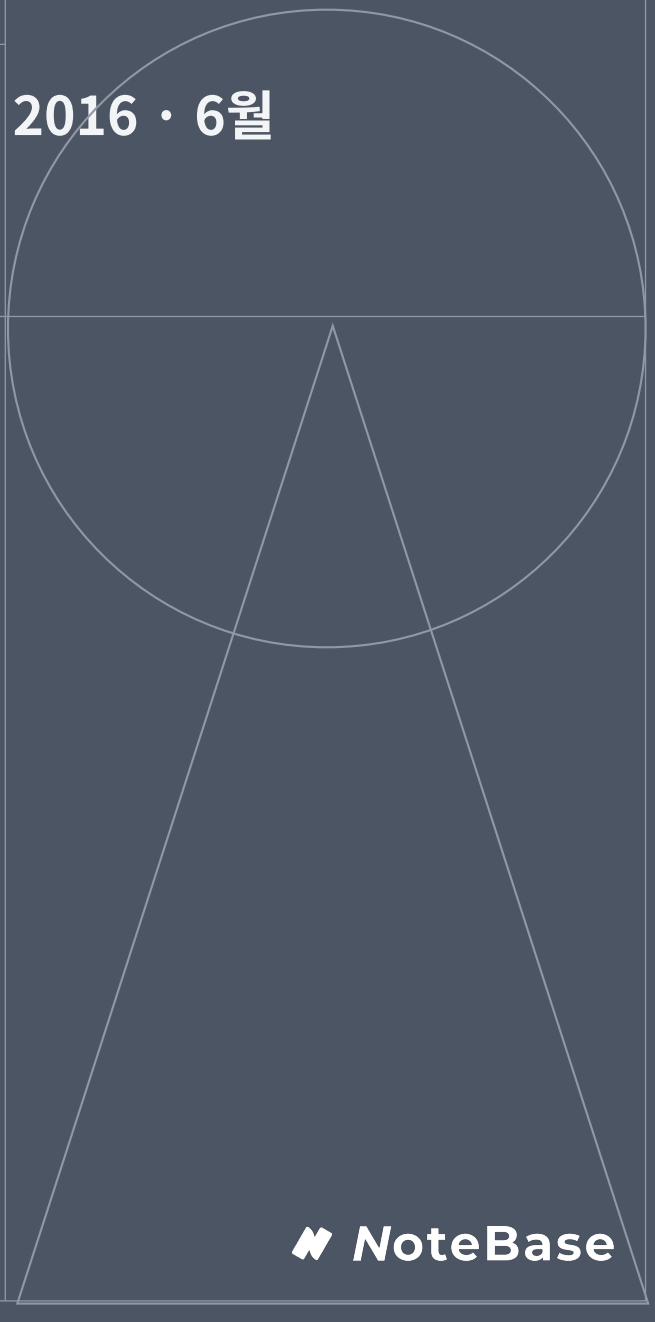
기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2016 · 6월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2016 · 6월

공무원/서울시/9급 · 수학 · 2016 · 6월

문 1. 구간 [0, 5]에서 함수 $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$의 최댓값을 구하면?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

정답 1번

간단한 해설

닫힌구간에서는 **양 끝점과 도함수가 0인 내부 지점의 함수값**을 비교한다. 이 함수는 $x = 1$에서의 함수값이 11로 가장 크다.

계산 과정

함수 $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, 5]$에서 연속이고 내부에서 미분 가능하다. 따라서 최댓값은 **양 끝점 또는 도함수가 0인 내부 지점**에서 나온다.

미분하면 $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$이다. 이를 인수분해하면 $f'(x) = 6(x - 1)(x - 4)$이므로, $f'(x) = 0$인 지점은 $x = 1, 4$이다. 두 지점 모두 주어진 구간 내부에 있다.

양 끝점과 구간 내부의 두 후보 지점에 원래 함수를 대입한다.
$f(0) = 0$, $f(1) = 2 - 15 + 24 = 11$
$f(4) = 128 - 240 + 96 = -16$
$f(5) = 250 - 375 + 120 = -5$

네 함수값 0, 11, −16, −5 중 가장 큰 값은 11이다. 따라서 주어진 구간에서 최댓값은 11이며, ①에 해당한다.

NoteBase

문 2. 방정식 $(x-3)^2-2|x-3|-3=0$의 모든 근의 합은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 2번

간단한 해설

$t=|x-3|$로 놓으면 **0 이상인 해**인 $t=3$만 가능하다. 따라서 $x=0$ 또는 $x=6$이므로 모든 근의 합은 6이다.

계산 과정

절댓값을 치환하기: $(x-3)^2=|x-3|^2$이므로 $t=|x-3|$로 놓으면 주어진 방정식은 $t^2-2t-3=0$이 된다. 이때 절댓값의 성질에 따라 $t\geq 0$이어야 한다.

치환한 방정식 풀기: $t^2-2t-3=(t-3)(t+1)$이므로 $t=3$ 또는 $t=-1$이다. 그러나 $t=-1$은 $t\geq 0$을 만족하지 않으므로 제외하고, $t=3$만 남는다.

원래 근과 합 구하기: $|x-3|=3$이면 **절댓값 안의 식은 3 또는 −3**이므로 $x-3=3$ 또는 $x-3=-3$이다. 따라서 모든 근은 $x=6, x=0$이고, 그 합은 $6+0=6$으로 ②에 해당한다.

NoteBase

문 3. x**에 대한 다항식** $f(x)$**를** $x+1$**로 나누면 나머지가** -5**이고,** $x-2$**로 나누면 나머지가 4라고 한다. 다항식** $f(x)$**를** $(x+1)(x-2)$**로 나눈 나머지를** $R(x)$**라고 할 때,** $R(1)$**의 값은?**

① -2

② -1

③ 0

④ 1

정답 4번

간단한 해설

나누는 식이 이차식이므로 나머지는 **일차 이하의 다항식**이다. 주어진 두 나머지 조건을 적용하면 $R(x)=3x-2$이므로 $R(1)=1$이다.

계산 과정

나머지의 형태: 다항식의 나머지는 **나누는 식보다 차수가 낮다**. $(x+1)(x-2)$는 이차식이므로 $R(x)=ax+b$로 놓는다. 여기서 a, b는 상수이며, 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$이다.

조건 대입: 나머지정리에 따라 $f(-1)=-5$, $f(2)=4$이다. 위 등식에 **나누는 식을 0으로 만드는 값**인 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면 몫이 포함된 항이 사라진다. 따라서 $-a+b=-5$, $2a+b=4$를 얻는다.

계수 결정: 두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 $3a=9$이므로 $a=3$이다. 이를 $-a+b=-5$에 대입하면 $-3+b=-5$이므로 $b=-2$이다.

값 계산: 따라서 $R(x)=3x-2$이고, $R(1)=3\cdot 1-2=1$이다. 이는 ④의 값 1과 일치한다.

NoteBase

문 4. 점 A$(0, a)$에서 원 $x^2 + y^2 = 18$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 a의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 3번

간단한 해설

접선과 접점에 이르는 반지름은 서로 수직이므로, 원의 중심·두 접점·A를 잇는 사각형은 **정사각형**이다. 그 대각선의 길이가 a이므로 $a^2 = 18 + 18 = 36$, 즉 $a = 6$이다.

계산 과정

원의 중심을 O, 두 접점을 T, U라 하자. 원 $x^2 + y^2 = 18$의 반지름은 $\sqrt{18}$이고, A의 좌표가 $(0, a)$, $a > 0$이므로 $OA = a$이다.

접점에서 반지름과 접선은 수직이므로 사각형 OTAU의 T와 U에서의 각은 각각 90°이다. 두 접선도 서로 수직이므로 A에서의 각이 90°이고, 나머지 O에서의 각도 90°이다. 따라서 사각형 OTAU는 직사각형이다. 이웃한 두 변 OT와 OU가 같은 원의 반지름이므로 이 직사각형은 정사각형이다.

정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{18}$이고, OA는 대각선이다. 직각삼각형 OTA에 피타고라스 정리를 적용하면 $a^2 = 18 + 18 = 36$이다. **양수 조건**에 따라 $a = 6$이며, 이는 ③의 값이다.

NoteBase

문 5. 실수 x, y에 대하여, 연립부등식 $\{1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge |x|\}$의 영역의 넓이는?

① $\frac{1}{4}\pi$
② $\frac{1}{3}\pi$
③ $\frac{2}{3}\pi$
④ $\frac{3}{4}\pi$

정답 4번

간단한 해설

두 원 사이 영역에서 $y \ge |x|$를 만족하는 부분은 **중심각이 90°인 부분**이다. 따라서 두 원의 넓이 차의 4분의 1을 구하면 넓이는 $\frac{3\pi}{4}$이다.

계산 과정

원점으로부터의 거리를 r라 하면 $r^2 = x^2 + y^2$이다. 따라서 $1 \le x^2 + y^2 \le 4$는 $1 \le r \le 2$를 뜻하므로, 원점을 중심으로 하는 **반지름 1인 원과 반지름 2인 원 사이**의 영역이다.

$y \ge |x|$는 $y \ge x$와 $y \ge -x$를 동시에 만족한다는 뜻이다. 두 직선 위쪽의 공통 영역은 양의 y축을 포함하며, 양의 x축과 이루는 각이 각각 45°, 135°인 두 반직선 사이이다. 따라서 **중심각은 90°**이다.

부채꼴의 넓이는 원의 넓이에 중심각이 360°에서 차지하는 비율을 곱한 값이다. 큰 부채꼴에서 작은 부채꼴을 빼면 구하는 넓이는 $\frac{90}{360}\pi(2^2 - 1^2) = \frac{3\pi}{4}$이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$과 직선 $4x - 3y + k = 0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 정수 k의 개수는?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

정답 2번

간단한 해설

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 중심과 직선 사이의 거리가 **반지름보다 작아야** 한다. 이 조건을 적용하면 $-15 < k < 5$이므로 가능한 정수는 19개이다.

계산 과정

원의 중심과 반지름: 주어진 식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$이다. 따라서 중심은 $(2, 1)$, 반지름은 2이다.

중심과 직선 사이의 거리: 이 거리를 d라 하면, 점과 직선 사이의 거리 공식에 따라 $d = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$이다. 이를 정리하면 $d = \frac{|k+5|}{5}$이다.

두 점에서 만나는 조건: 직선이 원의 내부를 지나야 하므로 **중심과 직선 사이의 거리가 반지름보다 작아야** 한다. 거리가 반지름과 같으면 한 점에서 접하므로 등호를 포함하지 않는다. 따라서 $\frac{|k+5|}{5} < 2$이고, $|k+5| < 10$이다. 이를 풀면 $-10 < k + 5 < 10$, 즉 $-15 < k < 5$이다.

정수의 개수: 양 끝값인 −15와 5는 제외하므로 가능한 정수 k는 −14부터 4까지이다. 그 개수는 $4 - (-14) + 1 = 19$개이며, ②의 19와 일치한다.

NoteBase

문 7. 어떤 제품을 생산하는 회사가 세 공장 A, B, C에 그 제품의 생산을 하청한다. 이 제품에 대한 A, B, C 세 공장의 생산량과 각 공장에서의 불량품의 비율이 오른쪽 표와 같다. 이 회사의 제품 중에서 임의로 추출한 제품이 불량품이었을 때, 그 제품이 A 공장에서 생산된 제품일 확률은?

공장	생산량	불량 비율
A	200	5%
B	300	4%
C	600	3%

① $\frac{1}{8}$
② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{9}{20}$

정답 2번

간단한 해설

불량품이었다는 조건이 있으므로 **전체 불량품 중 A 공장 제품의 비율**을 구한다. 전체 불량품 40개 중 A 공장의 불량품은 10개이므로 확률은 $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$이다.

NoteBase

계산 과정

불량품을 뽑았을 때 A 공장 제품일 조건부확률은 **A 공장의 불량품 수를 전체 불량품 수로 나눈 값**이다. 각 공장의 불량품 수는 생산량에 해당 공장의 불량 비율을 곱해 구한다.

A 공장: 생산량 200개에 불량 비율 5%를 적용하면 불량품 수는 $200 \cdot \frac{5}{100} = 10$개이다.

B 공장: 생산량 300개에 불량 비율 4%를 적용하면 불량품 수는 $300 \cdot \frac{4}{100} = 12$개이다.

C 공장: 생산량 600개에 불량 비율 3%를 적용하면 불량품 수는 $600 \cdot \frac{3}{100} = 18$개이다.

전체 불량품 수: 세 공장의 불량품 수를 합하면 10 + 12 + 18 = 40개이다. 불량품이라는 조건 아래에서는 이 40개가 확률 계산의 기준이 된다.

조건부확률: 불량품 40개 중 A 공장 제품은 10개이므로 구하는 확률은 $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 다음 <보기>에서 수렴하는 것만을 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3^n}{5^n}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

① ㄱ, ㄴ

② ㄱ, ㄷ

③ ㄴ, ㄷ

④ ㄷ, ㄹ

정답 3번

간단한 해설

ㄴ은 **공비의 절댓값이 1보다 작은 두 등비급수의 합**이므로 수렴한다. ㄷ은 **부분분수로 분해하면 중간 항이 소거**되어 부분합이 $\frac{3}{4}$에 수렴한다.

NoteBase

보기별 해설

각 급수의 제1항부터 제N항까지의 합을 S_N이라 하자. 급수가 수렴한다는 것은 이 부분합이 유한한 값에 가까워진다는 뜻이다.

ㄱ. X: **조화급수는 발산**한다. 분모가 2인 항, 3부터 4까지인 항들, 5부터 8까지인 항들처럼 항의 개수가 두 배가 되도록 묶으면 각 묶음의 합은 1/2 이상이다. 이런 묶음이 끝없이 생기므로 부분합은 한없이 커진다. 일반항 $\frac{1}{n}$이 0에 가까워져도 급수가 수렴하는 것은 아니다.

ㄴ. O: 일반항을 $\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$으로 나눌 수 있다. 두 등비급수의 공비는 각각 $-\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$이며, 모두 **공비의 절댓값이 1보다 작다**. 따라서 두 급수가 각각 수렴하고, 그 합인 원래 급수도 수렴한다.

ㄷ. O: $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$로 부분분수 분해한다. 제1항부터 제N항까지 더하면 **중간 항이 소거**되어 $S_N = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2(N+2)}$가 된다. 뒤의 두 분수는 N이 한없이 커질 때 0으로 가므로 이 급수는 $\frac{3}{4}$에 수렴한다.

ㄹ. X: 분모를 유리화하면 $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$이다. 이를 더하면 이웃한 항들이 소거되어 $S_N = \sqrt{N+1} - 1$이 된다. 이 부분합은 N이 커질수록 **한없이 커지므로 발산**한다.

수렴하는 급수는 ㄴ, ㄷ이며, 이 조합은 ③에 해당한다.

NoteBase

문 9. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$에 대하여, _x→1(1)/(x-1) ∫ _1^x^2f(t) dt의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

간단한 해설

주어진 극한은 적분으로 정의한 함수의 미분계수이다. 미적분의 기본정리와 합성함수의 미분법에 따라 **적분 상한의 미분값도 곱하므로**, 극한값은 $2f(1) = 4$이다.

계산 과정

적분으로 정의한 함수를 $G(x) = \int_1^{x^2} f(t)dt$로 두면 $G(1) = 0$이다. 따라서 주어진 식은 $\lim_{x\to 1}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}$이고, 이는 **미분계수의 정의**에 의해 $G'(1)$이다.

f는 다항함수이므로 연속이다. 미적분의 기본정리에 따라 적분을 상한에 대해 미분하면 상한에서의 함수값을 얻는다. 여기에 **합성함수의 미분법**을 적용하여 상한 x^2의 미분값 $2x$를 곱하면 $G'(x) = f(x^2) \cdot 2x$이다.

$f(1) = 1 - 2 + 1 + 2 = 2$이므로 $G'(1) = f(1) \cdot 2 = 4$이다. 구하는 극한값은 4이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 두 실수 a, b가 _x→ 5(√(x-1)+a)/(x-5)=b를 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{7}{4}$
② $-\frac{3}{4}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{5}{4}$

정답 1번

간단한 해설

극한값이 실수로 존재하려면 분모가 0으로 갈 때 **분자도 0으로 가야** 하므로 $a=-2$이다. 분자를 유리화하면 $b=\frac{1}{4}$이므로 $a+b=-\frac{7}{4}$이다.

계산 과정

a의 값: $x\to 5$일 때 분모 $x-5$는 0으로 간다. 주어진 몫이 실수 b로 수렴하므로 **분자도 0으로 수렴**해야 한다. 따라서 $\sqrt{5-1}+a=2+a=0$에서 $a=-2$이다.

b의 값: $a=-2$를 대입하면 분자는 $\sqrt{x-1}-2$이다. 분자와 분모에 $\sqrt{x-1}+2$를 곱하면 분자는 $(x-1)-4=x-5$가 된다. 극한에서는 $x\neq 5$이므로 **공통인자를 약분**하여 $\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$를 얻는다. 이제 분모의 극한값이 4로 0이 아니므로 $b=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$이다.

a+b의 값: $a+b=-2+\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다. 이때, $f(1)$의 값을 구하면? (단, m은 실수이다.)

(가) _x→∞(mx+2)/(f(x)-x^2)=(1)/(2) (나) _x→0(f(x))/(x)=2

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

간단한 해설

조건 (가)는 **이차항의 계수가 1**임을, 조건 (나)는 **상수항이 0이고 일차항의 계수가 2**임을 뜻한다. 따라서 $f(x) = x^2 + 2x$이므로 $f(1) = 3$이다.

계산 과정

(가)에서 분자 $mx + 2$는 차수가 1 이하인 다항식이다. 분모 $f(x) - x^2$의 차수가 2 이상이면 분모가 더 빠르게 커져 극한값은 0이 된다. 주어진 극한값은 $\frac{1}{2}$이므로 **분모의 차수는 1 이하**여야 한다. 따라서 실수 a, b에 대하여 $f(x) = x^2 + ax + b$로 놓을 수 있다.

(나)에 대입하면 $\frac{f(x)}{x} = x + a + \frac{b}{x}$이다. x가 0으로 갈 때 극한값이 유한하려면 **상수항 b가 0**이어야 한다. 이때 $\lim_{x\to0}(x+a)=a$이므로 $a = 2$이다.

따라서 $f(x) = x^2 + 2x$이고, $f(1) = 1 + 2 = 3$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 2$, $a_{100} - a_{97} = 9$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$의 값은?

① 155

② 158

③ 161

④ 164

정답 1번

간단한 해설

$a_{100} - a_{97}$는 **공차의 3배**이므로 공차는 3이다. 첫째항 2와 열째항 29의 평균에 항의 개수 10을 곱하면 합은 155이다.

계산 과정

공차 구하기: 공차를 d라 하면, 97번째 항에서 100번째 항까지는 **공차를 세 번 더한다**. 따라서 $a_{100} - a_{97} = 3d = 9$이므로 $d = 3$이다.

열째항 구하기: 첫째항에서 열째항까지는 공차를 아홉 번 더하므로 $a_{10} = a_1 + 9d$이다. 주어진 첫째항 $a_1 = 2$와 공차 3을 대입하면 $a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 29$이다.

첫 10개 항의 합 구하기: 등차수열은 **양 끝에서 같은 거리의 두 항의 합이 일정하다**. 첫째항과 열째항, 둘째항과 아홉째항처럼 짝지으면 합이 $2 + 29 = 31$인 쌍이 5개 생긴다. 따라서 구하는 합은 $\frac{10(2+29)}{2} = 155$이며, ①의 155와 일치한다.

NoteBase

문 13. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2n^2 + 3n$일 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{45}$
② $\frac{2}{45}$
③ $\frac{1}{15}$
④ $\frac{4}{45}$

정답 2번

간단한 해설

일반항은 이웃한 두 부분합의 차로 구하면 $a_n = 4n + 1$이다. 각 항을 **두 분수의 차로 분해**하여 더하면 중간 항이 소거되어, 구하는 합은 14≤ft(15-145)=245이다.

계산 과정

1. 일반항 구하기: n≥2일 때 $a_n = S_n - S_{n-1}$이다. 첫째항부터 제n항까지의 합에서 제(n−1)항까지의 합을 빼면 **제n항만 남기** 때문이다. 주어진 식에서 $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1$이므로 $a_n = 4n + 1$이다. 첫째항도 $a_1 = S_1 = 5$로 이 식을 만족하므로, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 4n + 1$이다.

2. 부분분수로 분해하기: $a_k = 4k + 1$, $a_{k+1} = 4k + 5$이므로 두 항의 차는 4이다. 따라서 14k+1-14k+5=4(4k+1)(4k+5)이고, 이를 이용하면 1a_ka_k+1=14≤ft(14k+1-14k+5)이다. 두 분수의 차에서 분자가 4가 되므로 **계수 1/4**을 곱해야 한다.

3. 합 구하기: k가 1일 때 괄호 안은 15-19, k가 2일 때는 19-113이다. 이처럼 앞 항에서 빼는 분수가 다음 항에서 더해져 **중간 항이 서로 소거**된다. k가 10일 때 마지막으로 빼는 분수는 145이므로, 구하는 합은 14≤ft(15-145)=14·845=245이다. 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. 유리함수 $y=\frac{2x+5}{x+1}$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동한 후, 원점에 대하여 대칭이동하였더니 유리함수 $y=b+\frac{k}{x-5}$의 그래프와 겹쳐졌다. 이때, a+b+k의 값은? (단, a, b, k는 정수이다.)

① −6

② −4

③ 4

④ 6

정답 1번

간단한 해설

원점에 대하여 대칭이동하면 **두 좌표의 부호가 모두 바뀐다**. 두 이동을 차례로 적용한 식은 $y=-5+\frac{3}{x+a-1}$이므로, 주어진 식과 비교하면 a = -4, b = -5, k = 3이고 그 합은 -6이다.

계산 과정

원래 함수의 식을 나누어 정리하면 $y=2+\frac{3}{x+1}$이다.

평행이동: x축 방향으로 a만큼 옮길 때는 **x 대신 x - a를 대입**하고, y축 방향으로 3만큼 옮길 때는 함수값에 3을 더한다. 따라서 평행이동한 그래프의 식은 $y=5+\frac{3}{x-a+1}$이다.

원점 대칭이동: 점 (x, y)가 $(-x, -y)$로 옮겨지므로, 평행이동한 식의 x와 y를 각각 -x와 -y로 바꾼다. 그러면 $-y=5+\frac{3}{-x-a+1}$이고, 양변과 분모의 부호를 정리하면 $y=-5+\frac{3}{x+a-1}$이다.

상수 결정: 이 그래프가 $y=b+\frac{k}{x-5}$의 그래프와 겹치려면 **수직점근선의 위치가 같아야** 한다. 따라서 $x+a-1=x-5$에서 a = -4이다. 두 식의 상수항과 분자의 상수를 비교하면 b = -5, k = 3이다.

따라서 $a+b+k=-4-5+3=-6$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 $A = \{1, 2, 3\}$일 때, $n(A - B) = 1$을 만족하는 부분집합 B의 개수는? (단, 집합 X에 대하여, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수를 나타낸다.)

① 6

② 8

③ 10

④ 12

정답 4번

간단한 해설

$n(A - B) = 1$은 A의 세 원소 중 **정확히 한 원소만 B에 속하지 않는다**는 뜻이다. 그 원소를 고르는 방법은 3가지이고, 4와 5의 포함 여부는 각각 자유로우므로 가능한 B는 $3 \times 4 = 12$개이다.

계산 과정

$A - B$는 A에는 속하지만 B에는 속하지 않는 원소들의 집합이다. 따라서 $n(A - B) = 1$이려면 1, 2, 3 중 **하나만 제외하고 나머지 둘은 반드시 B에 넣어야 한다**. 제외할 원소가 1, 2, 3인 경우에 따라 $A \cap B$는 각각 $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2\}$이므로 3가지이다.

전체집합 U에서 A에 속하지 않는 원소는 4와 5이다. 이들은 **B에 넣어도 $A - B$에 영향을 주지 않는다**. 따라서 각각 넣거나 넣지 않을 수 있으며, B에 추가할 집합은 $\varnothing$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{4, 5\}$의 4가지이다.

A 안에서 정한 3가지 각각에 대해 4와 5를 추가하는 방법이 4가지씩 있고, 이 과정에서 같은 B가 중복되지 않는다. 따라서 구하는 부분집합 B의 개수는 $3 \times 4 = 12$개이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2 (x \geq 1)$에 대하여, 함수 $y = f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 그래프의 두 교점을 각각 A, B라 할 때, 선분 $\overline{AB}$의 길이는?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

정답 2번

간단한 해설

주어진 정의역에서 함수가 **증가하므로 두 그래프의 교점은** $y = x$ 위에 있다. 교점은 (1, 1), (2, 2)이므로 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다.

계산 과정

$f(x) = (x-1)^2 + 1$이고 $x \geq 1$이므로, x가 커질수록 $f(x)$도 커진다. 교점을 (a, b)라 하면 역함수의 정의에 따라 $b = f(a)$, $a = f(b)$이다. 만약 $a < b$이면 증가함수의 성질에 의해 $f(a) < f(b)$, 즉 $b < a$가 되어 모순이다. $a > b$인 경우도 마찬가지이므로 **교점에서는 두 좌표가 같다**.

따라서 교점의 좌표는 $y = f(x)$와 $y = x$를 연립하여 구한다. $x^2 - 2x + 2 = x$를 정리하면 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 즉 $(x-1)(x-2) = 0$이다. 두 해 $x = 1, x = 2$는 모두 **정의역 조건** $x \geq 1$을 만족하므로, 두 교점은 A(1, 1), B(2, 2)로 둘 수 있다.

두 점의 가로 좌표 차와 세로 좌표 차가 각각 1이므로, 두 점 사이의 거리 공식에 따라
$\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$이다. 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. $3^{(\sqrt{2}+5)} \times 3^{(\sqrt{2}-1)} \div 9^{(\sqrt{2}+1)}$ **의 값은?**

① $\frac{1}{9}$

② $\frac{1}{3}$

③ 3

④ 9

정답 4번

간단한 해설

밑을 3으로 통일한 뒤 **곱셈에서는 지수를 더하고 나눗셈에서는 지수를 빼면**, 무리수 항이 소거되어 지수가 2만 남는다. 따라서 식의 값은 $3^2 = 9$이다.

계산 과정

밑 통일: $9 = 3^2$이므로 **모든 거듭제곱의 밑을 3으로 맞춘다**. 거듭제곱을 다시 거듭제곱하면 지수를 곱하므로, $9^{\sqrt{2}+1} = (3^2)^{\sqrt{2}+1}$은 $3^{2\sqrt{2}+2}$가 된다. 밑이 양수이므로 무리수 지수에도 이 지수법칙을 적용할 수 있다.

곱셈 계산: 밑이 같을 때 곱셈은 지수를 더한다. 앞의 두 거듭제곱의 지수를 더하면 $(\sqrt{2}+5)+(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}+4$이므로, 두 수의 곱은 $3^{2\sqrt{2}+4}$이다.

나눗셈 계산: 밑이 같을 때 나눗셈은 **나누는 수의 지수 전체를 뺀다**. 따라서 최종 지수는 $(2\sqrt{2}+4)-(2\sqrt{2}+2) = 2$이다. 식의 값은 $3^2 = 9$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 반지름이 1cm인 구가 있다. 이 구의 반지름이 2cm/초로 일정하게 증가한다고 할 때, 겉넓이의 변화율이 48πcm^2/초가 되는 순간 이 구의 부피는?

① $18\pi\text{cm}^3$

② $27\pi\text{cm}^3$

③ $36\pi\text{cm}^3$

④ $45\pi\text{cm}^3$

정답 3번

간단한 해설

겉넓이의 시간 변화율은 $\frac{dS}{dt} = 16\pi r$이므로, 주어진 변화율에 도달하는 때는 **반지름이 3 cm인 순간**이다. 이때 구의 부피는 $36\pi\text{cm}^3$이다.

계산 과정

시간을 t초, 반지름을 r cm, 겉넓이를 S cm^2, 부피를 V cm^3라 하자. 처음 반지름이 1 cm이고 매초 2 cm씩 증가하므로 $r = 1 + 2t$, $\frac{dr}{dt} = 2$이다. 구의 겉넓이와 부피는 각각 $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$이다.

반지름도 시간에 따라 변하므로 겉넓이를 **시간에 대해 미분할 때 반지름의 변화율을 곱한다**. 합성함수의 미분법으로 $\frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt} = 16\pi r$이다. 겉넓이의 변화율이 48πcm^2/초인 조건을 대입하면 $16\pi r = 48\pi$이므로 $r = 3$이다. 이는 해당 순간의 반지름이 3 cm라는 뜻이다.

구한 반지름을 부피 공식에 대입하면 $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi\text{cm}^3$이다. 이 값은 ③의 부피와 일치한다.

NoteBase

문 19. 남자 3명, 여자 2명을 일렬로 세울 때, 여자들끼리는 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는?

① 68

② 70

③ 72

④ 74

정답 3번

간단한 해설

남자 3명을 먼저 세운 뒤, 양 끝과 남자 사이의 **네 자리 중 서로 다른 두 자리**에 여자들을 넣으면 여자끼리 이웃하지 않는다. 남자의 배열 수와 여자의 배치 수를 곱하면 72가지이다.

계산 과정

남자 배열: 서로 다른 남자 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$가지이다.

여자 배치: 남자들을 세우면 '□ 남 □ 남 □ 남 □'처럼 양 끝과 남자 사이에 네 자리가 생긴다. 여자끼리 이웃하지 않으려면 **서로 다른 자리에 한 명씩** 넣어야 한다. 여자 한 명이 들어갈 자리는 4곳이고, 나머지 여자 한 명이 들어갈 자리는 3곳이므로 $4 \times 3 = 12$가지이다. 두 여자도 서로 다른 사람이므로 자리를 맞바꾸면 다른 배치로 센다.

전체 경우의 수: 남자의 배열 하나마다 여자를 배치하는 방법이 12가지씩 있으므로 곱의 법칙에 따라 $6 \times 12 = 72$가지이다. 이는 ③의 72에 해당한다.

NoteBase

문 20. A고등학교 1학년 남학생의 키는 정규분포를 따른다고 한다. 이 중 64명을 임의추출하여 키를 조사하였더니 평균이 175cm, 표준편차가 16cm이었다. A고등학교 1학년 전체 남학생 키의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $P(|Z| \le 2.58) = 0.99$)

① $173.04 \le m \le 176.96$

② $172.42 \le m \le 177.58$

③ $171.08 \le m \le 178.92$

④ $169.84 \le m \le 180.16$

정답 3번

간단한 해설

표본평균의 표준오차는 $\frac{16}{\sqrt{64}} = 2$cm이다. 신뢰도 95%에 대응하는 **1.96**을 곱하면 오차한계가 3.92cm이므로, 평균 175cm를 중심으로 한 신뢰구간은 $171.08 \le m \le 178.92$이다.

계산 과정

표본의 크기는 $n = 64$, 표본평균은 $\bar{x} = 175$cm, 표본표준편차는 $s = 16$cm이다. 모평균 m을 추정하는 문제이므로 **표본평균의 변동 크기**를 기준으로 구간을 만든다. 모표준편차는 주어지지 않았으나 표본의 크기가 충분히 크므로, 표본표준편차를 대신 사용하여 정규분포로 근사한다.

표본평균의 표준오차는 개별 자료의 표준편차를 표본 크기의 제곱근으로 나누어 구한다. 따라서 $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{16}{\sqrt{64}} = 2$ cm이다. 이 값은 64명의 평균 키가 표본에 따라 얼마나 변하는지를 나타내는 추정치이다.

주어진 $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$에 따라 신뢰도 95%의 구간은 $\bar{x} \pm 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}$으로 구한다. 즉, 표본평균에서 양쪽으로 **표준오차의 1.96배**만큼 범위를 잡는다. 오차한계는 $1.96 \times 2 = 3.92$cm이다. 2.58은 신뢰도 99%에 대응하므로 사용하지 않는다.

구간의 하한은 $175 - 3.92 = 171.08$cm이고, 상한은 $175 + 3.92 = 178.92$cm이다. 따라서 모평균의 신뢰구간은 $171.08 \le m \le 178.92$이며, ③의 구간과 일치한다.

NoteBase