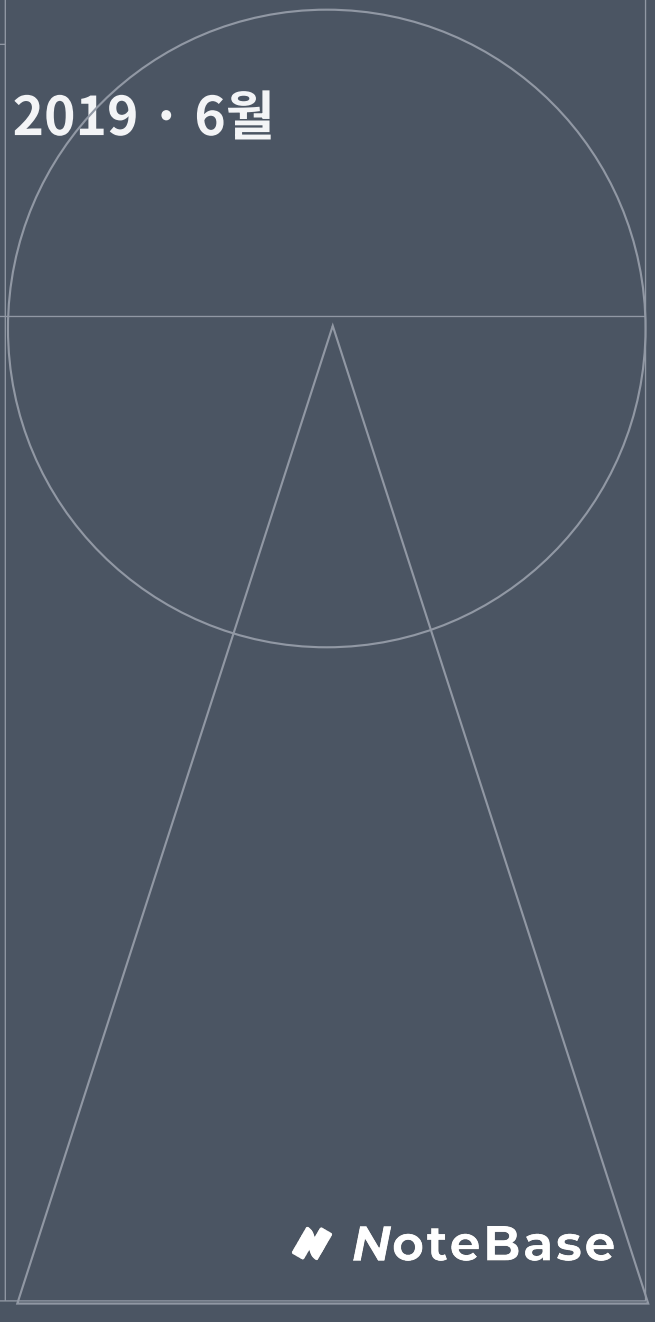
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2019 · 6월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2019 · 6월

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2019 · 6월

문 1. 모든 실수 x에 대하여 등식 $(1-2x+x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$의 값은?
(단, $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_9, a_{10}$은 상수이다.)

① 128

② 256

③ 512

④ 1024

정답 3번

간단한 해설

다항식에 $x = 1$과 $x = -1$을 대입한 값을 더하면 **홀수 차수 항은 상쇄**되고 짝수 차수 항의 계수 합이 두 배로 남는다. 두 대입값은 각각 0과 1024이므로 구하는 합은 $\frac{0+1024}{2} = 512$이다.

계산 과정

주어진 다항식을 $P(x) = (1-2x+x^2)^5$라 하자. 상수항을 포함한 짝수 차수 항의 계수 합을 E, 홀수 차수 항의 계수 합을 O라 하면 $P(1) = E + O$이다. $x = -1$을 대입하면 **짝수 차수 항의 부호는 유지되고 홀수 차수 항의 부호만 바뀌므로** $P(-1) = E - O$이다. 따라서 $P(1) + P(-1) = 2E$이다.

등식은 모든 실수에서 성립하므로 두 값을 대입할 수 있다. $P(1) = (1-2+1)^5 = 0$이다. 또 $P(-1) = (1+2+1)^5$이므로 $P(-1) = 4^5 = 1024$이다.

구하는 짝수 차수 항의 계수 합은 $E = \frac{P(1)+P(-1)}{2}$이므로 $E = \frac{0+1024}{2} = 512$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. 다항식 $P(x)$를 $x^2-3x-18$로 나누면 나머지가 $2x-3$이다. $P(3x)$를 $x-2$로 나누었을 때, 나머지는?

① -9

② -1

③ 1

④ 9

정답 4번

간단한 해설

나머지정리에 따라 구하는 나머지는 $P(3\cdot 2)=P(6)$이다. 6을 대입하면 **주어진 나누는 식이 0**이 되므로, $P(6)=2\cdot 6-3=9$이다.

계산 과정

다항식을 $x-a$로 나눈 나머지는 그 다항식에 $x=a$를 대입한 값이다. 따라서 $P(3x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 **전체 다항식에 2를 대입**한 값인 $P(3\cdot 2)=P(6)$이다.

주어진 나누는 식은 $x^2-3x-18=(x-6)(x+3)$으로 인수분해된다. $P(x)$는 이 식에 몫을 곱한 뒤 나머지 $2x-3$을 더한 것이므로, **나누는 식이 0이 되는 값**을 대입하면 나머지의 값만 남는다.

$x=6$일 때 $(x-6)(x+3)=0$이므로 $P(6)=2\cdot 6-3=9$이다. 구하는 나머지는 9이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. 등식 $x(1+2i)-(y+5)i=3$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 2번

간단한 해설

두 복소수가 같으려면 **실수부분과 허수부분이 각각 같아야 한다**. 주어진 식에서 $x=3$, $2x-y-5=0$이므로 $y=1$이고, $x+y=4$이다.

계산 과정

먼저 괄호를 풀고 실수부분과 허수부분을 모으면 $x(1+2i)-(y+5)i=x+(2x-y-5)i$이다. x, y가 실수이므로 실수부분은 x, 허수부분은 $2x-y-5$이다.

우변의 3은 $3+0i$로 나타낼 수 있다. 두 복소수가 같으려면 **실수부분끼리, 허수부분끼리 각각 같아야 하므로** $x=3$, $2x-y-5=0$이다. 두 번째 식에 $x=3$을 대입하면 $6-y-5=0$, 즉 $y=1$이다.

따라서 구하는 값은 $x+y=3+1=4$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. x에 대한 이차방정식 $k^2 + (6 + 2x)k + x^2 + 2ax - 9b = 0$이 실수 k의 값에 관계 없이 항상 중근을 가질 때, 실수 a, b에 대하여 a+b의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 1번

간단한 해설

x에 대한 판별식이 **모든 실수 k에서 0**이어야 하므로, 판별식을 k에 관해 정리했을 때 k의 계수와 상수항이 각각 0이다. 이 조건에서 $a = 3, b = -1$이므로 $a + b = 2$이다.

계산 과정

주어진 식을 **x에 대한 이차방정식**으로 정리하면 $x^2 + 2(k + a)x + k^2 + 6k - 9b = 0$이다. 따라서 x의 계수는 $2(k + a)$, 상수항은 $k^2 + 6k - 9b$이다.

이차방정식이 중근을 가지려면 판별식 D가 0이어야 한다. x의 계수가 $2(k + a)$이므로 $\frac{D}{4} = (k + a)^2 - (k^2 + 6k - 9b)$이다. 이를 전개하여 정리하면 $\frac{D}{4} = (2a - 6)k + a^2 + 9b$이다.

실수 k의 값에 관계없이 중근을 가지려면 $(2a - 6)k + a^2 + 9b = 0$이 모든 실수 k에 대해 성립해야 한다. 그러려면 **k의 계수와 상수항이 모두 0**이어야 하므로 $2a - 6 = 0, a^2 + 9b = 0$이다.

첫째 식에서 $a = 3$이다. 이를 둘째 식에 대입하면 $9 + 9b = 0$이므로 $b = -1$이다. 따라서 $a + b = 3 + (-1) = 2$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원 $x^2 + y^2 = c$가 되었다. 이때, 세 실수 a, b, c에 대하여 a+b+c의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 6

정답 2번

간단한 해설

원의 중심 $(-2, 3)$을 원점으로 옮기므로 a = 2, b = -3이다. 평행이동에서는 **반지름이 변하지 않으므로** c = 4이고, a + b + c = 3이다.

계산 과정

주어진 원의 식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$이다. 원의 표준형 $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$에서 중심은 (p, q), 반지름은 r이므로, 이 원의 중심은 $(-2, 3)$이고 반지름은 2이다.

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 중심은 $(-2 + a, 3 + b)$가 된다. 이동 후 원 $x^2 + y^2 = c$의 중심은 원점이므로 $-2 + a = 0$, $3 + b = 0$이다. 따라서 a = 2, b = -3이다. 즉, 중심을 **오른쪽으로 2만큼, 아래쪽으로 3만큼** 옮긴다.

평행이동은 원의 크기를 바꾸지 않으므로 반지름은 그대로 2이다. $x^2 + y^2 = c$에서 c는 **반지름의 제곱**이므로 $c = 2^2 = 4$이다.

따라서 $a + b + c = 2 + (-3) + 4 = 3$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 점 $(k, 1)$에서 두 직선 $-x+2y-3=0$, $2x-y+5=0$에 이르는 거리가 같도록 하는 모든 실수 k의 값들의 합은?

① $-\frac{11}{3}$

② -4

③ $-\frac{13}{3}$

④ $-\frac{14}{3}$

정답 4번

간단한 해설

두 거리식의 분모가 같으므로 **분자의 절댓값이 같은 조건**을 풀면 된다. 가능한 값은 $k=-3$, $k=-\frac{5}{3}$이므로 그 합은 $-\frac{14}{3}$이다.

계산 과정

점 $(k, 1)$에서 두 직선에 이르는 수직거리를 각각 d_1, d_2라 하자. 점과 직선 사이의 거리 공식은 직선의 식에 점의 좌표를 대입한 값의 절댓값을, 두 좌표의 계수 제곱합의 제곱근으로 나눈 것이다. 따라서 첫 번째 거리는 $d_1=\frac{|-k+2-3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{5}}$, 두 번째 거리는 $d_2=\frac{|2k-1+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2k+4|}{\sqrt{5}}$이다.

두 거리의 **분모가 모두 양수인 같은 값**이므로 거리가 같을 조건은 $|k+1|=|2k+4|$이다. 두 수의 절댓값이 같으려면 **두 수가 같거나 서로 부호가 반대**여야 하므로 두 경우로 나누어 푼다.

두 수가 같은 경우에는 $k+1=2k+4$이므로 $k=-3$이다. 두 수가 서로 부호가 반대인 경우에는 $k+1=-(2k+4)$이므로 $3k=-5$, 즉 $k=-\frac{5}{3}$이다.

따라서 조건을 만족하는 모든 실수의 합은 $-3+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{14}{3}$이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 원 $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 13 = 0$ 위의 점에서 직선 $y = -x + 5$에 이르는 거리의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값은?

① 2

② 5

③ 8

④ 11

정답 1번

간단한 해설

직선이 원의 바깥에 있으므로 최단거리는 **중심에서 직선까지의 거리에서 반지름을 뺀 값**이다. 따라서 $k = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$이므로 $k^2 = 2$이다.

계산 과정

원의 방정식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 18$이다. 따라서 중심은 $C(-1, -2)$이고 반지름은 $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$이다.

직선을 $x + y - 5 = 0$으로 나타낸다. 점 (x_0, y_0)에서 직선 $ax + by + c = 0$까지의 거리는 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$이므로, 중심에서 직선까지의 거리 d는 다음과 같다.
$d = \frac{|-1-2-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4\sqrt{2}$.

$d > r$이므로 직선은 원의 바깥에 있다. 중심에서 직선에 내린 수선 방향으로 직선에 가장 가까운 원 위의 점을 잡으면, 중심보다 반지름만큼 직선에 가까워진다. 따라서 최단거리는 **중심과 직선 사이의 거리에서 반지름을 뺀 값**으로, $k = d - r = \sqrt{2}$이다. 구하는 값은 $k^2 = 2$이며 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 전체집합 U=\x -3≤ x≤ 3, x는 정수\에 대하여 두 조건 p, q가 $p : x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, $q : x^2 + 2x - 3 = 0$일 때, 'p이고 ~q'의 진리집합에서 모든 원소의 합은?

① 0

② −1

③ −2

④ −3

정답 4번

간단한 해설

'p이고 ~q'는 **p는 참이고 q는 거짓**인 경우이므로, p의 진리집합에서 q도 참이 되는 1을 제외한다. 남는 원소는 −2, −1이므로 합은 −3이다.

계산 과정

전체집합은 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이다. 이 안에서 조건 p, q를 각각 참이 되게 하는 원소의 집합을 P, Q라 하자.

p의 진리집합: 방정식을 인수분해하면 $(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$이다. 곱이 0이려면 적어도 한 인수가 0이어야 하므로 $x = -2, 1, -1$이다. 이들은 모두 U의 원소이므로 $P = \{-2, -1, 1\}$이다.

q의 진리집합: $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$이므로 $x = -3, 1$일 때 q가 참이다. 두 값 모두 U에 속하므로 $Q = \{-3, 1\}$이다.

'p이고 ~q'의 진리집합: '이고'는 두 조건을 동시에 만족한다는 뜻이고, '~q'는 q가 거짓이라는 뜻이다. 따라서 **P에 속하면서 Q에는 속하지 않는 원소**를 구해야 한다. 이는 차집합 $P \setminus Q$이며, P에서 Q와 공통인 1을 제외하면 $P \setminus Q = \{-2, -1\}$이다.

원소의 합: (−2) + (−1) = −3이므로, 구하는 값은 ④의 −3이다.

NoteBase

문 9. 두 함수 $f(x)=x+3a$, $g(x)=bx+c$에 대하여 $f^{-1}(3)=0$, $(g\circ f^{-1})(x)=5x-4$가 성립할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 15

② 16

③ 17

④ 18

정답 3번

간단한 해설

역함수 조건에서 $f(0)=3$이므로 $a=1$이다. **합성함수의 계수와 상수항을 비교**하면 $b=5$, $c=11$이 되어 $a+b+c=17$이다.

계산 과정

1. a 구하기: 역함수는 원래 함수의 입력과 출력을 서로 바꾼다. 따라서 $f^{-1}(3)=0$은 $f(0)=3$**이라는 뜻**이다. $f(0)=3a$이므로 $3a=3$에서 $a=1$이다.

2. 합성함수 나타내기: $a=1$을 대입하면 $f(x)=x+3$이다. 입력에 3을 더하는 과정을 되돌리려면 3을 빼므로 $f^{-1}(x)=x-3$이다. 합성함수에서는 **먼저 구한 역함수의 값을 g의 입력에 넣는다**. 따라서 $(g\circ f^{-1})(x)=g(x-3)$이고, 이를 전개하면 $b(x-3)+c=bx+(c-3b)$이다.

3. b와 c 구하기: $bx+(c-3b)=5x-4$가 모든 x에 대하여 성립하므로 **x의 계수와 상수항이 각각 같아야 한다**. x의 계수를 비교하면 $b=5$이고, 상수항을 비교하면 $c-3b=-4$이다. 여기에 $b=5$를 대입하면 $c-15=-4$이므로 $c=11$이다.

4. 합 구하기: $a+b+c=1+5+11=17$이므로 선택지 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. $0 \le x \le 4$**일 때, 함수** $y = \frac{3x+1}{x+1}$**의 최댓값과 최솟값의 합은?**

① $\frac{13}{5}$
② $\frac{16}{5}$
③ $\frac{18}{5}$
④ $\frac{19}{5}$

정답 3번

간단한 해설

이 함수는 주어진 구간에서 **계속 증가**하므로 양 끝점에서 최솟값과 최댓값을 갖는다. 두 값은 각각 1과 $\frac{13}{5}$이므로 합은 $\frac{18}{5}$이다.

계산 과정

함수의 증가·감소를 확인하기 위해 분자를 $3x + 1 = 3(x + 1) - 2$로 바꾸면 $y = 3 - \frac{2}{x+1}$이다.

$0 \le x \le 4$에서 $x + 1$은 양수이다. 이 구간에서 x가 커지면 $\frac{2}{x+1}$은 작아지므로, 이를 3에서 뺀 함수의 값은 **계속 커진다**.

따라서 최솟값은 왼쪽 끝점인 $x = 0$에서 $\frac{3 \cdot 0 + 1}{0 + 1} = 1$이고, 최댓값은 오른쪽 끝점인 $x = 4$에서 $\frac{3 \cdot 4 + 1}{4 + 1} = \frac{13}{5}$이다.

최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{13}{5} + 1 = \frac{18}{5}$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n = n^2 + n$일 때, $\sum_{n=1}^{12} \frac{13}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

간단한 해설

$a_n = 2n$이므로 합의 각 항을 (13)/(4)≤ft(1n-1n+1)로 바꿀 수 있다. **이웃한 항의 분수가 서로 소거**되어 합은 (13)/(4)≤ft(1-113)=3이다.

계산 과정

일반항 구하기: 첫째항은 $a_1 = S_1 = 2$이다. n≥2에서는 **연속한 두 부분합의 차**가 제n항이므로 $a_n = S_n - S_{n-1}$이다. 주어진 식을 대입하면 $a_n = (n^2 + n) - (n^2 - n) = 2n$이다. 첫째항도 이 식을 만족하므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2n$이고, $a_{n+1} = 2(n + 1)$이다.

부분분수로 분해하기: 일반항을 대입하면 $\frac{13}{a_n a_{n+1}} = \frac{13}{4n(n+1)}$이다. 여기서 1n-1n+1=1n(n+1)이므로 각 항을 (13)/(4)≤ft(1n-1n+1)로 나타낼 수 있다.

합 계산하기: $n = 1$부터 12까지 더하면 첫 괄호는 1-12, 다음 괄호는 12-13이다. 이처럼 앞 괄호에서 뺀 분수가 다음 괄호에서 더해져 **중간의 분수들이 모두 소거**된다. 따라서 첫 괄호의 1과 마지막 괄호의 -113만 남아 Σ_n=1^12(13)/(a_na_n+1)=(13)/(4)≤ft(1-113)=3이다.

구한 값 3은 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 실수 x, y에 대하여 $5^x = 9$, $15^y = 27$일 때, $\frac{2}{x} - \frac{3}{y}$의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

정답 2번

간단한 해설

밑이 같은 거듭제곱을 나누면 **지수를 뺀다**. 주어진 조건을 $3^{2/x} = 5$, $3^{3/y} = 15$로 바꾸면 $3^{2/x - 3/y} = \frac{5}{15} = 3^{-1}$이므로 구하는 값은 -1이다.

계산 과정

주어진 두 식에서 $x = 0$ 또는 $y = 0$이면 해당 좌변이 1이 되므로, x와 y는 모두 0이 아니다. $9 = 3^2$, $27 = 3^3$으로 쓰고 두 식의 양변을 각각 $1/x$제곱, $1/y$제곱하면 $5 = 3^{2/x}$, $15 = 3^{3/y}$를 얻는다. 이렇게 바꾸면 구하려는 두 항을 **같은 밑 3의 지수**로 나타낼 수 있다.

밑이 같은 거듭제곱의 나눗셈에서는 지수를 빼므로 $3^{2/x - 3/y} = \frac{3^{2/x}}{3^{3/y}}$이다. 앞에서 얻은 값을 대입하면 $3^{2/x - 3/y} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$이다.

밑 3은 1보다 크므로 거듭제곱의 값이 같으면 지수도 같다. 따라서 $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = \frac{80}{3}$, $a_5 + a_6 = 160$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공비 r은? (단, $r > 0$)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 1번

간단한 해설

등비수열에서 $a_5 + a_6 = a_4(r + r^2)$이므로 $r^2 + r - 6 = 0$이다. 두 근 중 **공비가 양수라는 조건**을 만족하는 값은 $r = 2$이다.

계산 과정

등비수열은 **다음 항이 앞 항의 공비 배**가 되는 수열이다. 따라서 $a_5 = a_4 r$, $a_6 = a_4 r^2$이므로 $a_5 + a_6 = a_4(r + r^2)$이다.

주어진 $a_4 = \frac{80}{3}$과 $a_5 + a_6 = 160$을 대입하면 $\frac{80}{3}(r + r^2) = 160$이다. 양변에 $\frac{3}{80}$을 곱하면 $r + r^2 = 6$이므로, 공비가 만족하는 방정식은 $r^2 + r - 6 = 0$이다.

이를 인수분해하면 $(r + 3)(r - 2) = 0$이므로 $r = -3$ 또는 $r = 2$이다. **조건** $r > 0$에 따라 음수인 근은 제외한다. 따라서 공비는 $r = 2$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. 한 개의 주사위를 5번 던질 때, k번째 나오는 눈의 수를 $a_k(k=1,2,3,4,5)$라고 하자. 이때, $a_1 \le a_2 = a_3 \le a_4 \le a_5$인 경우의 수는?

① 63

② 126

③ 189

④ 252

정답 2번

간단한 해설

$a_2 = a_3$이므로 두 자리를 하나로 묶으면, 1부터 6까지의 수 중 **중복을 허용하여 네 수를 고르는 문제**가 된다. 고른 수를 크기순으로 놓는 방법은 하나뿐이므로 경우의 수는 $\binom{9}{4} = 126$이다.

계산 과정

같은 눈이 나와야 하는 a_2, a_3을 하나의 값으로 묶어 $b_1 = a_1, b_2 = a_2 = a_3, b_3 = a_4, b_4 = a_5$로 놓는다.
그러면 조건은 1≤ b_1≤ b_2≤ b_3≤ b_4≤6이 된다. 이 네 수를 정하면 원래의 다섯 눈도 하나로 정해지므로 두 경우의 수는 같다.

부등호에 등호가 포함되므로 **다른 자리끼리도 같은 눈이 나올 수 있다**. 따라서 서로 다른 네 수를 고르는 것이 아니라, 1부터 6까지의 여섯 수에서 중복을 허용하여 네 수를 고른다. 고른 네 수는 작은 것부터 나열하면 되므로 별도로 순서를 배열하지 않는다.

각 눈을 고른 횟수를 세면, 네 개의 별을 다섯 개의 구분선으로 나누어 여섯 눈에 배분하는 것과 같다. 어떤 눈은 한 번도 고르지 않을 수 있으므로 구분선이 서로 붙거나 양 끝에 와도 된다. 별 네 개와 구분선 다섯 개를 놓을 아홉 자리 중 별의 자리 네 개를 고르면 되므로 경우의 수는 $\binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4}$이다. 이를 계산하면
$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$이다.

따라서 조건을 만족하는 경우는 126가지이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. $A = {}_8C_0 + 7{}_8C_1 + 7^2{}_8C_2 + \cdots + 7^8{}_8C_8$**이라고 할 때,** $\log_4 A$**의 값은?**

① 7

② 8

③ 12

④ 16

정답 3번

간단한 해설

주어진 합은 **이항정리**에 따라 $A = (1+7)^8 = 8^8$이다. 이를 $A = 4^{12}$로 나타낼 수 있으므로 $\log_4 A = 12$이다.

계산 과정

이항정리에 의해 $(1+x)^8 = \sum_{k=0}^{8} {}_8C_k x^k$이다. 여덟 개의 인수에서 x를 택할 k개의 위치를 고르는 방법이 ${}_8C_k$가지이므로 각 항의 계수가 이 조합의 수가 된다. 주어진 합은 이 전개식에 **x 대신 7을 대입한 값**이므로 $A = (1+7)^8 = 8^8$이다.

구하려는 로그의 밑이 4이므로 A를 **4의 거듭제곱**으로 나타낸다. $8 = 2^3$이므로 $A = (2^3)^8 = 2^{24}$이고, $2^{24} = (2^2)^{12} = 4^{12}$이다.

$\log_4 A$는 4를 몇 제곱해야 A가 되는지를 나타낸다. $A = 4^{12}$이므로 $\log_4 A = 12$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 이항분포 $B(20,\ p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 $E(2X+1)=9$일 때, $E(X^2)$의 값은?

① $\frac{94}{5}$
② $\frac{96}{5}$
③ $\frac{98}{5}$
④ 20

정답 2번

간단한 해설

주어진 조건에서 $E(X)=4, p=\frac{1}{5}$이므로 분산은 $\frac{16}{5}$이다. **분산에 평균의 제곱을 더하면** $E(X^2)=\frac{96}{5}$이다.

계산 과정

1. 평균과 성공확률 구하기: 기댓값의 선형성에 따라 $E(2X+1)=2E(X)+1=9$이므로 $E(X)=4$이다.
이항분포 $B(20,p)$의 평균은 $20p$이므로 $20p=4$, 즉 $p=\frac{1}{5}$이다.

2. 분산 구하기: 이항분포 $B(n,p)$의 분산은 $V(X)=np(1-p)$이다. 따라서 $V(X)=20\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$이다.

3. 제곱의 기댓값 구하기: 분산의 정의는 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이다. 따라서 **제곱의 기댓값은 분산과 평균의 제곱의 합**이므로 $E(X^2)=\frac{16}{5}+4^2=\frac{96}{5}$이다. 이 값은 ②와 일치한다.

NoteBase

문 17. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $3n^2 - 1 \le na_n \le 3n^2 + 2$을 만족할 때, _n→∞(a_n+n+2)/(2n+1)의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

정답 4번

간단한 해설

주어진 부등식을 이용하면 $\frac{a_n}{n}$의 극한은 **샌드위치 정리**에 따라 3이다. 구하는 식의 분자와 분모를 각각 n으로 나누면 분자는 4, 분모는 2로 수렴하므로 극한값은 2이다.

계산 과정

모든 자연수 n에 대해 $n^2 > 0$이므로, 주어진 부등식의 각 변을 n^2으로 나누어도 부등호 방향은 바뀌지 않는다. 따라서 $3 - \frac{1}{n^2} \le \frac{a_n}{n} \le 3 + \frac{2}{n^2}$이다. 양 끝의 수열이 모두 3으로 수렴하므로 **샌드위치 정리**에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 3$이다.

구하는 식 $\frac{a_n + n + 2}{2n + 1}$의 **분자와 분모를 각각 같은 수인** n으로 나누면 $\frac{\frac{a_n}{n} + 1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$이 된다. 이 형태로 바꾸면 앞에서 구한 $\frac{a_n}{n}$의 극한을 사용할 수 있다.

$n \to \infty$일 때 $\frac{2}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$이므로 분자는 $3 + 1 + 0 = 4$로, 분모는 $2 + 0 = 2$로 수렴한다. **분모의 극한이 0이 아니므로** 몫의 극한은 $\frac{4}{2} = 2$이다. 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$의 값은?

① $\frac{11}{2}$

② 6

③ $\frac{13}{2}$

④ 7

정답 1번

간단한 해설

주어진 급수를 **두 무한등비급수로 나누면** 각각의 합은 $\frac{3}{2}$과 4이다. 따라서 전체 합은 $\frac{11}{2}$이다.

계산 과정

일반항을 $\frac{3^n + 4^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$으로 나눈다. 따라서 공비가 각각 $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$인 두 등비급수의 합을 구하면 된다.

첫째항이 a이고 공비가 r인 무한등비급수는 **공비의 절댓값이 1보다 작을 때** 수렴하며, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다. 두 공비 모두 이 조건을 만족하므로 각각의 합을 구해 더할 수 있다.

공비가 $\frac{3}{5}$인 급수는 **n이 1부터 시작하므로 첫째항도** $\frac{3}{5}$이다. 따라서 그 합은 $\frac{3/5}{1-3/5} = \frac{3/5}{2/5} = \frac{3}{2}$이다.

공비가 $\frac{4}{5}$인 급수의 첫째항은 $\frac{4}{5}$이다. 따라서 그 합은 $\frac{4/5}{1-4/5} = \frac{4/5}{1/5} = 4$이다.

두 급수의 합을 더하면 $\frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$이므로, 주어진 급수의 값은 ①의 $\frac{11}{2}$이다.

NoteBase

문 19. 다항함수 $f(x)$에 대하여 _x→∞(f(x))/(2x^2+3x-1)=1, _x→2(f(x))/(x^2-3x+2)=4가 성립할 때, $f(3)$의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 3번

간단한 해설

무한대에서의 극한으로 $f(x)$는 **최고차항이** $2x^2$인 이차함수임을 알 수 있다. 두 번째 극한에서는 **분모와 공통인수를 약분**하여 $f(x) = 2x(x-2)$를 얻으므로 $f(3) = 6$이다.

계산 과정

1. 다항함수의 차수와 최고차항을 정한다. $x \to \infty$일 때 두 다항식의 비가 0이 아닌 유한한 값으로 수렴하려면 **두 다항식의 차수가 같아야** 한다. 분모는 이차식이고 극한값은 최고차항 계수의 비이므로, $f(x)$는 최고차항이 $2x^2$인 이차함수이다.

2. $x-2$를 인수로 갖는지 확인한다. $x \to 2$일 때 분모 x^2-3x+2는 0으로 가는데 그 비는 4로 수렴하므로, 분자도 0으로 가야 한다. 다항함수는 연속이므로 $f(2) = 0$이다. 따라서 인수정리에 의해 $f(x) = (x-2)(2x+a)$로 놓을 수 있다. 여기서 a는 구해야 할 상수이다.

3. 두 번째 극한으로 상수를 구한다. $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$이므로, 2의 근방에서 **공통인수인** $x-2$를 약분하면 $\lim_{x\to 2}\frac{2x+a}{x-1}=4$이다. 약분한 식의 분모는 $x=2$에서 1이므로 바로 대입할 수 있다. 이에 따라 $4+a=4$, 즉 $a=0$이다.

4. 구하려는 함수값을 계산한다. $f(x) = 2x(x-2)$에 $x=3$을 대입하면 $f(3) = 2\cdot 3\cdot(3-2) = 6$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 함수 $f(x)=x^2-2x-5$에 대하여 _x→1(1)/(x^2-1) ∫ _1^x f(t) dt의 값은?

① −4

② −3

③ −2

④ −1

정답 2번

간단한 해설

분모를 $x^2-1=(x-1)(x+1)$로 인수분해하면 정적분이 포함된 부분을 **미분계수의 정의**로 계산할 수 있다. 구하는 극한은 $\frac{f(1)}{2}=\frac{-6}{2}=-3$이다.

계산 과정

1. 정적분을 함수로 나타내기: $F(x)=\int_1^x f(t)dt$로 놓으면 적분 구간의 양 끝이 같은 $F(1)=0$이다. f는 다항함수이므로 연속이고, **미적분의 기본정리**에 따라 $F'(x)=f(x)$이다.

2. 미분계수의 꼴로 변형하기: $x^2-1=(x-1)(x+1)$이고 $F(1)=0$이므로 주어진 식은 $\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$로 쓸 수 있다. 여기서 첫 번째 인수의 극한은 **1에서의 미분계수** $F'(1)$이다.

3. 극한 계산하기: $F'(1)=f(1)=1-2-5=-6$이고, $x\to1$일 때 두 번째 인수는 $\frac{1}{2}$로 수렴한다. 따라서 구하는 극한은 $(-6)\cdot\frac{1}{2}=-3$이며, 이는 ②의 값이다.

NoteBase