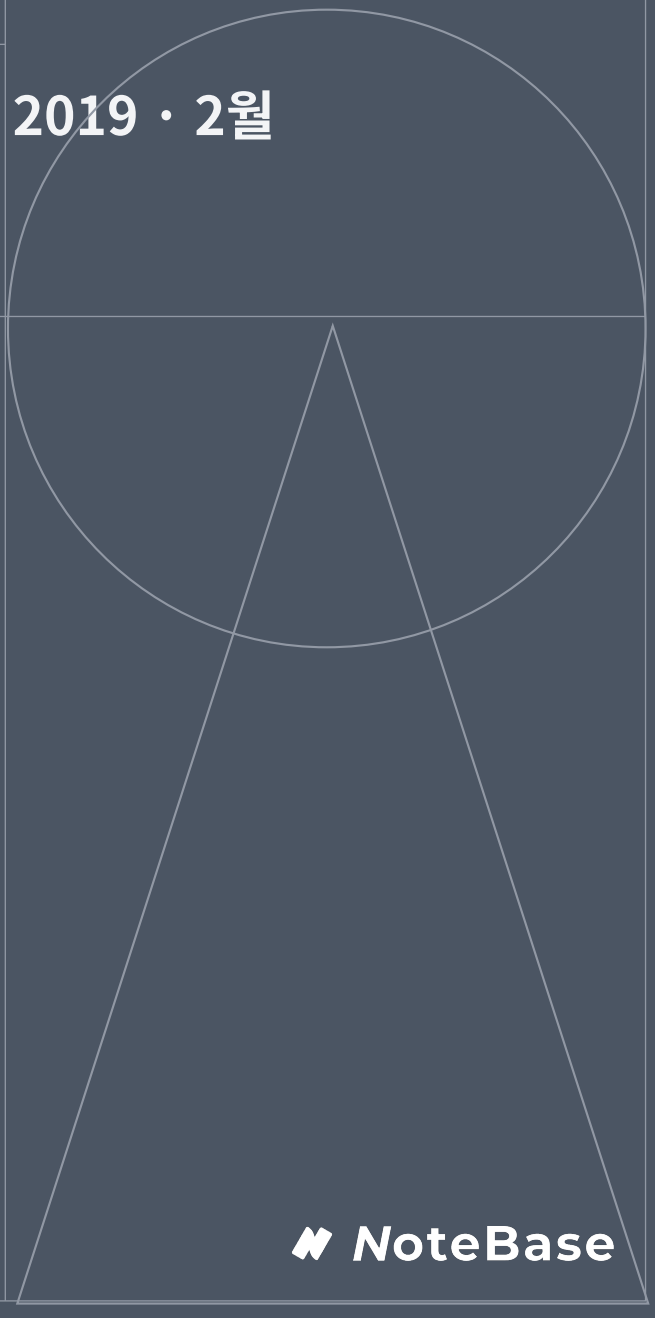
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2019 · 2월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2019 · 2월

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2019 · 2월

문 1. 연립방정식 cases7-xy=x^2\\2x+2y=7cases을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

정답 1번

간단한 해설

첫째 식을 $x(x+y)=7$로 정리하면, 둘째 식에서 얻은 **두 수의 합** $x+y=\frac{7}{2}$을 대입해 $x=2$를 구할 수 있다. 이때 $y=\frac{3}{2}$이므로 두 수의 차는 $\frac{1}{2}$이다.

계산 과정

1. 두 수의 합 구하기: 둘째 식 $2x+2y=7$의 양변을 2로 나누면 $x+y=\frac{7}{2}$이다.

2. x 구하기: 첫째 식 $7-xy=x^2$에서 항을 이항하면 $x^2+xy=7$이다. 왼쪽을 **공통인수 x로 묶으면** $x(x+y)=7$이므로, 앞서 구한 합을 대입하여 $\frac{7}{2}x=7$을 얻는다. 양변에 $\frac{2}{7}$을 곱하면 $x=2$이다.

3. 두 수의 차 구하기: $x+y=\frac{7}{2}$에 $x=2$를 대입하면 $y=\frac{7}{2}-2=\frac{3}{2}$이다. 따라서 $x-y=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$이다.

구한 값 $\frac{1}{2}$은 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. 함수 f(x)=cases-x+1 & (x≥ -1)\^2+2x+3 & (x<-1)cases에 대하여 $f^{-1}(6)+f(6)$의 값은?

① −6

② −8

③ −10

④ −12

정답 2번

간단한 해설

$f^{-1}(6)$은 **함숫값이 6이 되는 입력값**이며, 구간 조건을 만족하는 값은 −3이다. $f(6)=-5$이므로 두 값의 합은 −8이다.

계산 과정

역함수의 뜻에 따라 $f^{-1}(6)$은 $f(x)=6$을 만족하는 x이다. $x\geq -1$에서는 $f(x)=-x+1\leq 2$이므로 함숫값이 6일 수 없다. 따라서 **다른 구간의 조건**인 $x<-1$에서 $x^2+2x+3=6$을 푼다. 이를 정리하면 $(x+1)^2=4$이므로 $x=1$ 또는 $x=-3$이다. 이 중 $x<-1$을 만족하는 값은 −3이므로 $f^{-1}(6)=-3$이다.

$f(6)$은 입력값 6에 대응하는 함숫값이다. **입력값이 속하는 구간**에 따라 식을 선택하므로, $6\geq -1$에서 적용되는 $f(x)=-x+1$을 이용한다. 따라서 $f(6)=-6+1=-5$이다.

두 값을 더하면 $f^{-1}(6)+f(6)=-3+(-5)=-8$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.
$\mathrm{E}(X)=1$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은?

X	-1	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{12}$	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

① 1
② 2
③ 3
④ 4

정답 2번

간단한 해설

표에서 $\mathrm{E}(X^2)=3$이므로, **제곱의 평균에서 평균의 제곱을 빼면** 분산은 $\mathrm{V}(X)=3-1^2=2$이다.

계산 과정

확률의 합 구하기: 확률분포표의 모든 확률을 더하면 1이다. 따라서 $a+b=1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}$이다.

제곱의 평균 구하기: $\mathrm{E}(X^2)$는 각 값의 제곱에 그 확률을 곱하여 더한 값이다. −1과 1은 **제곱하면 모두 1**이므로, a와 b를 각각 구하지 않고 합을 이용할 수 있다. 0의 항은 0이므로 $\mathrm{E}(X^2)=a+b+4\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{6}$이고, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$이다.

분산 구하기: 분산은 평균으로부터 떨어진 거리의 제곱을 평균한 값이며, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$으로 계산한다. 주어진 평균이 1이므로 $\mathrm{V}(X)=3-1^2=2$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{2019} ka_{k+1} = 26$, $\sum_{k=1}^{2019} (k+1)a_k = 47$, $a_{2020} = \frac{1}{2019}$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{2019} a_k$의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

정답 2번

간단한 해설

첫 번째 합의 마지막 항은 $2019a_{2020} = 1$이다. 이를 제외하고 **같은 항끼리 두 합을 빼면**
$2\sum_{k=1}^{2019} a_k = 47 - 25 = 22$이므로 구하는 합은 11이다.

계산 과정

1. 첫 번째 합의 첨자 맞추기: a_{k+1}의 첨자를 기준으로 합을 다시 쓰면 $\sum_{k=2}^{2020} (k-1)a_k = 26$이다. 합하는 항이 a_1부터 시작하는 두 번째 조건과 비교하려면 **합의 시작과 끝을 맞추어야 한다**.

2. 끝항 따로 처리하기: $a_{2020} = \frac{1}{2019}$이므로 $2019a_{2020} = 1$이다. 이 끝항을 제외하면 $\sum_{k=2}^{2019} (k-1)a_k = 25$이다. 여기에 계수가 0인 a_1의 항을 넣어도 값이 같으므로 $\sum_{k=1}^{2019} (k-1)a_k = 25$로 쓸 수 있다.

3. 두 합의 차 구하기: 두 번째 조건 $\sum_{k=1}^{2019} (k+1)a_k = 47$에서 앞서 구한 합을 뺀다. 각 a_k의 **계수 차이가 모두 2**이므로 $2\sum_{k=1}^{2019} a_k = 47 - 25 = 22$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{2019} a_k = 11$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. $0 \le a \le b < c < 12$**를 만족하는 정수** a, b, c**의 순서쌍** (a, b, c)**의 개수는?**

① 120

② 165

③ 220

④ 286

정답 4번

간단한 해설

주어진 조건에서는 **두 정수 a, b가 같을 수도 있다**. 세 수가 모두 다른 경우 220개에 a, b가 같은 경우 66개를 더하면, 조건을 만족하는 순서쌍은 286개이다.

계산 과정

세 정수는 0부터 11까지의 12개 정수 중에서 정한다. $a \le b < c$이므로 **a와 b가 같은 경우와 다른 경우**로 나누면 빠짐없이, 중복 없이 셀 수 있다.

1. $a < b < c$인 경우: 12개 정수 중 서로 다른 세 수를 고르면, 작은 수부터 a, b, c로 놓는 방법은 하나뿐이다. 따라서 순서를 따로 세지 않고 조합을 사용하며, 경우의 수는 $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$이다.

2. $a = b < c$인 경우: 12개 정수 중 서로 다른 두 수를 고른 뒤, **작은 수를 a와 b의 공통값**으로, 큰 수를 c로 놓는다. 이 대응은 두 수를 고르는 방법마다 하나씩 성립하므로, 경우의 수는 $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$이다.

두 경우는 서로 겹치지 않으므로 전체 개수는 220 + 66 = 286개이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 <보기>와 같다. p는 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 a값의 범위는?

<보기>

p: $x^2 - x - 12 \leq 0$, q: $|x - a| \leq 2$

① $-2 \leq a \leq 1$

② $-1 \leq a \leq 2$

③ $0 \leq a \leq 3$

④ $1 \leq a \leq 4$

정답 2번

간단한 해설

p가 q이기 위한 필요조건이면 **q를 만족하는 모든 실수는 p도 만족**해야 한다. 따라서 구간 $[a-2, a+2]$가 $[-3, 4]$에 포함되어야 하므로 $-1 \leq a \leq 2$이다.

계산 과정

필요조건의 의미: p가 q이기 위한 필요조건이라는 것은 $q \Rightarrow p$가 성립한다는 뜻이다. 즉, **q의 해집합이 p의 해집합에 포함**되어야 한다.

조건 p의 해집합: $x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$이므로 $(x+3)(x-4) \leq 0$을 푼다. 두 인수의 곱이 0 이하인 구간은 두 근 사이이므로 $-3 \leq x \leq 4$이다.

조건 q의 해집합: $|x - a| \leq 2$는 실수 x와 a 사이의 거리가 2 이하라는 뜻이다. 따라서 $-2 \leq x - a \leq 2$, 즉 $a - 2 \leq x \leq a + 2$이다.

구간의 포함 조건: $[a-2, a+2]$가 $[-3, 4]$에 포함되려면 **왼쪽 끝점은 −3 이상이고 오른쪽 끝점은 4 이하**여야 한다. 따라서 $a - 2 \geq -3$과 $a + 2 \leq 4$를 동시에 만족해야 한다. 이를 각각 풀면 $a \geq -1$, $a \leq 2$이므로 구하는 범위는 $-1 \leq a \leq 2$이며, ②의 범위와 일치한다.

NoteBase

문 7. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+3h) - f(2-2h)}{2h}$의 값은?

① 15

② 20

③ 25

④ 30

정답 1번

간단한 해설

분자를 두 차분으로 나누면 **입력 변화량의 비율**에 따라 주어진 극한은 $\frac{3+2}{2} f'(2)$가 된다. $f'(2) = 6$이므로 극한값은 15이다.

계산 과정

함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$은 **다항함수이므로 미분 가능**하다. 미분하면 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$이므로 $f'(2) = 12 - 8 + 2 = 6$이다. 이는 입력이 2에 가까워질 때의 순간변화율이다.

분자에 $f(2)$를 빼고 더하면 $f(2 + 3h) - f(2)$와 $f(2) - f(2 - 2h)$의 합으로 나뉜다. 첫 번째 차분의 **입력 변화량**은 $3h$이므로 미분계수의 정의에 따라 $\frac{f(2 + 3h) - f(2)}{3h} \to f'(2) = 6$이다. 원래 분모는 $2h$이므로 첫 번째 항의 극한은 $\frac{3}{2} \cdot 6 = 9$이다.

두 번째 차분에서는 입력 변화량이 $-2h$이므로 $\frac{f(2 - 2h) - f(2)}{-2h} \to f'(2) = 6$이다. 이 분수의 **분자와 분모의 부호를 함께 바꾸면** $\frac{f(2) - f(2 - 2h)}{2h}$가 되므로 두 번째 항의 극한은 6이다.

두 항의 극한을 더하면 9 + 6 = 15이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 일차함수 $f(x)$가 <보기> 조건을 만족시킨다. $f(a)=13$을 만족시키는 a의 값은?

<보기>
(가) $f(5)=2$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$이다.

① -3
② -4
③ -5
④ -6

정답 4번

간단한 해설

조건 (나)에 의해 $f(5)=2$이면 $f(2)=5$이다. 두 점으로 정해지는 일차함수는 **기울기가 −1**인 $f(x)=-x+7$이므로, $f(a)=13$을 만족하는 값은 $a=-6$이다.

계산 과정

(나)의 $(f\circ f)(x)=x$는 함수를 **두 번 적용하면 원래 값으로 돌아온다**는 뜻이다. 여기에 $x=5$를 대입하면 $f(f(5))=5$이고, (가)의 $f(5)=2$를 이용하면 $f(2)=5$를 얻는다.

일차함수의 그래프는 두 점 $(5,2)$, $(2,5)$를 지난다. 기울기는 **함숫값의 변화량을 입력값의 변화량으로 나눈 값**이므로 $\frac{5-2}{2-5}=-1$이다. 따라서 $f(x)=-x+b$로 놓고 $f(5)=2$를 대입하면 $-5+b=2$에서 $b=7$이다. 즉, $f(x)=-x+7$이다.

구한 함수에 $f(a)=13$을 적용하면 $-a+7=13$이다. 양변에서 7을 빼면 $-a=6$이므로 $a=-6$이며, 이는 ④의 값이다.

NoteBase

문 9. 함수 $f(x)=x^3-2x^2$에 대하여 F(x)= ∫ _0^x f(t)dt라 할 때, 구간 [0,3]에서 함수 $F(x)$는 최댓값 M, 최솟값 m을 갖는다. 이때 Mm의 값은?

① −1

② −2

③ −3

④ −4

정답 3번

간단한 해설

$F(x)$의 **양 끝점과 극솟값을 비교**하면 최댓값은 $M=\frac{9}{4}$, 최솟값은 $m=-\frac{4}{3}$이다. 따라서 두 값의 곱은 $Mm=-3$이다.

계산 과정

1. 함수식 구하기: 주어진 다항함수를 적분하면 $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}$이다. 적분의 아래끝이 0이고 원시함수에 0을 대입한 값도 0이므로 이 식에 별도의 상수항은 붙지 않는다.

2. 최댓값·최솟값의 후보 찾기: 미적분의 기본정리에 따라 $F\prime(x)=f(x)=x^2(x-2)$이다. $0<x<2$에서는 도함수가 음수이므로 감소하고, $2<x<3$에서는 양수이므로 증가한다. 따라서 최솟값은 $x=2$에서 갖고, 최댓값은 **양 끝점의 함수값을 비교**하여 결정한다.

3. 함수값 비교하기: $F(0)=0$, $F(2)=4-\frac{16}{3}=-\frac{4}{3}$, $F(3)=\frac{81}{4}-18=\frac{9}{4}$이다. 그러므로 최댓값은 $M=F(3)=\frac{9}{4}$, 최솟값은 $m=F(2)=-\frac{4}{3}$이다.

4. 곱 구하기: $Mm=\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-3$이므로 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 수직선 위의 원점에 있는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 속도가 다음과 같다.
v(t)=casest & (0<t≤ 2)\ t^2-6t+10 & (t>2)cases
<보기> 중 점 P에 대한 설명으로 옳은 것만을 모두 고른 것은?

<보기>
ㄱ. $0<t<2$에서 속도가 증가한다.
ㄴ. $t=2$에서 운동 방향이 바뀐다.
ㄷ. $t=3$에서 가속도가 0이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄷ
③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 2번

간단한 해설

운동 방향은 **속도의 부호가 바뀔 때** 바뀌는데, 주어진 속도는 $t=2$ 전후에 모두 양수이다. 또 $t>2$에서 가속도는 $a(t)=2t-6$이므로 $a(3)=0$이다.

보기별 해설

ㄱ. O: $0<t<2$에서는 $v(t)=t$이므로 $v\prime(t)=1>0$이다. 따라서 이 구간에서 속도는 증가한다.

ㄴ. X: 운동 방향이 바뀌려면 **속도의 부호가 바뀌어야 한다**. $0<t\le 2$에서는 $v(t)=t>0$이고, $t>2$에서는 $v(t)=(t-3)^2+1>0$이다. 따라서 $t=2$ 전후에도 양의 방향으로 계속 운동하며, 운동 방향은 바뀌지 않는다.

ㄷ. O: **가속도는 속도를 시간에 대해 미분한 값**이다. $t=3$은 $t>2$인 구간에 속하므로 $v(t)=t^2-6t+10$을 미분한다. 이에 따라 $a(t)=v\prime(t)=2t-6$이고, $a(3)=2\cdot 3-6=0$이다.

옳은 보기는 ㄱ, ㄷ이므로 ②의 조합에 해당한다.

NoteBase

문 11. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $\log_a 16 = \frac{1}{3}$, $\log_8 b = \frac{4}{9}$일 때, $\log_{\sqrt{b}} a^2$의 값은?

① 30

② 32

③ 34

④ 36

정답 4번

간단한 해설

로그의 밑과 진수를 **2의 거듭제곱**으로 나타내면 $\sqrt{b} = 2^{\frac{2}{3}}$, $a^2 = 2^{24}$이다. 따라서 구하는 로그는 두 지수의 비인 $\frac{24}{\frac{2}{3}} = 36$이다.

계산 과정

1. a 구하기: 로그의 값은 밑을 몇 제곱해야 진수가 되는지를 뜻한다. $\log_a 16 = \frac{1}{3}$을 **지수식으로 바꾸면** $a^{\frac{1}{3}} = 16$이다. 양변을 세제곱하여 $a = 16^3 = 2^{12}$를 얻으므로, 진수는 $a^2 = 2^{24}$이다.

2. $\sqrt{b}$ 구하기: $\log_8 b = \frac{4}{9}$에서 $b = 8^{\frac{4}{9}}$이다. $8 = 2^3$을 이용하면 $b = 2^{\frac{4}{3}}$이다. 양수의 제곱근은 지수를 반으로 나누므로, 밑은 $\sqrt{b} = 2^{\frac{2}{3}}$이다. 이 값은 양수이고 1이 아니므로 로그의 밑이 될 수 있다.

3. 로그의 값 계산하기: **밑과 진수의 공통 밑을 2로 맞추었으므로** 밑변환 공식을 적용하면 $\log_{\sqrt{b}} a^2 = \frac{\log_2 a^2}{\log_2 \sqrt{b}}$이다. 앞에서 구한 거듭제곱의 지수를 대입하면 $\frac{24}{\frac{2}{3}} = 24 \cdot \frac{3}{2} = 36$이다. 따라서 구하는 값은 36으로, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 3$의 그래프와 직선 $y = x + 2$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이는?

① $2\sqrt{2}$
② $\sqrt{10}$
③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{14}$

정답 2번

간단한 해설

두 교점의 x좌표 차는 $\sqrt{5}$이고, 두 점이 **기울기가 1인 직선 위**에 있으므로 y좌표 차도 $\sqrt{5}$이다. 두 좌표 차에 피타고라스 정리를 적용하면 선분 PQ의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

계산 과정

교점의 x좌표 구하기: 교점에서는 **두 식의 y값이 같으므로** $-x^2 + 2x + 3 = x + 2$이다. 정리하면 $x^2 - x - 1 = 0$이고, 근의 공식에 따라 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$이다.

두 좌표 차 구하기: 두 교점 중 x좌표가 작은 점을 P, 큰 점을 Q라 하자. 두 점의 x좌표 차는 $\Delta x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$이다. 두 점 모두 $y = x + 2$ 위에 있으므로 **y좌표 차는 x좌표 차와 같다**. 따라서 $\Delta y = \Delta x = \sqrt{5}$이다.

선분의 길이 구하기: 두 점의 가로 거리와 세로 거리를 직각삼각형의 두 변으로 보면, 선분 PQ는 빗변이다. 피타고라스 정리에 따라 $\overline{PQ} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$이므로 $\overline{PQ} = \sqrt{5+5} = \sqrt{10}$이다. 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. $0 \le x \le 2$**일 때, 이차함수** $f(x) = 2x^2 - 4ax + 2a$**의 최솟값이** -12**가 되게 하는 실수** a**의 값의 합은?**

① $-\frac{2}{3}$
② $-\frac{5}{3}$
③ $-\frac{8}{3}$
④ $-\frac{11}{3}$

정답 3번

간단한 해설

꼭짓점의 위치에 따라 **주어진 구간에서 최솟값을 갖는 지점**이 달라진다. 조건을 만족하는 값은 $a = -6$, $a = \frac{10}{3}$ 이므로 그 합은 $-\frac{8}{3}$이다.

계산 과정

식을 완전제곱식으로 바꾸면 $f(x) = 2(x - a)^2 - 2a^2 + 2a$이다. 이 포물선은 아래로 볼록하고 축은 $x = a$ 이므로, **구간 안에서 축에 가장 가까운 지점**에서 최솟값을 갖는다. 따라서 축의 위치를 구간 $0 \le x \le 2$와 비교한다.

$a < 0$인 경우: 축이 구간의 왼쪽에 있으므로 $x = 0$에서 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(0) = 2a = -12$에서 $a = -6$을 얻는다. 이 값은 $a < 0$을 만족한다.

$0 \le a \le 2$인 경우: 꼭짓점이 구간 안에 있으므로 $x = a$에서 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(a) = -2a^2 + 2a = -12$ 이고, 정리하면 $a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2) = 0$이다. 여기서 얻는 $a = 3$, $a = -2$는 모두 **이 경우의 범위를 벗어나므로** 제외한다.

$a > 2$인 경우: 축이 구간의 오른쪽에 있으므로 $x = 2$에서 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(2) = 8 - 6a = -12$에서 $a = \frac{10}{3}$을 얻는다. 이 값은 $a > 2$를 만족한다.

조건을 만족하는 모든 값의 합은 $-6 + \frac{10}{3} = -\frac{8}{3}$이며, ③의 값과 같다.

NoteBase

문 14. 좌표평면에서 두 점 $A(-1,4)$, $B(a,\ -5)$를 이은 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이 원 $x^2+y^2=13$의 둘레 및 내부에 있을 때, 정수 a의 개수는?

① 10

② 13

③ 15

④ 17

정답 1번

간단한 해설

내분점의 좌표는 $\left(\frac{2a-1}{3},\ -2\right)$이며, 원의 **둘레와 내부를 모두 포함**하는 조건을 적용하면 -4≤ a≤5이다. 이 범위에 있는 정수는 10개다.

계산 과정

내분점의 좌표: 내분점을 $P(x,y)$라 하면 $AP:PB=2:1$이다. 내분점의 좌표는 **반대쪽 선분의 비를 가중치로** 사용하므로, $x=\frac{1\cdot(-1)+2a}{2+1}=\frac{2a-1}{3}$, $y=\frac{1\cdot4+2\cdot(-5)}{2+1}=-2$이다.

원의 조건 적용: 원 $x^2+y^2=13$은 중심이 원점이고 반지름이 $\sqrt{13}$이다. 점이 **원의 둘레 또는 내부**에 있으려면 원점까지의 거리의 제곱이 13 이하이어야 하므로 x^2+y^2≤13이다. 내분점의 좌표를 대입하면 ≤ft((2a-1)/(3))^2+4≤13이고, 이를 정리하면 (2a-1)^2≤81이다. 따라서 -9≤2a-1≤9, 즉 -4≤ a≤5를 얻는다.

정수의 개수: 양 끝값도 조건을 만족하므로 가능한 정수 a는 −4부터 5까지이다. 그 개수는 $5-(-4)+1=10$개이며, 이는 ①의 10과 일치한다.

NoteBase

문 15. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x) = |x| - 1$에 대하여 $g(x) = (f \circ f)(x)$라 하자. $\int_0^t g(x)dx = 0$을 만족하는 양수 t의 값은?

① $2 - \sqrt{2}$
② $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
③ $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $2 + \sqrt{2}$

정답 4번

간단한 해설

$g(x) = |x - 1| - 1$이므로 0부터 2까지의 정적분은 −1이다. 이를 상쇄하려면 2부터 t까지의 **양의 삼각형 넓이가 1**이어야 하므로 $\frac{(t-2)^2}{2} = 1$에서 $t = 2 + \sqrt{2}$를 얻는다.

계산 과정

합성함수 정리: $g(x) = f(f(x)) = ||x| - 1| - 1$이다. 적분 구간에서는 $x \geq 0$이므로 $g(x) = |x - 1| - 1$이다. **절댓값 안의 부호가 바뀌는** $x = 1$을 기준으로 나누면, $0 \leq x \leq 1$에서 $g(x) = -x$이고 $x \geq 1$에서 $g(x) = x - 2$이다.

양수 t의 범위: $0 < x < 2$에서는 $g(x) < 0$이므로 $0 < t \leq 2$일 때 $\int_0^t g(x)dx < 0$이다. 따라서 주어진 정적분이 0이 되려면 $t > 2$**이어야 한다**.

정적분을 넓이로 계산: 정적분은 그래프가 x축 아래에 있으면 넓이를 음수로, 위에 있으면 양수로 계산한다. 0부터 1까지와 1부터 2까지는 밑변과 높이가 각각 1인 삼각형이므로, ∫ _0^2 g(x) dx=-12-12=-1이다. 2부터 t까지는 $g(x) = x - 2$이므로 **밑변과 높이가 모두** $t - 2$인 삼각형이다. 따라서 $\int_2^t g(x)dx = \frac{(t-2)^2}{2}$이다.

조건 적용: 두 구간의 정적분을 더하면 $-1 + \frac{(t-2)^2}{2} = 0$이므로 $(t - 2)^2 = 2$이다. $t > 2$이므로 $t - 2 = \sqrt{2}$를 택한다. 구하는 값은 $t = 2 + \sqrt{2}$이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 전체집합 U=\x x는 50 이하의 자연수\의 두 부분집합 A, B에 대하여 A=\x x는 3의 배수\, B=\x x는 4의 배수\일 때, 집합 $A \cap B^C$의 모든 원소의 합은? (단, B^C는 B의 여집합이다.)

① 268

② 278

③ 288

④ 298

정답 3번

간단한 해설

$A \cap B^C$의 원소는 3의 배수 중 **4의 배수가 아닌 수**이다. 따라서 50 이하의 3의 배수의 합에서 12의 배수의 합을 빼면 408 - 120 = 288이다.

계산 과정

B^C는 전체집합 U에서 B에 속하지 않는 원소들의 집합이다. 따라서 $A \cap B^C$는 50 이하의 자연수 중 **3의 배수이면서 4의 배수가 아닌 수**의 집합이다. A의 모든 원소의 합에서 $A \cap B$의 모든 원소의 합을 빼면 구하려는 합을 얻는다.

50 이하의 3의 배수는 3, 6, ⋯, 48로 16개이다. 이들은 등차수열을 이루므로 **첫 항과 마지막 항의 평균에 항의 개수를 곱하여** 합을 구한다. 따라서 A의 모든 원소의 합은 $\frac{(3+48)\cdot 16}{2} = 408$이다.

3과 4의 최소공배수는 12이므로, $A \cap B$의 원소는 50 이하의 12의 배수인 12, 24, 36, 48이다. 제외할 원소들의 합은 12 + 24 + 36 + 48 = 120이다.

따라서 $A \cap B^C$의 모든 원소의 합은 408 - 120 = 288이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_7^2 - a_1^2 = 36$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

정답 1번

간단한 해설

공차가 3이므로 $a_7 - a_1 = 18$이고, **제곱의 차를 인수분해**하면 $a_7 + a_1 = 2$를 얻는다. 따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은 $\frac{7 \cdot 2}{2} = 7$이다.

계산 과정

공차는 이웃한 두 항의 차이다. 첫째항에서 제7항까지는 공차를 여섯 번 더하므로 $a_7 - a_1 = (7-1) \cdot 3 = 18$이다.

주어진 제곱의 차를 인수분해하면 $(a_7 - a_1)(a_7 + a_1) = 36$이다. 여기에 $a_7 - a_1 = 18$을 대입하면 $18(a_7 + a_1) = 36$이므로 $a_7 + a_1 = \frac{36}{18} = 2$이다. 이 값은 **첫째항과 제7항의 합**이다.

등차수열은 양 끝에서 같은 거리의 두 항을 더한 값이 일정하므로, 항들의 평균은 첫째항과 마지막 항의 평균과 같다. 구하는 합을 S_7이라 하면 $S_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} = \frac{7 \cdot 2}{2} = 7$이다.

따라서 구하는 값은 7이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 어느 체험학습장은 사전 인터넷 예약을 통해서만 입장할 수 있다. 예약한 사람 중 임의로 뽑은 900명 중에서 600명이 체험학습장에 입장하였을 때 전체 예약자 중 체험학습장에 입장한 사람의 비율 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le p \le b$라 하자. 이때 $b^2 - a^2$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \le Z \le 2.5) = 0.495$로 계산한다.)

① $\frac{2\sqrt{2}}{27}$
② $\frac{\sqrt{2}}{9}$
③ $\frac{4\sqrt{2}}{27}$
④ $\frac{5\sqrt{2}}{27}$

정답 1번

간단한 해설

신뢰구간의 중심은 $\frac{2}{3}$, 오차한계는 $\frac{\sqrt{2}}{36}$이다. **제곱의 차**를 $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$로 바꾸어 계산하면 $\frac{2\sqrt{2}}{27}$이다.

계산 과정

1. 표본비율 구하기: 전체 예약자 중 입장한 사람의 비율이 모비율 p이다. 표본의 크기는 $n = 900$이고, 표본비율은 $\hat{p} = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$이다. 입장한 사람 600명과 입장하지 않은 사람 300명이 모두 충분히 많으므로 모비율의 신뢰구간에 정규근사를 적용한다.

2. 신뢰도에 맞는 값 정하기: 표준정규분포는 0을 중심으로 대칭이므로 주어진 조건에서 $P(-2.5 \le Z \le 2.5) = 0.99$이다. 따라서 신뢰도 99%의 신뢰구간에는 **문제에서 주어진 2.5**를 사용한다.

3. 오차한계 구하기: 표본비율의 표준편차는 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$이고, 모비율을 모르므로 p 대신 표본비율을 넣어 표준오차를 추정한다. 이 값은 $s = \sqrt{\frac{(2/3)(1/3)}{900}} = \frac{\sqrt{2}}{90}$이다. 여기에 2.5를 곱한 **오차한계**는 $E = 2.5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{90} = \frac{\sqrt{2}}{36}$이다.

4. 두 끝점의 합과 차 구하기: 신뢰구간은 $\hat{p} - E \le p \le \hat{p} + E$이므로 $a = \frac{2}{3} - E$, $b = \frac{2}{3} + E$이다. 두 끝점은 표본비율을 중심으로 대칭이므로 **합은 중심의 2배, 차는 오차한계의 2배**이다. 따라서 $b + a = \frac{4}{3}$, $b - a = 2E = \frac{\sqrt{2}}{18}$이다.

5. 제곱의 차 계산하기: $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$를 이용한다. 따라서 $b^2 - a^2 = \frac{\sqrt{2}}{18} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{27}$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$의 값은?

① $\frac{17}{6}$
② $\frac{17}{3}$
③ $\frac{17}{2}$
④ $\frac{34}{3}$

정답 2번

간단한 해설

합의 각 항을 **함숫값과 구간의 폭의 곱**으로 나타내면 구분구적법을 적용할 수 있다. 주어진 극한은 $\int_0^1 2x(1+2x)^2dx$이며, 그 값은 $\frac{17}{3}$이다.

계산 과정

1. 구간과 분할점 설정: 구간 $[0, 1]$을 n등분하면 각 소구간의 폭은 $\Delta x=\frac{1}{n}$, 오른쪽 끝점은 $x_k=\frac{k}{n}$이다. 이때 $\frac{2k}{n^2}=2x_k\Delta x$이고, $f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=(1+2x_k)^2$이다.

2. 정적분으로 변환: 각 항은 $2x_k(1+2x_k)^2\Delta x$이므로, **적분할 함수**는 $g(x)=2x(1+2x)^2$이다. 이 함수는 $[0, 1]$에서 연속이므로 주어진 합의 극한은 구분구적법에 의해 $\int_0^1 2x(1+2x)^2dx$가 된다.

3. 적분 계산: 피적분함수를 전개하면 $2x(1+2x)^2=2x+8x^2+8x^3$이다. 따라서 $\int_0^1(2x+8x^2+8x^3)dx=\left[x^2+\frac{8}{3}x^3+2x^4\right]_0^1$이다. 위끝 1을 대입한 값에서 아래끝 0을 대입한 값을 빼면 $1+\frac{8}{3}+2=\frac{17}{3}$을 얻는다.

구한 극한값 $\frac{17}{3}$은 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 자연수 n에 대하여 4^n의 일의 자리 수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{2n-1}}{2^{2n-1}}+\frac{a_{2n}}{3^{2n}}\right)=\frac{q}{p}$를 만족시키는 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① 50

② 51

③ 52

④ 53

정답 4번

간단한 해설

4^n의 일의 자리 수는 **홀수 번째에 4, 짝수 번째에 6**이므로 주어진 급수는 두 등비급수로 나누어 계산한다. 그 합은 $\frac{41}{12}$이고 기약분수이므로, 분모와 분자의 합은 53이다.

계산 과정

일의 자리 수의 주기: $4^1=4$, $4^2=16$, $4^3=64$에서 일의 자리 수는 4, 6, 4로 이어진다. 일의 자리 수 4에 4를 곱하면 6, 6에 4를 곱하면 4가 되므로 **4와 6이 번갈아 반복**된다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}=4$, $a_{2n}=6$이다.

홀수 번째 항의 합: $\frac{a_{2n-1}}{2^{2n-1}}=\frac{4}{2^{2n-1}}$에서 첫째항은 2이다. n이 1 증가하면 분모가 4배가 되므로 공비는 14이다. 첫째항이 b, 공비가 r인 등비급수는 **공비의 절댓값이 1보다 작을 때** 수렴하며 합은 $\frac{b}{1-r}$이다. 따라서 홀수 번째 항들이 만드는 급수의 합은 Σ_n=1^∞(4)/(2^2n-1)=(2)/(1-14)=83이다.

짝수 번째 항의 합: $\frac{a_{2n}}{3^{2n}}=\frac{6}{3^{2n}}$에서 첫째항은 69=23이다. n이 1 증가하면 분모가 9배가 되므로 공비는 19이다. 이 급수도 공비의 절댓값이 1보다 작으므로 합은 Σ_n=1^∞(6)/(3^2n)=(23)/(1-19)=34이다.

분모와 분자의 합: 두 급수가 모두 수렴하므로 각각의 합을 더하면 주어진 급수의 합을 얻는다. 그 값은 83+34=(32+9)/(12)=(41)/(12)이다. 41과 12는 서로소이고 문제의 분수는 $\frac{q}{p}$이므로 **분모인 p가 12, 분자인 q가 41**이다. 따라서 p + q = 12 + 41 = 53이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase