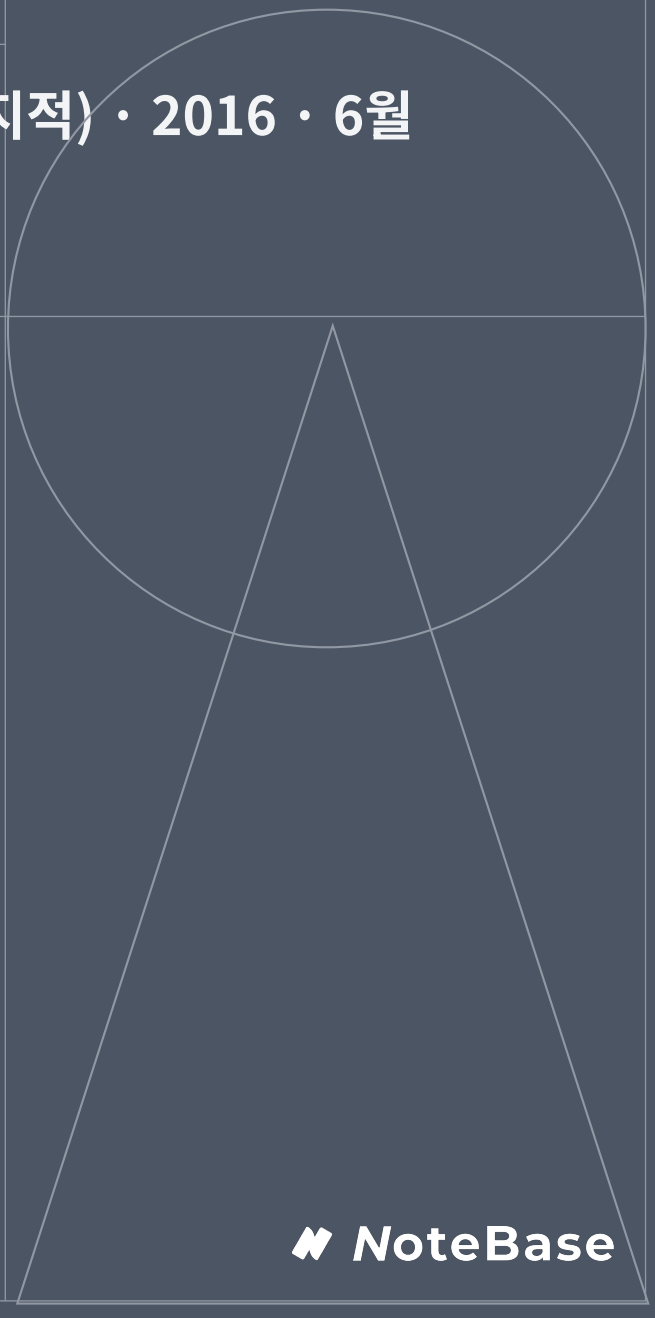
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학(지적) · 2016 · 6월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학(지적) · 2016 · 6월

공무원/서울시/9급 · 수학(지적) · 2016 · 6월

문 1. 공간 R^3의 점 A(1, 0, −1), B(2, 1, −1), C(1, 2, 1)에 대해 ∠BAC는?

① $\frac{\pi}{4}$

② $\frac{\pi}{3}$

③ $\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{2}{3}\pi$

정답 2번

간단한 해설

두 벡터의 **내적을 길이의 곱으로 나누면** 끼인각의 코사인값이 된다. 이 값이 $\frac{1}{2}$이므로, ∠BAC는 $\frac{\pi}{3}$, 즉 60°이다.

계산 과정

∠BAC는 **A를 공통 시작점으로 하는 두 벡터**가 이루는 각이다. 각을 θ라 하면, 각 점의 좌표를 빼서 $\vec{AB} = (1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (0, 2, 2)$를 얻는다.

내적은 대응하는 성분끼리 곱한 값을 더하므로 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 2$이다. 각 벡터의 길이는 $|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|\vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$이다.

두 벡터가 모두 영벡터가 아니므로 **내적과 끼인각의 관계**를 적용한다. $\cos\theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}$에 앞의 값을 대입하면 $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$이다.

벡터의 끼인각은 $0 \le \theta \le \pi$ 범위에서 정하므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$이다. 따라서 ∠BAC는 60°이며, ②의 $\frac{\pi}{3}$과 일치한다.

NoteBase

문 2. $-1 \le x \le 3$인 범위에서 이차함수 $y = x^2 - 4x + 2$의 최솟값과 최댓값의 차이는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 4번

간단한 해설

꼭짓점이 주어진 구간 안에 있으므로 **최솟값은 −2**이다. 최댓값은 대칭축에서 가장 먼 끝점 $x = -1$에서 7이므로, 두 값의 차이는 $7 - (-2) = 9$이다.

계산 과정

최솟값: 완전제곱식으로 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$이다. 제곱한 값은 0 이상이고, **주어진 구간에 포함되는** $x = 2$에서 $(x - 2)^2 = 0$이 되므로 최솟값은 −2이다.

최댓값: $(x - 2)^2$은 x가 대칭축 $x = 2$에서 멀어질수록 커진다. 구간의 양 끝점 −1과 3은 대칭축에서 각각 3과 1만큼 떨어져 있으므로, **더 멀리 있는 끝점** $x = -1$에서 최댓값을 갖는다. 이때 $y = (-1)^2 - 4(-1) + 2 = 7$이다.

두 값의 차이: 최댓값에서 최솟값을 빼면 $7 - (-2) = 9$이므로 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$의 그래프를 y축의 방향으로 −5만큼 평행이동시킨 그래프가 x축에 접할 때, 상수 a의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 4번

간단한 해설

아래로 5만큼 이동한 포물선이 x축에 접하려면 **이동 후 꼭짓점의 높이가 0**이어야 한다. 그 높이가 $a - 9$이므로 $a = 9$이다.

계산 과정

1. 평행이동한 함수: y축의 방향으로 −5만큼 평행이동하면 모든 점의 y좌표가 5씩 감소한다. 따라서 이동한 그래프의 식은 $y = f(x) - 5$, 즉 $y = x^2 - 4x + a - 5$이다.

2. 꼭짓점의 높이: 완전제곱식으로 정리하면 $y = (x - 2)^2 + a - 9$이다. $(x - 2)^2$은 항상 0 이상이고 $x = 2$에서 0이므로, 이동한 포물선의 **최솟값이자 꼭짓점의 높이**는 $a - 9$이다.

3. 접하는 조건 적용: 위로 열린 포물선이 x축에 접하려면 꼭짓점이 x축 위에 있어야 한다. 따라서 $a - 9 = 0$에서 $a = 9$를 얻으며, 이는 ④의 9에 해당한다.

NoteBase

문 4. x, y에 대한 연립방정식 pmatrix a & -1 \ a-1 & a+3 pmatrixpmatrixx\pmatrix=pmatrix0\\0pmatrix에서 x=0, y=0 이외의 해를 갖게 하는 실수 a의 값을 모두 구했을 때, 이들의 합은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

정답 4번

간단한 해설

영벡터 이외의 해가 있으려면 첫째 식에서 얻은 $y = ax$를 둘째 식에 대입했을 때 x**의 계수가 0**이어야 한다. 이 조건은 $a^2 + 4a - 1 = 0$이므로, 가능한 두 실수의 합은 −4이다.

계산 과정

① 식 정리: 행렬방정식을 연립방정식으로 풀어 쓰면 $ax - y = 0$, $(a-1)x + (a+3)y = 0$이다. 첫째 식에서 $y = ax$이므로, $x = 0$이면 $y = 0$도 성립한다. 따라서 두 값이 모두 0인 해 이외의 해를 가지려면 $x \neq 0$이어야 한다.

② 조건 도출: 둘째 식에 $y = ax$를 대입하면 $\{(a-1) + a(a+3)\}x = 0$, 즉 $(a^2 + 4a - 1)x = 0$이다. $x \neq 0$이므로 $a^2 + 4a - 1 = 0$이어야 한다. 반대로 이 조건이 성립하면 $x = 1, y = a$가 두 식을 모두 만족하므로, 실제로 두 값이 모두 0인 해 이외의 해가 존재한다.

③ 값과 합 계산: $a^2 + 4a - 1 = 0$을 완전제곱식으로 정리하면 $(a+2)^2 = 5$이므로, 가능한 실수는 $a = -2 + \sqrt{5}, a = -2 - \sqrt{5}$이다. 이들의 합은 $(-2 + \sqrt{5}) + (-2 - \sqrt{5}) = -4$로, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. 방정식 $4^x - 9 \cdot 2^x + 20 = 0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $2^{\alpha+\beta}$의 값은?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

정답 3번

간단한 해설

2^α와 2^β는 이차방정식 $t^2 - 9t + 20 = 0$의 두 근이므로 **두 근의 곱**은 20이다. 지수법칙에 따라 $2^{\alpha+\beta} = 2^\alpha \cdot 2^\beta = 20$이다.

계산 과정

$4^x = (2^x)^2$이므로 **같은 지수식을 하나의 문자로 치환**한다. $t = 2^x$로 놓으면 $t > 0$이고, 주어진 방정식은 $t^2 - 9t + 20 = 0$이 된다.

이차방정식을 인수분해하면 $(t-4)(t-5) = 0$이므로 $t = 4$ 또는 $t = 5$이다. 두 값은 모두 양수이고 2^x는 실수 전체에서 증가하므로, 각각 원래 방정식의 서로 다른 실근에 대응한다. 따라서 2^α와 2^β는 순서에 관계없이 4와 5이다.

밑이 같은 거듭제곱의 곱은 지수를 더하므로, **지수의 합을 두 값의 곱으로 바꾸어** 계산한다. $2^{\alpha+\beta} = 2^\alpha \cdot 2^\beta = 4 \cdot 5 = 20$이다. 구한 값 20은 선택지 ③에 해당한다.

NoteBase

문 6. x에 관한 10차 다항식 $\sum_{n=0}^{10} a_n x^n$을 $x-1$로 나눈 나머지는 7이고, $x+1$로 나눈 나머지는 3이다. 홀수차 항의 계수의 합인 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

다항식에 1과 −1을 대입한 값을 빼면 짝수차 항은 소거되고 **홀수차 항의 계수 합의 2배**가 남는다. 따라서 구하는 합은 $\frac{7-3}{2}=2$이다.

계산 과정

주어진 다항식을 $f(x)$라 하자. 나머지정리에 따라 다항식을 $x-c$로 나눈 나머지는 $f(c)$이다. 나눗셈의 식에 $x=c$를 대입하면 몫이 곱해진 항이 0이 되기 때문이다. 따라서 주어진 조건에서 $f(1)=7$, $f(-1)=3$이다.

짝수차 항의 계수의 합을 E, 홀수차 항의 계수의 합을 O라 하자. 1을 대입하면 모든 거듭제곱이 1이므로 $f(1)=E+O=7$이다. −1을 대입하면 짝수 거듭제곱은 1, 홀수 거듭제곱은 −1이므로 $f(-1)=E-O=3$이다. 즉, 두 대입값에서 **홀수차 항의 계수만 부호가 달라진다**.

두 식을 빼면 짝수차 항의 계수 합이 소거되어 $2O=7-3=4$가 된다. 이 차는 홀수차 항의 계수 합의 2배이므로 $O=\frac{7-3}{2}=2$이다. 따라서 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=2$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 좌표평면에서 점 (x, y)가 부등식 $2x^2 \le y \le x + 1$의 영역을 움직일 때, $x + y$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{17}{8}$
② $\frac{19}{8}$
③ $\frac{21}{8}$
④ $\frac{23}{8}$

정답 4번

간단한 해설

$x + y$는 **위쪽 경계에서 최댓값** 3을 갖는다. 아래쪽 경계에서는 완전제곱식으로 바꾸어 **최솟값** -18을 얻으므로, 두 값의 합은 $\frac{23}{8}$이다.

계산 과정

1. 가능한 x의 범위: 주어진 부등식을 만족하려면 $2x^2 \le x + 1$이어야 한다. 이를 정리하면 (2x+1)(x-1)≤0이므로 -12≤ x≤1이다. 이 범위에서 y는 아래쪽 경계 $y = 2x^2$와 위쪽 경계 $y = x + 1$ 사이의 값을 갖는다.

2. 최댓값: **x가 같으면 y가 클수록 합도 커지므로** 위쪽 경계 $y = x + 1$을 이용한다. x+y≤2x+1이고, x≤1이므로 2x+1≤3이다. 점 (1, 2)는 두 경계가 만나는 점으로 주어진 영역에 포함되며, 이때 합이 3이므로 최댓값은 3이다.

3. 최솟값: x가 같으면 y가 작을수록 합도 작아지므로 아래쪽 경계 $y = 2x^2$을 이용한다. x+y≥2x^2+x이고, 완전제곱식으로 바꾸면 2x^2+x=2≤ft(x+14)^2-18이다. **제곱항은 0 이상**이므로 합은 -18보다 작을 수 없다. x=-14은 가능한 x의 범위에 속하고, 이때 y=18로 놓으면 주어진 부등식을 만족하면서 합이 -18이 된다. 따라서 최솟값은 -18이다.

4. 두 값의 합: 최댓값과 최솟값을 더하면 3+≤ft(-18)=(23)/(8)이므로 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 세 수 $A=\sqrt{39}, B=10^{\frac{5}{6}}, C=\frac{11}{4-\sqrt{5}}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $A<B<C$

② $A<C<B$

③ $C<A<B$

④ $C<B<A$

정답 3번

간단한 해설

분모를 유리화하면 $C=4+\sqrt{5}$이며, 제곱을 비교하면 $C<A$이다. A와 B는 **양수이므로 여섯제곱을 비교**할 수 있고, $A^6<B^6$이므로 $C<A<B$이다.

계산 과정

세 수 A, B, C의 대소 관계를 구한다. $4>\sqrt{5}$이므로 C의 분모는 양수이고, A와 B도 양수이다. **양수끼리는 같은 양의 정수만큼 거듭제곱해도 대소 관계가 유지**되므로 제곱이나 여섯제곱으로 비교할 수 있다.

C의 정리: 분모와 분자에 $4+\sqrt{5}$를 곱해 **분모를 유리화**한다. 합과 차의 곱을 이용하면 분모가 $4^2-(\sqrt{5})^2=11$이 되어 분자의 11과 약분된다.
$C=\frac{11(4+\sqrt{5})}{16-5}$
$C=4+\sqrt{5}$

C와 A의 비교: $C^2=(4+\sqrt{5})^2=21+8\sqrt{5}$이고 $A^2=39$이다. 여기서 $(8\sqrt{5})^2=320<324=18^2$이며 두 수가 양수이므로 $8\sqrt{5}<18$이다. 따라서 $C^2<21+18=39=A^2$이므로 $C<A$이다.

A와 B의 비교: **지수의 분모 2와 6의 최소공배수인 6**을 거듭제곱하면 근호와 분수 지수를 모두 없앨 수 있다.
$A^6=(\sqrt{39})^6=39^3=59319$
$B^6=(10^{\frac{5}{6}})^6=10^5=100000$
따라서 $A^6<B^6$이고 두 수가 양수이므로 $A<B$이다.

두 비교를 합치면 $C<A<B$이며, 이는 ③의 대소 관계와 일치한다.

NoteBase

문 9. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{2n-1}}{n\sqrt{n}}$**의 값은?**

① $\frac{1}{3}\sqrt{2}$
② $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
③ $\sqrt{2}$
④ $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

정답 2번

간단한 해설

각 항을 $\sqrt{n}$으로 나누어 정리하면, 주어진 식은 **중점 구분구적법**으로 해석할 수 있다. 극한값은 $\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{x}\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

계산 과정

주어진 수열을 S_n이라 하자. 분모의 $\sqrt{n}$을 각 항에 나누어 넣으면 $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k-1}{n}}$ 이다. 이 형태에서 제곱근 안의 값들은 0과 2 사이에 일정한 간격으로 놓인다.

구간 [0, 2]를 같은 길이의 작은 구간 n개로 나누면 폭은 $\Delta x=\frac{2}{n}$이고, k번째 구간의 중점은 $x_k=\frac{2k-1}{n}$이다. 따라서 $S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{}\sqrt{x_k}\Delta x$이다. 원래 합의 계수 $\frac{1}{n}$은 구간 폭의 절반이므로 **적분 앞에 1/2이 붙는다**.

함수 $f(x)=\sqrt{x}$는 [0, 2]에서 연속이므로, 구간 폭이 0으로 가면 중점에서의 함수값에 폭을 곱한 합은 정적분으로 수렴한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{x}\,dx$이다. $\int_0^2\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$이므로 여기에 1/2을 곱한다.

극한값은 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$이며, 이는 ②의 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$와 같다.

NoteBase

문 10. 곡선 $y=\sqrt{x-1}$과 x축 및 직선 $x=2$에 둘러싸인 도형을 y축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는?

① $\frac{29}{15}\pi$
② $\frac{31}{15}\pi$
③ $\frac{32}{15}\pi$
④ $\frac{34}{15}\pi$

정답 3번

간단한 해설

회전체를 수평으로 자르면 바깥 반지름이 2, 안쪽 반지름이 y^2+1인 **고리 모양의 단면**이 생긴다. 이 단면의 넓이를 $0\leq y\leq 1$에서 적분하면 부피는 $\frac{32}{15}\pi$이다.

계산 과정

적분 구간: 곡선 $y=\sqrt{x-1}$은 x축과 $(1,0)$에서 만나고, 직선 $x=2$와 $(2,1)$에서 만난다. 따라서 도형의 높이 범위는 $0\leq y\leq 1$이며, 곡선을 x에 관해 나타내면 $x=y^2+1$이다.

단면의 넓이: 높이 y에서 도형의 수평 선분은 $x=y^2+1$부터 $x=2$까지이다. 이를 y축 둘레로 회전시키면 바깥 반지름이 2, 안쪽 반지름이 y^2+1인 고리가 된다. 따라서 **큰 원의 넓이에서 빈 부분의 넓이를 빼야** 하므로 단면적은 $A(y)=\pi\{4-(y^2+1)^2\}$이다.

부피의 적분: 단면적을 높이 방향으로 쌓으면 부피가 되므로 $V=\int_0^1 A(y)dy$이다. 제곱식을 전개하면 $4-(y^2+1)^2=3-2y^2-y^4$이므로 다음과 같이 계산한다.

$$V=\pi\int_0^1(3-2y^2-y^4)dy$$
$$=\pi\left[3y-\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5\right]_0^1$$
$$=\pi\left(3-\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{32}{15}\pi$$

따라서 회전체의 부피는 $\frac{32}{15}\pi$이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다. 이때, $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 값은?

$a_1 = 4, \quad a_{n+1} + a_n = 10 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

① 250

② 300

③ 500

④ 1000

정답 3번

간단한 해설

인접한 두 항의 합이 항상 10이므로, 첫째 항부터 제100항까지를 **두 항씩 50묶음**으로 나누어 더하면 된다. 전체 합은 $50 \times 10 = 500$이다.

계산 과정

주어진 조건 $a_{n+1} + a_n = 10$은 **서로 이웃한 두 항의 합이 항상 10**이라는 뜻이다. 예를 들어 $a_1 = 4$이므로 $a_2 = 10 - 4 = 6$이고, 첫 두 항의 합은 10이다.

첫째 항부터 제100항까지를 **겹치지 않게 두 항씩** 묶는다. $a_1 + a_2$, $a_3 + a_4$부터 $a_{99} + a_{100}$까지 총 $100 \div 2 = 50$묶음이며, 각 묶음의 합은 10이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{100} a_k = 50 \cdot 10 = 500$이다. 이 값은 ③의 500과 일치한다.

NoteBase

문 12. 원 $x^2 + y^2 = 4$와 직선 $x + y = 1$의 두 교점을 A와 B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리는? (단, x와 y는 실수이다.)

① $\sqrt{14}$
② 4
③ $3\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{5}$

정답 1번

간단한 해설

두 교점을 잇는 선분은 원의 현이며, **중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분**한다. 반지름 2와 중심에서 직선까지의 거리 $\frac{1}{\sqrt{2}}$를 이용하면 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{14}$이다.

계산 과정

원과 현의 관계: 원 $x^2 + y^2 = 4$의 중심을 O라 하면 O의 좌표는 (0, 0)이고 반지름은 2이다. 두 교점 A, B를 잇는 선분 AB는 현이다. O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면, **H는 현 AB의 중점**이므로 $AB = 2AH$이다.

중심에서 직선까지의 거리: 직선을 $x + y - 1 = 0$으로 쓰면, 점과 직선 사이의 거리 공식에 따라 $OH = \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 이 값은 현 전체의 길이가 아니라 **중심과 현 사이의 수직 거리**이다.

현의 길이: 삼각형 OHA는 H에서 직각이고 빗변 OA는 반지름이다. 피타고라스 정리를 적용하면 $AH^2 = OA^2 - OH^2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$이므로 $AH = \sqrt{\frac{7}{2}}$이다. 이는 현의 절반 길이이므로 $AB = 2\sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{14}$이다.

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $\sqrt{14}$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n이
$a_n = \frac{n+1}{2n-1} - \frac{n+2}{2n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$
일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

① 1

② $\frac{3}{2}$

③ 2

④ $\frac{5}{2}$

정답 2번

간단한 해설

각 항의 뒤 분수가 다음 항의 앞 분수와 같으므로, 부분합에서는 **중간 항들이 상쇄**된다. 처음의 2에서 마지막에 남는 분수의 극한 $\frac{1}{2}$을 빼면 급수의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

계산 과정

$b_n = \frac{n+1}{2n-1}$로 놓으면 $b_{n+1} = \frac{n+2}{2n+1}$이므로, 주어진 일반항은 $a_n = b_n - b_{n+1}$이다.

첫 N개 항의 합을 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$이라 하자. 합을 전개하면 $(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_N - b_{N+1})$에서 중간 항들이 상쇄되어 **처음 항과 마지막 항만 남는다**. 따라서 $S_N = b_1 - b_{N+1}$이고, $S_N = 2 - \frac{N+2}{2N+1}$이다.

무한급수의 합은 부분합의 극한이다. 남은 분수는 분자와 분모를 N으로 나누면 $\frac{N+2}{2N+1} = \frac{1+2/N}{2+1/N}$이므로, N이 무한히 커질 때 **0이 아니라** $\frac{1}{2}$로 수렴한다. 따라서 $\lim_{N\to\infty} S_N = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$이며, 이는 ②에 해당한다.

NoteBase

문 14. $1 < a < 10$**인 자연수** a**와 자연수** m**이 다음 식** $(a-1)\cdot 10^m < 3\cdot 2^{100} < a\cdot 10^m$**을 만족할 때,** $a+m$**의 값은? (단,** $\log_{10} 2 = 0.3010$**,** $\log_{10} 3 = 0.4771$**로 계산한다.)**

① 30

② 32

③ 34

④ 36

정답 3번

간단한 해설

$3\cdot 2^{100}$의 상용로그는 30.5771이므로 **m = 30**이다. 또 $3\cdot 10^{30} < 3\cdot 2^{100} < 4\cdot 10^{30}$이므로 a = 4이고, 구하는 합은 34이다.

계산 과정

1. 상용로그 계산: $N = 3\cdot 2^{100}$이라 두면, 곱과 거듭제곱의 로그 성질에 따라 $\log_{10} N = \log_{10} 3 + 100\log_{10} 2$이다. 주어진 값을 대입하면 $\log_{10} N = 0.4771 + 100\cdot 0.3010 = 30.5771$이다.

2. m 결정: a는 2 이상 9 이하의 자연수이므로, 주어진 부등식에서 $10^m < N < 10^{m+1}$이 성립한다. 상용로그는 **밑이 1보다 커서 부등호 방향이 유지**되므로 $m < 30.5771 < m+1$이다. 따라서 m = 30이다.

3. a 결정: $x = \frac{N}{10^{30}}$이라 두면 $\log_{10} x = 30.5771 - 30 = 0.5771$이다. 한편 $\log_{10} 3 = 0.4771$이고 $\log_{10} 4 = 2\log_{10} 2 = 0.6020$이다. $0.4771 < 0.5771 < 0.6020$이므로 $3 < x < 4$이다. 원래 부등식은 $a-1 < x < a$이므로, **x를 사이에 두는 연속한 두 정수**는 3과 4이다. 따라서 a = 4이다.

4. 합 계산: a = 4, m = 30이므로 $a+m = 4+30 = 34$이며, 선택지 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. 삼차함수 $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + ax + b$에 대하여 두 등식 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 2$가 성립할 때, 실수 a와 b의 합 $a + b$의 값은?

① −2

② −1

③ 0

④ 1

정답 1번

간단한 해설

적분 구간이 원점에 대칭이므로 **홀수 차수 항의 적분값은 0**이다. 첫 번째 조건에서 $b = -2$, 두 번째 조건에서 $a = 0$을 얻으므로 $a + b = -2$이다.

계산 과정

구간 $[-1, 1]$에서 홀수 차수 항은 양쪽의 적분값이 상쇄되어 0이 된다. 짝수 차수 항은 **0에서 1까지 적분한 값의 2배**이므로 $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$, $\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$이다.

첫 번째 조건에서 $5x^3$과 ax의 적분값은 0이다. 따라서 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2 + 2b$이다. 여기서 2는 $3x^2$의 적분값이고, $2b$는 상수항을 길이가 2인 구간에서 적분한 값이다. 주어진 값이 −2이므로 $2 + 2b = -2$에서 $b = -2$를 얻는다.

두 번째 조건에는 $xf(x) = 5x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx$를 대입한다. 이때 **x를 곱한 뒤의 차수**를 기준으로 홀수 차수 항인 $3x^3$과 bx가 사라진다. 남은 항을 적분하면 $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 2 + \frac{2a}{3}$이다. $5x^4$의 적분값이 이미 2이므로, 주어진 조건 $2 + \frac{2a}{3} = 2$에서 $a = 0$이다.

따라서 $a + b = 0 + (-2) = -2$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식 $f(x)=x^3+f'(1)x^2+x$를 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?

① −3

② −4

③ −5

④ −6

정답 4번

간단한 해설

$f'(1)$은 **상수인 계수**이므로 주어진 등식을 미분한 뒤 $x=1$을 대입하면 $f'(1)=-4$를 얻는다. 이 값을 원래 식에 넣으면 $f(-1)=-6$이다.

계산 과정

계수 두기: $a=f'(1)$로 놓으면 $f(x)=x^3+ax^2+x$이다. a는 $x=1$에서의 미분계숫값이므로 **변수에 따라 변하지 않는 상수**이다. 따라서 양변을 미분하면 $f'(x)=3x^2+2ax+1$이다.

계수 구하기: 도함수에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)=3+2a+1=4+2a$이다. 처음에 $a=f'(1)$로 두었으므로 $a=4+2a$가 성립한다. 이를 풀면 $-a=4$, 즉 $a=-4$이다.

함숫값 구하기: 구한 계수를 원래 식에 넣으면 $f(x)=x^3-4x^2+x$이다. 여기에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=(-1)^3-4(-1)^2+(-1)$이므로 $-1-4-1=-6$이다. 따라서 구하는 값은 −6으로, ④에 해당한다.

NoteBase

문 17. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$**이고** $6\sin^2\theta = 5\cos\theta$**가 성립할 때,** $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$**의 대소 관계로 옳은 것은?**

① $\sin\theta < \cos\theta < \tan\theta$

② $\sin\theta < \tan\theta < \cos\theta$

③ $\tan\theta < \sin\theta < \cos\theta$

④ $\tan\theta < \cos\theta < \sin\theta$

정답 3번

간단한 해설

제4사분면에서는 $\sin\theta < 0 < \cos\theta < 1$이다. 탄젠트는 사인을 코사인으로 나눈 값이므로 **음수인 사인값보다 더 작아져** $\tan\theta < \sin\theta < \cos\theta$가 된다.

계산 과정

1. 삼각함수의 부호: $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$이므로 θ의 동경은 **제4사분면**에 있다. 따라서 $\sin\theta < 0$, $\cos\theta > 0$, $\tan\theta < 0$이다.

2. 코사인값 계산: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 이용하여 주어진 식을 코사인만의 식으로 바꾼다.
$6(1 - \cos^2\theta) = 5\cos\theta$를 정리하면 $6\cos^2\theta + 5\cos\theta - 6 = 0$이고, 인수분해하면
$(3\cos\theta - 2)(2\cos\theta + 3) = 0$이다. 두 근은 $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$인데, **제4사분면에서 코사인값은 양수**이므로 $\cos\theta = \frac{2}{3}$이다.

3. 사인값과 탄젠트값 계산: $\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$이다. **사인값이 음수라는 조건**에 따라 $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$이다. 이를 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에 대입하면 $\tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$이다.

4. 대소 관계 비교: $\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{5}}{3}$이지만, **음수를 붙이면 부등호 방향이 바뀐다**. 따라서 $-\frac{\sqrt{5}}{2} < -\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{2}{3}$이며, $\tan\theta < \sin\theta < \cos\theta$이다. 이는 ③의 관계와 일치한다.

NoteBase

문 18. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+a}-3}{x^2-4x+3}=b$**를 만족시키는 실수인 두 상수** a**와** b**의 곱** ab**의 값은?**

① $-\frac{1}{2}$
② $-\frac{2}{3}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$

정답 2번

간단한 해설

극한이 유한한 실수이려면 **분자도 0으로 수렴**해야 하므로 $a=8$이다. 분자를 유리화하면 $b=-\frac{1}{12}$이므로 $ab=-\frac{2}{3}$이다.

계산 과정

a 구하기: 분모를 인수분해하면 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$이므로, $x\to 1$일 때 분모는 0으로 수렴한다. 극한값이 유한한 실수 b이려면 **분자도 0으로 수렴**해야 한다. 따라서 $\sqrt{1+a}-3=0$이고, 양변을 정리하면 $a=8$이다.

b 구하기: $a=8$을 대입하고 분자에 켤레식을 곱하면 $(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)=x-1$이다. 따라서 $x\neq 1$인 근방에서 주어진 분수는 $\frac{1}{(\sqrt{x+8}+3)(x-3)}$로 약분된다. **약분한 식의 분모는 0으로 수렴하지 않으므로** 이제 $x=1$을 대입할 수 있다. 이에 따라 $b=\frac{1}{(3+3)(1-3)}=-\frac{1}{12}$이다.

ab 구하기: $ab=8\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{2}{3}$이므로 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 구간 $[-1, 1]$에서 정의된 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$일 때, $P(0 \le X \le 3a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$

정답 1번

간단한 해설

확률밀도함수의 **전체 적분값이 1**이므로 $a = \frac{1}{3}$, 즉 $3a = 1$이다. 밀도함수가 **원점에 대해 대칭인 구간에서 짝함수**이므로, 0부터 1까지의 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

계산 과정

상수 구하기: 확률밀도함수는 가능한 전체 구간에서 적분한 값이 1이므로 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$이다. 이때 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{3}$이고, 상수항의 적분값은 구간 길이 2에 a를 곱한 $2a$이다. 따라서 $\frac{1}{3} + 2a = 1$에서 $a = \frac{1}{3}$을 얻는다.

확률 구하기: $3a = 1$이므로 구하려는 값은 $P(0 \le X \le 1)$이다. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$은 구간 전체에서 음이 아니며, $f(-x) = f(x)$인 짝함수이다. 따라서 **원점 왼쪽과 오른쪽의 확률이 같다**. 전체 확률이 1이므로 $\int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}$이다.

구하는 확률은 $\frac{1}{2}$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 어느 자격시험에 응시한 사람들의 점수는 평균 620점, 표준편차 50점인 정규분포를 따르고, 이 시험에 합격하기 위해서는 660점 이상의 점수를 얻어야 한다고 한다. 이 시험에 응시한 사람이 660점 이상의 점수를 받을 확률은? (단, 오른쪽 표준정규분포표를 이용한다.)

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.19
0.8	0.29

① 0.21

② 0.31

③ 0.48

④ 0.58

정답 1번

간단한 해설

660점의 표준화 점수는 0.8이다. 주어진 표의 0.29는 평균부터 이 점수까지의 확률이므로, **오른쪽 꼬리 확률**은 0.5 − 0.29 = 0.21이다.

NoteBase

계산 과정

점수의 표준화: 응시자의 점수를 X라 하면 평균은 620점, 표준편차는 50점이다. 정규분포를 따르는 점수에서 평균을 빼고 표준편차로 나눈 $Z = \frac{X - 620}{50}$은 평균 0, 표준편차 1인 표준정규분포를 따른다. 660점에 대응하는 값은 $z = \frac{660 - 620}{50} = 0.8$로, 평균보다 표준편차의 0.8배만큼 높은 점수라는 뜻이다.

표의 확률 읽기: 표의 열 제목은 $P(0 \le Z \le z)$이다. 따라서 z가 0.8인 행의 0.29는 **0부터 0.8까지의 구간 확률**이며, P(0≤ Z≤0.8)=0.29이다.

660점 이상일 확률: 구하는 값은 P(X≥660)=P(Z≥0.8)이다. 표준정규분포는 0을 중심으로 대칭이므로 0의 오른쪽 전체 확률은 0.5이다. 여기서 0부터 0.8까지의 확률을 빼면 P(Z≥0.8)=0.5-0.29=0.21이다. 따라서 660점 이상을 받을 확률은 0.21, 즉 21%로 ①의 값과 일치한다.

NoteBase