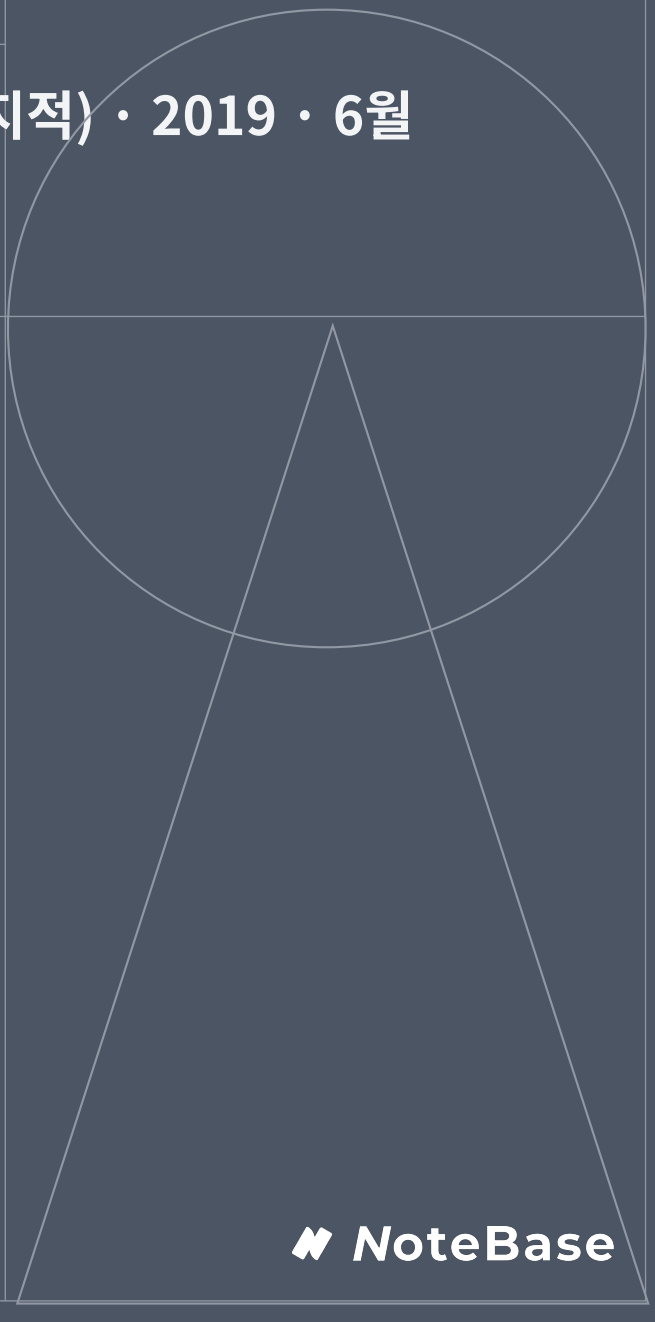
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학(지적) · 2019 · 6월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학(지적) · 2019 · 6월

공무원/서울시/9급 · 수학(지적) · 2019 · 6월

문 1. $\alpha = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$이고 $\beta = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$일 때 $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① $14\sqrt{5}$
② $14\sqrt{3}$
③ $28\sqrt{5}$
④ $28\sqrt{3}$

정답 3번

간단한 해설

$\alpha + \beta = 2\sqrt{5}$, $\alpha\beta = 2$이므로 **세제곱의 합 공식**을 적용하면 $\alpha^3 + \beta^3 = 28\sqrt{5}$이다.

계산 과정

제곱의 합: 주어진 두 식을 제곱하면 $\alpha^2 = 8 + 2\sqrt{15}$, $\beta^2 = 8 - 2\sqrt{15}$이다. 이를 더하면 근호를 포함한 항이 소거되어 $\alpha^2 + \beta^2 = 16$을 얻는다.

두 수의 곱: α와 β는 모두 양수이므로 $\alpha\beta = \sqrt{(8 + 2\sqrt{15})(8 - 2\sqrt{15})}$이다. 근호 안에 합차공식을 적용하면 $\alpha\beta = \sqrt{64 - 60} = 2$이다.

두 수의 합: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$이므로 $(\alpha + \beta)^2 = 16 + 4 = 20$이다. **두 수의 합이 양수**이므로 $\alpha + \beta = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$이다.

세제곱의 합: 전개하면 성립하는 항등식 $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$을 이용한다. 두 번째 인수는 $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 16 - 2 = 14$이다. 따라서 $\alpha^3 + \beta^3 = 2\sqrt{5} \cdot 14 = 28\sqrt{5}$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. 방정식 $x^2 - 3x + 1 = \sqrt{(x-2)^2}$을 만족하는 모든 실수 x의 합은?

① 5

② 6

③ $4 - \sqrt{2}$

④ $2 - \sqrt{2}$

정답 3번

간단한 해설

$\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$이므로 **절댓값 안의 부호에 따라 구간을 나눈다**. 각 구간의 조건을 만족하는 실근은 3과 $1 - \sqrt{2}$이며, 그 합은 $4 - \sqrt{2}$이다.

계산 과정

제곱근은 음이 아닌 값을 나타내므로 $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$이다. 따라서 주어진 방정식은 $x^2 - 3x + 1 = |x-2|$이며, 절댓값 안의 식이 0이 되는 $x = 2$를 기준으로 구간을 나눈다.

$x \geq 2$인 경우: $|x-2| = x - 2$이므로 $x^2 - 3x + 1 = x - 2$이다. 정리하면 $x^2 - 4x + 3 = 0$, 즉 $(x-1)(x-3) = 0$이므로 $x = 1$ 또는 $x = 3$이다. 이 중 **해당 구간의 조건을 만족하는 근만** 남겨야 하므로 $x = 1$은 제외하고 $x = 3$을 얻는다.

$x < 2$인 경우: $|x-2| = 2 - x$이므로 $x^2 - 3x + 1 = 2 - x$이다. 정리하면 $x^2 - 2x - 1 = 0$이고, 완전제곱식으로 바꾸면 $(x-1)^2 = 2$이므로 $x = 1 \pm \sqrt{2}$이다. $1 + \sqrt{2} > 2$이므로 이 근은 제외하고, $x < 2$를 만족하는 $x = 1 - \sqrt{2}$만 남는다.

두 구간이 모든 실수를 포함하므로 모든 실근은 3과 $1 - \sqrt{2}$이다. 그 합은 $3 + (1 - \sqrt{2}) = 4 - \sqrt{2}$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. $(x^2+\frac{k}{x})^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$의 계수가 80일 때, 자연수 k의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

다섯 인수 중 **분수항을 네 번 선택**하면 x^2를 한 번 선택하므로 $\frac{1}{x^2}$의 계수는 $5k^4$이다. $5k^4=80$이고 k는 자연수이므로 $k=2$이다.

계산 과정

일반항: $(x^2+\frac{k}{x})^5$는 같은 인수 다섯 개를 곱한 식이다. 이 중 $\frac{k}{x}$를 선택하는 횟수를 r라 하면 x^2는 $5-r$번 선택하며, r는 0부터 5까지의 정수이다. 선택하는 방법의 수가 $\binom{5}{r}$이므로 해당 항은 $\binom{5}{r}(x^2)^{5-r}(\frac{k}{x})^r$이다. 이를 정리하면 $\binom{5}{r}k^r x^{10-3r}$이다.

해당 항 찾기: $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$이므로 **일반항의 지수를 −2와 같게** 놓는다. $10-3r=-2$를 풀면 $r=4$이다. 즉, 분수항을 네 번 선택하고 x^2를 한 번 선택한다. 이때 $\binom{5}{4}=5$이므로 해당 항은 $5k^4x^{-2}$이며, 그 계수는 $5k^4$이다.

자연수 조건 적용: 계수가 80이므로 $5k^4=80$, 즉 $k^4=16$이다. 실수 범위에서는 $k=\pm2$이지만, **자연수라는 조건**에 따라 $k=2$이다. 이는 ②의 값 2와 일치한다.

NoteBase

문 4. $f(x) = 3x^2 + 1$일 때 _n→∞ Σ _k=1^n f≤ft(1+(2k)/(n))(1)/(n)의 값은?

① 14

② 28

③ 29

④ 58

정답 1번

간단한 해설

함숫값을 취하는 점 사이의 간격은 $\frac{2}{n}$인데 합에 곱해진 값은 $\frac{1}{n}$이므로, 주어진 극한은 **구간 [1, 3]에서 정적분한 값의 절반**이다. 따라서 $\frac{1}{2}\int_1^3 (3x^2 + 1)dx = 14$이다.

계산 과정

구간과 분할 간격: $x_k = 1 + \frac{2k}{n}$으로 놓으면, 이는 구간 [1, 3]을 n등분했을 때 각 소구간의 오른쪽 끝점이다. 따라서 **분할 간격**은 $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$이다.

정적분으로 변환: $f(x) = 3x^2 + 1$은 [1, 3]에서 연속이므로, 함숫값에 분할 간격을 곱한 합의 극한은 정적분과 같다. 그런데 문제의 계수는 $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\Delta x$이므로, 구하려는 값은 **정적분의 절반**인 $\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$이다.

적분 계산: $3x^2 + 1$의 한 부정적분은 $x^3 + x$이다. 이에 따라 $\int_1^3 (3x^2 + 1)dx = [x^3 + x]_1^3$이고, 그 값은 $(27 + 3) - (1 + 1) = 28$이다. 여기에 $\frac{1}{2}$을 곱하면 $\frac{1}{2} \cdot 28 = 14$이므로, 주어진 극한값은 ①의 14와 일치한다.

NoteBase

문 5. 복소수 $z = 1 + \sqrt{5}i$일 때, $z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 4z + 20$의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 4번

간단한 해설

주어진 복소수는 $z^2 - 2z + 6 = 0$을 만족한다. 구하려는 식을 **이 이차식의 배수와 나머지**로 정리하면 나머지 8만 남는다.

계산 과정

1. 복소수가 만족하는 이차식: $z = 1 + \sqrt{5}i$이므로 $z - 1 = \sqrt{5}i$이다. 양변을 제곱하고 $i^2 = -1$을 적용하면 $(z-1)^2 = -5$이다. 이를 전개하여 정리하면 $z^2 - 2z + 6 = 0$을 얻는다.

2. 주어진 식 정리: 구하려는 값을 $P = z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 4z + 20$이라 하자. **값이 0인 이차식을 묶어 내기** 위해 $8z^2 = 6z^2 + 2z^2$으로 나누면 다음과 같다.
$P = z^2(z^2 - 2z + 6) + 2z^2 - 4z + 20$
$P = (z^2 + 2)(z^2 - 2z + 6) + 8$

3. 값 계산: $z^2 - 2z + 6 = 0$이므로 이 식이 곱해진 항 전체가 0이 된다. 따라서 $P = (z^2 + 2) \cdot 0 + 8 = 8$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. N을 자연수의 집합, $A = \{a \in N \mid a^2 - 36 \le 0\}$, 그리고 $B = \{a \in N \mid$ 세 직선 $y = x$, $y = 0$, $x = a$로 둘러싸인 영역의 면적이 10보다 작거나 같다$\}$라고 하자. 집합 $A \cap B^c$의 원소의 개수는?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 1번

간단한 해설

세 직선이 만드는 삼각형의 넓이는 $\frac{a^2}{2}$이므로 B의 원소는 1, 2, 3, 4이다. $A \cap B^c$는 **A에 속하지만 B에는 속하지 않는 원소**의 집합이므로, 남는 원소는 5와 6으로 모두 2개이다.

계산 과정

A의 원소: $a^2 - 36 \le 0$에서 $a^2 \le 36$이다. a는 자연수이므로 $1 \le a \le 6$이고, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이다.

B의 원소: 세 직선 $y = x$, $y = 0$, $x = a$의 교점은 각각 $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a)이다. 따라서 둘러싸인 영역은 **밑변과 높이가 모두 a인 직각삼각형**이고, 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$이다. 넓이가 10 이하라는 조건에서 $\frac{a^2}{2} \le 10$, 즉 $a^2 \le 20$을 얻는다. $4^2 = 16 \le 20 < 25 = 5^2$이므로 가능한 자연수 a는 1, 2, 3, 4이며, $B = \{1, 2, 3, 4\}$이다.

교집합의 원소 개수: B^c는 전체집합 N에서 B에 속하지 않는 원소들의 집합이다. 따라서 $A \cap B^c$를 구할 때는 **A에서 B의 원소를 제외**한다. $A \cap B^c = \{5, 6\}$이므로 원소의 개수는 2이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + 8$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서 접선의 방정식이 y축과 만나는 점을 $P(a)$라 하자. $1 \leq a \leq 5$일 때, $P(a)$의 자취의 길이는?

① 24

② 27

③ 30

④ 33

정답 1번

간단한 해설

접선과 y축의 교점은 $P(a) = (0, 8 - a^2)$이다. $1 \leq a \leq 5$에서 y좌표가 7부터 −17까지 연속적으로 감소하므로, 자취는 **y축 위의 선분**이며 길이는 24이다.

계산 과정

접선의 기울기는 접점에서의 미분계수이므로, $f\prime(x) = 2x - 4$에서 $f\prime(a) = 2a - 4$이다. 점 $(a, f(a))$를 지나는 접선의 방정식은 $y - f(a) = (2a - 4)(x - a)$이고, 이를 정리하면 $y = (2a - 4)x + 8 - a^2$이다.

y축 위에서는 **x좌표가 0**이므로 $P(a) = (0, 8 - a^2)$이다. $1 \leq a \leq 5$에서 a^2은 연속적으로 증가하므로 $8 - a^2$은 연속적으로 감소한다. 양 끝에서 $P(1) = (0, 7)$, $P(5) = (0, -17)$이므로 자취는 이 두 점을 잇는 선분 전체이다.

두 점의 x좌표가 같으므로 선분의 길이는 **y좌표 차의 절댓값**이다. 따라서 자취의 길이는 $7 - (-17) = 24$이며, ①의 24와 일치한다.

NoteBase

문 8. $f(x)=x^{10}+1$일 때 _h→0(f(1+h)+h-2)/(2h)의 값은?

① $\frac{9}{2}$

② 5

③ $\frac{11}{2}$

④ 6

정답 3번

간단한 해설

미분계수의 정의를 이용하면 주어진 극한은 $\frac{f'(1)+1}{2}$이다. $f'(1)=10$이므로 그 값은 $\frac{11}{2}$이다.

계산 과정

미분계수 꼴로 변형: $f(1)=1^{10}+1=2$이므로 분자의 상수 2를 $f(1)$로 바꾼다. $h\neq 0$일 때 주어진 분수는 $\frac{1}{2}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+1\right\}$로 정리된다. 이때 분자의 **추가된 h를 h로 나눈 값은 1**이다.

미분계수 계산: 다항함수는 미분 가능하므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이다. 이는 $x=1$에서의 순간변화율을 뜻한다. $f(x)=x^{10}+1$을 미분하면 $f'(x)=10x^{9}$이므로 $f'(1)=10$이다.

극한값 계산: 앞에서 구한 미분계수를 대입하면 $\frac{f'(1)+1}{2}=\frac{10+1}{2}=\frac{11}{2}$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 함수 f(x)=_n→∞(3x^2n+2+a)/(x^2n+2)에 대하여, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극한값을 가지기 위한 실수 a의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 3번

간단한 해설

$x=1$에서 극한값이 존재하려면 **좌극한과 우극한이 같아야** 한다. 좌극한은 $\frac{a}{2}$, 우극한은 3이므로 $a=6$이다.

계산 과정

먼저 x를 고정하고 $n\to\infty$일 때의 극한을 구해 $f(x)$를 정한다. 그런 다음 x가 1에 가까워질 때의 좌극한과 우극한을 비교한다.

1의 왼쪽: $0<x<1$이면 $n\to\infty$일 때 $x^{2n}\to 0$, $x^{2n+2}\to 0$이다. 따라서 분자는 a, 분모는 2에 수렴하므로 $f(x)=\frac{a}{2}$이다. 이 구간에서 함수가 일정하므로 $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{a}{2}$이다.

1의 오른쪽: $x>1$이면 $x^{2n}\to\infty$이므로 분자와 분모를 **같은 거듭제곱으로 나누어** 극한을 구한다. 각각 x^{2n}으로 나누면 분자는 $3x^2+ax^{-2n}$, 분모는 $1+2x^{-2n}$이다. $x^{-2n}\to 0$이므로 $f(x)=3x^2$이고, 따라서 $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$이다.

극한값의 존재 조건: **좌극한과 우극한이 같아야** 하므로 $\frac{a}{2}=3$을 만족해야 한다. 이를 풀면 $a=6$이며, 선택지 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. <보기>의 조건을 만족시키는 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는?

<보기>

· $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

· $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

· $1, 2 \notin A \cap B$

① 32

② 34

③ 36

④ 38

정답 2번

간단한 해설

1과 2는 두 집합 중 한 곳에만, 3과 4는 한 곳 또는 양쪽에 넣을 수 있으므로 전체 경우는 $2^2 \cdot 3^2 = 36$가지이다. 여기서 **한 집합이 공집합인 두 경우를 제외**하면 34가지이다.

계산 과정

원소의 소속을 정하면 순서쌍 (A, B)가 결정된다. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$이므로 네 원소는 각각 적어도 한 집합에 속해야 하며, 다른 원소는 들어갈 수 없다. 순서쌍이므로 A와 B의 역할을 구별하여 센다.

1과 2의 소속: $1, 2 \notin A \cap B$이므로 두 원소는 각각 **A에만 속하거나 B에만 속해야 한다**. 따라서 각 원소의 소속을 정하는 방법은 2가지이고, 두 원소를 함께 정하는 방법은 $2^2 = 4$가지이다.

3과 4의 소속: 교집합에 대한 제한이 없으므로 각 원소는 A에만, B에만, 양쪽 모두에 속하는 3가지 중 하나를 택할 수 있다. 두 원소를 함께 정하는 방법은 $3^2 = 9$가지이다. 각 원소의 소속을 독립적으로 정할 수 있으므로, 공집합 조건을 적용하기 전에는 $4 \times 9 = 36$가지이다.

공집합인 경우 제외: 앞의 36가지에는 $A = \emptyset, B = \{1, 2, 3, 4\}$인 경우와 그 반대인 경우가 각각 하나씩 포함되어 있다. 합집합 조건 때문에 두 집합이 동시에 공집합일 수는 없으므로, **두 경우를 한 번씩 빼면 된다**. 따라서 두 집합이 모두 공집합이 아닌 순서쌍은 $36 - 2 = 34$가지이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$과 $a_{n+1} = 2a_n + 1, n = 1, 2, 3, \cdots$을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 값은?

① $2^{100} - 100$

② $2^{100} - 101$

③ $2^{101} - 101$

④ $2^{101} - 102$

정답 4번

간단한 해설

각 항에 1을 더한 수열은 첫째항과 공비가 모두 2인 등비수열이므로 $a_n = 2^n - 1$이다. 처음 100개 항을 더하면 1도 100번 빼야 하므로, 합은 $2^{101} - 102$이다.

계산 과정

1. 등비수열로 변형: 주어진 점화식의 양변에 1을 더하면 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$이다. 따라서 $b_n = a_n + 1$로 놓으면 $b_{n+1} = 2b_n$이고, $b_1 = a_1 + 1 = 2$이다. 즉, $\{b_n\}$은 **첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열**이다.

2. 일반항 구하기: 등비수열의 일반항은 첫째항에 공비를 항 번호보다 하나 적은 횟수만큼 곱한 값이다. 따라서 $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이다. 원래 수열은 각 항에서 1을 빼서 얻으므로 $a_n = b_n - 1 = 2^n - 1$이다.

3. 처음 100개 항의 합 구하기: $T = \sum_{k=1}^{100} 2^k$로 놓으면, 첫째항 2, 공비 2인 등비수열의 100개 항의 합이므로 $T = \frac{2(2^{100} - 1)}{2 - 1} = 2^{101} - 2$이다. 구하려는 합에서는 **각 항의 1을 총 100번 빼야 한다**. 따라서 $\sum_{k=1}^{100} a_k = T - 100$이고, 그 값은 $2^{101} - 102$로 ④의 식과 일치한다.

NoteBase

문 12. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고, 임의의 자연수 n에 대하여 $a_1 a_2 \cdots a_n = 2^{n^2}$을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\log_2 a_n \times \log_2 a_{n+1}}$의 값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

① 290

② 301

③ 311

④ 321

정답 2번

간단한 해설

곱의 조건에서 $\log_2 a_n = 2n-1$을 얻으며, 각 항을 **두 분수의 차**로 바꾸면 중간항이 소거된다. 합은 $\frac{100}{201}$이므로 분모와 분자의 합은 301이다.

계산 과정

1. 일반항과 로그 구하기: n≥2일 때, 첫째 항부터 제n항까지의 곱을 제$n-1$항까지의 곱으로 나누면 **마지막 항만 남는다**. 따라서 $a_n = \frac{2^{n^2}}{2^{(n-1)^2}} = 2^{2n-1}$이다. 이 식은 $n=1$에서도 주어진 $a_1 = 2$와 일치한다. 그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $\log_2 a_n = 2n-1$, $\log_2 a_{n+1} = 2n+1$이다.

2. 부분분수로 바꾸기: 구하려는 합의 일반항은 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$이다. 두 분모의 차가 2이므로 $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$이다. 따라서 원래 항은 이 차에 **1/2을 곱한 값**인 12≤ft((1)/(2n-1)-(1)/(2n+1))으로 나타낼 수 있다.

3. 합 계산하기: 바꾼 식의 첫 항은 12≤ft(1-13), 둘째 항은 12≤ft(13-15), 마지막 항은 12≤ft((1)/(199)-(1)/(201))이다. 이들을 더하면 앞 항에서 빼는 분수를 다음 항에서 다시 더하므로 **중간항이 모두 소거**된다. 합을 S라 하면 S=12≤ft(1-(1)/(201))=(100)/(201)이다.

4. 분모와 분자의 합 구하기: 201 = 2 × 100 + 1이므로 100과 201은 서로소이다. 따라서 $\frac{q}{p} = \frac{100}{201}$에서 p = 201, q = 100이며, p + q = 301로 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. 이차방정식 $x^2 - 2kx + k + 2 = 0$의 근 중 적어도 하나가 절댓값이 1 이하가 되도록 하는 100 이하 자연수 k의 개수는?

① 83

② 88

③ 93

④ 98

정답 4번

간단한 해설

이차함수 $f(x) = x^2 - 2kx + k + 2$는 구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $f(-1) > 0$이므로, 이 구간에 근이 있으려면 $f(1)$**이 0 이하**여야 한다. 따라서 k≥3이며, 100 이하 자연수 중 이를 만족하는 값은 98개이다.

계산 과정

조건 해석: 근의 절댓값이 1 이하라는 것은 근이 구간 $[-1, 1]$에 있다는 뜻이다. $f(x) = x^2 - 2kx + k + 2$라 두면, k는 100 이하 자연수이므로 1≤ k≤100이다. 이 함수의 그래프는 위로 열린 포물선이고 축이 $x = k$ 이므로, 축의 왼쪽에 있는 **구간** $[-1, 1]$**에서 감소**한다.

근의 존재 조건: 양 끝의 함수값은 $f(-1) = 3k + 3 > 0$, $f(1) = 3 - k$이다. 이 구간에서 함수가 감소하므로 $f(1) > 0$이면 구간 전체에서 함수값이 양수여서 근이 없다. 반면 f(1)≤0이면 연속인 그래프가 구간 안에서 x축과 만나므로 적어도 하나의 근이 있다.

가능한 범위: 따라서 필요한 조건은 3-k≤0, 즉 k≥3이다. 특히 $k = 3$일 때는 $f(1) = 0$이므로 근 1을 가지며, 절댓값이 **1 이하**라는 조건에 포함된다.

개수 계산: 가능한 자연수 k는 3부터 100까지이므로 그 개수는 100 - 3 + 1 = 98개이다. 이는 ④의 98과 일치한다.

NoteBase

문 14. 모든 실수에서 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = x + |x - 1|$를 만족시킨다. $f(0) = 3$일 때, $f(-1) + f(2)$의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

정답 2번

간단한 해설

절댓값 안의 식의 **부호가 바뀌는 경계**인 $x = 1$을 기준으로 도함수를 나누어 적분한다. $f(0) = 3$을 적용하면 $f(-1) = 2$, $f(2) = 6$이므로 두 함수값의 합은 8이다.

계산 과정

절댓값을 풀면 $x \le 1$에서 $|x - 1| = 1 - x$이므로 $f'(x) = 1$이다. $x \ge 1$에서는 $|x - 1| = x - 1$이므로 $f'(x) = 2x - 1$이다. 따라서 **구간별로 도함수를 적분**하여 함수값을 구한다.

$x \le 1$에서 $f(x) = x + C$이다. $f(0) = 3$을 대입하면 적분상수는 $C = 3$이므로 $f(x) = x + 3$이다. 따라서 $f(-1) = 2$이고, 다음 구간을 연결할 기준값은 $f(1) = 4$이다.

$x \ge 1$에서 $f(x) = x^2 - x + D$이다. 함수가 모든 실수에서 미분 가능하므로 **경계에서도 연속**이다. 따라서 앞에서 구한 $f(1) = 4$를 적용하면 $D = 4$이고, $f(2) = 2^2 - 2 + 4 = 6$이다.

구하는 값은 $f(-1) + f(2) = 2 + 6 = 8$이며, 선택지 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. 한 점에서 만나는 두 직선 $l_1 : x = 2 + t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - t$와 $l_2 : x = 3 + t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1 + 2t$ 사이의 각을 θ라 할 때 $\cos\theta$는? (단, $0^\circ < \theta < 90^\circ$)

① $\frac{1}{3\sqrt{3}}$
② $\frac{1}{\sqrt{3}}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\sqrt{3}$

정답 1번

간단한 해설

두 직선의 **방향벡터**는 각각 $(1, 1, -1), (1, 2, 2)$이다. 두 벡터의 내적을 크기의 곱으로 나누면 $\cos\theta = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ 이다.

계산 과정

방향벡터 구하기: 직선의 매개변수식에서 **매개변수의 계수**는 그 직선의 방향을 나타낸다. 따라서 l_1의 방향벡터를 $\vec{a} = (1, 1, -1)$, l_2의 방향벡터를 $\vec{b} = (1, 2, 2)$로 잡는다.

내적과 크기 구하기: 대응하는 성분끼리 곱하여 더하면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 2 - 2 = 1$이다. 각 벡터의 크기는 성분의 제곱합에 제곱근을 취하므로 $|\vec{a}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$이다.

코사인 구하기: 두 직선이 이루는 **예각**의 코사인은 방향벡터의 내적의 절댓값을 두 벡터의 크기의 곱으로 나눈 값이다. 즉, $\cos\theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$이다. 계산한 값을 대입하면 $\cos\theta = \frac{1}{3\sqrt{3}}$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 좌표평면 위의 원점을 지나는 직선이 곡선 $y = x^4 + x^2 + 2$에 접할 때, 접점의 y좌표는?

① $\frac{28}{9}$

② $\frac{32}{9}$

③ 4

④ $\frac{40}{9}$

정답 1번

간단한 해설

접선이 **원점을 지난다는 조건**은 $f(a) = af'(a)$이다. 이 조건에서 접점의 x좌표는 $a^2 = \frac{2}{3}$을 만족하므로, 접점의 y좌표는 $\frac{28}{9}$이다.

계산 과정

함수를 $f(x) = x^4 + x^2 + 2$, 접점의 x좌표를 a라 하면 접점은 $(a, f(a))$이다. 접선의 기울기는 그 점에서의 미분계수이므로 $f'(a) = 4a^3 + 2a$이다.

접선의 방정식은 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$이다. 이 직선이 **원점 (0, 0)을 지나므로** $0 = -af'(a) + f(a)$, 즉 $af'(a) = f(a)$가 성립한다.

함수값과 미분계수를 대입하면 $a(4a^3 + 2a) = a^4 + a^2 + 2$이다. 이를 정리하면 $3a^4 + a^2 - 2 = 0$, 인수분해하면 $(3a^2 - 2)(a^2 + 1) = 0$이다. 실수 a에 대해 **항상 양수인 인수** $a^2 + 1$은 0이 될 수 없으므로 $a^2 = \frac{2}{3}$이다.

구하려는 값은 접점의 y좌표인 $f(a)$이다. $a^4 = (a^2)^2 = \frac{4}{9}$이므로 $f(a) = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + 2 = \frac{28}{9}$이다. 접점의 x좌표의 부호와 관계없이 y좌표는 같으며, 이 값은 ①에 해당한다.

NoteBase

문 17. 실수 x에 대해 $10^{3\log(2+\sin x)}+\cos^2 x$의 최댓값은? (단, log는 상용로그이다.)

① 27

② 28

③ 29

④ 30

정답 1번

간단한 해설

상용로그의 성질로 지수항은 $(2+\sin x)^3$이 된다. $t=\sin x$로 치환하면 **허용 범위에서 증가하는 함수**가 되므로, $t=1$일 때 최댓값 27을 갖는다.

계산 과정

1. 지수항 정리: -1≤ x≤1이므로 2+ x≥1>0이다. 따라서 상용로그의 성질 $10^{\log a}=a$를 적용할 수 있고, $10^{3\log(2+\sin x)}=(2+\sin x)^3$이다.

2. 한 변수로 치환: $t=\sin x$로 놓으면 -1≤ t≤1이고, $\cos^2 x=1-t^2$이다. 주어진 식은 $f(t)=(2+t)^3+1-t^2$, 즉 $f(t)=t^3+5t^2+12t+9$가 된다. 두 삼각함수의 값을 따로 정하지 않고 **같은 변수로 연결**해야 한다.

3. 증가 여부 확인: 미분하면 $f'(t)=3t^2+10t+12$이다. 허용 범위에서 3t^2≥0, $10t\geq -10$이므로 f'(t)≥2>0이다. 따라서 $f(t)$는 **구간 전체에서 증가**하므로 오른쪽 끝인 $t=1$에서 최대가 된다.

4. 최댓값 계산: $\sin x=1$은 $x=\frac{\pi}{2}$ 등에서 실제로 성립하며, 이때 $\cos x=0$이다. 따라서 $f(1)=(2+1)^3+1-1=27$이므로 최댓값은 27이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 확률변수 X는 0, 1 또는 2의 값을 가진다. 확률변수 $2X+3$의 평균이 6이고 분산이 2일 때, $X=2$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

① 11

② 13

③ 15

④ 17

정답 2번

간단한 해설

주어진 평균과 분산에서 $E(X)=\frac{3}{2}$, $E(X^2)=\frac{11}{4}$을 얻는다. **가능한 값이 0, 1, 2뿐**이므로 $E(X^2)-E(X)=2P(X=2)$이며, $P(X=2)=\frac{5}{8}$이므로 p + q = 13이다.

계산 과정

1. 평균 구하기: 평균은 상수를 곱하고 더한 만큼 변하므로 $E(2X+3)=2E(X)+3=6$이다. 이를 풀면 $E(X)=\frac{3}{2}$이다.

2. 분산 구하기: 상수를 더해도 평균으로부터의 편차는 변하지 않고, 2를 곱하면 편차가 2배가 된다. 분산은 편차의 제곱의 평균이므로 **계수의 제곱을 곱한다**. 따라서 $\mathrm{Var}(2X+3)=4\mathrm{Var}(X)=2$에서 $\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{2}$이다.

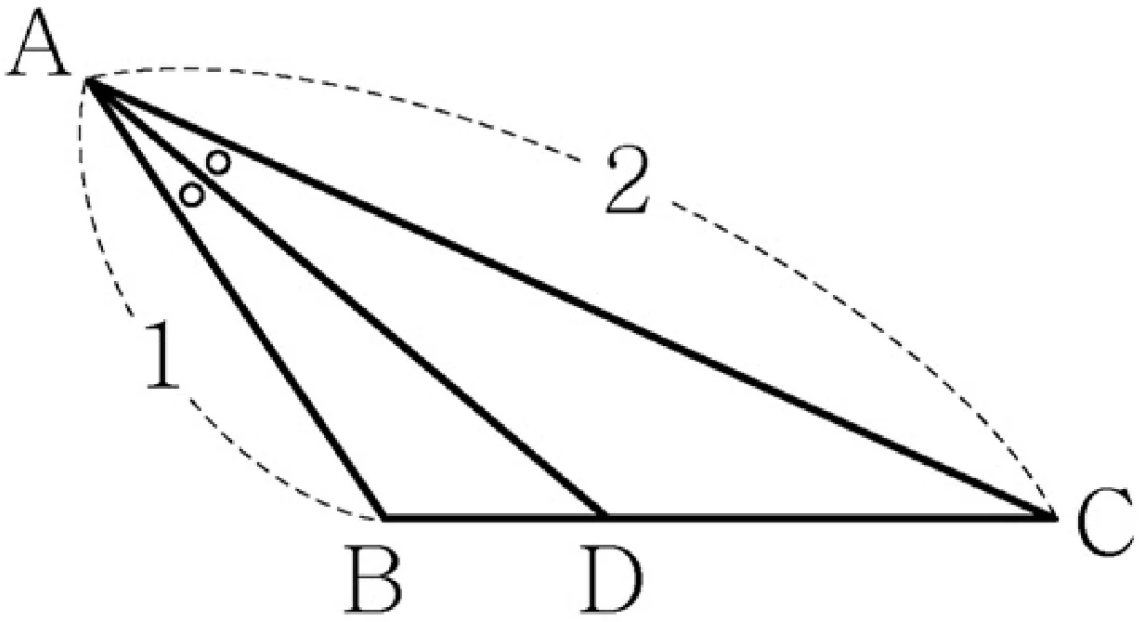
3. 제곱의 평균 구하기: 분산과 평균의 관계 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$를 이용한다. 따라서 $E(X^2)=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$이다.

4. 확률 구하기: X가 0 또는 1이면 $X^2-X=0$이고, 2이면 $X^2-X=2$이다. 따라서 **2일 때의 확률만 남도록** 두 평균을 빼면 $E(X^2)-E(X)=2P(X=2)$가 된다. 여기에 값을 대입하면 $2P(X=2)=\frac{11}{4}-\frac{3}{2}=\frac{5}{4}$이므로 $P(X=2)=\frac{5}{8}$이다.

5. 구하는 값: $\frac{5}{8}$은 기약분수이므로 p = 8, q = 5이다. 따라서 p + q = 13으로, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. △ABC에서 $\angle A = 30°$, $\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = 2$이다. $\angle A$의 이등분선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{BD}$ 길이의 제곱은?



① $\frac{1}{9}(5+2\sqrt{3})$
② $\frac{1}{9}(5-2\sqrt{3})$
③ $\frac{1}{3}(5+2\sqrt{3})$
④ $\frac{1}{3}(5-2\sqrt{3})$

정답 2번

간단한 해설

각의 이등분선 정리에 따라 $\overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$이므로, **BD는 BC의 1/3**이다. 코사인법칙으로 구한 $\overline{BC}^2 = 5 - 2\sqrt{3}$을 9로 나누면 $\overline{BD}^2 = \frac{5-2\sqrt{3}}{9}$이다.

NoteBase

계산 과정

BC의 길이의 제곱 구하기: $a = \overline{BC}$라 하자. AB = 1, AC = 2이고 그 사이의 각이 30°이므로 **두 변과 끼인각에 코사인법칙**을 적용한다. $a^2 = 1^2 + 2^2 - 4\cos 30^\circ$이고, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $a^2 = 5 - 2\sqrt{3}$이다.

BD와 BC의 관계 구하기: AD는 각 A의 이등분선이므로 각의 이등분선 정리에 따라 $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 2$이다. 따라서 BC 전체를 3으로 나눈 것 중 1이 BD에 해당하여 $\overline{BD} = \frac{a}{3}$이다. 이등분선은 각을 반으로 나누며, 마주 보는 변은 **인접한 두 변의 길이의 비**로 나눈다.

BD의 길이의 제곱 구하기: 길이가 BC의 1/3이므로 **길이의 제곱은 BC의 제곱의 1/9**이다. 따라서 $\overline{BD}^2 = \frac{a^2}{9} = \frac{5-2\sqrt{3}}{9}$이며, 이는 ②의 $\frac{1}{9}(5 - 2\sqrt{3})$과 같다.

NoteBase