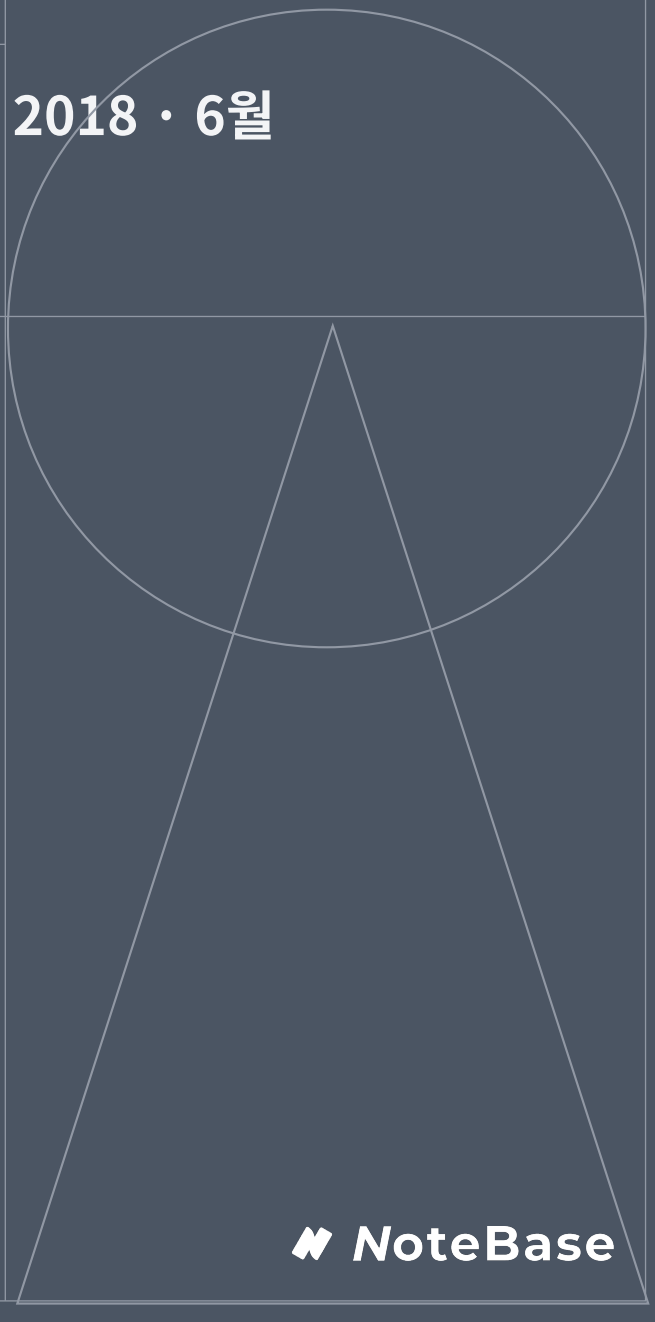
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2018 · 6월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2018 · 6월

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2018 · 6월

문 1. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt{\sqrt[3]{16}}$**의 값은?**

① $\sqrt{2}$

② 2

③ $2\sqrt{2}$

④ 4

정답 2번

간단한 해설

같은 밑의 거듭제곱을 곱할 때는 **지수를 더한다**. 두 인수의 지수 합이 $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$이므로, 주어진 식의 값은 $16^{\frac{1}{4}} = 2$이다.

계산 과정

16은 양수이므로 거듭제곱근을 분수 지수로 나타낼 수 있다. 양수 a에 대해 $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$이며, **거듭제곱의 거듭제곱에서는 지수를 곱한다**. 따라서 첫 번째 인수는 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{12}}$이다.

두 번째 인수는 세제곱근에 다시 제곱근을 취하므로 $\sqrt{\sqrt[3]{16}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{6}}$이다.

두 인수의 밑이 16으로 같으므로 지수를 더하면 $16^{\frac{1}{12}} \cdot 16^{\frac{1}{6}} = 16^{\frac{1}{4}}$이다. 이는 16의 양의 네제곱근이며, $2^4 = 16$이므로 값은 2이다. 선택지 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. 두 다항식 $A = 3x^2 + 2xy + 6y^2$, $B = x^2 - xy + 5y^2$에 대하여 $X - 3(A + 2B) = 2A$를 만족하는 다항식 X를 $ax^2 + bxy + cy^2$이라 할 때, $a + b + c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 85

② 86

③ 87

④ 88

정답 1번

간단한 해설

주어진 식을 정리하면 $X = 5A + 6B$이다. **동류항의 계수끼리** 계산하면 $a = 21, b = 4, c = 60$이므로 계수의 합은 85이다.

계산 과정

주어진 등식의 양변에 $3(A + 2B)$를 더하면 $X = 2A + 3(A + 2B)$이다. 괄호를 풀고 같은 다항식끼리 모으면 $X = 2A + 3A + 6B = 5A + 6B$가 된다.

$X = ax^2 + bxy + cy^2$에서 a, b, c는 각각 x^2, xy, y^2의 계수이다. 따라서 $5A + 6B$에서 **문자와 차수가 같은 항끼리** 계수를 계산한다. 특히 B의 xy항의 계수는 -1이다.

$a = 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 21$

$b = 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) = 4$

$c = 5 \cdot 6 + 6 \cdot 5 = 60$

따라서 $a + b + c = 21 + 4 + 60 = 85$이며, 이는 ①의 값이다.

NoteBase

문 3. 삼차방정식 $x^3 - x^2 - 6x + 2 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

간단한 해설

주어진 다항식에 **1을 대입**하면 $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$의 값은 -4이다. 구하려는 곱은 **세 인수의 부호를 모두 바꾼 것**이므로 4이다.

계산 과정

$f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$라 하자. 세 근이 α, β, γ이고 **최고차항의 계수가 1**이므로
$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$로 인수분해할 수 있다.

각 인수를 구하려는 식과 연결하기 위해 $x = 1$을 대입한다. 이때 $f(1) = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$이고, 주어진 다항식에서 계산하면 $f(1) = 1 - 1 - 6 + 2 = -4$이다.

$\alpha - 1 = -(1 - \alpha)$이고 나머지 두 인수도 같은 방식으로 부호가 바뀐다. **세 인수에서 각각 -1을 꺼내므로** 구하려는 곱은 $-f(1)$이다. 따라서 $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = 4$이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n+5}{n+1}\right)=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)$의 값은?

① 9

② 12

③ 15

④ 18

정답 3번

간단한 해설

급수가 수렴하면 **일반항은 0으로 수렴**하므로 a_n의 극한은 $\frac{3n+5}{n+1}$의 극한인 3이다. 따라서 $a_n^2+2a_n$의 극한은 15이다.

계산 과정

주어진 급수의 일반항을 $b_n=a_n-\frac{3n+5}{n+1}$, 부분합을 S_n이라 하자. 급수의 합이 1이므로 S_n은 1로 수렴한다. $n\geq 2$에서 $b_n=S_n-S_{n-1}$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=1-1=0$이다. 즉, 급수의 합은 1이지만 **일반항의 극한은 0**이다.

$\frac{3n+5}{n+1}=3+\frac{2}{n+1}$이므로 이 분수의 극한은 3이다. 또 $a_n=b_n+\frac{3n+5}{n+1}$이고 b_n의 극한이 0이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0+3=3$이다.

a_n이 3으로 수렴하므로 극한의 곱셈과 덧셈 법칙을 적용하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)=3^2+2\cdot 3=15$이다. 이는 ③의 15와 일치한다.

NoteBase

문 5. 일대일대응인 두 함수 f, g에 대하여 $f(x+3)=2g(x)$이고 $f^{-1}(6)=4$일 때, $g^{-1}(3)$의 값은?

① 1

② 3

③ 4

④ 6

정답 1번

간단한 해설

$f^{-1}(6)=4$는 $f(4)=6$이라는 뜻이다. **함숫값이 3이 되는 입력값**을 찾으면 $g(1)=3$이므로 $g^{-1}(3)=1$이다.

계산 과정

두 함수가 일대일대응이므로 역함수가 존재하며, 역함수는 원래 함수의 입력값과 출력값을 서로 바꾼다. 따라서 $f^{-1}(6)=4$는 **입력값 4에 대한 함숫값이 6**이라는 뜻이므로 $f(4)=6$이다.

주어진 관계 $f(x+3)=2g(x)$에서 이미 아는 $f(4)$를 이용하려면 $x+3=4$, 즉 $x=1$을 대입한다. 그러면 $f(4)=2g(1)$이므로 $6=2g(1)$이고, $g(1)=3$이다.

$g^{-1}(3)$은 **함수값이 3이 되는 입력값**이다. $g(1)=3$이므로 $g^{-1}(3)=1$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. A=_n→∞(1^6+2^6+3^6+·s+n^6)/((1^2+2^2+3^2+·s+n^2)(1^3+2^3+3^3+·s+n^3))라 할 때, 7A의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

정답 4번

간단한 해설

분자와 분모의 **최고차항 계수의 비**를 구하면 $A = \frac{12}{7}$이다. 따라서 7A의 값은 12이다.

계산 과정

양의 정수 p에 대해 $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$라 두고, $T_p = \frac{S_p}{n^{p+1}}$로 나타낸다. 그러면 $T_p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^p$이다.

이 식은 **구간 [0, 1]을 n등분한 구분구적법의 합**이다. 함수 x^p는 이 구간에서 연속이므로 $\lim_{n\to\infty} T_p = \int_0^1 x^p dx$이다. 적분값은 $\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$이므로, 이는 거듭제곱합을 n^{p+1}로 나누었을 때 남는 계수를 뜻한다.

따라서 여섯제곱합에서는 $\lim_{n\to\infty} T_6 = \frac{1}{7}$, 제곱합에서는 $\lim_{n\to\infty} T_2 = \frac{1}{3}$, 세제곱합에서는 $\lim_{n\to\infty} T_3 = \frac{1}{4}$이다.

분모의 두 합에서 나온 거듭제곱을 곱하면 $n^3 \cdot n^4 = n^7$이므로 분자의 거듭제곱과 약분된다. 이에 따라 $A = \lim_{n\to\infty} \frac{T_6}{T_2 T_3}$이다. 분모의 극한이 0이 아니므로 $A = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{12}{7}$을 얻는다.

구하는 값은 $7A = 7 \cdot \frac{12}{7} = 12$이며, ④의 12와 일치한다.

NoteBase

문 7. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q를 각각
p : $(x-3)(x+2) \geq 0$
q : $|x-8| < a$
라 할 때, p는 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 자연수 a의 최댓값은?

① 1
② 3
③ 5
④ 7

정답 3번

간단한 해설

p가 q의 필요조건이려면 **q를 만족하는 모든 실수가 p도 만족**해야 한다. 따라서 q의 범위가 $x \geq 3$ 안에 들어가야 하므로 $8-a \geq 3$, 즉 $a \leq 5$이고 자연수 a의 최댓값은 5이다.

계산 과정

필요조건의 방향: p가 q이기 위한 필요조건이라는 것은 **q이면 반드시 p이다**라는 뜻이다. 따라서 q를 만족하는 실수의 집합이 p를 만족하는 실수의 집합에 포함되어야 한다.

조건 p의 범위: $(x-3)(x+2) \geq 0$에서 두 인수의 곱이 0 이상이려면 두 인수가 모두 0 이하이거나 모두 0 이상이어야 한다. 따라서 p를 만족하는 범위는 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$이다.

조건 q의 범위: 자연수 a에 대하여 $|x-8| < a$를 풀면 $-a < x-8 < a$, 즉 $8-a < x < 8+a$이다. 이는 8을 중심으로 좌우로 a만큼 뻗은 구간이며 **양 끝점은 포함하지 않는다**.

포함 관계의 적용: q의 범위는 8을 포함하는 하나의 구간이므로 전체가 p의 범위 중 $x \geq 3$에 들어가야 한다. 왼쪽 끝점 $8-a$가 3보다 작으면 p를 만족하지 않는 $-2 < x < 3$의 수가 일부 포함된다. 따라서 $8-a \geq 3$이어야 하며, 이를 풀면 $a \leq 5$이다. 오른쪽은 p의 범위가 제한 없이 이어지므로 추가 조건이 없다.

최댓값 확인: $a = 5$이면 q의 범위는 $3 < x < 13$으로, 그 안의 모든 실수가 p를 만족한다. 따라서 자연수 a의 최댓값은 5이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. $\log x = -\frac{3}{2}$**일 때,** x^3**은 소수점 아래** a**째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나고,** x^5**은 소수점 아래** b**째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.** $a+b$**의 값은?**

① 11

② 12

③ 13

④ 14

정답 3번

간단한 해설

$10^{-5} < x^3 < 10^{-4}$, $10^{-8} < x^5 < 10^{-7}$이므로 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 위치는 각각 **소수점 아래 다섯째와 여덟째 자리**이다. 따라서 $a+b=13$이다.

계산 과정

상용로그는 밑이 10인 로그이므로 $\log x = -\frac{3}{2}$에서 $x = 10^{-\frac{3}{2}}$이다.

a 구하기: 지수법칙에 따라 $x^3 = 10^{-\frac{9}{2}}$이다. $-5 < -\frac{9}{2} < -4$이고 밑 10이 1보다 크므로 $10^{-5} < x^3 < 10^{-4}$이다. 즉, x^3은 0.00001보다 크고 0.0001보다 작다. 따라서 **소수점 아래 첫 네 자리는 모두 0**이고 다섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $a=5$이다.

b 구하기: 마찬가지로 $x^5 = 10^{-\frac{15}{2}}$이다. $-8 < -\frac{15}{2} < -7$이므로 $10^{-8} < x^5 < 10^{-7}$이다. 즉, x^5은 0.00000001보다 크고 0.0000001보다 작다. 따라서 **소수점 아래 첫 일곱 자리는 모두 0**이고 여덟째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $b=8$이다.

따라서 $a+b=5+8=13$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 점 (3, 1)에서 원 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 16 = 0$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라고 할 때, $m_1 + m_2$의 값은?

① -4

② $-\frac{8}{3}$

③ $\frac{8}{3}$

④ 4

정답 1번

간단한 해설

접선에서는 **원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름과 같다**. 이 조건으로 얻은 $3m^2 + 12m + 8 = 0$의 두 근이 두 접선의 기울기이므로, 근과 계수의 관계에 따라 기울기의 합은 -4이다.

계산 과정

원의 중심과 반지름: 주어진 식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$이다. 따라서 중심은 $(1, 4)$, 반지름은 1이다.

접선의 기울기 조건: 점 $(3, 1)$을 지나고 기울기가 m인 직선은 $y - 1 = m(x - 3)$, 즉 $mx - y + 1 - 3m = 0$이다. 원에 접하려면 **중심에서 직선까지의 수선의 길이가 반지름과 같아야** 하므로, 점과 직선 사이의 거리 공식에 따라 $\frac{|m - 4 + 1 - 3m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$이다. 이를 정리하면 $(2m + 3)^2 = m^2 + 1$이고, 전개하여 이항하면 $3m^2 + 12m + 8 = 0$을 얻는다.

두 기울기의 합: 이 이차방정식의 두 근이 m_1, m_2이다. 두 근을 각각 구할 필요 없이 **근과 계수의 관계**를 적용하면 $m_1 + m_2 = -\frac{12}{3} = -4$이다. 이는 ①의 -4와 일치한다.

NoteBase

문 10. 유리함수 $y=\frac{1}{x}\ (x>0)$의 그래프 위의 점 $P(a,\ b)$와 직선 $y=-x$ 사이의 거리가 3일 때, a^2+b^2의 값은?

① 1

② 4

③ 9

④ 16

정답 4번

간단한 해설

그래프 위의 점이라는 조건에서 **좌표의 곱**은 $ab=1$이고, 거리 조건에서 $(a+b)^2=18$이다. 합의 제곱에서 곱의 두 배를 빼면 $a^2+b^2=16$이다.

계산 과정

곡선 위의 점 조건: 점 $P(a,\ b)$가 $y=\frac{1}{x}$의 그래프 위에 있으므로 $b=\frac{1}{a}$, 즉 $ab=1$이다. 또한 $a>0$이므로 $b>0$이다.

거리 조건: 직선 $y=-x$를 $x+y=0$으로 나타낸다. 점과 직선 사이의 거리는 **점에서 직선에 내린 수선의 길이**이므로, 점과 직선 사이의 거리 공식을 적용하면 $\frac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3$이다. 두 좌표가 모두 양수여서 $|a+b|=a+b$이므로 $a+b=3\sqrt{2}$이고, $(a+b)^2=18$이다.

구하는 값: **합의 제곱을 전개한 식** $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$를 이용한다. 이를 정리하면 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로, 앞에서 구한 값을 대입하여 $a^2+b^2=18-2\cdot1=16$을 얻는다. 이는 ④의 16과 일치한다.

NoteBase

문 11. 연립방정식 cases2x^2+xy-y^2=0\^2-y^2=-3cases 을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 값은?

① −2

② −1

③ 1

④ 2

정답 4번

간단한 해설

첫째 식에서 나오는 두 경우 중 $y = -x$는 **둘째 식을 만족하지 못한다**. 따라서 $y = 2x$이고, 둘째 식에서 $x^2 = 1$이므로 $xy = 2$이다.

계산 과정

첫째 식을 인수분해하면 $(2x - y)(x + y) = 0$이다. 두 인수의 곱이 0이므로 $2x - y = 0$ 또는 $x + y = 0$, 즉 $y = 2x$ 또는 $y = -x$이다.

$y = -x$이면 $x^2 - y^2 = 0$이 되어 주어진 조건 $x^2 - y^2 = -3$과 모순된다. 따라서 **두 식을 동시에 만족하려면** $y = 2x$이어야 한다.

$y = 2x$를 둘째 식에 대입하면 $x^2 - (2x)^2 = -3$이다. 이를 정리하면 $-3x^2 = -3$이므로 $x^2 = 1$이다. 따라서 $xy = x \cdot 2x = 2x^2 = 2$이며, 이 값은 ④의 2와 일치한다.

NoteBase

문 12. 함수 f(x)=casesx^2+2x-1 & (x<k)\\-(3)/(2)x^2+12x-11 & (x≥ k)cases가 모든 실수 x에서 연속일 때, $k + f(1) + f(2)$의 값은?

① 2

② 5

③ 8

④ 11

정답 4번

간단한 해설

식이 바뀌는 $x = k$에서 **좌극한과 함수값이 같아야 하므로** $k = 2$이다. 이때 $f(1) = 2$, $f(2) = 7$이므로 구하는 값은 11이다.

계산 과정

두 구간의 식은 모두 다항식이므로 각 구간 안에서는 연속이다. 따라서 모든 실수에서 연속이려면 **식이 바뀌는 경계**인 $x = k$에서 좌극한과 함수값이 같아야 한다. 좌극한은 $k^2 + 2k - 1$이고, 함수값이자 우극한은 $-\frac{3}{2}k^2 + 12k - 11$이다.

두 값을 같게 놓고 양변에 2를 곱하여 정리하면 $5k^2 - 20k + 20 = 0$이다. 이를 인수분해하면 $5(k - 2)^2 = 0$이므로 $k = 2$이다.

$f(1)$ 계산: $1 < 2$이므로 첫 번째 식을 적용한다. 따라서 $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2$이다.

$f(2)$ 계산: **경계값은 두 번째 구간에 포함**되므로 $f(2) = -\frac{3}{2} \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 11$이다. 이를 계산하면 $f(2) = -6 + 24 - 11 = 7$이다.

구하는 값은 $k + f(1) + f(2) = 2 + 2 + 7 = 11$로, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. 부등식 $|2x-1| > x^2 - 3x - 1$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

정답 2번

간단한 해설

절댓값 안의 **부호에 따라 경우를 나누면**, 부등식을 만족하는 정수는 $-1 < x < 5$인 범위에 있다. 가능한 정수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

계산 과정

정수 x는 0 이하이거나 1 이상이므로, **두 경우로 나누어 절댓값을 없앤다**.

1. $x \le 0$인 경우: $2x - 1 < 0$이므로 $|2x-1| = 1 - 2x$이다. 주어진 부등식은 $1 - 2x > x^2 - 3x - 1$, 즉 $x^2 - x - 2 < 0$이다. 인수분해하면 $(x+1)(x-2) < 0$이므로 $-1 < x < 2$이다. 여기에 $x \le 0$을 함께 적용하면 가능한 정수는 0뿐이다.

2. $x \ge 1$인 경우: $2x - 1 > 0$이므로 $|2x-1| = 2x - 1$이다. 주어진 부등식은 $2x - 1 > x^2 - 3x - 1$, 즉 $x^2 - 5x < 0$이다. 인수분해하면 $x(x-5) < 0$이므로 $0 < x < 5$이다. 여기에 $x \ge 1$을 함께 적용하면 가능한 정수는 1, 2, 3, 4이다.

두 경우의 정수를 합하면 0, 1, 2, 3, 4로 총 5개이며, ②의 5개와 일치한다. 원래 부등식이 **등호를 포함하지 않으므로** 두 변이 같아지는 $x = -1$과 $x = 5$는 제외한다.

NoteBase

문 14. 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 분산은? (단, a는 상수이다.)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	a	1

① 1
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{6}$

정답 1번

간단한 해설

분산은 **제곱의 평균에서 평균의 제곱을 뺀 값**이다. 이 분포에서는 $E(X)=1$, $E(X^2)=2$이므로 분산은 $2-1=1$이다.

계산 과정

1. 상수 구하기: 확률분포에서 **모든 확률의 합은 1**이다. 표의 확률을 더하면 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+0+a=1$이므로 $a=\frac{1}{6}$이다.

2. 평균 구하기: 평균 $E(X)$는 각 값에 그 값이 나올 확률을 곱하여 더한 것이다. $X=0$인 항은 값이 0이고, $X=2$인 항은 확률이 0이므로 두 항의 기여는 없다. 따라서 $E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}=1$이다.

3. 제곱의 평균 구하기: $E(X^2)$는 **각 값을 먼저 제곱한 뒤 확률을 곱하여 더한 값**이다. 앞에서와 같이 기여가 0인 항을 제외하면 $E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{6}=2$이다.

4. 분산 구하기: 분산은 평균으로부터의 차이를 제곱하여 평균 낸 값이며, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$으로 계산할 수 있다. 따라서 $V(X)=2-1^2=1$이며, ①의 1과 일치한다.

NoteBase

문 15. 다음 <보기>의 수열 $\{a_n\}$ 중에서 수렴하는 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

ㄴ. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

ㄷ. a_n=cases0 & (n=1,3,5,·s)\ (1)/(2^n) & (n=2,4,6,·s)cases

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ

정답 4번

간단한 해설

ㄷ은 홀수 번째 항이 0이고 짝수 번째 항도 0으로 가까워지므로, 전체 수열이 **0으로 수렴한다**. ㄴ처럼 홀수 번째 항과 짝수 번째 항이 서로 다른 값에 머무르면 수렴하지 않는다.

보기별 해설

수열이 수렴한다는 것은 n이 한없이 커질 때 항 a_n이 하나의 일정한 실수에 한없이 가까워진다는 뜻이다.

ㄱ. O: n이 커질수록 분모 n^2+1은 한없이 커지고 분자는 1로 일정하다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$이므로 0으로 수렴한다.

ㄴ. X: 자연수 k에 대하여 홀수 번째 항은 $a_{2k-1}=0$, 짝수 번째 항은 $a_{2k}=1$이다. 항이 0과 1을 번갈아 가지므로 **하나의 값에 가까워지지 않는다**. 따라서 이 수열은 수렴하지 않고 발산한다.

ㄷ. O: 홀수 번째 항은 모두 0이고, 짝수 번째 항은 $a_{2k}=\frac{1}{2^{2k}}$이다. k가 커질수록 2^{2k}이 한없이 커지므로 짝수 번째 항도 0으로 가까워진다. **홀수 번째 항과 짝수 번째 항이 모두 같은 값 0으로 수렴**하므로 전체 수열도 0으로 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄷ이며, 이는 ④의 조합과 일치한다.

NoteBase

문 16. 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(11, 9), N(12, 16)$을 따르고 $P(X \le k) = P(Y \ge 2k)$일 때, 상수 k의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

정답 2번

간단한 해설

표준화한 정규분포에서 같은 확률을 갖는 왼쪽 꼬리와 오른쪽 꼬리의 경계는 **0을 기준으로 대칭**이다. 따라서 $\frac{k-11}{3} = -\frac{2k-12}{4}$이며, 이를 풀면 $k = 8$이다.

계산 과정

정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$에서 두 번째 수는 분산이므로, X의 평균과 표준편차는 각각 11과 3이고 Y의 평균과 표준편차는 각각 12와 4이다. 표준화할 때는 평균을 뺀 뒤 **분산이 아닌 표준편차로 나눈다**.

$U = \frac{X-11}{3}$, $V = \frac{Y-12}{4}$로 놓으면 두 확률변수는 각각 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. 주어진 조건은 $P\left(U \le \frac{k-11}{3}\right) = P\left(V \ge \frac{2k-12}{4}\right)$로 바뀐다.

표준정규분포는 0을 중심으로 대칭이므로, 오른쪽 꼬리 확률 $P\left(V \ge \frac{2k-12}{4}\right)$는 왼쪽 꼬리 확률 $P\left(V \le -\frac{2k-12}{4}\right)$와 같다. 또 표준정규분포의 누적확률은 경계값이 커질수록 엄격히 증가한다. 따라서 **왼쪽 누적확률이 같으면 경계값도 같다**는 성질에 의해 $\frac{k-11}{3} = -\frac{2k-12}{4}$이다.

양변에 12를 곱하면 $4(k-11) = -3(2k-12)$이다. 이를 정리하면 $4k - 44 = -6k + 36$, $10k = 80$이므로 $k = 8$이다.

구한 상수의 값은 8이므로 선택지 ②에 해당한다.

NoteBase

문 17. 두 사건 A, B에 대하여 $P(A^C)=\frac{3}{5}$, $P(B^C \mid A)=\frac{1}{3}$일 때, $P(A \cap B)$의 값은?

① $\frac{1}{15}$
② $\frac{2}{15}$
③ $\frac{4}{15}$
④ $\frac{8}{15}$

정답 3번

간단한 해설

조건부확률의 곱셈정리에 따라 A가 일어날 확률에 A가 일어났을 때 B도 일어날 확률을 곱한다. 주어진 여사건의 확률로 두 값을 구하면, A와 B가 동시에 일어날 확률은 $\frac{4}{15}$이다.

계산 과정

먼저 A가 일어날 확률을 구한다. A^C는 A가 일어나지 않는 사건이므로 $P(A)=1-P(A^C)$이다. 따라서 $P(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$이다.

다음으로 A가 일어났을 때 B가 일어날 조건부확률을 구한다. **A가 일어났다는 같은 조건 안에서** B가 일어나거나 일어나지 않을 확률의 합은 1이다. 따라서 $P(B \mid A)=1-P(B^C \mid A)$이고, $P(B \mid A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

조건부확률은 A가 일어난 경우 중 B도 일어나는 비율이다. $P(A)>0$일 때 $P(B \mid A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$이므로, 양변에 $P(A)$를 곱하면 $P(A \cap B)=P(A)P(B \mid A)$이다. 구한 값을 대입하면 $P(A \cap B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$이므로 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 다항식 $f(x+1)-2$가 x^2-4로 나누어떨어질 때, 다항식 $f(x-2)+3$을 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지는?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

정답 3번

간단한 해설

주어진 조건에서 $f(-1)=f(3)=2$이다. 나누는 다항식의 두 근 1과 5에서 **나머지의 값이 모두 5**이므로, 1차 이하인 나머지는 상수 5이다.

계산 과정

주어진 조건에서 함수값 구하기: $x^2-4=(x-2)(x+2)$이므로, 나누어떨어진다는 조건에 따라 $x=2$와 $x=-2$를 대입하면 $f(3)-2=0$, $f(-1)-2=0$이다. 따라서 $f(3)=f(-1)=2$를 얻는다.

나머지의 형태 정하기: 나누는 다항식 x^2-6x+5가 2차식이므로 **나머지의 차수는 2보다 작다**. 따라서 나머지를 $R(x)=ax+b$로 놓는다. 이때 $a=0$이면 상수인 나머지도 나타낼 수 있다.

나머지의 값 구하기: $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$이므로 $x=1$과 $x=5$에서는 나누는 다항식이 0이 된다. 이때는 **나누어지는 다항식과 나머지의 값이 같다**. 따라서 $R(1)=f(-1)+3=5$, $R(5)=f(3)+3=5$이다.

계수 결정하기: $R(x)=ax+b$에 위의 값을 적용하면 $a+b=5$, $5a+b=5$이다. 두 식을 빼면 $4a=0$이므로 $a=0$이고, 이를 대입하면 $b=5$이다. 따라서 나머지는 상수 5이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 동전 한 개를 던져 앞면이 나오면 3점을 얻고 뒷면이 나오면 1점을 잃는 게임에서 동전을 10번 던졌을 때 얻은 점수의 기댓값은? (단, 동전의 앞면이 나올 확률과 뒷면이 나올 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.)

① 10

② 20

③ 30

④ 40

정답 1번

간단한 해설

한 번 던질 때의 기댓값은 앞면의 3점과 뒷면의 −1점에 각각의 확률을 곱해 더한 **1점**이다. 10번 던져 얻는 총점의 기댓값은 10 × 1 = 10점이다.

계산 과정

한 번 던져 얻는 점수를 확률변수 X라 하면, 앞면일 때는 3점, 뒷면일 때는 −1점이다. 기댓값은 **각 점수에 그 점수를 얻을 확률을 곱한 뒤 더한 값**이므로, 1점을 잃는 경우는 음수로 반영한다.

앞면과 뒷면이 나올 확률이 각각 $\frac{1}{2}$이므로 $E(X) = 3 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 1$이다. 즉, 한 번 던져 얻는 점수의 기댓값은 1점이다.

총점은 10번의 점수를 더한 값이며, **합의 기댓값은 각 기댓값의 합**이다. 매번 점수의 기댓값이 1점이므로 총점의 기댓값은 10 × 1 = 10점이다. 이는 ①의 10에 해당한다.

NoteBase

문 20. 같은 종류의 사탕 6개를 4명의 어린이에게 남김없이 나누어줄 때, 사탕을 한 개도 받지 못하는 어린이가 1명인 경우의 수는?

① 40

② 60

③ 80

④ 100

정답 1번

간단한 해설

사탕을 받지 못하는 어린이 1명을 고른 뒤, 나머지 3명이 **모두 1개 이상** 받도록 나눈다. 각 선택마다 분배 방법은 10가지이므로 전체는 4 × 10 = 40가지이다.

계산 과정

사탕을 받지 못하는 어린이 선택: 사탕을 한 개도 받지 못하는 어린이가 정확히 1명이므로, 그 어린이를 고르는 방법은 4가지이다. 나머지 3명은 **모두 1개 이상** 받아야 한다.

나머지 3명에게 분배: 같은 종류의 사탕이므로 각 어린이가 받는 개수만으로 분배 방법이 정해진다. 나머지 3명의 순서를 고정하고 사탕 6개를 일렬로 놓으면, 사탕 사이의 틈은 5곳이다. 이 중 **서로 다른 두 틈에 칸막이**를 넣으면 사탕이 세 묶음으로 나뉘고 각 묶음에는 사탕이 1개 이상 들어간다. 세 묶음을 정해 둔 순서대로 어린이들에게 주면 되므로, 분배 방법은 $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$가지이다.

전체 경우의 수: 사탕을 받지 못하는 어린이를 고르는 4가지 각각에 대해 10가지씩 분배할 수 있다. 따라서 경우의 수는 4 × 10 = 40가지로, ①의 40에 해당한다.

NoteBase