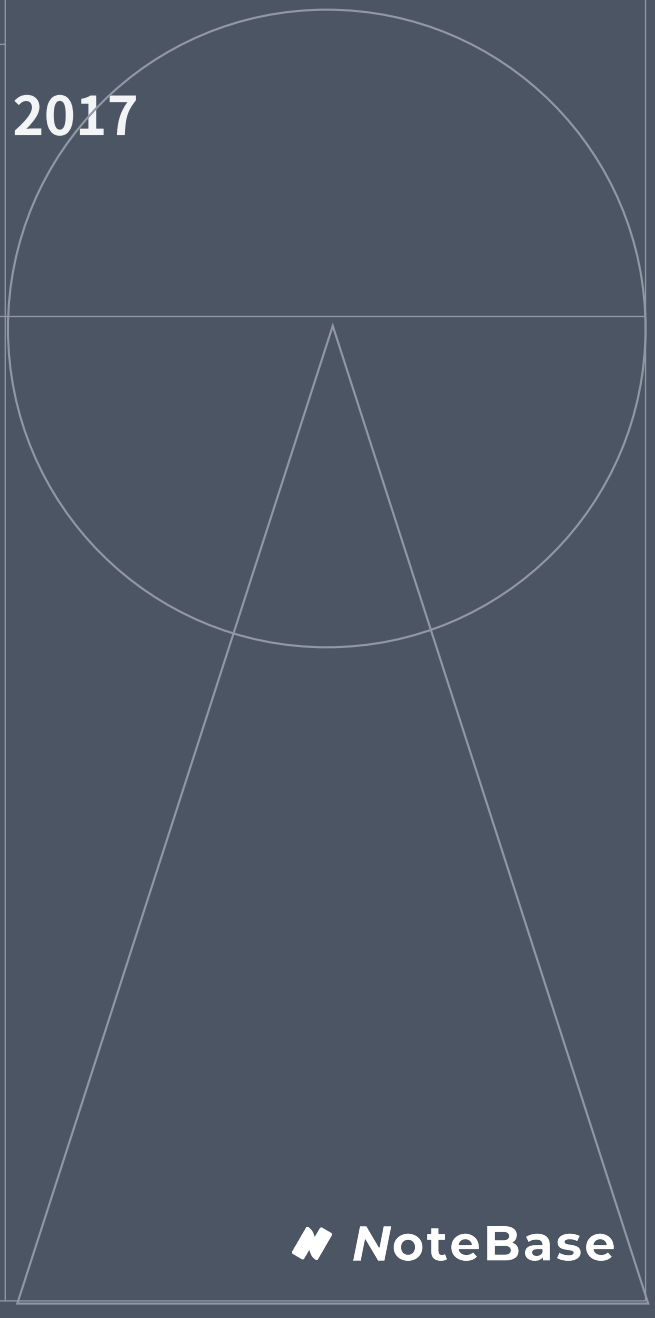
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2017



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2017

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2017

문 1. 두 함수 $f(x)=ax+2$, $g(x)=2x$에 대하여 $(f\circ g)(4)=(g\circ f)(3)$일 때, 상수 a의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

합성함수는 **안쪽 함수부터 차례로 적용**한다. 주어진 조건은 $8a+2=6a+4$이므로 $a=1$이다.

계산 과정

합성함수 $(f\circ g)(4)$는 **먼저 구한 함수값을 다음 함수에 대입**한 $f(g(4))$를 뜻한다. $g(4)=2\cdot 4=8$이므로 $(f\circ g)(4)=f(8)=8a+2$이다.

$(g\circ f)(3)$에서는 먼저 $f(3)=3a+2$를 구한 뒤, 이 값 전체를 g에 대입한다. 따라서 $(g\circ f)(3)=g(3a+2)=2(3a+2)=6a+4$이다.

두 합성함수의 값이 같다는 조건에서 $8a+2=6a+4$이다. 양변에서 $6a+2$를 빼면 $2a=2$이고, 양변을 2로 나누면 $a=1$이다. 이 값은 ①의 1과 일치한다.

NoteBase

문 2. 역함수가 존재하는 함수 f가 $f(3x-1)=9x-5$를 만족시킬 때, $f(1)+f^{-1}(1)$의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

정답 3번

간단한 해설

$f(1)=1$이므로 역함수도 $f^{-1}(1)=1$을 만족한다. 역함수는 **함숫값에 대응하는 원래의 입력값**을 돌려주므로 두 값의 합은 2이다.

계산 과정

먼저 $f(1)$을 구하려면 주어진 식의 입력 부분이 1이 되도록 $3x-1=1$**인 값을 대입**한다. 이 식을 풀면 $x=\frac{2}{3}$이므로, $f(1)=9\cdot\frac{2}{3}-5=1$이다.

역함수가 존재할 때 $f(a)=b$이면 $f^{-1}(b)=a$이다. 즉, 역함수는 **입력값과 함숫값의 대응을 거꾸로** 읽는다. 앞에서 $f(1)=1$을 얻었으므로 $f^{-1}(1)=1$이다.

따라서 $f(1)+f^{-1}(1)=1+1=2$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때, 나머지가 2인 모든 수의 합은?

① 1644

② 1646

③ 1648

④ 1650

정답 4번

간단한 해설

해당하는 수는 2부터 98까지 3씩 증가하는 **등차수열**이며, 모두 33개이다. 첫 수와 끝 수의 평균이 50이므로 합은 33 × 50 = 1650이다.

계산 과정

수의 범위: 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 자연수는 2, 5, 8, …처럼 **3씩 증가**한다. 98은 이 조건을 만족하고 그다음 수인 101은 100을 넘으므로, 더할 수는 2, 5, 8, …, 98이다.

항의 개수: 첫 수 2에서 끝 수 98까지 3씩 증가한 횟수는 $\frac{98-2}{3} = 32$이다. 항의 개수는 **간격의 개수보다 1개 많으므로** 32 + 1 = 33개이다.

합 계산: 등차수열은 처음과 끝에서 같은 거리만큼 떨어진 두 항의 합이 일정하므로, 전체 항의 평균은 첫 항과 끝 항의 평균과 같다. 따라서 합은 $\frac{33(2+98)}{2} = 33 \cdot 50 = 1650$이다. 이 값은 ④의 1650과 일치한다.

NoteBase

문 4. 어느 학교 80명의 학생이 영어, 수학 두 과목의 특기적성 중 적어도 한 과목을 신청하였다. 영어를 신청한 학생이 54명, 수학을 신청한 학생이 47명일 때, 수학만 신청한 학생의 수는?

① 23명

② 26명

③ 29명

④ 32명

정답 2번

간단한 해설

80명 모두 적어도 한 과목을 신청했으므로, 영어 신청자를 제외하면 **수학만 신청한 학생**이 남는다. 따라서 그 수는 80 − 54 = 26명이다.

계산 과정

영어 신청자 54명과 수학 신청자 47명을 더하면 **두 과목을 모두 신청한 학생이 두 번씩** 세어진다. 80명 모두 적어도 한 과목을 신청했으므로, 합계에서 실제 학생 수 80명을 빼면 두 과목을 모두 신청한 학생 수가 나온다. 그 수는 54 + 47 − 80 = 21명이다.

수학 신청자 47명에는 수학만 신청한 학생과 두 과목을 모두 신청한 학생이 포함되어 있다. 따라서 수학만 신청한 학생 수는 47 − 21 = 26명으로, ②의 26명에 해당한다.

NoteBase

문 5. $x = 4^{\frac{1}{6}} + 4^{-\frac{1}{6}}$**일 때,** $2x^3 - 6x$**의 값은?**

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 4번

간단한 해설

두 항의 곱이 1이므로 **세제곱 전개의 교차항**은 $3x$가 된다. 이를 빼면 $x^3 - 3x = 2 + \frac{1}{2}$이므로, 구하는 $2x^3 - 6x$의 값은 5이다.

계산 과정

1. 두 항의 관계: $a = 4^{\frac{1}{6}}$, $b = 4^{-\frac{1}{6}}$으로 놓으면 $x = a + b$이다. 지수법칙에 따라 $ab = 4^0 = 1$이므로 **두 항은 서로 역수**이다.

2. 세제곱 전개: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$이다. 여기서 $ab = 1$, $a + b = x$이므로 교차항 $3ab(a + b)$는 $3x$이다. 따라서 $x^3 - 3x = a^3 + b^3$으로 정리된다.

3. 값 계산: 거듭제곱의 지수를 곱하면 $a^3 = 4^{\frac{1}{2}} = 2$, $b^3 = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$이다. 따라서 $x^3 - 3x = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$이다. 구하는 식은 **이 값의 2배**이므로 $2x^3 - 6x = 2(x^3 - 3x) = 5$이다.

계산한 값 5는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 1이 아닌 양수 a, b에 대하여, 등식 $\frac{1}{\log_2 b}+\frac{1}{\log_4 b}+\frac{1}{\log_8 b}=\frac{2}{\log_a b}$가 성립할 때, a의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 4번

간단한 해설

로그의 **역수 관계와 거듭제곱 성질**을 적용하면 주어진 식은 $\log_b a = 3\log_b 2 = \log_b 8$로 정리된다. 밑이 같은 로그의 값이 같으므로 $a = 8$이다.

계산 과정

양수 a, b는 모두 1이 아니므로 주어진 로그와 그 역수가 정의된다. **로그의 역수는 밑과 진수를 바꾼 로그**이므로 $\frac{1}{\log_2 b} = \log_b 2$, $\frac{1}{\log_4 b} = \log_b 4$, $\frac{1}{\log_8 b} = \log_b 8$이다. 우변도 $\frac{2}{\log_a b} = 2\log_b a$로 바꾼다.

거듭제곱의 지수는 로그 앞으로 꺼낼 수 있다. $4 = 2^2$, $8 = 2^3$이므로 $\log_b 4 = 2\log_b 2$, $\log_b 8 = 3\log_b 2$이다. 따라서 좌변은 $(1 + 2 + 3)\log_b 2 = 6\log_b 2$로 정리된다.

주어진 등식은 $6\log_b 2 = 2\log_b a$가 된다. 양변을 2로 나누면 $\log_b a = 3\log_b 2 = \log_b 8$이다. **밑이 같은 로그의 값이 같으면 진수도 같으므로** $a = 8$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x) = x^2 + x + 1$일 때, _x→ 1(f(x^2)-f(1))/(x^3-1)의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 1번

간단한 해설

분자와 분모를 인수분해하면 공통인 **인수** $x - 1$**을 약분**할 수 있다. 약분한 식은 $x = 1$에서 분모가 0이 아니므로, 1을 대입하여 극한값 2를 얻는다.

계산 과정

함숫값 대입: $f(x) = x^2 + x + 1$이므로 $f(x^2) = x^4 + x^2 + 1$이고 $f(1) = 3$이다. 따라서 분자는 $f(x^2) - f(1) = x^4 + x^2 - 2$이다.

인수분해와 약분: 분자는 $x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$이고, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$이다. 분모는 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$이다. 극한에서는 **1에 가까워지되 1과 다른 값**을 살피므로 공통인 인수 $x - 1$을 약분할 수 있다. 이에 따라 주어진 분수는 $\frac{(x+1)(x^2+2)}{x^2+x+1}$로 바뀐다.

극한값 계산: 약분한 식의 분모는 $x = 1$에서 $1^2 + 1 + 1 = 3$으로 0이 아니다. 따라서 이 유리함수는 그 점에서 연속이므로 1을 대입할 수 있다. 극한값은 $\frac{(1+1)(1^2+2)}{1^2+1+1} = \frac{6}{3} = 2$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x^2 + ax$에 대하여 _h→0(f(3+2h)-f(3))/(h)=10일 때, 상수 a의 값은?

① −1

② 1

③ 3

④ 5

정답 1번

간단한 해설

입력값의 증가량이 $2h$이므로 주어진 극한은 **미분계수의 2배**인 $2f'(3)$이다. $2(6 + a) = 10$을 풀면 $a = -1$이다.

계산 과정

미분계수는 함수값의 변화량을 입력값의 변화량으로 나눈 값의 극한이다. 이 문제에서는 입력값이 3에서 $3 + 2h$로 변하므로 증가량은 $2h$이다. 그런데 분모가 h이므로 주어진 극한은 **미분계수의 2배**인 $2f'(3)$이다.

$f(x) = x^2 + ax$는 다항함수이므로 모든 실수에서 미분 가능하다. 상수 a에 대하여 $f'(x) = 2x + a$이므로 $f'(3) = 6 + a$이다.

주어진 극한값이 10이므로 $2(6 + a) = 10$이다. 양변을 2로 나누면 $6 + a = 5$이고, 따라서 $a = -1$이다. 이는 ①의 −1과 일치한다.

NoteBase

문 9. $x \neq 1$인 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가
$(x^3+1)f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{2}$
을 만족시킬 때, $f(-1)$**의 값은?**

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{3}{4}$
④ 1

정답 1번

간단한 해설

$x=-1$에서의 **연속성**에 의해 $f(-1)$은 $x \to -1$일 때의 극한값과 같다. 주어진 식을 인수분해하여 공통 인수 $x+1$을 약분한 뒤 극한을 구하면 $f(-1)=\frac{1}{4}$이다.

계산 과정

1. 연속성 적용: $x=-1$을 주어진 식에 바로 대입하면 양변이 모두 0이 되어 $f(-1)$을 구할 수 없다. 그러나 $f(x)$는 $x=1$을 제외한 모든 실수에서 연속이므로 **함숫값과 극한값이 같다**. 따라서 $f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$를 이용한다.

2. 우변 정리: 두 항을 통분하면 $\frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{2} = \frac{2x-x^2(x-1)}{2(x-1)}$이다. 분자는 $2x-x^2(x-1)=x(2-x)(x+1)$로 인수분해된다.

3. 공통 인수 약분: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$이므로, $x \neq 1, -1$에서 양변을 x^3+1로 나누고 $x+1$을 약분하면 $f(x)=\frac{x(2-x)}{2(x-1)(x^2-x+1)}$이다. 이 약분은 **극한을 구할 때** 사용하는 것이며, $x=-1$에서 원래 식을 0으로 나누는 것이 아니다.

4. 극한 계산: 약분한 식의 분모는 $x=-1$에서 $2\cdot(-2)\cdot 3=-12$로 0이 아니므로 그대로 대입할 수 있다. 분자는 $(-1)\cdot 3=-3$이므로 $f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{-3}{-12}=\frac{1}{4}$이다. 이는 ①의 값과 같다.

NoteBase

문 10. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x) = x^3 - x + \int_0^2 f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① 14

② 18

③ 22

④ 26

정답 3번

간단한 해설

정적분 $\int_0^2 f(t)dt$는 x**와 무관한 상수**이다. 이를 상수로 놓고 주어진 식을 0부터 2까지 적분하면 그 값은 −2이며, 따라서 $f(3) = 27 - 3 - 2 = 22$이다.

계산 과정

정적분을 $C = \int_0^2 f(t)dt$로 놓는다. 적분 구간이 고정되어 있으므로 C는 x**와 무관한 상수**이고, 주어진 식은 $f(x) = x^3 - x + C$가 된다.

이 식을 0부터 2까지 적분한다. 왼쪽은 C이고, 오른쪽에서 상수항의 적분은 $\int_0^2 C dt = 2C$이다. 따라서 $C = \int_0^2 (t^3 - t)dt + 2C$이다. 다항식 부분을 계산하면 다음과 같다.
$\int_0^2 (t^3 - t)dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 4 - 2 = 2$
그러므로 $C = 2 + 2C$를 풀면 $C = -2$이다.

이를 대입하면 $f(x) = x^3 - x - 2$이다. 따라서 $f(3) = 27 - 3 - 2 = 22$이므로 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. $f(x) = x^4 + 4x - a^2 + 4a + 8$**일 때, 모든 실수** x**에 대하여 부등식** $f(x) > 0$**이 항상 성립하기 위한 모든 정수** a**값의 합은?**

① 10

② 11

③ 12

④ 13

정답 1번

간단한 해설

모든 실수에서 $f(x) > 0$이려면 **최솟값이 0보다 커야 한다**. 이 조건은 $-1 < a < 5$이므로 가능한 정수는 0, 1, 2, 3, 4이고, 그 합은 10이다.

계산 과정

1. 최솟값을 갖는 위치: a는 상수이므로 f를 미분하면 $f\prime(x) = 4(x^3 + 1)$이다. $x < -1$에서는 도함수가 음수이고 $x > -1$에서는 양수이므로, 함수는 감소하다가 증가한다. 따라서 **전체 실수 범위의 최솟값**은 $x = -1$에서 갖는다.

2. 최솟값의 조건: $x = -1$을 대입하면 $f(-1) = -a^2 + 4a + 5$이다. 모든 실수에서 $f(x) > 0$이 성립하려면 $f(-1) > 0$이어야 하고, 이 조건이면 다른 모든 함수값도 양수이다. 따라서 $-a^2 + 4a + 5 > 0$, 즉 $(a - 5)(a + 1) < 0$이다. 두 인수의 곱이 음수가 되는 범위는 $-1 < a < 5$이다. **양 끝값은 포함하지 않는다**. $a = -1$ 또는 $a = 5$이면 최솟값이 0이 되어 주어진 부등식을 만족하지 않기 때문이다.

3. 정수의 합: $-1 < a < 5$인 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4이다. 이들의 합은 $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 좌표평면 위의 두 점 P(0, −6), Q(2, −4)와 원 $x^2 + y^2 = 2$ 위의 임의의 한 점 R을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR이 있을 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은?

① 4

② $4\sqrt{2}$

③ 8

④ $8\sqrt{2}$

정답 1번

간단한 해설

밑변 PQ가 고정되어 있으므로 **R에서 직선 PQ까지의 거리가 최소**일 때 넓이도 최소이다. 원의 중심에서 직선 PQ까지의 거리에서 반지름을 빼면 최소 높이는 $2\sqrt{2}$이고, 넓이의 최솟값은 4이다.

계산 과정

밑변과 높이: 선분 PQ를 밑변으로 잡고, R에서 직선 PQ까지의 거리를 높이 h라 하면 삼각형의 넓이는 $S = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot h$이다. 두 점 P(0, −6), Q(2, −4)가 고정되어 있으므로 밑변의 길이는 $PQ = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$로 일정하다. 따라서 **높이 h를 최소화**하면 된다.

원의 중심과 직선 사이의 거리: 직선 PQ의 기울기는 $\frac{-4-(-6)}{2-0} = 1$이므로 그 방정식은 $y = x - 6$, 즉 $x - y - 6 = 0$이다. 원 $x^2 + y^2 = 2$의 중심은 O(0, 0), 반지름은 $r = \sqrt{2}$이다. 점과 직선 사이의 거리 공식으로 O에서 직선 PQ까지의 거리 d를 구하면 $d = \frac{|0-0-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 3\sqrt{2}$ 이다.

높이의 최솟값: 중심과 직선 사이의 거리가 반지름보다 크므로 직선 PQ는 원과 만나지 않는다. 원 위의 점 중 직선 PQ에 가장 가까운 점은 중심 O에서 직선 PQ에 내린 수선 위에 있으며, O에서 직선 쪽으로 반지름만큼 이동한 점이다. 따라서 최소 높이는 **중심에서 직선까지의 거리에서 반지름을 뺀 값**으로,
$h_{\min} = d - r = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$이다.

넓이의 최솟값: 밑변의 길이와 최소 높이를 대입하면 $S_{\min} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$이다. 이는 ①의 4에 해당한다.

NoteBase

문 13. $z=\frac{2}{1+i}$**일 때,** z^2-2z+3**의 값은?**

① -3

② -1

③ 1

④ 3

정답 3번

간단한 해설

분모를 유리화하면 $z=1-i$이고, $z^2=-2i$이다. 이를 대입하면 **허수 부분이 소거**되어 주어진 식의 값은 1이다.

계산 과정

허수단위 i는 $i^2=-1$을 만족한다. 분모를 실수로 만들기 위해 **분모의 켤레복소수**인 $1-i$를 분자와 분모에 곱한다. $(1+i)(1-i)=1-i^2=2$이므로 $z=\frac{2(1-i)}{2}=1-i$이다.

구한 복소수를 제곱하면 $z^2=(1-i)^2=1-2i+i^2$이다. 여기서 $i^2=-1$이므로 실수 부분이 상쇄되어 $z^2=-2i$가 된다.

주어진 식에 대입하면 $z^2-2z+3=-2i-2(1-i)+3$이다. 이를 정리하면 $-2i-2+2i+3=1$이므로 구하는 값은 1이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. 삼차 이상의 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 5, $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $x+3$이다. $f(x)$를 $(x-1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 할 때 $R(2)$의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 2번

간단한 해설

두 나눗셈에서 나누는 식은 모두 $x=2$일 때 0이 되므로, **나머지에 2를 대입한 값**은 모두 $f(2)$와 같다. 따라서 $R(2)=f(2)=2+3=5$이다.

계산 과정

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $A(x)$라 하면 $f(x)=(x-2)^2A(x)+x+3$이다. 여기에 **나누는 식을 0으로 만드는 값**인 $x=2$를 대입하면 몫이 곱해진 항이 사라지므로 $f(2)=2+3=5$를 얻는다.

$f(x)$를 $(x-1)(x-2)^2$으로 나눌 때도 $x=2$를 대입하면 나누는 식이 0이 된다. 따라서 몫이 곱해진 항은 사라지고 **원래 다항식과 나머지의 값이 같아져** $f(2)=R(2)$가 성립한다.

따라서 $R(2)=5$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. 두 곡선 $y = x^2 - 4x + 3$, $y = -x^2 + 8x - 13$이 점 P(a, b)에 대하여 대칭일 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 0

② 2

③ 4

④ 6

정답 3번

간단한 해설

점대칭인 두 포물선의 **꼭짓점의 중점**이 대칭의 중심이다. 꼭짓점이 $(2, -1)$, $(4, 3)$이므로 중심은 $(3, 1)$이고, $a + b = 4$이다.

계산 과정

두 곡선의 식을 완전제곱식으로 바꾸면 각각 $y = (x - 2)^2 - 1$, $y = -(x - 4)^2 + 3$이다. 따라서 첫 번째 포물선의 꼭짓점은 $(2, -1)$, 두 번째 포물선의 꼭짓점은 $(4, 3)$이다.

점대칭은 대칭의 중심을 기준으로 곡선을 180° 회전시키는 것이므로, 위로 열린 포물선의 꼭짓점은 아래로 열린 포물선의 꼭짓점에 대응한다. **대칭의 중심은 서로 대응하는 두 점의 중점**이므로, P(a, b)는 두 꼭짓점을 잇는 선분의 중점이다.

중점의 각 좌표는 두 끝점의 같은 좌표를 평균하여 구한다. 따라서 $a = \frac{2+4}{2} = 3$, $b = \frac{-1+3}{2} = 1$이다.

구하는 값은 $a + b = 3 + 1 = 4$이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 다항식 $(x^2+2x)(x^2+2x-2)-3$을 인수분해하면 $(x+a)^2(x-1)(x+b)$일 때, ab의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

정답 4번

간단한 해설

주어진 식은 $(x+1)^2(x-1)(x+3)$으로 인수분해된다. **제곱인수와 나머지 일차인수를 비교**하면 $a=1, b=3$이므로 $ab=3$이다.

계산 과정

반복되는 식을 **하나의 문자로 치환**한다. $t=x^2+2x$로 놓으면 주어진 식은 $t(t-2)-3=t^2-2t-3$이 된다. 합이 -2이고 곱이 -3인 두 수는 -3과 1이므로 $t^2-2t-3=(t-3)(t+1)$이다.

다시 $t=x^2+2x$를 대입하면 두 인수는 각각 $t-3=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$,
$t+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$이다. 따라서 주어진 다항식은 $(x+1)^2(x-1)(x+3)$으로 인수분해된다.

이를 $(x+a)^2(x-1)(x+b)$와 비교한다. **두 번 나타나는 인수**가 $x+1$이므로 $a=1$이고, 나머지 인수 $x+3$에서 $b=3$이다. 따라서 $ab=1\cdot 3=3$이며, 이는 ④의 값이다.

NoteBase

문 17. x에 대한 이차부등식 $x^2 - 4x + 4 - k^2 \le 0$의 정수인 해의 합이 14일 때, 자연수 k의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

간단한 해설

정수인 해는 $2 - k$부터 $2 + k$까지이므로 **평균이 2**이고 개수는 $2k + 1$개이다. 따라서 해의 합이 $2(2k + 1) = 14$가 되어 k = 3이다.

계산 과정

주어진 부등식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x - 2)^2 \le k^2$이다. k가 자연수이므로 $-k \le x - 2 \le k$, 즉 $2 - k \le x \le 2 + k$이다.

양 끝값이 모두 정수이고 등호가 포함되므로 **양 끝값도 해에 포함**된다. 정수인 해의 개수는 $(2 + k) - (2 - k) + 1 = 2k + 1$개이다. 이들은 공차가 1인 등차수열을 이루므로 평균은 $\frac{(2 - k) + (2 + k)}{2} = 2$이다. 따라서 정수인 해의 합은 $2(2k + 1)$이다.

해의 합이 14이므로 $2(2k + 1) = 14$이다. 이를 풀면 $2k + 1 = 7, k = 3$이므로 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 똑같은 사탕 8개를 똑같은 접시 4개에 나누어 담는 방법의 수는? (단, 각 접시에는 적어도 한 개의 사탕을 담는다.)

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 2번

간단한 해설

접시가 똑같으므로 **각 접시에 담긴 사탕 수의 구성이 같으면 한 방법**으로 센다. 각 접시에 1개씩 담은 뒤 남은 4개를 나누는 형태는 5가지이다.

계산 과정

사탕과 접시가 각각 똑같으므로 **접시의 순서를 바꾼 것은 같은 방법**이다. 따라서 접시별 사탕 수의 구성만 세면 된다.

각 접시에 적어도 1개를 담아야 하므로 먼저 네 접시에 1개씩 담는다. 그러면 8 − 4 = 4개가 남는다. 이후에는 추가로 사탕을 받지 않는 접시가 있어도 되므로, 남은 4개를 최대 네 묶음으로 나누는 방법을 센다.

남은 사탕을 가장 큰 묶음의 크기에 따라 나누면 다음과 같다.

4개인 경우: 한 접시에 4개를 모두 추가하는 1가지이다.

3개인 경우: 3개와 1개로 나누는 1가지이다.

2개인 경우: 2개와 2개, 또는 2개와 1개와 1개로 나누는 2가지이다.

1개인 경우: 네 접시에 1개씩 추가하는 1가지이다.

처음 담은 1개씩을 포함하면 모든 접시에 사탕이 들어가며, 위의 각 형태는 서로 다른 배분에 대응한다. 따라서 방법의 수는 1 + 1 + 2 + 1 = 5가지로, ②의 5와 일치한다.

NoteBase

문 19. 서로 구별되지 않는 12개의 노트를 A, B, C 세 명에게 모두 나누어 주려고 한다. A에게는 적어도 1개, B에게는 적어도 3개, C에게는 적어도 2개의 노트를 나누어 주는 방법의 수는?

① 21

② 28

③ 35

④ 42

정답 2번

간단한 해설

각 사람에게 최소 수량을 먼저 주면 **남은 6개를 세 사람에게 제한 없이 배분**하는 문제가 된다. 이 배분의 수는 $\binom{8}{2} = 28$가지이다.

계산 과정

A에게 1개, B에게 3개, C에게 2개를 먼저 주면 $12 - (1 + 3 + 2) = 6$개가 남는다. 세 사람이 추가로 받는 노트 수를 각각 x, y, z라 하면, 구할 것은 $x + y + z = 6$을 만족하는 **음이 아닌 정수해의 수**이다. 각 해는 A, B, C가 각각 $x + 1, y + 3, z + 2$개를 받는 배분과 일대일로 대응한다.

서로 구별되지 않는 노트 6개를 같은 표시 6개로 나타내고, 칸막이 2개로 나누어 왼쪽부터 A, B, C의 몫으로 정한다. 추가로 0개를 받아도 되므로 **칸막이가 양 끝에 있거나 서로 붙어 있어도 된다**. 따라서 표시 6개와 칸막이 2개를 놓는 총 8자리 중 칸막이의 두 자리를 고르면 된다. 방법의 수는 $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$이다.

조건을 만족하는 배분 방법은 28가지이며, ②의 28과 일치한다.

NoteBase

문 20. 어느 학급은 남학생 20명, 여학생 16명으로 이루어져 있다. 이 학급의 모든 학생은 중국어와 일본어 중 한 과목만 수업을 받는다고 한다. 남학생 중에서 중국어 수업을 받는 학생은 12명이고, 여학생 중에서 일본어 수업을 받는 학생은 10명이다. 이 학급에서 선택된 한 학생이 중국어 수업을 받는다고 할 때, 이 학생이 남학생일 확률은?

① $\frac{1}{6}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$

정답 4번

간단한 해설

중국어 수업을 받는다는 조건이 있으므로 **중국어 수강생 18명**을 기준으로 확률을 구한다. 이 중 남학생은 12명이므로 남학생일 확률은 $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$이다.

계산 과정

1. 중국어 수강생 수 구하기: 모든 학생은 중국어와 일본어 중 한 과목만 수강한다. 따라서 여학생 16명 중 일본어 수강생 10명을 뺀 16 − 10 = 6명이 중국어를 수강한다. 중국어를 수강하는 남학생은 12명이므로 중국어 수강생은 총 12 + 6 = 18명이다.

2. 조건에 맞게 기준 정하기: 선택된 학생이 중국어 수강생이라는 조건이 주어졌으므로, 가능한 대상을 **중국어 수강생 18명으로 한정**한다. 이들 중 남학생이 차지하는 비율이 구하려는 조건부확률이다.

3. 확률 계산하기: 중국어 수강생 18명 중 남학생은 12명이므로, 구하는 확률은 $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$이다. 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase