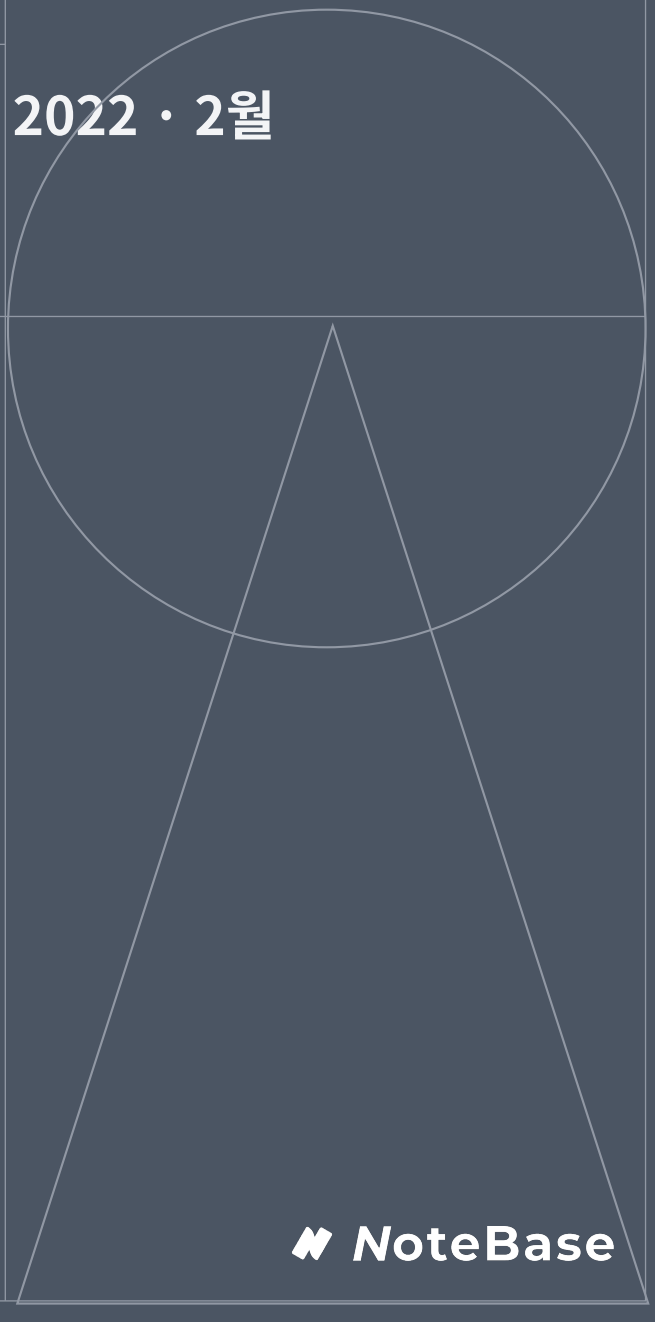
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2022 · 2월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2022 · 2월

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2022 · 2월

문 1. 다항함수 $f(x)$가
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{x}=2,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{(x-1)f(x)}=1$
을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 2번

간단한 해설

첫 번째 극한에서 $f(x)=3x^2+2x+c$로 놓을 수 있다. 두 번째 식의 **공통인수를 약분**하면 $f(1)=4$를 얻으므로, 상수항이자 $f(0)$의 값은 -1이다.

계산 과정

첫 번째 극한으로 계수 정하기: $f(x)-3x^2$에 이차 이상의 항이 남아 있으면 이를 x로 나눈 식은 $x\to\infty$일 때 유한한 값으로 수렴하지 않는다. 따라서 $f(x)=3x^2+ax+c$로 놓을 수 있다. 이때 $\frac{f(x)-3x^2}{x}=a+\frac{c}{x}$이고, $\frac{c}{x}\to 0$이므로 주어진 극한값 2는 **일차항의 계수**이다. 즉, $a=2$이므로 $f(x)=3x^2+2x+c$이다.

두 번째 극한으로 함수값 구하기: 분자를 인수분해하면 $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$이다. 극한에서는 $x\neq 1$인 값으로 접근하므로 **공통인수의 약분이 가능하다**. 따라서 $\frac{x^2+2x-3}{(x-1)f(x)}=\frac{x+3}{f(x)}$이다. 분자 $x+3$이 4로 수렴하고 이 비의 극한값이 1이므로, 분모 $f(x)$도 4로 수렴해야 한다. 다항함수는 연속이므로 $f(1)=4$이다.

상수항 구하기: $f(1)=3+2+c=4$에서 $c=-1$이다. 따라서 $f(0)=c=-1$이며, 선택지 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. $\frac{x-y}{2}=\frac{2x+y}{7}=k$와 $\frac{x^3-3y^2}{x+y}=1$을 만족하는 k값의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

두 비례식에서 $x=3k, y=k$를 얻고, 나머지 식에 대입하면 $(9k-4)(3k+1)=0$이다. **서로 다른 두 근이 모두 0이 아니므로** 분모가 0이 되지 않는 조건을 만족하는 k값은 2개이다.

계산 과정

1. x, y를 k로 표현한다. $x-y=2k$, $2x+y=7k$를 더하면 $3x=9k$이므로 $x=3k$이다. 이를 $x-y=2k$에 대입하면 $y=k$이다.

2. 분모의 조건을 확인한다. 주어진 분수식이 정의되려면 **분모가 0이 아니어야** 한다. $x+y=4k$이므로 $k\neq 0$이다.

3. k에 관한 방정식을 푼다. $x=3k, y=k$를 대입하면 $\frac{27k^3-3k^2}{4k}=1$이다. 양변에 $4k$를 곱하여 $27k^3-3k^2=4k$를 얻는다. $k\neq 0$이므로 양변을 k로 나누어 $27k^2-3k-4=0$으로 정리한다. 이를 인수분해하면 $(9k-4)(3k+1)=0$이므로 $k=\frac{4}{9}$ 또는 $k=-\frac{1}{3}$이다.

4. 가능한 값의 개수를 센다. 두 근은 서로 다르고 모두 $k\neq 0$을 만족한다. 각 근에 대해 $x=3k, y=k$로 두면 원래 두 조건이 모두 성립하므로 가능한 k값은 2개이며, ②의 2에 해당한다.

NoteBase

문 3. 정적분 ∫ _0^1 xe^x dx의 값은?

① $\frac{1}{3}$
② $\frac{2}{3}$
③ 1
④ $\frac{4}{3}$

정답 3번

간단한 해설

x를 미분하고 e^x를 적분하는 **부분적분**을 적용하면 원시함수는 $(x-1)e^x$이다. 위끝 1과 아래끝 0에서의 함수값 차이는 1이다.

계산 과정

부분적분 적용: 적분 구간은 0부터 1까지이다. 곱으로 된 함수에서 **x를 미분하면 상수가 된다**는 점을 이용한다. $u=x$, $dv=e^x dx$로 놓으면 $du=dx$, $v=e^x$이므로 부분적분 공식 $\int udv = uv - \int vdu$를 적용할 수 있다.

원시함수 구하기: 부분적분하면 $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$이다. 따라서 원시함수 하나는
$F(x)=xe^x-e^x=(x-1)e^x$이다.

구간의 양 끝 대입: 정적분은 **위끝의 함수값에서 아래끝의 함수값을 빼서** 구한다. $F(1)=(1-1)e^1=0$이고 $F(0)=(0-1)e^0=-1$이므로 적분값은 $0-(-1)=1$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 한다. 확률변수 $Y = aX + b$에 대하여 $E(Y) = 0$, $V(Y) = 3$을 만족시킬 때, $a + b$의 최댓값은? (단, a,b는 상수이고, $E(Y)$, $V(Y)$는 각각 Y의 평균과 분산이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

평균 조건에서 $b = -\frac{3}{2}a$이므로 $a + b = -\frac{a}{2}$이다. 분산 조건에서 $a = \pm 2$이므로 **a가 음수일 때** 최댓값 1을 얻는다.

계산 과정

X의 평균과 분산: 동전의 앞면과 뒷면이 나올 확률은 각각 1/2이고, 세 번의 시행은 서로 독립이다. 따라서 앞면이 나오는 횟수 X는 이항분포 $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$를 따른다. 이항분포의 평균은 np, 분산은 $np(1-p)$이므로 $E(X) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $V(X) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$이다.

평균 조건 적용: 평균은 일차변환에 따라 $E(aX + b) = aE(X) + b$로 바뀐다. 따라서 $\frac{3}{2}a + b = 0$이고, $b = -\frac{3}{2}a$이다. 이를 구하려는 식에 대입하면 $a + b = -\frac{a}{2}$가 된다.

분산 조건 적용: 상수 b를 더하면 평균만 이동하므로 분산은 변하지 않는다. a를 곱하면 평균과의 편차도 a배가 되므로 **분산은 a의 제곱배**가 된다. 따라서 $V(Y) = a^2V(X) = \frac{3}{4}a^2 = 3$에서 $a^2 = 4$, $a = \pm 2$이다.

최댓값 비교: $a = 2$이면 $b = -3$이므로 $a + b = -1$이다. $a = -2$이면 $b = 3$이므로 $a + b = 1$이다. 따라서 최댓값은 1이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. 함수
f(x)=cases-2x+a &(x≤ 2)\\(x+b)/(√(x+7)-3) &(x>2)cases
가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은?

① 2
② 4
③ 6
④ 8

정답 4번

간단한 해설

$x=2$에서 연속이려면 **우극한이 함수값과 같아야** 한다. 우극한이 유한하려면 $b=-2$이고, 이때 우극한이 6이므로 $a-4=6$에서 $a=10$을 얻는다. 따라서 $a+b=8$이다.

계산 과정

연속 조건: $x<2$에서는 일차함수이고, $x>2$에서는 근호 안이 양수이며 분모가 0이 아니므로 각각 연속이다. 따라서 식이 바뀌는 **경계점에서의 연속**을 확인하면 된다. $x=2$에서는 첫 번째 식이 적용되므로 $f(2)=a-4$이고 좌극한도 $a-4$이다. 여기에 우극한까지 같아야 한다.

b 구하기: $x\to 2+$일 때 분모 $\sqrt{x+7}-3$은 0으로, 분자 $x+b$는 $2+b$로 다가간다. 우극한이 유한하려면 **분자도 0으로 다가가야** 하므로 $2+b=0$, 즉 $b=-2$이다.

우극한 구하기: $b=-2$를 대입한 분수식의 분자와 분모에 $\sqrt{x+7}+3$을 곱한다. 분모는 $x+7-9=x-2$가 된다. $x>2$에서는 $x-2\neq 0$이므로 약분하여 $f(x)=\sqrt{x+7}+3$을 얻는다. 이 식에 $x=2$를 대입하면 우극한은 $3+3=6$이다.

$a+b$ 구하기: 연속 조건에 따라 $a-4=6$이므로 $a=10$이다. 따라서 $a+b=10+(-2)=8$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여
$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(2x-2h)-f(2x+h)\}=4x^2-4x-5$
를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

① -6

② -2

③ 2

④ 6

정답 3번

간단한 해설

주어진 극한은 **미분계수의 정의**에 따라 $-3f'(2x)$가 된다. x=12을 대입하면 $-3f'(1)=-6$이므로 $f'(1)=2$이다.

계산 과정

구하려는 값은 $f'(1)$이므로 $2x=1$, 즉 x=12을 대입한다. 이때 함수의 입력은 각각 $1-2h$, $1+h$가 되고, 우변은 1 - 2 - 5 = -6이다.

두 함수값 사이에 **기준값 $f(1)$을 빼고 더하면** 각각을 미분계수의 정의에 연결할 수 있다. 첫 번째 차분몫에서 입력의 변화량은 $-2h$이므로, 분모를 그 변화량에 맞추면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}=-2f'(1)$이다. 두 번째 차분몫에서는 입력의 변화량이 h이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이다. 두 극한은 함수가 1에서 미분가능하므로 모두 존재한다.

원래 식은 **첫 번째 차분몫에서 두 번째 차분몫을 뺀 것**이므로 극한값은 $-2f'(1)-f'(1)=-3f'(1)$이다. 이 값이 -6이므로 $-3f'(1)=-6$을 풀면 $f'(1)=2$이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 이차방정식 $x^2 + ax + 3 = 0$의 두 근 α, β가 $(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) = 12$를 만족시킬 때, 양수 a의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

두 근의 **합과 곱**을 이용하면 주어진 식은 $16 - a^2 = 12$로 정리된다. $a^2 = 4$이고 **양수 조건**에 따라 a = 2이다.

계산 과정

이차방정식 $x^2 + ax + 3 = 0$의 두 근이 α, β이므로, **근과 계수의 관계**에 따라 $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = 3$이다.
따라서 두 근의 제곱의 합은 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 6$이다.

주어진 식을 전개하면 $(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) = (\alpha\beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + 1$이다. 여기에 위에서 구한 값을 대입하면 $9 - (a^2 - 6) + 1 = 16 - a^2$이므로, 조건은 $16 - a^2 = 12$가 된다.

이를 풀면 $a^2 = 4$이므로 $a = \pm 2$이다. 문제에서 a는 **양수**라고 했으므로 a = 2이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 모든 실수 x에 대하여 $(a-1)x^2+ax+a\le 0$을 만족하고 x에 관한 방정식 $x^2-ax+a^2-3=0$이 서로 다른 두 실근을 갖게 하는 정수 a의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

첫 부등식이 모든 실수에서 성립하려면 $a\le 0$, 두 번째 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $-2<a<2$여야 한다. **두 조건의 공통 범위**에 있는 정수는 -1과 0으로 2개이다.

계산 과정

1. 첫 부등식의 최고차항 확인: $a>1$이면 x의 절댓값이 충분히 클 때 $(a-1)x^2+ax+a$가 양수가 된다. $a=1$이면 부등식이 $x+1\le 0$이 되어 모든 실수에서 성립하지 않는다. 따라서 **이차항의 계수가 음수**인 $a<1$이어야 한다.

2. 첫 부등식의 판별식 조건: $a<1$일 때 그래프는 아래로 열린 포물선이다. 모든 실수에서 함수값이 0 이하이려면 그래프가 x축 위로 올라가지 않아야 하므로 **판별식이 0 이하**여야 한다. 판별식은 $D_1=a^2-4(a-1)a=a(4-3a)$이다. $a<1$에서 $4-3a>0$이므로 $D_1\le 0$은 $a\le 0$과 같다. 따라서 첫 조건을 만족하는 범위는 $a\le 0$이다.

3. 서로 다른 두 실근 조건: $x^2-ax+a^2-3=0$은 이차항의 계수가 1인 이차방정식이다. **서로 다른 두 실근**을 가지려면 판별식이 0보다 커야 한다. 따라서 $D_2=(-a)^2-4(a^2-3)=12-3a^2>0$이고, 이를 풀면 $a^2<4$, 즉 $-2<a<2$이다.

4. 정수의 개수: $a\le 0$과 $-2<a<2$를 동시에 만족하는 범위는 $-2<a\le 0$이다. -2는 두 번째 방정식이 중근을 가지므로 제외하고, 0은 두 조건을 모두 만족하므로 포함한다. 가능한 정수는 -1과 0의 2개이므로 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 곡선 $y = -x^2 + 4x$와 직선 $y = 2x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{2}{3}$
② 1
③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$

정답 3번

간단한 해설

두 교점 사이인 0≤ x≤2에서 **포물선이 직선보다 위**에 있으므로, 두 함수의 차를 적분하면 넓이는 $\frac{4}{3}$이다.

계산 과정

교점과 적분 구간: 두 식을 같게 놓으면 $-x^2 + 4x = 2x$이고, 정리하면 $x(x - 2) = 0$이다. 따라서 두 교점의 x좌표는 0과 2이며, 둘러싸인 부분의 적분 구간은 $[0, 2]$이다.

두 그래프의 위아래 관계: 포물선의 y값에서 직선의 y값을 빼면 $(-x^2 + 4x) - 2x = x(2 - x)$이다. 0≤ x≤2에서 이 값은 0 이상이므로, 이 구간에서는 포물선이 직선보다 위에 있다. 따라서 세로로 자른 부분의 높이는 **위쪽 함수에서 아래쪽 함수를 뺀 값**인 $-x^2 + 2x$이다.

넓이 계산: 구하는 넓이를 S라 하면, 각 위치의 높이를 적분하여 $S = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx$로 구한다. 원시함수를 이용하면 $S = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2$이다. 위끝과 아래끝을 대입한 값의 차를 계산하면 $S = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$이다.

따라서 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{4}{3}$이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 양수 a에 대하여 곡선 $y = x^3 - 2x^2 + a$에 접하고 직선 $y = 4x + 1$에 평행인 직선의 방정식이 $y = mx + 3a$일 때, $\frac{5m}{a}$의 값은? (단, m은 상수)

① 3

② 9

③ 27

④ 81

정답 3번

간단한 해설

평행 조건에서 $m = 4$이다. 접점 후보 중 **양수 조건**을 만족하는 것은 $x = -\frac{2}{3}$일 때이며, 접선의 절편을 비교하면 $a = \frac{20}{27}$이므로 $\frac{5m}{a} = 27$이다.

계산 과정

기울기 구하기: 접선 $y = mx + 3a$는 직선 $y = 4x + 1$과 평행하므로 기울기가 같아 $m = 4$이다. 곡선을 $y = f(x)$라 하면 $f(x) = x^3 - 2x^2 + a$이고, 도함수는 $f\prime(x) = 3x^2 - 4x$이다.

접점 후보 구하기: 접점의 x좌표를 t라 하면 **접점에서의 미분계수가 접선의 기울기**이므로 $3t^2 - 4t = 4$이다. 이를 정리하면 $(3t + 2)(t - 2) = 0$이므로 $t = 2$ 또는 $t = -\frac{2}{3}$이다.

양수 조건 적용하기: 접선의 방정식은 $y - f(t) = 4(x - t)$이므로 절편은 $f(t) - 4t$이다. 따라서 주어진 절편과 비교하면 $3a = f(t) - 4t$이다. $t = 2$일 때에는 $f(2) = a$이므로 $3a = a - 8$, 즉 $a = -4$이다. 이는 **양수라는 조건에 어긋나므로 제외**한다.

상수 구하기: $t = -\frac{2}{3}$일 때 $f(-\frac{2}{3}) = a - \frac{32}{27}$이다. 따라서 $3a = a - \frac{32}{27} + \frac{8}{3}$, 즉 $2a = \frac{40}{27}$이므로 $a = \frac{20}{27}$이다. 이 값은 양수 조건을 만족한다.

구하는 값은 $\frac{5m}{a} = \frac{20}{20/27} = 27$이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin^2 x = \cos^2 x - \cos x$의 모든 해의 합은?

① 2π
② $\frac{5}{2}\pi$
③ 3π
④ $\frac{7}{2}\pi$

정답 1번

간단한 해설

식을 $\cos x$에 대한 이차방정식으로 바꾸면 $\cos x = 1$ 또는 $\cos x = -\frac{1}{2}$이다. **주어진 범위에 속하는 세 해**를 모두 더하면 2π이다.

계산 과정

삼각함수의 기본 관계 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$을 이용하여 **코사인만 포함된 식**으로 바꾼다. 원래 방정식에 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 대입하면 $1 - \cos^2 x = \cos^2 x - \cos x$이다. 이를 정리하면 $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$이고, 인수분해하면 $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$이다. 따라서 $\cos x = 1$ 또는 $\cos x = -\frac{1}{2}$이다.

$\cos x = 1$인 경우: 주어진 범위 $0 \le x < 2\pi$에서 해는 $x = 0$이다. $x = 2\pi$도 코사인값은 1이지만, **범위의 오른쪽 끝값은 포함하지 않으므로** 제외한다.

$\cos x = -\frac{1}{2}$인 경우: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$이고 코사인이 음수인 곳은 제2사분면과 제3사분면이다. 따라서 주어진 범위의 해는 $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$과 $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$이다.

모든 해는 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$이므로, 그 합은 $0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$이다. 이는 ①의 2π와 일치한다.

NoteBase

문 12. 같은 종류의 구슬 10개를 같은 종류의 유리병 5개에 나누어 넣을 때, 빈 유리병이 없도록 넣는 경우의 수는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 3번

간단한 해설

유리병을 서로 구별하지 않으므로 **구슬 수의 순서만 바뀐 분배는 같은 경우**로 센다. 각 병의 구슬 수를 큰 순서대로 나열하면 가능한 분배는 모두 7가지이다.

계산 과정

유리병은 서로 구별하지 않으므로 각 병에 들어간 구슬 수를 **큰 순서대로 나열**하여 중복을 없앤다. 빈 병이 없어야 하므로 모든 수는 1 이상이고, 다섯 수의 합은 10이다. 가장 많이 들어간 병의 구슬 수는 적어도 2개이며, 나머지 네 병에 최소 1개씩 넣어야 하므로 최대 6개이다.

가장 많은 구슬 수가 6개: 나머지 네 병에 4개를 넣어야 하므로 (6, 1, 1, 1, 1)의 1가지이다.

가장 많은 구슬 수가 5개: 나머지 네 병에 5개를 넣어야 하므로 (5, 2, 1, 1, 1)의 1가지이다.

가장 많은 구슬 수가 4개: 나머지 네 병에 6개를 넣는다. 각 병에 1개씩 넣고 남은 2개를 한 병에 더 넣거나 두 병에 1개씩 더 넣으면 되므로 (4, 3, 1, 1, 1), (4, 2, 2, 1, 1)의 2가지이다.

가장 많은 구슬 수가 3개: 나머지 네 병에 7개를 넣되 어느 병에도 3개를 넘게 넣을 수 없다. 각 병에 1개씩 넣고 남은 3개를 2개와 1개 또는 1개씩 세 병에 더 넣으므로 (3, 3, 2, 1, 1), (3, 2, 2, 2, 1)의 2가지이다.

가장 많은 구슬 수가 2개: 다섯 병에 모두 2개씩 넣어야 합이 10이 되므로 (2, 2, 2, 2, 2)의 1가지이다.

각 경우는 가장 많은 구슬 수가 달라 서로 겹치지 않는다. 전체 경우의 수는 1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 7이며, ③의 7에 해당한다.

NoteBase

문 13. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t) = 2t - 4$이다. 점 P가 시각 $t = 2$에서 $t = k(k > 2)$까지 움직인 거리가 49일 때, 상수 k의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 4번

간단한 해설

$t \geq 2$에서는 속도가 **0 이상**이므로, 이동 거리는 속도의 정적분인 $(k-2)^2$이다. 따라서 $(k-2)^2 = 49$이고, $k > 2$이므로 $k = 9$이다.

계산 과정

속도의 부호 확인: 이동 거리는 속력, 즉 속도의 절댓값을 적분하여 구한다. 주어진 속도는 $v(t) = 2t - 4 = 2(t-2)$이므로 $2 \leq t \leq k$에서 0 이상이다. 따라서 이 구간에서는 **속도에 절댓값을 씌워도 식이 변하지 않는다**.

이동 거리 계산: 시각 $t = 2$부터 $t = k$까지 이동한 거리를 S라 하면 $S = \int_2^k (2t-4)dt$이다. 이를 적분하면 $S = [t^2 - 4t]_2^k$이고, 양 끝값을 대입하면 $S = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2$이다. 이 값이 주어진 이동 거리 49와 같아야 한다.

상수 k 결정: $(k-2)^2 = 49$이고, $k > 2$이므로 $k - 2 > 0$이다. 따라서 **양수인 제곱근을 택하여** $k - 2 = 7$을 얻는다. 그러므로 $k = 9$이며, 이는 ④의 9에 해당한다.

NoteBase

문 14. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + 1$이 $x = \alpha$와 $x = \alpha + 2(\alpha > 0)$에서 극값을 가질 때, a의 값은?

① −6

② −3

③ 2

④ 4

정답 1번

간단한 해설

극값을 갖는 두 지점은 **도함수의 두 근**이다. 두 근의 곱이 3이고 양수인 두 근의 차가 2이므로 두 근은 1과 3이며, 근의 합 관계 $4 = -\frac{2a}{3}$에서 $a = -6$을 얻는다.

계산 과정

1. 도함수의 두 근: 다항함수가 극값을 갖는 점에서는 도함수의 값이 0이다. 주어진 함수를 미분하면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$이므로, α와 $\alpha + 2$는 **이차방정식의 서로 다른 두 근**이다.

2. α의 값: 이차방정식의 두 근의 곱은 상수항을 최고차항의 계수로 나눈 값이다. 따라서 $\alpha(\alpha + 2) = \frac{9}{3} = 3$이고, 정리하면 $\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$이다. 이를 인수분해하면 $(\alpha - 1)(\alpha + 3) = 0$이므로 $\alpha = 1$ 또는 $\alpha = -3$이다. **양수 조건** $\alpha > 0$에 따라 $\alpha = 1$이고, 두 극값을 갖는 지점의 x좌표는 1과 3이다.

3. a의 값: 이차방정식의 두 근의 합은 일차항의 계수에 부호를 바꾼 뒤 최고차항의 계수로 나눈 값이다. 두 근의 합이 1 + 3 = 4이므로 $4 = -\frac{2a}{3}$이다. 이를 풀면 $a = -6$이며, ①의 −6과 일치한다.

NoteBase

문 15. 방정식 $x^4+3x^3+9x^2+11x+12=0$의 근 중 하나가 $\frac{-1+\sqrt{15}i}{2}$일 때, 이 방정식의 근이 되는 것은?

① $-1+\sqrt{2}i$
② $1-\sqrt{2}i$
③ $-1+\sqrt{3}i$
④ $1-\sqrt{3}i$

정답 1번

간단한 해설

실수 계수 다항식에서는 **허근의 켤레복소수도 근**이므로 주어진 근에서 인수 x^2+x+4를 얻는다. 이를 나누고 남은 이차방정식의 근은 $x=-1\pm\sqrt{2}i$이다.

계산 과정

주어진 근을 $\alpha=\frac{-1+\sqrt{15}i}{2}$라 하자. 계수가 모두 실수인 다항식은 **허근의 켤레복소수도 근**으로 갖는다. 따라서 허수부의 부호를 바꾼 $\bar{\alpha}=\frac{-1-\sqrt{15}i}{2}$도 근이다.

두 근의 합과 곱은 $\alpha+\bar{\alpha}=-1$, $\alpha\bar{\alpha}=\frac{1+15}{4}=4$이다. 따라서 두 근에 대응하는 인수는
$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2+x+4$이다.

원래 다항식을 x^2+x+4로 나누면 몫은 x^2+2x+3이고 나머지는 0이다. 따라서 나머지 두 근은 **몫을 0으로 놓은 이차방정식** $x^2+2x+3=0$에서 구한다.

$x^2+2x+3=0$을 완전제곱식으로 정리하면 $(x+1)^2=-2$이므로 $x=-1\pm\sqrt{2}i$이다. 이 중 $-1+\sqrt{2}i$가 ①과 일치한다.

NoteBase

문 16. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{4x, x+1\}$, $B=\{2, x^2-5\}$, $\{(A\cap B)^c\cap(B-A)\}=\{2\}$일 때, 집합 $A\cap B$의 원소가 될 수 없는 것은? (단, A^c는 A의 여집합)

① -8

② -1

③ 4

④ 20

정답 1번

간단한 해설

$B-A=\{2\}$이므로 **2는 공통 원소가 아니며**, 공통 원소가 있다면 x^2-5가 $4x$ 또는 $x+1$과 같아야 한다. 이때 가능한 공통 원소는 -4, -1, 4, 20이므로 **-8은 될 수 없다**.

계산 과정

1. 집합 조건 정리: $B-A$는 B에는 속하지만 A에는 속하지 않는 원소들의 집합이다. 따라서 $A\cap B$와 겹치지 않으므로 $(A\cap B)^c\cap(B-A)=B-A$이다. 주어진 조건은 $B-A=\{2\}$와 같으며, **2는 A에 속하지 않는다**. 따라서 $4x\neq 2$, $x+1\neq 2$여야 한다.

2. 공통 원소의 조건: B의 원소는 2와 x^2-5인데 2는 A에 속하지 않는다. 따라서 공통 원소가 있다면 반드시 x^2-5이며, 이 값이 **A의 두 원소 중 하나와 같아야 한다**. 이에 따라 $x^2-5=4x$ 또는 $x^2-5=x+1$을 푼다.

3. $x^2-5=4x$인 경우: 이항하면 $x^2-4x-5=0$이고, 인수분해하면 $(x-5)(x+1)=0$이다. 따라서 $x=5$ 또는 $x=-1$이다. 공통 원소는 $4x$이므로 각각 20, -4가 된다.

4. $x^2-5=x+1$인 경우: 이항하면 $x^2-x-6=0$이고, 인수분해하면 $(x-3)(x+2)=0$이다. 따라서 $x=3$ 또는 $x=-2$이다. 공통 원소는 $x+1$이므로 각각 4, -1이 된다.

5. 조건 확인과 선택지 대조: 구한 $x=5,\ -1, 3,\ -2$는 모두 $4x\neq 2, x+1\neq 2$를 만족한다. 각 경우에 B의 다른 원소 x^2-5는 A에 속하므로 $B-A=\{2\}$도 성립한다. 따라서 교집합의 원소가 될 수 있는 값은 -4, -1, 4, 20이다. ②의 -1, ③의 4, ④의 20은 가능하지만, **①의 -8은 될 수 없다**.

NoteBase

문 17. 직선 $y = x + a$가 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$과 두 점에서 만나고 직선 $y = x + a$와 점 $(1, -1)$과의 거리가 $\sqrt{2}$보다 클 때, 가능한 a의 값은?

① -6
② $-\frac{11}{2}$
③ -5
④ $-\frac{9}{2}$

정답 4번

간단한 해설

원과 **두 점에서 만나야** 하므로 중심에서 직선까지의 거리는 반지름보다 작아야 한다. 여기에 주어진 점과의 거리 조건을 함께 적용하면 $-5 < a < -4$이므로 $a = -\frac{9}{2}$가 가능하다.

계산 과정

원의 중심과 반지름: 원의 방정식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$이다. 따라서 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 $\sqrt{2}$이다. 직선은 거리 공식을 적용하기 위해 $x - y + a = 0$으로 나타낸다.

두 교점이 생기는 조건: 원의 중심에서 직선까지의 거리를 d라 하면 $d = \frac{|1-(-2)+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a+3|}{\sqrt{2}}$이다. 직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면 **중심과 직선 사이의 거리가 반지름보다 작아야** 한다. 따라서 $\frac{|a+3|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$, 즉 $|a+3| < 2$이므로 $-5 < a < -1$이다. 등호가 성립하면 접하여 교점이 하나뿐이므로 경계값은 제외한다.

주어진 점과의 거리 조건: 점 $(1, -1)$에서 직선까지의 거리는 $\frac{|1-(-1)+a|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+2|}{\sqrt{2}}$이다. 이 거리가 $\sqrt{2}$보다 커야 하므로 $|a+2| > 2$이다. 절댓값이 2보다 크려면 $a+2 < -2$ 또는 $a+2 > 2$이므로 $a < -4$ 또는 $a > 0$이다.

두 조건의 결합: 첫 번째 조건의 범위 $-5 < a < -1$에서 두 번째 조건도 만족하려면 $a < -4$이어야 한다. 따라서 두 조건을 **동시에 만족하는 범위**는 $-5 < a < -4$이다. 선택지 중 이 범위에 속하는 값은 ④의 $-\frac{9}{2}$이다.

NoteBase

문 18. 좌표평면에서 두 직선 $x+1=\frac{y-2}{3}$ 와 $\frac{x-1}{2}=y+5$가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{3}{4}$
④ 1

정답 2번

간단한 해설

두 직선의 기울기가 각각 3과 $\frac{1}{2}$이므로, 두 직선이 이루는 **예각은 45°**이다. 따라서 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$이다.

계산 과정

기울기 구하기: 첫 번째 직선은 $y-2=3(x+1)$, 즉 $y=3x+5$이므로 기울기는 3이다. 두 번째 직선은 $y=\frac{1}{2}(x-1)-5$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$이므로 기울기는 $\frac{1}{2}$이다. 두 기울기를 각각 $m_1=3, m_2=\frac{1}{2}$로 둔다.

두 직선 사이의 각 구하기: 기울기는 각 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 탄젠트 값이다. 탄젠트의 차 공식을 이용하면, 두 직선이 이루는 예각에 대해 $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$이다. 여기서는 $1+m_1m_2=\frac{5}{2}\neq 0$이므로 이 공식을 적용할 수 있다. 대입하면 $\tan\theta=\left|\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}\right|=1$이다. **예각이라는 조건**에 따라 $\theta=45^\circ$이다.

코사인 제곱값 구하기: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 $\cos^2\theta$로 나누면 $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$이다. 따라서 $\cos^2\theta=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$이며, 이는 ②의 값과 같다.

NoteBase

문 19. $25^x = 9$, $\sqrt{10^y} = 3$, $\left(\frac{16}{9}\right)^z = 9$**를 만족시키는 세 실수** x, y, z**에 대하여** $\frac{2}{x} - \frac{4}{y} + \frac{1}{z}$**의 값은?**

① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 2번

간단한 해설

세 조건을 **밑이 9인 거듭제곱**으로 바꾸어 결합하면, 구하려는 식을 지수로 하는 값이 $\frac{1}{9} = 9^{-1}$이 된다. 따라서 구하는 값은 -1이다.

계산 과정

어느 식에서든 해당 지수가 0이면 좌변이 1이 되어 조건을 만족하지 못하므로 x, y, z는 모두 0이 아니다. 각 식의 양변을 지수의 역수만큼 거듭제곱하여 **공통 밑을 9로 맞춘다**.

x에 관한 식: $25^x = 9$의 양변을 $\frac{1}{x}$제곱하면 $9^{1/x} = 25$이다. 이를 다시 제곱하면 $9^{2/x} = 625$이다.

y에 관한 식: $\sqrt{10^y} = 3$의 **양변을 먼저 제곱**하면 $10^y = 9$이다. 따라서 $9^{1/y} = 10$이고, 양변을 네제곱하면 $9^{4/y} = 10000$이다.

z에 관한 식: $\left(\frac{16}{9}\right)^z = 9$의 양변을 $\frac{1}{z}$제곱하면 $9^{1/z} = \frac{16}{9}$이다.

구하는 값을 $t = \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + \frac{1}{z}$라 하자. 지수법칙에 따라 **지수의 덧셈은 곱셈으로, 뺄셈은 나눗셈으로** 바뀌므로 $9^t = \frac{9^{2/x} \cdot 9^{1/z}}{9^{4/y}}$이다. 위에서 구한 값을 대입하면 $9^t = \frac{625}{10000} \cdot \frac{16}{9} = \frac{1}{9}$이다. 밑이 9인 지수함수는 증가하므로 $9^t = 9^{-1}$에서 $t = -1$이다. 이는 ②의 -1과 일치한다.

NoteBase

문 20. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_1 + a_3 + a_5 = 111,\ a_2 + a_4 + a_6 = 102$
일 때, 등차수열 $\{a_n\}$이 제k항부터 처음으로 음이 된다고 한다. 이때 k의 값은?

① 13

② 14

③ 15

④ 16

정답 4번

간단한 해설

일반항은 $a_n = 46 - 3n$이므로 **음수가 되는 조건**은 $n > \frac{46}{3}$이다. 이를 처음 만족하는 자연수는 16이다.

계산 과정

공차 구하기: 공차를 d라 하면, 두 합에서 대응하는 항의 차 $a_2 - a_1$, $a_4 - a_3$, $a_6 - a_5$는 모두 d이다. 따라서 **두 합의 차는 공차의 3배**이므로 $3d = 102 - 111 = -9$, 즉 $d = -3$이다.

일반항 구하기: a_1, a_3, a_5는 같은 간격으로 떨어진 세 항이므로 양 끝 항의 합은 가운데 항의 2배이다. 따라서 $a_1 + a_3 + a_5 = 3a_3 = 111$에서 $a_3 = 37$이다. $a_3 = a_1 + 2d$이므로 $a_1 = 37 - 2(-3) = 43$이다.
등차수열의 일반항 공식 $a_n = a_1 + (n-1)d$에 대입하면 $a_n = 43 - 3(n-1) = 46 - 3n$이다.

처음 음수가 되는 항 찾기: $a_n < 0$이려면 $46 - 3n < 0$, 즉 $n > \frac{46}{3}$이어야 한다. 항 번호 n은 자연수이므로 이 조건을 만족하는 가장 작은 값은 16이다. 실제로 $a_{15} = 1$, $a_{16} = -2$이고 **공차가 음수여서 항이 계속 감소**하므로 제16항부터 처음으로 음수가 된다. 따라서 $k = 16$이며 ④에 해당한다.

NoteBase