 f의 도함수이다.)

① 1
② $\frac{5}{3}$
③ $\frac{7}{4}$
④ $\frac{7}{3}$

정답 4번

간단한 해설

접선의 기울기는 $(x-t)^2+t-t^2$이므로 **접점의 가로좌표가** t일 때 최소이다. 이 접선의 절편은 $f(t)=\frac{1}{3}t^3+1$이므로 $f'(1)+f(1)=\frac{7}{3}$이다.

계산 과정

1. 기울기가 최소인 접점 찾기: 실수 t를 고정하고 주어진 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 접점의 가로좌표가 x일 때 접선의 기울기는 도함수 $g'(x)=x^2-2tx+t$이다. 이를 완전제곱식으로 나타내면 $g'(x)=(x-t)^2+t-t^2$이다. **제곱항의 최솟값은 0**이므로 $x=t$에서 기울기가 최소이며, 그 값은 $m=t-t^2$이다.

2. 접선의 절편 구하기: 접점은 $(t, g(t))$이고, $g(t)=\frac{1}{3}t^3-t^3+t^2+1$이므로 $g(t)=-\frac{2}{3}t^3+t^2+1$이다. 접선의 방정식은 $y-g(t)=m(x-t)$이다. 여기에 **세로축 위의 조건**인 $x=0$을 대입하면 절편은 $f(t)=g(t)-mt$이다. 이때 $mt=t^2-t^3$이므로 $f(t)=\frac{1}{3}t^3+1$을 얻는다.

3. 요구한 값 계산하기: $f(t)$를 t에 대하여 미분하면 $f'(t)=t^2$이다. 따라서 $f'(1)=1$, $f(1)=\frac{4}{3}$이므로 $f'(1)+f(1)=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$이다. 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 이차부등식 $x^2 + 2ax + b < 0$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a, b에 대하여 $a + b$의 최솟값은?

① $-\frac{1}{7}$
② $-\frac{1}{6}$
③ $-\frac{1}{5}$
④ $-\frac{1}{4}$

정답 4번

간단한 해설

부등식의 해가 없으려면 이차식이 **모든 실수에서 0 이상**이어야 하므로 $b \geq a^2$이다. 따라서 $a + b \geq a^2 + a$ 이고, 완전제곱식으로 정리하면 최솟값은 -14이다.

계산 과정

해가 없다는 것은 모든 실수 x에 대해 x^2+2ax+b≥0이라는 뜻이다. $x^2 + 2ax + b = (x + a)^2 + b - a^2$에서 제곱항의 최솟값은 0이므로, 이차식은 $x = -a$일 때 최솟값 $b - a^2$을 갖는다. 따라서 필요한 조건은 $b \geq a^2$ 이다. 원래 부등식이 0보다 작은 경우를 묻기 때문에 **최솟값이 0인 경우도 허용**된다.

구하려는 값은 $a + b$이다. $b \geq a^2$를 이용하면 $a + b \geq a^2 + a$이고, a^2+a=≤ft(a+12)^2-14이다. 제곱항은 항상 0 이상이므로 a+b≥-14이다.

이 하한이 실제 최솟값이 되려면 **두 부등식의 등호가 동시에 성립**해야 한다. a=-12, b=a^2=14로 두면 원래 이차식은 ≤ft(x-12)^2이 되어 0보다 작아질 수 없으므로 주어진 조건을 만족한다. 이때 a+b=-14이므로 최솟값은 -14이며, ④에 해당한다.

NoteBase

문 19. 두 사건 A, B에 대하여 $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(A \mid B)=\frac{1}{3}$, $P(A^c \cap B^c)=\frac{2}{5}$일 때, $P(B \mid A)$의 값은? (단, A^c는 A의 여사건이다.)

① $\frac{3}{20}$
② $\frac{1}{5}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{3}{10}$

정답 3번

간단한 해설

여사건 조건과 조건부확률을 함께 이용하면 $P(A \cap B)=\frac{1}{10}$이다. $P(B \mid A)$는 **사건 A가 일어난 경우를 기준**으로 하므로, 이를 $P(A)=\frac{2}{5}$로 나누어 $\frac{1}{4}$을 얻는다.

계산 과정

1. 합사건의 확률 구하기: $A^c \cap B^c$는 A와 B가 모두 일어나지 않는 사건으로, $A \cup B$의 여사건이다. 따라서 $P(A \cup B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이다.

2. 교집합의 확률 구하기: $P(B)=x$라 두면, 조건부확률의 정의에 따라 $P(A \cap B)=P(A \mid B)P(B)=\frac{x}{3}$이다. 합사건의 확률을 구할 때는 **두 번 더해진 교집합을 한 번 빼야** 하므로, $\frac{3}{5}=\frac{2}{5}+x-\frac{x}{3}$이다. 이를 정리하면 $\frac{2x}{3}=\frac{1}{5}$이므로 $x=\frac{3}{10}$이다. 따라서 두 사건이 동시에 일어날 확률은 $P(A \cap B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$이다.

3. 요구한 조건부확률 구하기: $P(B \mid A)$는 A가 일어났다는 조건에서 B도 일어날 확률이므로, **분모는 조건이 되는 사건 A의 확률**이다. 따라서 $P(B \mid A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$에 값을 대입하면 $\frac{1}{10}\div\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 1부터 3000까지의 자연수 중에서 3000과 서로소인 자연수는 몇 개인가?

① 750

② 800

③ 830

④ 910

정답 2번

간단한 해설

3000과 서로소이려면 3000의 소인수인 **2, 3, 5 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않아야 한다**. 이 조건을 만족하는 수는 연속한 30개마다 8개씩 있으므로, 1부터 3000까지에는 800개가 있다.

계산 과정

서로소인 두 자연수는 공약수가 1뿐이다. $3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$이므로, 구하려는 수는 1부터 3000까지의 자연수 중 **2, 3, 5의 배수를 모두 제외한 수**이다.

먼저 1부터 30까지에서 센다. 2의 배수는 15개, 5의 배수는 6개이며, 두 번 제외되는 10의 배수 3개를 다시 더하면 $30 - 15 - 6 + 3 = 12$개가 남는다. 이 중 3의 배수인 3, 9, 21, 27을 제외하면 $12 - 4 = 8$개이다.

30은 2, 3, 5의 공배수이므로 어떤 수에 30을 더해도 이 세 수로 나누어떨어지는지는 달라지지 않는다. 따라서 1~30, 31~60과 같이 **30개씩 묶은 각 구간**에는 조건을 만족하는 수가 똑같이 8개씩 있다.

1부터 3000까지는 $3000 \div 30 = 100$개의 구간으로 나뉜다. 따라서 구하는 개수는 $8 \times 100 = 800$개이며, ②의 800과 일치한다.

NoteBase