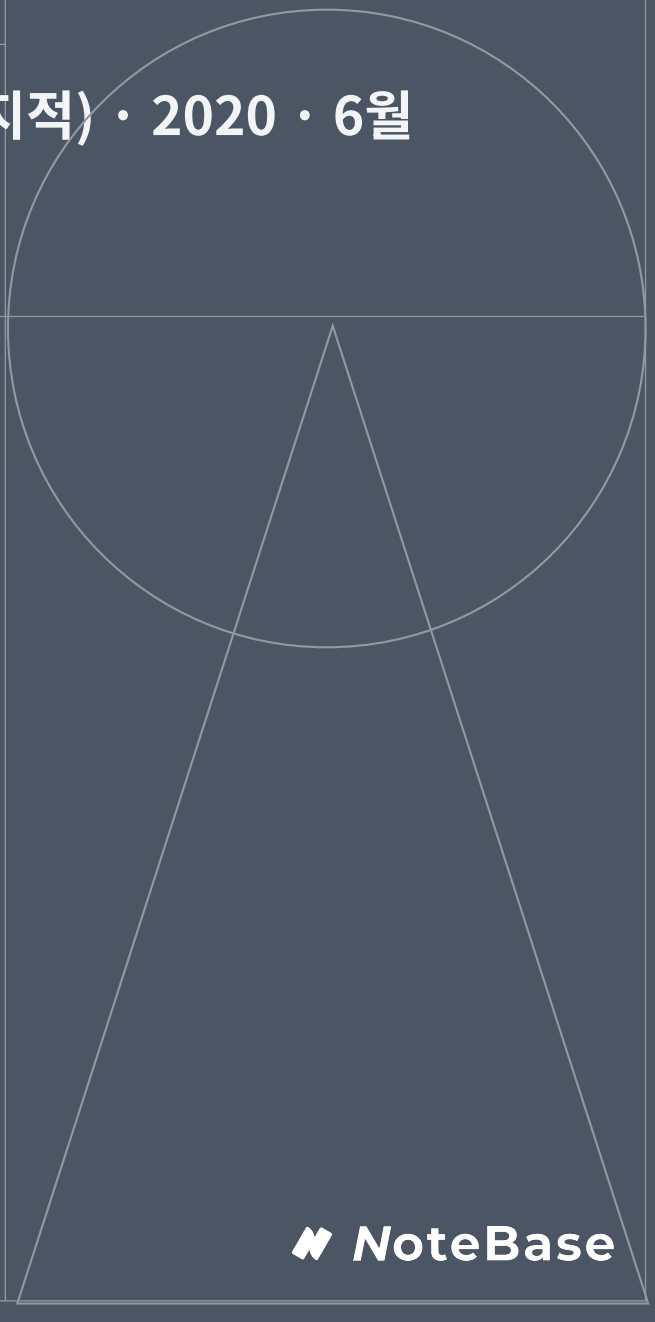
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학(지적) · 2020 · 6월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학(지적) · 2020 · 6월

공무원/서울시/9급 · 수학(지적) · 2020 · 6월

문 1. x**에 대한 이차방정식** $x^2+ax+(a-1)=0$**의 두 근** α,β**에 대하여** $\alpha^2+\beta^2=1$**일 때, 실수** a**의 값은?**

① 0

② 1

③ 2

④ 3

정답 2번

간단한 해설

두 근을 각각 구하지 않고 **근과 계수의 관계**를 이용한다. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$에 대입하면 $(a-1)^2=0$이므로 $a=1$이다.

계산 과정

이차방정식 $x^2+ax+(a-1)=0$의 두 근이 α,β이므로, **근과 계수의 관계**에 따라 두 근의 합은 $\alpha+\beta=-a$, 곱은 $\alpha\beta=a-1$이다.

두 근의 합을 제곱하면 두 근의 제곱의 합에 곱의 두 배가 더해진다. 따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이다. 여기에 두 근의 합과 곱을 대입하면 $\alpha^2+\beta^2=a^2-2(a-1)$이 된다.

주어진 조건 $\alpha^2+\beta^2=1$을 적용하면 $a^2-2(a-1)=1$이다. 이를 정리하면 $a^2-2a+1=0$, 즉 $(a-1)^2=0$이므로 $a=1$이다. 이 값은 ②의 1과 일치한다.

NoteBase

문 2. 이차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(3-x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이고, $x^2f(x+1)$은 $(x-3)(x+1)$로 나누어 떨어질 때, $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는?

① −10

② 11

③ −12

④ 13

정답 3번

간단한 해설

나누어떨어진다는 조건에서 $f(0)=f(4)=0$이므로, 이차다항식은 $f(x)=ax(x-4)$로 쓸 수 있다.
나머지정리로 얻은 $f(2)=4$를 대입하면 $a=-1$이고, 구하는 나머지는 $f(-2)=-12$이다.

계산 과정

1. 첫 번째 나머지 조건: 다항식 $P(x)$를 $x-c$로 나눈 나머지는 $P(c)$이다. 따라서 $f(3-x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $x=1$**을 대입한 값**이므로, $f(3-1)=f(2)=4$이다.

2. 나누어떨어지는 조건: $x^2f(x+1)$에 $x=3$과 $x=-1$을 각각 대입하면 0이 된다. 이에 따라 $9f(4)=0$, $f(0)=0$을 얻는다. 두 경우 모두 **앞의 인자가 0이 아니므로** $f(4)=f(0)=0$이다.

3. 이차다항식 결정: 인수정리에 의해 $f(x)$는 x와 $x-4$를 인수로 갖는다. $f(x)$가 이차다항식이므로 $f(x)=ax(x-4)$로 놓는다. 여기에 $f(2)=4$를 적용하면 $a\cdot 2\cdot(2-4)=4$, 즉 $-4a=4$이므로 $a=-1$이다. 따라서 $f(x)=-x(x-4)$이다.

4. 구하는 나머지: $x+2=x-(-2)$이므로 나머지정리에 따라 $f(-2)$를 구한다.
$f(-2)=-(-2)\cdot(-2-4)=-12$이므로 나머지는 −12이며, ③에 해당한다.

NoteBase

문 3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1이 4이고, 수열 $\{2a_n\}$은 공차가 6인 등차수열일 때, 수열 $\{a_n\}$의 제10항 a_{10}의 값은?

① 31

② 32

③ 33

④ 34

정답 1번

간단한 해설

수열 $\{2a_n\}$의 이웃한 두 항의 차가 6이므로, 수열 $\{a_n\}$의 **공차는 3**이다. 첫째항 4에서 공차를 아홉 번 더하면 제10항은 31이다.

계산 과정

등차수열은 이웃한 두 항의 차가 일정한 수열이다. 수열 $\{2a_n\}$의 공차가 6이므로 $2a_{n+1} - 2a_n = 6$이다.
양변을 2로 나누면 $a_{n+1} - a_n = 3$이므로, 수열 $\{a_n\}$도 **공차가 3인 등차수열**이다.

첫째항이 a_1, 공차가 d인 등차수열에서 제n항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$이다. 첫째항에서 제10항까지는 **공차를 9번 더하므로**, $a_1 = 4$, $d = 3$을 대입한다.

$a_{10} = 4 + 9 \cdot 3 = 31$이다. 따라서 제10항의 값은 31이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 $\int(2x+3)f'(x)dx=\frac{1}{3}x^3+x^2-x+C$가 성립할 때, _h→0(f(-1-h)-f(-1+h))/(2h)의 값은? (단, C는 적분상수이다.)

① −2

② −1

③ 1

④ 2

정답 4번

간단한 해설

주어진 등식을 미분하고 $x=-1$을 대입하면 $f'(-1)=-2$이다. 구하는 극한은 **분자의 순서가 반대인 대칭차분**이므로 $-f'(-1)=2$이다.

계산 과정

1. 적분식의 양변 미분: 부정적분을 미분하면 피적분함수가 되고 적분상수는 사라지므로 $(2x+3)f'(x)=x^2+2x-1$이다.

2. 도함숫값 계산: 위 등식에 $x=-1$을 대입하면 $\{2(-1)+3\}f'(-1)=(-1)^2+2(-1)-1$이다. 따라서 $f'(-1)=-2$이다.

3. 극한과 미분계수 연결: 다항함수는 미분 가능하므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{2h}=f'(-1)$이다. 이 차분몫은 가운데 함수값 $f(-1)$을 기준으로 나누면, 각각 $f'(-1)$로 수렴하는 두 차분몫의 평균이 된다. 문제의 분자는 이 식과 **빼는 순서가 반대**이므로 구하는 극한은 $-f'(-1)=-(-2)=2$이다.

계산한 값 2는 ④에 해당한다.

원문 조건의 한계: 다항함수의 도함수는 모든 실수에서 정의되므로 위 미분식도 모든 실수에서 성립해야 한다. 그러나 $x=-\frac{3}{2}$를 대입하면 좌변은 0이고 우변은 $\frac{9}{4}-3-1=-\frac{7}{4}$이므로 모순이다. 따라서 **원문 조건을 만족하는 다항함수는 존재하지 않는다**. 위에서 구한 2는 주어진 등식을 $x=-1$ 부근에서 형식적으로 적용한 공식 채점값이며, 원문 조건 전체의 모순과 구분된다.

NoteBase

문 5. 두 사건 A, B에 대하여 $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$일 때, $P(A \mid B^c)$의 값은? (단, B^c는 B의 여사건이다.)

① $\frac{1}{9}$
② $\frac{2}{9}$
③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$

정답 4번

간단한 해설

합사건에서 B를 제외한 $A \cap B^c$의 확률은 $\frac{5}{12}$이다. 이를 **조건이 되는 여사건의 확률** $P(B^c) = \frac{3}{4}$로 나누면 $\frac{5}{9}$가 된다.

계산 과정

$A \cup B$는 B가 일어나는 경우와 B는 일어나지 않고 A만 일어나는 경우로 나뉜다. 두 경우는 서로 겹치지 않으므로 **합사건의 확률에서 B의 확률을 빼면** $A \cap B^c$의 확률을 구할 수 있다. 따라서 $P(A \cap B^c) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$이다.

B^c는 B가 일어나지 않는 사건이므로 $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$이다.

조건부확률 $P(A \mid B^c)$는 **B^c가 일어난 경우를 기준으로** 그중 A도 일어날 확률이다. $P(B^c) > 0$이므로 $P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$를 적용한다. 계산하면 $\frac{5}{12} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{9}$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 두 곡선 $y = x^3 + x$, $y = ax^2 + bx + 3$이 점(1, 2)에서 서로 직교하는 접선을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?

① $-\frac{7}{3}$
② $-\frac{8}{3}$
③ $-\frac{10}{3}$
④ $-\frac{11}{3}$

정답 1번

간단한 해설

두 접선이 **직교하면 기울기의 곱이 −1**이다. 이 조건과 두 곡선이 점 (1, 2)를 지난다는 조건을 함께 적용하면 $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{7}{4}$이므로 $\frac{b}{a} = -\frac{7}{3}$이다.

계산 과정

교점 조건: 두 곡선이 점 (1, 2)에서 접선을 가지므로 **각 곡선에 이 점의 좌표를 대입**할 수 있다. 첫 번째 곡선은 $2 = 1^3 + 1$을 만족하고, 두 번째 곡선에서는 $2 = a + b + 3$이므로 $a + b = -1$이다.

직교 조건: 곡선 위 한 점에서 접선의 기울기는 그 점의 미분계수이다. $y = x^3 + x$의 도함수는 $y' = 3x^2 + 1$이므로 $x = 1$에서 기울기는 4이다. $y = ax^2 + bx + 3$의 도함수는 $y' = 2ax + b$이므로 같은 점에서 기울기는 $2a + b$이다. 두 접선이 **직교하므로 기울기의 곱이 −1**이다. 따라서 $4(2a + b) = -1$, 즉 $2a + b = -\frac{1}{4}$이다.

상수 결정: $2a + b = -\frac{1}{4}$에서 $a + b = -1$을 빼면 $a = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$이다. 이를 $a + b = -1$에 대입하면 $b = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$이다.

비의 계산: $a = \frac{3}{4} \neq 0$이므로 $\frac{b}{a} = \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{7}{3}$이다. 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. $x \neq 1$인 양수 x에 대하여 $\log_4 x - \log_x 2 = \frac{1}{2}$을 만족하는 모든 x의 합은?

① $\frac{3}{2}$
② $\frac{5}{2}$
③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{9}{2}$

정답 4번

간단한 해설

로그의 밑을 2로 통일하고 $t = \log_2 x$로 치환하면 **이차방정식**으로 바꿀 수 있다. 이를 풀어 얻은 x는 4와 $\frac{1}{2}$이므로, 두 값의 합은 $\frac{9}{2}$이다.

계산 과정

밑의 통일과 치환: $t = \log_2 x$로 놓는다. 주어진 조건 $x > 0$, $x \neq 1$에 따라 $t \neq 0$이다. 밑변환 공식으로 $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{t}{2}$이고, $\log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{t}$이므로, 주어진 식은 $\frac{t}{2} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$이 된다.

이차방정식 풀이: **0이 아닌 값** $2t$를 양변에 곱하면 분모를 없앨 수 있다. $t^2 - 2 = t$를 정리하면 $t^2 - t - 2 = 0$이고, 인수분해하면 $(t-2)(t+1) = 0$이다. 따라서 $t = 2$ 또는 $t = -1$이며, 둘 다 $t \neq 0$을 만족한다.

원래 변수로 복원: 구한 값은 x가 아니라 $\log_2 x$의 값이므로 **지수 형태로 되돌려야 한다**. $t = 2$이면 $x = 2^2 = 4$이고, $t = -1$이면 $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$이다. 두 값 모두 양수이고 1이 아니므로 주어진 조건을 만족한다.

모든 해의 합은 $4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=n^2+n$일 때, $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\frac{q}{p}$이다. 이때 $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 30

② 31

③ 32

④ 33

정답 2번

간단한 해설

이웃한 두 부분합의 차를 구하면 $a_n=2n(n+1)$이다. 따라서 역수를 **두 분수의 차로 분해**하면 중간 항이 상쇄되어 $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\frac{10}{21}$이 된다.

계산 과정

1. 일반항 구하기: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=n^2+n$으로 놓는다. $n\geq 2$일 때 이웃한 두 부분합을 빼면 **마지막 한 항만 남으므로** $\frac{a_n}{n+1}=S_n-S_{n-1}$이다. 여기서 $S_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)=n^2-n$이므로 $\frac{a_n}{n+1}=2n$, 즉 $a_n=2n(n+1)$이다. 또한 $n=1$을 원래 식에 대입하면 $\frac{a_1}{2}=2$이므로 $a_1=4$이다. 따라서 이 일반항은 모든 자연수 n에 대해 성립한다.

2. 역수 분해하기: 일반항의 역수는 $\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2k(k+1)}$이다. $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$이므로, $\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$로 나타낼 수 있다.

3. 역수의 합 구하기: 위 식을 1항부터 20항까지 더하면, 각 괄호의 음의 분수와 다음 괄호의 양의 분수가 서로 없어진다. 예를 들어 첫 괄호의 $-\frac{1}{2}$과 둘째 괄호의 $\frac{1}{2}$이 상쇄된다. 이처럼 **중간 항이 상쇄**되고 첫 괄호의 1과 마지막 괄호의 $-\frac{1}{21}$만 남는다. 따라서 $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$이다.

4. 서로소 조건 적용하기: 10과 21은 서로소이므로 $\frac{q}{p}=\frac{10}{21}$에서 분모 p = 21, 분자 q = 10이다. 따라서 p + q = 21 + 10 = 31이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. $0 \le x \le 1$**일 때, 곡선** $y = x^4 - 3x^3 + 2x^2$**과 두 직선** $y = x - 1$, $x = 0$**으로 둘러싸인 영역의 넓이는?**

① $\frac{31}{60}$
② $\frac{37}{60}$
③ $\frac{43}{60}$
④ $\frac{49}{60}$

정답 2번

간단한 해설

주어진 구간에서 곡선은 x축 위에 있고 직선은 x축 아래에 있으므로, **위쪽 함수에서 아래쪽 함수를 뺀 값**을 적분한다. 곡선 아래 넓이 $\frac{7}{60}$과 직선 위의 삼각형 넓이 $\frac{1}{2}$을 더하면 $\frac{37}{60}$이다.

계산 과정

경계와 위아래 관계: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$, $g(x) = x - 1$이라 하자. 0≤ x≤1에서 f(x)=x^2(1-x)(2-x)≥0이고 g(x)≤0이므로, **곡선이 위쪽 경계, 직선이 아래쪽 경계**이다. 두 그래프는 $x = 1$에서 만나며, 왼쪽 경계는 $x = 0$이다.

넓이의 식: 두 함수가 연속이고 구간 안에서 위아래 관계가 바뀌지 않으므로, 넓이 S는 두 함수의 차를 적분하여 구한다. 즉, $S = \int_0^1 \{f(x) - g(x)\}\,dx$이다.

곡선 쪽 적분: $\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^1$이다. 따라서 ∫ _0^1 f(x) dx=15-34+23=760이며, 이는 이 구간에서 곡선과 x축 사이의 넓이이다.

직선 쪽 적분: ∫ _0^1 g(x) dx=≤ft[(x^2)/(2)-x]_0^1=-12이다. 직선이 x축 아래에 있으므로 적분값은 음수이다. 그 절댓값 12은 밑변과 높이가 각각 1인 삼각형의 넓이이다.

넓이 계산: 아래쪽 함수의 적분값을 빼면 S=760-≤ft(-12)=(37)/(60)이다. 따라서 구한 넓이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 복소수 $z=(i-1)x^2-(3i+1)x+2+2i$에 대하여 z^2이 음의 실수가 되도록 하는 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 1번

간단한 해설

제곱이 음의 실수가 되려면 z가 **0이 아닌 순허수**여야 한다. 실수부분을 0으로 만드는 두 값 중 $x=1$은 $z=0$이므로 제외되어, $x=-2$만 조건을 만족한다.

계산 과정

실수 a, b에 대하여 $z=a+bi$로 놓으면 $z^2=(a^2-b^2)+2abi$이다. 이것이 음의 실수이려면 $2ab=0$이고 $a^2-b^2<0$이어야 한다. $b=0$이면 $a^2-b^2=a^2\geq 0$이므로 불가능하다. 따라서 **실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 한다**. 즉, $a=0, b\neq 0$이다.

주어진 식에서 실수부분은 $a=-x^2-x+2$, 허수부분은 $b=x^2-3x+2$이다. $a=0$을 풀면 $x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$이므로 후보는 $x=-2$와 $x=1$이다.

이제 **허수부분이 0이 아닌지** 확인한다. $x=1$이면 $b=1-3+2=0$이어서 $z=0$이고, 그 제곱도 0이므로 제외한다. $x=-2$이면 $b=4+6+2=12$이므로 $z=12i$, $z^2=-144<0$이다.

따라서 구하는 값은 $x=-2$이며, ①에 해당한다.

NoteBase

문 11. 삼차함수 $f(x)$가 _x→2(f(x))/(x-2)=5, _x→3(f(x))/(x-3)=1을 만족할 때, $f(x)$의 x^3의 계수는?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 3번

간단한 해설

두 극한이 유한하므로 $f(2) = f(3) = 0$이며, $f(x) = (x-2)(x-3)(ax+b)$로 놓을 수 있다. 극한 조건에서 얻은 두 식을 빼면 **최고차항의 계수** $a = 6$을 얻는다.

계산 과정

1. 삼차함수의 인수 구하기: 분모가 0으로 가는데 주어진 극한값이 유한하므로 분자도 0으로 가야 한다. 다항함수는 연속이므로 $f(2) = f(3) = 0$이다. 따라서 **인수정리**에 의해 $f(x) = (x-2)(x-3)(ax+b)$로 놓을 수 있다. 여기서 $a \neq 0$이며, x^3의 계수는 a이다.

2. 첫 번째 극한 적용: $x \neq 2$에서 $\frac{f(x)}{x-2} = (x-3)(ax+b)$이다. 약분한 식에 $x = 2$를 대입하면 $-(2a+b) = 5$이므로 $2a + b = -5$이다. 이때 남은 인수 $x - 3$의 값이 **−1**이라는 점에 주의한다.

3. 두 번째 극한 적용: $x \neq 3$에서 $\frac{f(x)}{x-3} = (x-2)(ax+b)$이다. 약분한 식에 $x = 3$을 대입하면 $3a + b = 1$이다.

4. 최고차항의 계수 계산: 두 식을 빼면 $(3a+b) - (2a+b) = 1 - (-5)$이므로 $a = 6$이다. 따라서 $f(x)$의 x^3의 계수는 6이며, ③에 해당한다.

NoteBase

문 12. $f(n)=\sum_{i=1}^{n}(i^2+i+3)$**일 때,** $f(12)$**의 값은?**

① 762

② 763

③ 764

④ 765

정답 3번

간단한 해설

합을 **제곱항·일차항·상수항으로 나누어** 구하면 각각 650, 78, 36이다. 이를 더하면 $f(12)=764$이다.

계산 과정

합의 분리: $f(12)$는 i^2+i+3에 i = 1부터 12까지 차례로 대입한 12개 항의 합이다. 합의 성질에 따라 제곱항, 일차항, 상수항을 각각 더한 뒤 합칠 수 있다.

제곱항의 합: 자연수 n에 대한 제곱합 공식 $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 이용한다. n = 12를 대입하면 $\sum_{i=1}^{12} i^2=\frac{12\cdot 13\cdot 25}{6}=650$이다.

일차항과 상수항의 합: 1부터 12까지의 합은 첫 항과 끝 항의 합에 항의 개수를 곱한 뒤 2로 나누므로 $\sum_{i=1}^{12} i=\frac{12\cdot 13}{2}=78$이다. 상수 3은 **12번 더해지므로** 그 합은 $3\times 12=36$이다.

전체 합: 세 부분을 합하면 $f(12)=650+78+36=764$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. 다항식 $x^{100}-ax^2+3$을 $x-1$로 나눈 몫은 $f(x)$이고, 나머지가 1일 때, $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는? (단, a는 상수이다.)

① 100

② 98

③ 96

④ 94

정답 4번

간단한 해설

나머지 조건에서 $a=3$이다. 몫은 $x^{100}-1$을 $x-1$로 나눈 몫에서 $3(x+1)$을 뺀 다항식이므로, $x=1$을 대입한 **구하는 나머지**는 $100-6=94$이다.

계산 과정

1. 상수 구하기: 다항식을 $x-1$로 나눈 나머지는 $x=1$**을 대입한 값**이다. 주어진 나머지가 1이므로 $1-a+3=1$에서 $a=3$을 얻는다.

2. 몫 구하기: 원래 다항식에서 나머지 1을 빼면 $(x^{100}-1)-3(x^2-1)$이 된다. 이를 $x-1$로 나누면 주어진 몫 $f(x)$를 얻는다. 거듭제곱의 차를 인수분해하면 $x^{100}-1$을 $x-1$로 나눈 몫은 $S(x)=x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$이다. 또한 $x^2-1=(x-1)(x+1)$이므로 $f(x)=S(x)-3(x+1)$이다.

3. 몫의 나머지 구하기: $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지도 나머지정리에 따라 $f(1)$이다. $S(x)$는 99차항부터 상수항까지 **총 100개의 항**으로 이루어져 있고, $x=1$일 때 각 항이 모두 1이므로 $S(1)=100$이다. 따라서 $f(1)=100-3(1+1)=94$이며, 이는 ④의 값이다.

NoteBase

문 14. xy **평면에 놓인 두 원** $x^2+y^2+2x-4y+1=0$, $x^2+(y+3)^2=20$**의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?**

① -5

② 5

③ -3

④ 3

정답 1번

간단한 해설

원의 넓이를 이등분하는 직선은 **원의 중심**을 지난다. 두 중심 $(-1,2)$, $(0,-3)$을 잇는 직선의 기울기는 -5이다.

계산 과정

원의 중심을 지나는 직선은 원을 합동인 두 반원으로 나눈다. 중심을 지나지 않으면 양쪽 넓이가 달라지므로, 두 원의 넓이를 모두 이등분하려면 **두 원의 중심을 모두 지나는 직선**을 구해야 한다.

첫 번째 원: 주어진 식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$이다. 따라서 중심은 $A(-1,2)$이다.

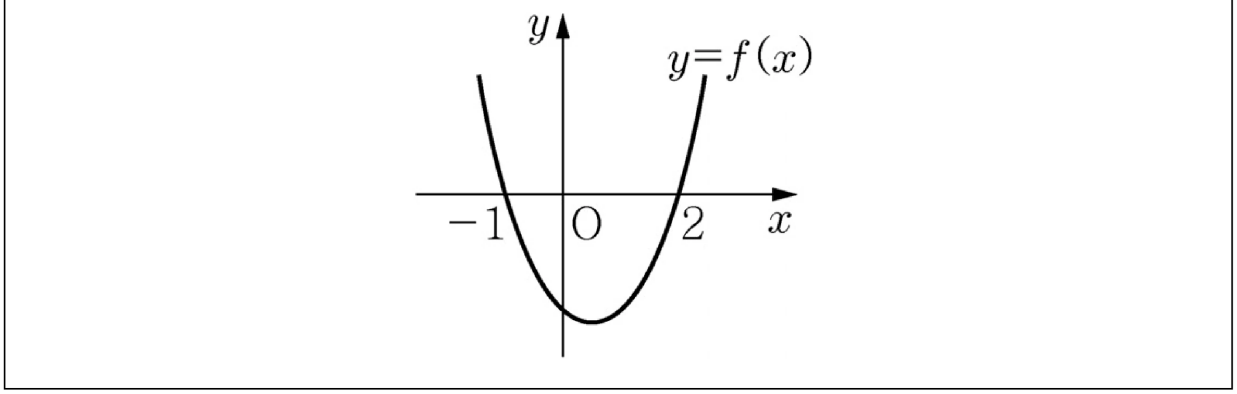
두 번째 원: $x^2+(y+3)^2=20$에서 중심은 $B(0,-3)$이다.

기울기 계산: 두 점을 잇는 직선의 기울기는 **세로 좌표의 변화량을 가로 좌표의 변화량으로 나눈 값**이다. 따라서 $m=\frac{-3-2}{0-(-1)}=\frac{-5}{1}=-5$이다. 구하는 기울기는 -5이며, ①에 해당한다.

NoteBase

문 15. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 <보기>와 같을 때, 이차부등식 $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) \le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

<보기>



① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 2번

간단한 해설

그래프에서 함수값이 0 이하인 입력값의 범위는 $-1 \le t \le 2$이다. 여기에 $t = \frac{2x-1}{3}$을 대입해 풀면 $-1 \le x \le \frac{7}{2}$이므로, 이 범위에 속하는 **정수는 5개**이다.

계산 과정

그래프의 부호: 포물선은 위로 열린 모양이며, 가로축과 만나는 점의 가로좌표는 -1과 2이다. 따라서 $f(t) \le 0$이려면 입력값 t가 $-1 \le t \le 2$를 만족해야 한다. 이는 그래프가 **가로축과 만나거나 그 아래에 있는 구간**이며, 등호가 있으므로 두 교점도 포함한다.

입력값을 대입하여 풀기: $t = \frac{2x-1}{3}$이므로 $-1 \le \frac{2x-1}{3} \le 2$이다. 세 부분에 양수 3을 곱하면 $-3 \le 2x - 1 \le 6$이고, 각각 1을 더하면 $-2 \le 2x \le 7$이다. 다시 양수 2로 나누면 $-1 \le x \le \frac{7}{2}$이다. **양수를 곱하거나 나누므로** 부등호의 방향은 유지된다.

정수의 개수: 구한 범위에 속하는 정수는 -1, 0, 1, 2, 3이다. 따라서 정수의 개수는 5개이며, ②의 5에 해당한다.

NoteBase

문 16. $(2x^2 - \frac{1}{x})^7$**을 전개하였을 때, x^2의 계수는?**

① 70

② 140

③ 210

④ 280

정답 4번

간단한 해설

x^2항은 $-\frac{1}{x}$**를 4번**, $2x^2$을 3번 골라 곱할 때 나온다. 이 항의 계수는 $\binom{7}{4} \cdot 2^3 \cdot (-1)^4 = 280$이다.

계산 과정

이항정리는 같은 괄호 7개에서 항을 하나씩 골라 곱하는 경우를 묶어 전개하는 공식이다. $-\frac{1}{x}$를 고르는 횟수를 k라 하면, $2x^2$은 $7-k$번 고른다. 여기서 k는 0부터 7까지의 정수이고, 그 선택 방법은 $\binom{7}{k}$가지이다. 따라서 일반항은 $\binom{7}{k}2^{7-k}(-1)^k x^{14-3k}$이다.

x의 지수는 $2(7-k)-k = 14-3k$이므로, **구하려는 항의 지수를 2로 맞춘다**. $14-3k=2$를 풀면 $k=4$이다. 즉, $-\frac{1}{x}$를 4번, $2x^2$을 3번 고른 항만 계산하면 된다.

선택 방법의 수는 $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$이다. 각 곱에서 수 부분은 $2^3 \cdot (-1)^4 = 8$이며, **음수 부호가 짝수 번 곱해지므로 양수**가 된다. 따라서 x^2의 계수는 $35 \times 8 = 280$으로, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 좌표평면 위에 두 점 $P(3,1), S(1,2)$가 있다. Q가 x축 위에서 움직이고, R이 y축 위에서 움직일 때, $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}$의 최솟값은?

① 4

② 5

③ $4\sqrt{2}$

④ $5\sqrt{2}$

정답 2번

간단한 해설

두 끝점을 각각 x축과 y축에 대칭이동하면, 거리의 합을 **두 대칭점 사이의 직선거리**와 비교할 수 있다. 그 선분이 두 축을 차례로 지나므로 최솟값은 두 대칭점 사이의 거리인 5이다.

계산 과정

대칭점 설정: $P(3,1)$을 x축에 대칭이동한 점을 $P'(3,-1)$, $S(1,2)$를 y축에 대칭이동한 점을 $S'(-1,2)$라 하자. Q는 x축 위에 있으므로 $\overline{PQ}=\overline{P'Q}$이고, R은 y축 위에 있으므로 $\overline{RS}=\overline{RS'}$이다. 따라서 구하는 거리의 합은 경로 $P'\to Q\to R\to S'$의 길이와 같다.

거리의 하한: **두 점을 잇는 꺾인 경로는 직선거리보다 짧을 수 없다.** 따라서 이 경로의 길이는 $\overline{P'S'}$ 이상이다. 두 대칭점의 가로 좌표 차이는 4, 세로 좌표 차이는 3이므로, 두 점 사이의 거리는 $\overline{P'S'}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이다.

하한의 실현: 실제로 길이가 5가 되려면 **네 점이 경로의 순서대로 한 직선 위에 놓여야 한다.** 직선 $P'S'$의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$이다. 이 선분은 x축과 $Q\left(\frac{5}{3},0\right)$에서, y축과 $R\left(0,\frac{5}{4}\right)$에서 만난다. 선분 위에서 점들이 P', Q, R, S' 순서로 놓이므로, 이때 꺾인 경로의 길이가 직선거리 5와 같아진다.

결과: 모든 경로의 길이는 5 이상이고 실제로 5인 경로가 존재하므로, 구하는 최솟값은 5이며 ②에 해당한다.

NoteBase

문 18. x에 대한 이차방정식 $ax^2 + (k+1)x - b(2+k) + a + 3 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 2를 근으로 가질 때, 상수 a, b에 대하여 5a+b의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

정답 3번

간단한 해설

2가 항상 근이므로 대입하여 얻은 식은 모든 실수 k에 대해 성립하는 **항등식**이다. k의 계수와 상수항을 각각 0으로 두면 $b = 2$, $5a = -1$이므로 $5a + b = 1$이다.

계산 과정

1. 근의 조건 적용: 2가 주어진 이차방정식의 근이라는 것은 $x = 2$**를 대입하면 좌변이 0**이라는 뜻이다. 대입하면 $4a + 2(k+1) - b(2+k) + a + 3 = 0$이고, 이를 k에 관하여 정리하면 $(2-b)k + (5a - 2b + 5) = 0$이다.

2. 상수 결정: 이 등식은 특정한 값에서만이 아니라 **모든 실수 k에 대해 성립**해야 한다. k의 계수가 0이 아니면 등식이 성립하는 k는 하나뿐이므로, $2 - b = 0$이어야 한다. 남은 상수항도 0이어야 하므로 $5a - 2b + 5 = 0$이다. 따라서 $b = 2$이고, 이를 대입하면 $5a + 1 = 0$이므로 $a = -\frac{1}{5}$이다. 이 값은 0이 아니므로 이차방정식이라는 조건도 만족한다.

3. 구하는 값 계산: $5a = -1$, $b = 2$이므로 $5a + b = -1 + 2 = 1$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 함수 F(x)= ∫ _5^x(t^3+(1)/(2)t^2+2t) dt에 대하여 $f(x) = F'(x)$라 할 때, $f'(x) = 4$가 되는 양수 x의 값은?

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{2}{3}$
③ 1
④ $\frac{4}{3}$

정답 2번

간단한 해설

미적분의 기본정리로 $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$이므로 $f'(x) = 3x^2 + x + 2$이다. $f'(x) = 4$의 두 해 중 **양수 조건**을 만족하는 값은 $x = \frac{2}{3}$이다.

계산 과정

적분 안의 함수는 다항함수이므로 연속이다. 따라서 **미적분의 기본정리**에 의해, 아래끝이 상수 5이고 위끝이 x인 정적분을 미분하면 적분 안의 식에 $t = x$를 대입한 식을 얻는다. 즉, $f(x) = F'(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$이다.

구하는 조건은 $f(x) = 4$가 아니라 **한 번 더 미분한 함수의 값이 4**인 것이다. 각 항을 미분하면 $f'(x) = 3x^2 + x + 2$이므로, $3x^2 + x + 2 = 4$에서 $3x^2 + x - 2 = 0$을 얻는다.

이차방정식을 인수분해하면 $(3x - 2)(x + 1) = 0$이므로 $x = \frac{2}{3}$ 또는 $x = -1$이다. 이 중 **양수인 해만** 택하면 $x = \frac{2}{3}$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 함수 $y=\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos^2\theta-4\sin(\theta+\pi)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, M+m의 값은? (단, $0\le\theta<2\pi$이다.)

① 1

② −1

③ 3

④ −3

정답 1번

간단한 해설

$t=\sin\theta$로 치환하면 $y=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-4$이고, **변수의 범위**는 $-1\le t\le 1$이다. 이 구간에서 최댓값은 5, 최솟값은 −4이므로 두 값의 합은 1이다.

계산 과정

삼각함수의 덧셈공식에 따라 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$, $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$이다. 따라서 첫 항은 제곱으로 부호가 없어지고, 마지막 항은 $4\sin\theta$가 된다. 여기에 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$를 대입하면 $y=4\sin^2\theta+4\sin\theta-3$으로 정리된다.

$t=\sin\theta$로 놓는다. 주어진 $0\le\theta<2\pi$에서 사인은 −1부터 1까지의 모든 값을 가지므로 **치환한 변수의 범위**는 $-1\le t\le 1$이다. 식을 완전제곱식으로 바꾸면 $y=4t^2+4t-3$, 즉 $y=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-4$이다.

최솟값: 제곱항은 0 이상이고, $t=-\frac{1}{2}$은 허용 범위 안에 있다. 따라서 **꼭짓점에서 최솟값**을 가지며, 제곱항이 0이 될 때 $m=-4$이다.

최댓값: 위로 열린 포물선이므로 이 구간의 최댓값은 **양 끝값을 비교**하여 구한다. $t=-1$일 때 $y=4-4-3=-3$이고, $t=1$일 때 $y=4+4-3=5$이므로 $M=5$이다.

따라서 M + m = 5 + (−4) = 1이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase