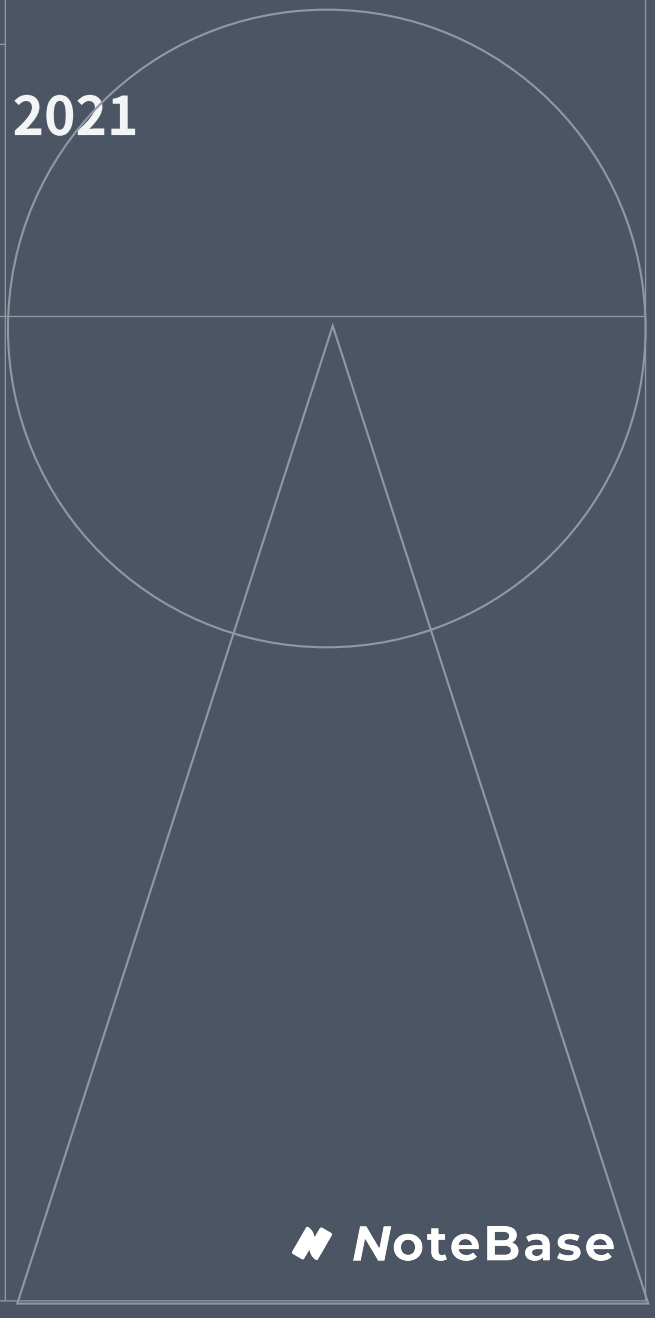
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2021



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2021

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2021

문 1. A, B 두 사람이 동전을 던져 <보기>와 같이 승부를 결정할 때, A가 이길 확률은?

<보기>
한 개의 동전을 여러 회 던져 뒷면이 먼저 2회 나오면 A가 이기고, 앞면이 먼저 4회 나오면 B가 이기는 것으로 한다.

① $\frac{9}{16}$
② $\frac{11}{16}$
③ $\frac{13}{16}$
④ $\frac{15}{16}$

정답 3번

간단한 해설

A가 이기지 못하는 경우는 **뒷면이 2회 나오기 전에 앞면이 4회 나오는 경우**이다. 이 확률이 $\frac{3}{16}$이므로, A가 이길 확률은 $1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$이다.

NoteBase

계산 과정

동전의 앞면과 뒷면이 나올 확률은 각각 1/2이고, 각 던지기는 서로 독립이라고 보고 계산한다. A는 뒷면이 먼저 2회 나오면, B는 앞면이 먼저 4회 나오면 이긴다. 5번 던질 때까지 뒷면이 2회 미만이면 앞면이 적어도 4회 나오므로 반드시 승부가 결정된다. 따라서 **A가 이길 확률은 1에서 B가 이길 확률을 빼서** 구할 수 있다.

B가 4회째에 이기는 경우: 처음부터 앞면이 4회 연속 나와야 한다. 각 시행이 독립이므로 이 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$이다.

B가 5회째에 이기는 경우: **처음 4회에서 앞면 3회와 뒷면 1회**가 나오고, 마지막 5회째에는 앞면이 나와야 한다. 뒷면이 나올 자리는 처음 4개 자리 중 하나이므로 가능한 배열은 4가지이다. 각 배열의 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^5$이므로, 이 경우의 확률은 $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{8}$이다.

두 경우는 서로 겹치지 않으므로 B가 이길 확률은 $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$이다. 따라서 A가 이길 확률은 $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\{(\frac{2}{n}+1)^3+(\frac{4}{n}+1)^3+(\frac{6}{n}+1)^3+\cdots+(\frac{2n}{n}+1)^3\}$**의 값은?**

① 10

② 20

③ 30

④ 40

정답 3번

간단한 해설

주어진 극한은 **구분구적법**에 따라 $\frac{3}{2}\int_1^3 x^3dx$로 바뀌며, 그 값은 30이다. 바깥의 계수를 정할 때는 합에 나타난 분할 간격이 $\frac{2}{n}$임을 이용한다.

계산 과정

구간 [1, 3]을 같은 길이의 작은 구간 n개로 나누면 분할 간격은 $\Delta x=\frac{2}{n}$이다. 각 작은 구간의 오른쪽 끝점은 $x_k=1+\frac{2k}{n}$이며, k가 1부터 n까지 변할 때 원래 합의 각 항은 x_k^3에 해당한다.

바깥의 계수는 $\frac{3}{n}=\frac{3}{2}\Delta x$이므로, 주어진 식은 **구분구적합에 3/2를 곱한 형태**이다. 함수 $f(x)=x^3$은 구간 [1, 3]에서 연속이므로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k^3\Delta x=\int_1^3 x^3dx$가 성립한다. 따라서 구할 극한은 $\frac{3}{2}\int_1^3 x^3dx$이다.

정적분을 계산하면 $\int_1^3 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3$이고, 이는 $\frac{81-1}{4}=20$이다. 여기에 계수를 곱하면 $\frac{3}{2}\cdot 20=30$이다.

구하는 극한값은 30으로, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. $a > 1$**일 때,** $8a + \frac{2}{a-1}$**의 최솟값은?**

① 14

② 15

③ 16

④ 17

정답 3번

간단한 해설

$x = a - 1 > 0$으로 놓으면 주어진 식은 $8 + 8x + \frac{2}{x}$이다. **산술평균과 기하평균의 관계**에 따라 $8x + \frac{2}{x} \geq 8$이고 등호도 성립할 수 있으므로, 최솟값은 16이다.

계산 과정

$x = a - 1$로 놓으면 $a > 1$이므로 $x > 0$이고, $a = x + 1$이다. 따라서 구하려는 식은 $8a + \frac{2}{a-1} = 8 + 8x + \frac{2}{x}$로 바뀐다. 상수 8은 그대로 두고 나머지 두 항의 합을 최소로 만들면 된다.

두 양수 u, v에 대하여 $u + v \geq 2\sqrt{uv}$이며, 등호는 $u = v$일 때 성립한다. 여기서는 **두 항이 모두 양수이고 곱이 일정하므로** 이 관계를 적용할 수 있다. $8x \cdot \frac{2}{x} = 16$이므로 $8x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{16} = 8$이다. 따라서 주어진 식의 값은 8 + 8 = 16 이상이다.

이 하한이 실제 최솟값이 되려면 **등호가 성립하는 값이 주어진 범위 안에 있어야 한다**. 등호 조건은 $8x = \frac{2}{x}$이므로 $x^2 = \frac{1}{4}$이다. $x > 0$이므로 $x = \frac{1}{2}$, 즉 $a = \frac{3}{2}$이다. 이 값은 $a > 1$을 만족하며 주어진 식의 값은 16이 된다.

따라서 최솟값은 16이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. $\frac{996^3 - 3 \times 996 - 2}{996 \times 998 + 1}$**의 값은?**

① 992

② 994

③ 996

④ 998

정답 2번

간단한 해설

분자는 $(996 - 2)(996 + 1)^2$, 분모는 $(996 + 1)^2$으로 나타낼 수 있다. **공통인수를 약분**하면 996 - 2 = 994가 남는다.

계산 과정

분모 정리: $x = 996$으로 놓으면 998은 $x + 2$이다. 분모는 $x(x + 2) + 1 = x^2 + 2x + 1$이므로 **완전제곱식** $(x + 1)^2$으로 정리된다.

분자 인수분해: $x^3 - 3x - 2 = (x^3 + 1) - 3(x + 1)$로 묶는다. 세제곱의 합 공식 $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$을 적용하면 분자는 $(x + 1)(x^2 - x - 2)$가 된다. 여기서 $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$이므로 분자는 $(x - 2)(x + 1)^2$이다.

약분과 값 계산: $x = 996$이므로 **공통인수가 0이 아니어서** $(x + 1)^2$을 약분할 수 있다. 따라서 $\frac{(x - 2)(x + 1)^2}{(x + 1)^2} = x - 2$이고, 구하는 값은 996 - 2 = 994로 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. 좌표 평면 위에서 두 직선 $l_1 : x + y + 3 = 0$, $l_2 : 4x - 3y + 1 = 0$이 이루는 각을 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$라 할 때, $\sin\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$
② $\frac{3\sqrt{2}}{5}$
③ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

정답 4번

간단한 해설

두 직선 사이의 예각을 α라 하면 기울기 관계에서 $\tan\alpha = 7$이다. **사인과 탄젠트의 관계**를 이용하면 $\sin\theta = \sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$을 얻는다.

계산 과정

기울기 구하기: 두 직선을 $y = -x - 3$, $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$로 정리하면 기울기는 각각 $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{4}{3}$이다. 상수항은 직선의 위치를 바꾸지만, 두 직선이 이루는 각은 **기울기**로 결정된다.

두 직선 사이의 예각 구하기: 예각을 α라 하면 탄젠트의 차 공식에 의해 $\tan\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$이다. 여기서 $m_2 - m_1 = \frac{7}{3}$, $1 + m_1 m_2 = -\frac{1}{3}$이므로 $\tan\alpha = \frac{7/3}{1/3} = 7$이다. 절댓값은 예각의 탄젠트가 양수임을 반영한다.

사인으로 변환하기: $\tan\alpha = 7$이므로 예각 α를 갖는 직각삼각형에서 밑변과 높이의 길이를 각각 1과 7로 둘 수 있다. 빗변의 길이는 피타고라스 정리에 따라 $\sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$이다. 따라서 $\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$이다.

주어진 각과 연결하기: 두 직선이 이루는 각은 α 또는 그 보각 $\pi - \alpha$이고, **보각의 사인값은 서로 같다**. 따라서 $\sin\theta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 1$, $a_5 < 30$, $a_9 > 50$일 때, $a_n = 190$을 만족시키는 n의 값은?

① 26

② 27

③ 28

④ 29

정답 3번

간단한 해설

두 부등식을 함께 만족하는 **정수 공차는 7**이다. 따라서 $a_n = 1 + 7(n-1) = 190$을 풀면 $n = 28$이다.

계산 과정

공차를 d라 하자. 등차수열은 이웃한 두 항의 차가 일정하므로, 첫째항에서 n번째 항까지 **공차를 더하는 횟수는** $n-1$이다. 따라서 $a_1 = 1$을 이용하면 일반항은 $a_n = 1 + (n-1)d$이다.

$a_5 < 30$에서 $1 + 4d < 30$이므로 $d < \frac{29}{4}$이다. 또한 $a_9 > 50$에서 $1 + 8d > 50$이므로 $d > \frac{49}{8}$이다. 두 조건을 합하면 $\frac{49}{8} < d < \frac{29}{4}$이고, **이 범위의 정수는 7뿐**이므로 $d = 7$이다.

일반항에 $d = 7$을 대입하면 $a_n = 1 + 7(n-1)$이다. 따라서 $a_n = 190$이 되려면 $7(n-1) = 189$, $n - 1 = 27$이어야 하므로 $n = 28$이다. 이는 ③의 28과 일치한다.

NoteBase

문 7. 다항식 $x^4 - 1$을 $x - 2$로 나누었을 때, 몫이 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$이다. $a_0 + 9a_2$의 값은?

① 23

② 24

③ 25

④ 26

정답 4번

간단한 해설

다항식 나눗셈에서 **같은 차수의 계수**를 비교하면 몫의 상수항은 $a_0 = 8$, 이차항의 계수는 $a_2 = 2$이다. 따라서 $a_0 + 9a_2 = 8 + 9 \cdot 2 = 26$이다.

계산 과정

1. 나눗셈 관계 세우기: 몫을 $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$이라 하자. 일차식 $x - 2$로 나누므로 **나머지는 상수**이다. 이를 r이라 하면 $x^4 - 1 = (x - 2)Q(x) + r$가 성립한다.

2. 높은 차수의 계수 비교: 이 등식은 모든 x에 대해 성립하므로 양변의 같은 차수의 계수가 같아야 한다. x^4의 계수를 비교하면 $a_3 = 1$이다. x^3의 계수는 왼쪽에서 0, 오른쪽에서 $a_2 - 2a_3$이므로 $a_2 - 2a_3 = 0$이다. 따라서 $a_2 = 2a_3 = 2$이다.

3. 상수항 구하기: x^2의 계수를 비교하면 $a_1 - 2a_2 = 0$이므로 $a_1 = 4$이다. 이어서 x의 계수를 비교하면 $a_0 - 2a_1 = 0$이므로 $a_0 = 8$이다. 나머지 r은 상수이므로 이 계수 비교에 영향을 주지 않는다.

4. 구하는 값 계산: $a_0 = 8$, $a_2 = 2$를 대입하면 $a_0 + 9a_2 = 8 + 9 \cdot 2 = 26$이다. 이는 ④의 26과 일치한다.

NoteBase

문 8. 자연수를 원소로 갖는 두 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B=\{\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \sqrt{a_4}\}$가 <보기>의 조건을 모두 만족시킬 때, a_4-a_1의 값은?

<보기>

(가) $a_1<a_2<a_3<a_4$이고 $a_1+a_2=13$

(나) $A\cap B=\{a_1, a_2\}$

① 77

② 79

③ 81

④ 83

정답 1번

간단한 해설

B의 원소가 모두 자연수이므로 a_1, a_2는 제곱수이며, 합이 13이어서 각각 4와 9이다. 두 수가 B에도 속하므로 **이들을 제곱한 16과 81이 나머지 두 원소**가 되어 $a_4-a_1=77$이다.

계산 과정

(가) 작은 두 원소 구하기: B의 모든 원소가 자연수이므로 $\sqrt{a_i}$가 자연수이고, a_i는 모두 자연수의 제곱이다. $a_1<a_2$, $a_1+a_2=13$이므로 두 수는 13보다 작은 서로 다른 제곱수이다. 가능한 제곱수 1, 4, 9 중 합이 13인 두 수는 4와 9뿐이므로 $a_1=4$, $a_2=9$이다.

(나) 나머지 두 원소 구하기: $A\cap B=\{4, 9\}$이므로 4와 9는 B의 원소이기도 하다. B는 A의 각 원소에 제곱근을 취한 집합이므로 **공통 원소를 제곱한 수도 반드시 집합 A에 속한다**. 따라서 $4^2=16$과 $9^2=81$이 A에 속한다. A에는 원소가 네 개뿐이고 크기순으로 나열되어 있으므로 $a_3=16$, $a_4=81$이다.

조건 확인과 차 계산: $A=\{4, 9, 16, 81\}$이면 $B=\{2, 3, 4, 9\}$이므로 교집합은 실제로 $\{4, 9\}$이다. 따라서 $a_4-a_1=81-4=77$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 다항식 $(1+x)^4(2x+3)$의 전개식에서 x^3의 계수는?

① 24

② 25

③ 26

④ 27

정답 1번

간단한 해설

x^3항은 **두 인수에서 고른 항의 차수 합이 3**일 때 생긴다. $(1+x)^4$의 x^2, x^3의 계수가 각각 6, 4이므로 구하는 계수는 $2\times 6+3\times 4=24$이다.

계산 과정

① 필요한 항: $2x+3$에서 고를 수 있는 항은 $2x$와 3이다. 따라서 x^3항은 **차수의 합이 3이 되는** x^2항과 $2x$의 곱, x^3항과 3의 곱에서만 나온다.

② 각 항의 계수: $(1+x)^4$는 네 개의 $(1+x)$를 곱한 식이다. x^2항을 만들려면 네 인수 중 두 개에서 x를, 나머지에서 1을 골라야 하므로 계수는 $\binom{4}{2}=6$이다. 같은 방법으로 x^3항의 계수는 $\binom{4}{3}=4$이다.

③ 계수 합산: 앞에서 구한 항을 곱하면 $(6x^2)(2x)=12x^3$, $(4x^3)\cdot 3=12x^3$이다. 같은 차수의 항끼리 더하므로 x^3의 계수는 $12+12=24$이며, 선택지 ①에 해당한다.

NoteBase

문 10. 실수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\alpha=1+i$일 때 다른 한 근을 β라 하자. $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\left(\frac{1}{\beta}\right)^3$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-\frac{1}{2}$

② 0

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

정답 1번

간단한 해설

실수 계수 이차방정식의 비실수인 두 근은 **서로 켤레복소수**이므로 $\beta=1-i$이다. 두 근의 역수의 합은 1, 곱은 $\frac{1}{2}$이므로 세제곱의 합은 $-\frac{1}{2}$이다.

계산 과정

다른 한 근 구하기: 계수가 모두 실수인 이차방정식에서 비실수인 근은 **켤레복소수와 쌍**으로 나타난다. 따라서 $\alpha=1+i$의 켤레복소수인 $\beta=1-i$가 다른 한 근이다. 이때 $\alpha+\beta=2$이고, $i^2=-1$이므로 $\alpha\beta=(1+i)(1-i)=2$이다.

역수의 합과 곱 구하기: 두 근은 모두 0이 아니므로 $u=\frac{1}{\alpha}$, $v=\frac{1}{\beta}$로 놓을 수 있다. 그러면 $u+v=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1$이고, $uv=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}$이다. 이 값들은 구하려는 두 역수의 세제곱의 합을 계산하는 데 쓰인다.

세제곱의 합 계산하기: $(u+v)^3$을 전개하면 $u^3+v^3+3uv(u+v)$이므로, **두 수의 합과 곱**으로 세제곱의 합을 구할 수 있다. 즉 $u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)$이다. 앞서 구한 값을 대입하면 $u^3+v^3=1^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot1=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 값은 $-\frac{1}{2}$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 함수 $g(x)$가 g(x)=cases4x-1 & (x≤ 1)\ 2+2x & (x>1)cases이고 다항함수 $f(x)$가
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-2x}=2,\ \lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{2x-6}=m$
을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 m의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

정답 4번

간단한 해설

$g(x)$의 좌우극한이 서로 다르므로, **곱의 좌우극한을 같게 하려면** $f(1)=0$이어야 한다. 두 극한 조건까지 적용하면 $f(x)=2(x-1)(x-3)$이므로 $m=2$이다.

계산 과정

1. 다항함수의 차수와 최고차항: $x\to\infty$일 때 분모 x^2-2x의 최고차항은 x^2이다. 다항식의 비가 0이 아닌 유한한 값 2로 수렴하려면 **분자와 분모의 차수가 같아야** 하고, 최고차항 계수의 비가 2여야 한다. 따라서 $f(x)$는 최고차항이 $2x^2$인 이차함수이다.

2. $x=3$에서의 조건: $2x-6\to 0$인데 $\frac{f(x)}{2x-6}$이 유한한 상수 m으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴해야 한다. 다항함수는 연속이므로 $f(3)=0$이다. 즉, $f(x)$는 $x-3$을 인수로 갖는다.

3. $x=1$에서의 연속 조건: 주어진 식에서 $g(1)=3$, $\lim_{x\to 1-}g(x)=3$, $\lim_{x\to 1+}g(x)=4$이다. $f(x)$는 연속이므로 $h(1)=3f(1)$이고, $h(x)$의 좌극한은 $3f(1)$, 우극한은 $4f(1)$이다. 따라서 **좌극한·우극한·함숫값이 모두 같으려면** $3f(1)=4f(1)$, 즉 $f(1)=0$이어야 한다. 이때 세 값은 모두 0이므로 실제로 연속이다.

4. m 계산: $f(x)$는 최고차항의 계수가 2이고 1과 3을 근으로 갖는 이차함수이므로 $f(x)=2(x-1)(x-3)$이다. $x\neq 3$에서 $\frac{f(x)}{2x-6}=\frac{2(x-1)(x-3)}{2(x-3)}=x-1$이므로, $m=\lim_{x\to 3}(x-1)=2$이다. 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여
$(2a_1+3)+(2a_2+3)+\cdots+(2a_n+3)=3n^2+2n$
을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

① $\frac{3}{16}$
② $\frac{5}{16}$
③ $\frac{7}{16}$
④ $\frac{9}{16}$

정답 2번

간단한 해설

주어진 합에서 바로 앞까지의 합을 빼면 $a_n=3n-2$를 얻는다. 이를 이용해 각 항을 **두 분수의 차로 분해**하면 중간 항들이 소거되어, 구하는 합은 $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{16}$이다.

계산 과정

1. 첫째항 확인: 주어진 식에 $n=1$을 대입하면 $2a_1+3=5$이므로 $a_1=1$이다.

2. 일반항 구하기: 주어진 왼쪽의 합을 T_n이라 하면 $T_n=3n^2+2n$이다. $n\geq 2$일 때 **연속한 두 합의 차는 마지막 항**이므로 $2a_n+3=T_n-T_{n-1}$이다. 여기서 $T_{n-1}=3(n-1)^2+2(n-1)$을 대입하여 정리하면 $2a_n+3=6n-1$, 즉 $a_n=3n-2$를 얻는다. 이 식은 앞에서 구한 $a_1=1$도 만족하므로 모든 자연수 n에 성립한다.

3. 분수 분해: $a_{n+1}-a_n=3$이므로 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n a_{n+1}}$이다. 따라서 $\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$로 바꿀 수 있다.

4. 합 계산: 위 식을 $n=1$부터 5까지 더하면, 앞 항의 $-\frac{1}{a_{n+1}}$과 다음 항의 $\frac{1}{a_{n+1}}$이 상쇄된다. 따라서 **첫 항과 끝 항만 남아** 구하는 합은 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)$이다. $a_1=1$, $a_6=16$이므로 그 값은 $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{16}$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. 다항식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(x-2)+f(x)+f(x+2)=x^3+2x^2+7x+8$
을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{3} f(x)dx$의 값은?

① $\frac{52}{3}$
② $\frac{53}{3}$
③ $\frac{55}{3}$
④ $\frac{56}{3}$

정답 1번

간단한 해설

적분 구간이 원점에 대칭이므로 **홀수 차수 항의 적분은 0**이다. 주어진 항등식에서 구한 짝수 차수 항 $\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{9}$만 적분하면 $\frac{52}{3}$을 얻는다.

계산 과정

1. 다항식의 차수 설정: $f(x)$의 최고차항을 ax^n이라 하면, 평행이동해도 최고차항은 변하지 않으므로 좌변의 최고차항은 $3ax^n$이다. 우변이 삼차식이므로 $f(x)$도 삼차식이다. 따라서 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 놓는다.

2. 적분에 필요한 계수 구하기: 대칭으로 이동한 $(x-2)^3$과 $(x+2)^3$을 더하면 이차항과 상수항이 상쇄되고, 일차항도 세 식의 합에서 이차항이나 상수항을 만들지 않는다. 한편 $(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=3x^2+8$ 이므로 좌변의 이차항 계수는 $3b$, 상수항은 $8b+3d$이다. **모든 실수에서 성립하는 항등식**이므로 우변의 같은 차수 계수와 비교하여 $3b=2$, $8b+3d=8$을 얻는다. 이에 따라 $b=\frac{2}{3}$, $d=\frac{8}{9}$이다.

3. 대칭 구간에서 적분하기: ax^3+cx는 홀함수이므로 **원점에 대칭인 구간에서 적분하면 0**이다. 따라서 $\int_{-3}^{3} f(x)dx=2\int_{0}^{3}(bx^2+d)dx$이다. 이를 계산하면 $2(9b+3d)=18b+6d$이고, 구한 계수를 대입하면 $12+\frac{16}{3}=\frac{52}{3}$이다. 이 값은 ①의 $\frac{52}{3}$과 일치한다.

NoteBase

문 14. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$**일 때,** $\sin^4\theta+\cos^4\theta+3\sin\theta\cos\theta$**의 값은?**

① $\frac{1}{8}$
② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$

정답 1번

간단한 해설

주어진 합을 **제곱하여 곱을 구하면** $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$이다. 이를 이용하면 네제곱의 합은 $\frac{7}{8}$이고, 구하는 값은 $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$이다.

계산 과정

1. 삼각함수의 곱 구하기: $p=\sin\theta\cos\theta$로 놓는다. 주어진 등식의 양변을 제곱하고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 적용하면 $1+2p=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $2p=-\frac{1}{2}$이므로 $p=-\frac{1}{4}$이다.

2. 네제곱의 합 구하기: $\sin^2\theta+\cos^2\theta$를 제곱하면 네제곱의 합에 $2\sin^2\theta\cos^2\theta$가 더해진다. 따라서 네제곱의 합은 **제곱의 합을 제곱한 값에서 곱의 제곱의 두 배를 뺀 값**이다. 즉, $\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2p^2$ 이므로 $1-2\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$이다.

3. 구하는 값 계산하기: 네제곱의 합에 $3p$를 더하면 $\frac{7}{8}+3\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$이다. 이는 ①의 값과 같다.

NoteBase

문 15. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$의 두 초점을 F, F'이라 하자. 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 PFF'의 둘레의 길이가 14일 때, $|\overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2|$의 값은?

① 30

② 32

③ 34

④ 36

정답 2번

간단한 해설

두 초점까지의 **거리의 차의 절댓값은 4**이고, 둘레 조건에서 거리의 합은 8이다. **제곱의 차는 합과 차의 곱**이므로 구하는 값은 $4 \times 8 = 32$이다.

계산 과정

주어진 쌍곡선에서 $a^2 = 4$, $b^2 = 5$이므로 $a = 2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$이다. 여기서 c는 원점에서 초점까지의 거리이므로 두 초점 사이의 거리는 $\overline{FF'} = 2c = 6$이다.

두 거리의 길이를 $r = \overline{PF}$, $s = \overline{PF'}$라 하자. 삼각형의 둘레가 14이므로 $r + s + 6 = 14$, 즉 $r + s = 8$이다. 이는 **두 초점까지의 거리의 합**이다.

쌍곡선은 두 초점까지의 거리의 차의 절댓값이 일정한 점들의 집합이다. 그 값은 $2a$이므로 **P가 어느 쪽 가지에 있든** $|r - s| = 2a = 4$가 성립한다.

제곱의 차를 인수분해하면 $|r^2 - s^2| = |r - s|(r + s)$이다. 거리의 합은 양수이므로 위에서 구한 차의 절댓값 4와 합 8을 곱하면 된다. 구하는 값은 $4 \times 8 = 32$로, ②의 32와 일치한다.

NoteBase

문 16. 이산확률변수 X의 확률분포표가 <보기>와 같다. $E(X)=3$일 때, X의 분산은? (단, a, p는 상수이다.)

<보기>

X	a	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	p	1

① 4
② $\frac{9}{2}$
③ 5
④ $\frac{11}{2}$

정답 2번

간단한 해설

확률의 합이 1이고 평균이 3이라는 조건을 이용하면 $p=\frac{1}{4}$, $a=1$이다. 분산은 **제곱의 평균에서 평균의 제곱을 뺀 값**이므로 $V(X)=\frac{27}{2}-9=\frac{9}{2}$이다.

계산 과정

확률의 합으로 p 구하기: 확률분포표에서 모든 확률의 합은 1이다. 따라서 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+p=1$이므로 $p=\frac{1}{4}$이다.

평균 조건으로 a 구하기: 이산확률변수의 평균은 **각 값에 그 값이 나올 확률을 곱한 뒤 모두 더한 값**이다. 표에 따라 $E(X)=\frac{a}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{4}$이다. 주어진 평균이 3이므로 $\frac{a}{2}+\frac{5}{2}=3$에서 $a=1$을 얻는다.

제곱의 평균 구하기: 이제 X가 취하는 값은 1, 4, 6이고, 각각의 확률은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$이다. 각 값을 제곱한 뒤 해당 확률을 곱하여 더하면 $E(X^2)=\frac{1}{2}+4+9=\frac{27}{2}$이다. 이는 **평균을 제곱한 값이 아니라, 각 값을 제곱하여 구한 평균**이다.

분산 구하기: 분산은 평균으로부터 떨어진 거리의 제곱을 평균한 값이며, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$으로 계산할 수 있다. 따라서 $V(X)=\frac{27}{2}-3^2=\frac{9}{2}$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 방정식 $x^4 - 2x^3 + 1 = 0$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

함수 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$은 **감소한 뒤 증가**하며 최솟값이 음수이다. 최솟값을 갖는 점의 양쪽에서 그래프가 x축과 한 번씩 만나므로 서로 다른 실근은 2개이다.

계산 과정

증감 판단: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$로 놓으면 실근의 개수는 그래프와 x축의 교점 개수이다. 도함수는 $f\prime(x) = 2x^2(2x - 3)$이다. $x < \frac{3}{2}$에서는 $x = 0$을 제외하고 도함수가 음수이고, $x > \frac{3}{2}$에서는 양수이다. 따라서 함수는 $x = \frac{3}{2}$까지 감소한 뒤 증가한다. $x = 0$에서는 **도함수의 부호가 바뀌지 않으므로** 증감 방향도 바뀌지 않는다.

왼쪽 구간: $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$이므로 $x = 1$은 실근이다. 함수가 $x < \frac{3}{2}$에서 계속 감소하므로 이 구간의 실근은 이것 하나뿐이다.

오른쪽 구간: 최솟값은 $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{16} < 0$이고, $f(2) = 16 - 16 + 1 = 1 > 0$이다. 다항함수는 연속이므로 **함숫값의 부호가 다른 두 점 사이**에 실근이 적어도 하나 있다. 또한 $x > \frac{3}{2}$에서 계속 증가하므로 이 구간의 실근은 정확히 하나이다.

최솟값이 0이 아니므로 $x = \frac{3}{2}$ 자체는 실근이 아니다. 따라서 서로 다른 실근은 두 구간에서 하나씩, 총 2개이며 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 빗변의 길이가 2이고 한 각이 15°인 직각삼각형의 넓이는?

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $\sqrt{3}$

정답 2번

간단한 해설

서로 수직인 두 변의 길이는 각각 $2\sin 15^\circ$, $2\cos 15^\circ$이다. 넓이에 **사인 배각 공식**을 적용하면 $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}$이다.

계산 과정

1. 두 직각변의 길이 구하기: 15°의 맞은편 직각변을 a, 이 각에 이웃한 직각변을 b라 하자. 빗변이 2이므로 사인과 코사인의 정의에 따라 $a = 2\sin 15^\circ$, $b = 2\cos 15^\circ$이다.

2. 넓이 나타내기: 두 직각변은 **서로 수직이므로 밑변과 높이**로 사용할 수 있다. 넓이를 S라 하면 $S = \frac{1}{2}ab$이므로, 위에서 구한 길이를 대입하면 $S = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$이다.

3. 배각 공식으로 계산하기: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$에 $\theta = 15^\circ$를 대입하면 두 삼각비의 곱을 30°의 사인으로 바꿀 수 있다. 따라서 $S = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 포물선 $y^2 = 8x$와 직선 $y = 8x - 2$로 둘러싸인 영역의 넓이는?

① $\frac{9}{16}$
② $\frac{9}{8}$
③ $\frac{21}{16}$
④ $\frac{21}{8}$

정답 1번

간단한 해설

두 교점의 y좌표인 -1과 2 사이에서 직선과 포물선 사이의 **가로 길이를 적분**한다. 각 높이에서 오른쪽 경계와 왼쪽 경계의 x좌표 차이를 구해 적분하면 넓이는 $\frac{9}{16}$이다.

계산 과정

1. 교점과 적분 구간: 두 식을 x에 대해 정리하면 포물선은 $x = \frac{y^2}{8}$, 직선은 $x = \frac{y+2}{8}$이다. 교점에서는 $y^2 = y + 2$이므로 $(y - 2)(y + 1) = 0$이다. 따라서 교점의 y좌표는 -1과 2이며, 이 두 값이 적분 구간의 양 끝이다.

2. 가로 길이: -1≤ y≤2에서 (y+2)/(8)-(y^2)/(8)=((y+1)(2-y))/(8)≥0이다. 따라서 직선이 오른쪽 경계, 포물선이 왼쪽 경계이다. 영역을 가로로 잘랐을 때의 길이는 **오른쪽 경계의 x좌표에서 왼쪽 경계의 x좌표를 뺀 값**인 $\frac{-y^2+y+2}{8}$이다.

3. 넓이 계산: 가로 길이를 y에 대해 적분하면 영역의 넓이 S를 얻는다. 따라서 $S = \frac{1}{8}\int_{-1}^{2}(-y^2 + y + 2)dy$이다. 이를 적분하면 $S = \frac{1}{8}\left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-1}^{2}$이다. 대괄호 안의 식은 위끝 2에서 $\frac{10}{3}$, 아래끝 -1에서 $-\frac{7}{6}$이므로, $S = \frac{1}{8}\left(\frac{10}{3} + \frac{7}{6}\right) = \frac{9}{16}$이다.

구한 넓이 $\frac{9}{16}$은 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 연이율 2%일 때, 1,000,000원을 정기예금에 예치하면 a년 후에 2,000,000원이 된다. a의 값은? (단, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}1.02=0.0086$이고, 이자는 매년마다 복리로 계산한다.)

① 20

② 25

③ 30

④ 35

정답 4번

간단한 해설

매년 복리로 계산하므로 원리금은 해마다 **1.02배**가 된다. 원금의 두 배가 되는 조건 $1.02^a = 2$에 상용로그를 취하면 $a = \frac{0.3010}{0.0086} = 35$이므로 필요한 기간은 35년이다.

계산 과정

복리는 **원금과 이미 붙은 이자를 합한 금액**에 다시 이자가 붙는 방식이다. 연이율이 2%이므로 매년 원리금에 1.02를 곱한다. 따라서 a년 후의 원리금은 $1{,}000{,}000 \cdot 1.02^a$원이다.

목표 금액 2,000,000원은 원금 1,000,000원의 두 배이다. 원리금 식을 원금으로 나누면 $1.02^a = 2$가 된다. 여기서 a는 원리금이 두 배가 될 때까지 걸리는 연수이다.

지수에 있는 a를 구하기 위해 **양변에 상용로그를 취한다**. 로그의 성질 $\log_{10}(x^a) = a\log_{10}x$에 따라 $a\log_{10}1.02 = \log_{10}2$이다. 주어진 로그값을 대입하면 $0.0086a = 0.3010$이 된다.

따라서 $a = \frac{0.3010}{0.0086} = 35$이다. 원리금이 2,000,000원이 되는 데 걸리는 기간은 35년이며, 이는 ④의 35에 해당한다.

NoteBase