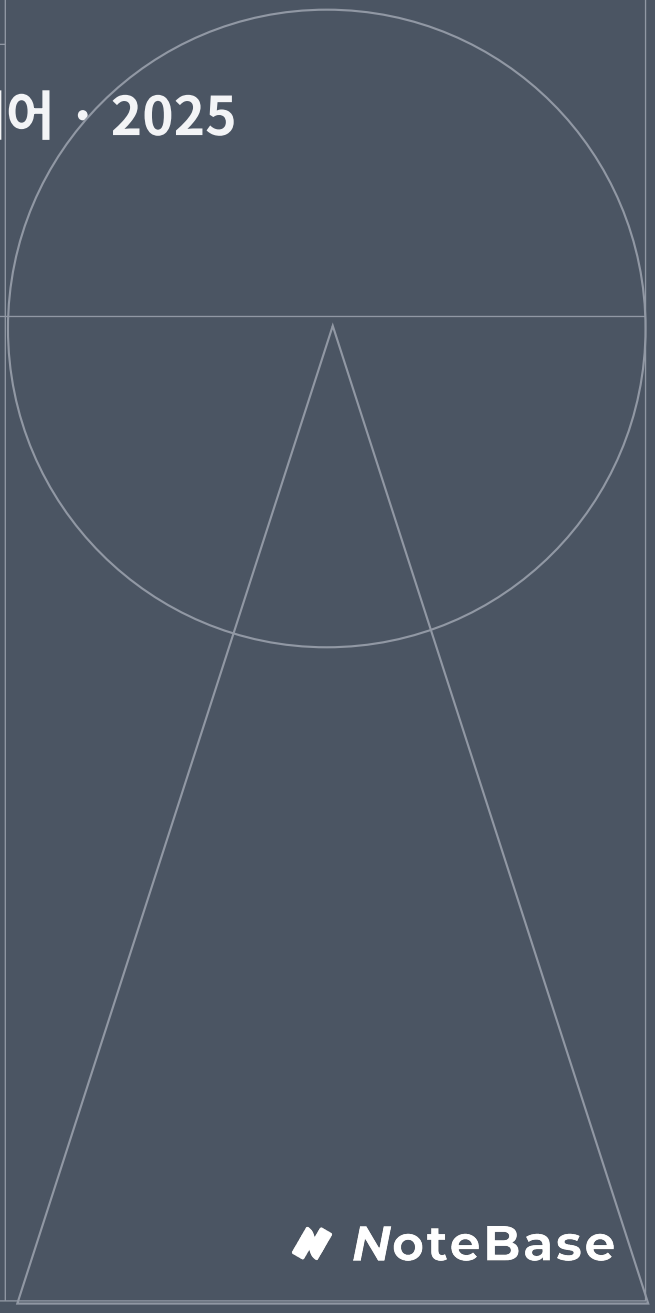
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2025



NoteBase

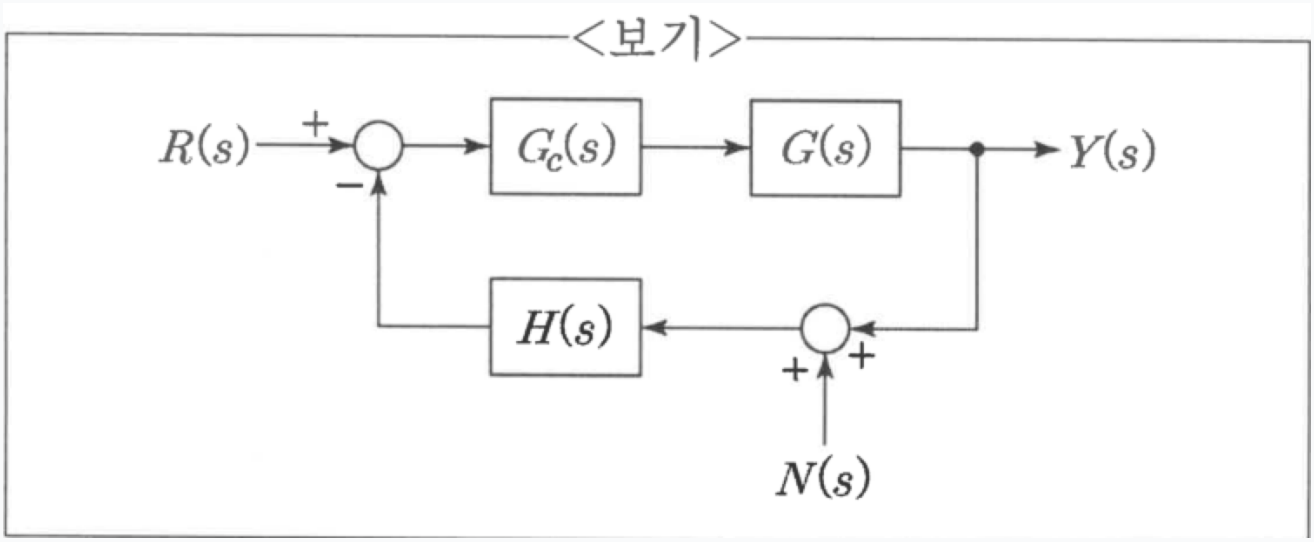
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2025

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2025

문 1. <보기>의 제어시스템에서 $G_c(s)=10, G(s)=\frac{1}{s(s+2)}, H(s)=1$이다. 정상상태오차 $e_\infty=\lim_{t\to\infty}e(t)$의 값으로 가장 옳은 것은? (단, $R(s)$와 $N(s)$는 단위계단함수이며 오차는 $E(s)=R(s)-Y(s)$로 정의한다.)

<보기>



① -1

② 0

③ 0.1

④ 1

정답 4번

출제 포인트

외란 N(s)가 피드백 경로(H(s) 입력 이전)에 주입되는 블록선도에서 중첩 원리를 이용해 정상상태오차를 구하는 문제이다. 발문의 블록선도 구조를 정확히 읽는 것이 핵심이다.

조건 정리

$G_c(s)=10$, $G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$, $H(s)=1$, $R(s)=\frac{1}{s}$(단위계단), $N(s)=\frac{1}{s}$(단위계단), 오차 $E(s)=R(s)-Y(s)$.
블록선도 구조: $Y=G_cG\cdot[R-H(Y+N)]$, 즉 N(s)는 피드백 경로에서 H(s) 앞에 더해진다.

NoteBase

사용할 공식

중첩 원리로 오차 전달함수 도출:
$E(s) = \frac{1}{1+G_cGH}R(s) + \frac{G_cGH}{1+G_cGH}N(s)$
최종값 정리: $e_\infty = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s)$

계산 과정

블록선도에서 Y(s)를 구한다.
$Y = G_cG[R - H(Y+N)]$
$Y(1+G_cGH) = G_cG\cdot R - G_cGH\cdot N$
$Y = \frac{G_cG}{1+G_cGH}R - \frac{G_cGH}{1+G_cGH}N$

H(s)=1을 대입하면:
$E = R - Y = \frac{1}{1+G_cG}R + \frac{G_cG}{1+G_cG}N$

최종값 정리를 적용한다. $s\to 0$에서 $G_cG = \frac{10}{s(s+2)} \to \infty$이므로:
$\frac{1}{1+G_cG} \to 0$, $\frac{G_cG}{1+G_cG} \to 1$

R(s), N(s) 모두 $\frac{1}{s}$이므로:
$e_\infty = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1$

즉 R(s) 추종 오차는 0(적분 제어기 효과)이고, N(s)로 인한 오차가 1로 남는다.

선지 판단

① -1 — 오답. N(s) 기여 항의 부호를 반대로 계산한 경우 나올 수 있으나, 피드백 경로의 합산 부호상 양수 1이다.
② 0 — 오답. N(s)가 G(s) 출력 이후(순방향 경로 끝)에 더해지는 구조로 잘못 읽으면 R-N=0이 되어 0이 나오지만, 실제 N(s)는 피드백 경로에 주입되어 오차에 1로 남는다.
③ 0.1 — 오답. G_cG의 이득 10을 고정값으로 보고 $\frac{1}{1+10} \approx 0.09$로 계산한 경우 나올 수 있으나, 최종값 정리에서 $s\to 0$ 극한을 올바르게 적용하지 않은 오류이다.
④ 1 — 정답. $s\to 0$에서 $G_cG \to \infty$이므로 R(s) 기여 오차는 0이 되고, N(s) 기여 오차는 $\frac{G_cG}{1+G_cG} \to 1$이 되어 $e_\infty = 1$이다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 블록선도를 '순방향 경로 끝에 N이 더해진다'고 읽는 것이다. 그 경우 $E = (R-N)/(1+G_cG)$가 되어 R=N이면 $e_\infty = 0$이 나온다. N(s)가 피드백 경로에 주입되면 N은 H(s)를 통해 입력합산기에 (-)로 돌아오게 되어, 오차 E(s) 식에서 N 항의 분자가 $G_cGH(=G_cG)$가 된다. 이 항은 $s\to 0$에서 1로 수렴하므로 정상상태오차에 N(0) = 1이 그대로 남는다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

외란 N(s)의 위치를 먼저 확정한다 — 순방향 경로 중간이냐, 피드백 경로 내부냐에 따라 정상상태오차 식이 달라진다. N이 피드백 경로에 있으면 오차 전달함수의 N 기여 항 분자가 G_cGH가 되어 적분기가 있어도 N 오차를 0으로 만들지 못한다. 블록선도 화살표 방향과 합산기 위치를 따라 Y(s)를 직접 연립 방정식으로 풀면 실수가 없다.

암기 포인트

외란이 피드백 경로에 주입될 때 정상상태오차: 적분 제어기(G_c, G에 적분기 포함)가 있어도 R 추종 오차는 0이지만 N 오차는 N의 최종값만큼 남는다. 이 문제에서 $e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{G_cG}{1+G_cG} \cdot s \cdot N(s) = 1 \times 1 = 1$.

문 2. <보기>의 비선형 시스템을 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ 주변에서 선형화한 것으로 가장 옳은 것은?

<보기>

$\dot{x}_1 = \tanh(x_2) + x_1^2$

$\dot{x}_2 = e^{x_1} - x_2$

① $\dot{x}_1 = x_1,\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2$

② $\dot{x}_1 = -x_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2$

③ $\dot{x}_1 = x_1 + x_2,\ \dot{x}_2 = x_1$

④ $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2$

정답 4번

출제 포인트

비선형 시스템을 평형점 주변에서 선형화할 때 야코비안(Jacobian) 행렬을 구하는 절차를 묻는다. tanh와 지수함수의 편미분값을 $(0, 0)$에서 정확히 계산할 수 있어야 한다.

조건 정리

비선형 시스템: $\dot{x}_1 = \tanh(x_2) + x_1^2, \dot{x}_2 = e^{x_1} - x_2$. 선형화 평형점: $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

사용할 공식

평형점 $\mathbf{x}_0$에서의 선형화: $\dot{\mathbf{x}} \approx A\mathbf{x}$, 단 $A = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}_0}$ (야코비안 행렬). 필요 미분: $\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$, $\cosh(0) = 1$, $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, $e^0 = 1$.

계산 과정

$f_1 = \tanh(x_2) + x_1^2$의 편미분:

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{(0,\,0)} = 2x_1|_{(0,\,0)} = 0$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}|_{(0,\,0)} = \frac{1}{\cosh^2(x_2)}|_{(0,\,0)} = \frac{1}{1} = 1$

$f_2 = e^{x_1} - x_2$의 편미분:

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}|_{(0,\,0)} = e^{x_1}|_{(0,\,0)} = 1$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}|_{(0,\,0)} = -1$

야코비안: A = pmatrix 0 & 1 \ 1 & -1 pmatrix

선형화 결과: $\dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = x_2, \dot{x}_2 = 1 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 = x_1 - x_2$

NoteBase

선지 판단

① $\dot{x}_1 = x_1,\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2$ — 틀림. $A_{11} = 2x_1|_{(0,\,0)} = 0$이므로 $\dot{x}_1$에 x_1 항이 없어야 한다. x_1을 x_1에 곱해 나온 값을 오해한 오류.
② $\dot{x}_1 = -x_1,\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2$ — 틀림. $A_{11} = 0(-x_1$ 아님), $A_{22} = -1(+x_2$ 아님), 두 원소 모두 부호 오류.
③ $\dot{x}_1 = x_1 + x_2,\ \dot{x}_2 = x_1$ — 틀림. $A_{11} = 0$이므로 $\dot{x}_1$에 x_1 항 없음. $A_{22} = -1$이므로 $\dot{x}_2$에 $-x_2$ 있어야 함.
④ $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2$ — 옳음. 야코비안 계산 결과와 정확히 일치.

오답 포인트

①③: $\frac{\partial x_1^2}{\partial x_1} = 2x_1$인데 $(0, 0)$에서 이 값은 0임을 놓쳐 x_1 항을 남기는 실수가 많다.
②: $\tanh(x_2)$를 x_2에 대해 미분하면 $\frac{1}{\cosh^2(0)} = 1$(양수)임에도 부호를 음으로 쓰는 오류.
②: $e^{x_1} - x_2$의 x_2 편미분은 -1인데 $+1$로 반전하는 오류.

다시 나오면 이렇게 판단

평형점에서 선형화 문제가 나오면 야코비안 각 원소를 하나씩 계산한다. x_1^2 같은 고차항은 평형점에서 0이 되므로 사라지고, tanh은 기울기 1, $e^0 = 1$임을 기억하면 빠르게 A = pmatrix 0 & 1 \ 1 & -1 pmatrix을 도출할 수 있다.

암기 포인트

$\tanh(x)$의 도함수는 $\frac{1}{\cosh^2(x)}$이고 $x = 0$에서 값은 1이다(기울기 1). $x^n (n \geq 2)$의 편미분은 평형점 원점에서 0이 된다. 이 두 가지를 알면 이 유형의 야코비안 계산 실수를 막을 수 있다.

NoteBase

문 3. <보기>의 상태공간방정식을 전달함수 $G(s)=\frac{s+a}{s^2+bs+c}$로 나타낼 때, $a+b+c$는?

<보기>

x=bmatrix5 & -4 \ 3 & 9bmatrixx+bmatrix1 \ 0bmatrixu, y=bmatrix1 & 1bmatrixx

① 37

② 51

③ 63

④ 77

정답 1번

출제 포인트

상태공간방정식(A, B, C 행렬)을 전달함수 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 공식으로 변환한 뒤, 계수 a, b, c를 읽어 합산하는 문제다.

조건 정리

A = bmatrix5 & -4\\3 & 9bmatrix, B = bmatrix1\\0bmatrix, $C=[1\ 1]$, 전달함수 목표 형태: $G(s)=\frac{s+a}{s^2+bs+c}$

사용할 공식

$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$

2×2 역행렬: bmatrixp & q & tbmatrix^-1 = (1)/(pt-qr)bmatrixt & -q\\-r & pbmatrix

계산 과정

① sI - A = bmatrixs-5 & 4\\-3 & s-9bmatrix

② $\det(sI-A)=(s-5)(s-9)-(-3)(4)=s^2-14s+45+12=s^2-14s+57$

③ (sI-A)^-1 = (1)/(s^2-14s+57)bmatrixs-9 & -4\\3 & s-5bmatrix

④ (sI-A)^-1B = (1)/(s^2-14s+57)bmatrixs-9\\3bmatrix

⑤ G(s) = [1 1]·(1)/(s^2-14s+57)bmatrixs-9\\3bmatrix = ((s-9)+3)/(s^2-14s+57) = (s-6)/(s^2-14s+57)

⑥ 목표 형태와 대응: $a=-6$, $b=-14$, $c=57$

⑦ $a+b+c=-6+(-14)+57=37$

NoteBase

선지 판단

① 37: $a+b+c=-6-14+57=37$ → O (정답)
② 51: b의 부호를 뒤집어 $b=+14$로 두면($sI-A$에서 대각 $s-5,\ s-9$ 부호를 잘못 처리) 합이 부풀려져 50대 값이 나온다 → X
③ 63: 행렬식의 교차항 $-(4)(-3)=+12$를 더하는 대신 부호를 헷갈려 c를 과대평가하거나 $b=+14$와 겹쳐 계산하면 60대 값으로 흐른다 → X
④ 77: 분자 $C(sI-A)^{-1}B$에서 부호를 모두 양으로 잘못 두어 $a=+9$류로 읽고 b까지 $+14$로 처리하는 등 부호 오류가 누적되면 70대까지 커진다 → X

오답 포인트

가장 흔한 실수 두 가지: 첫째, $\det(sI-A)$ 계산 시 부호 처리 오류 — $(4)\times(-3)=-12$를 빼면 $+12$가 되어 57이 맞다. 둘째, $C(sI-A)^{-1}B$에서 $C=[1\ 1]$의 두 번째 원소를 빠뜨리면 분자가 $s-9$만 되어 $a=-9$로 오독된다. 두 행을 모두 더해야 분자가 $(s-9)+3=s-6$이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

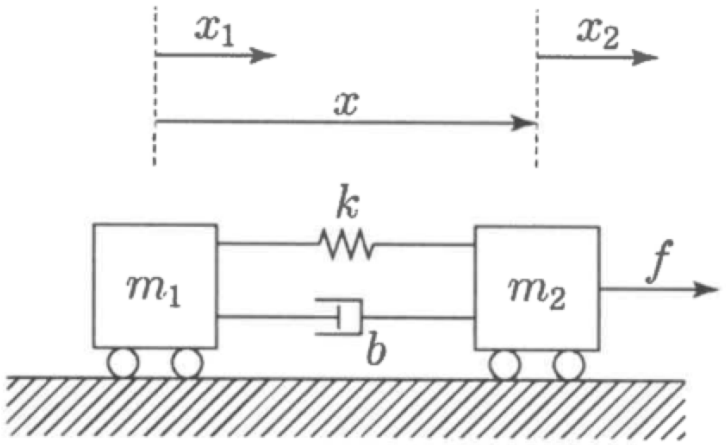
상태공간 → 전달함수 변환 문제가 나오면 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 한 줄로 고정하고, ① $sI-A$ 구성 → ② 행렬식 계산 → ③ 역행렬 분자행렬 → ④ B 곱셈 → ⑤ C 곱셈 순으로 순서대로 처리한다. 전달함수 계수를 읽을 때 부호 그대로(음수 포함) 대응시킨다.

암기 포인트

특성방정식 $\det(sI-A)=0$의 근 = 시스템 극점(pole). 이 문제에서 $s^2-14s+57=0$의 근이 극점이다. $b=-(\lambda_1+\lambda_2)$, $c=\lambda_1\lambda_2$ (비에타 공식)으로 빠르게 검산할 수 있다: A의 고유값 합(trace) = $5+9=14$이므로 $b=-14$, 고유값 곱(det) = $5\times9-(-4)\times3=45+12=57$이므로 $c=57$.

문 4. <보기>와 같은 시스템에서 힘 f에 대한 두 질량 간의 거리 x의 전달함수로 가장 옳은 것은? (단, 바닥과의 마찰은 고려하지 않는다.)

<보기>



$x = x_2 - x_1$

$m_1 = 1,\ m_2 = 2,$

$b = \frac{4}{3},\ k = \frac{8}{3}$

① $\frac{0.5}{s^2 + 2s + 4}$

② $\frac{s + 0.5}{s^2 + 2s + 4}$

③ $\frac{3}{9s^2 + 4s + 8}$

④ $\frac{s + 3}{9s^2 + 4s + 8}$

정답 1번

출제 포인트

스프링-댐퍼로 연결된 두 질량 시스템에서 외력 f에 대한 두 질량 사이의 상대 변위 $x = x_2 - x_1$의 라플라스 전달함수를 구하는 문제이다. 각 질량에 대한 운동방정식을 세운 뒤 라플라스 변환을 적용해 X(s)/F(s)를 유도해야 한다.

조건 정리

질량: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ / 감쇠계수: $b = 4/3$ / 스프링 상수: $k = 8/3$ / 상대 변위: $x = x_2 - x_1$ / 바닥 마찰 없음

사용할 공식

스프링-댐퍼 연결력(복소 임피던스): $Z(s) = k + bs$

각 질량의 운동방정식(라플라스 영역):

$m_1 s^2 X_1 = Z(s)(X_2 - X_1)$

$m_2 s^2 X_2 = F - Z(s)(X_2 - X_1)$

NoteBase

계산 과정

1단계 — 운동방정식 설정 (라플라스 영역)

$s^2X_1 = \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}s\right)(X_2 - X_1) \cdots (1)$

$2s^2X_2 = F - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}s\right)(X_2 - X_1) \cdots (2)$

2단계 — 두 식 더하기

(1) + (2):

$s^2X_1 + 2s^2X_2 = F \cdots (3)$

3단계 — X_1을 X_2로 표현

(1)에서:

$X_1(s^2 + Z) = Z \cdot X_2$

$X_1 = \frac{Z}{s^2 + Z}X_2$

따라서:

$X_2 - X_1 = \frac{s^2}{s^2 + Z}X_2 \cdots (4)$

4단계 — (3)에 대입

(3)에서 X_1을 소거: 식 (1)을 이용해$s^2X_1 = Z(X_2 - X_1) = Zs^2X_2/(s^2+Z)$ 대입:

$\frac{Zs^2}{s^2 + Z}X_2 + 2s^2X_2 = F$

$s^2X_2\left(\frac{Z}{s^2 + Z} + 2\right) = F$

$s^2X_2 \cdot \frac{2s^2 + 3Z}{s^2 + Z} = F$

$X_2 = \frac{F(s^2 + Z)}{s^2(2s^2 + 3Z)}$

5단계 — $X = X_2 - X_1$ 계산

식 (4) 이용:

$X = \frac{s^2}{s^2 + Z}X_2 = \frac{s^2}{s^2 + Z} \cdot \frac{F(s^2 + Z)}{s^2(2s^2 + 3Z)} = \frac{F}{2s^2 + 3Z}$

6단계 — Z 대입

$3Z = 3k + 3bs = 3 \cdot \frac{8}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3}s = 8 + 4s$

$\frac{X}{F} = \frac{1}{2s^2 + 4s + 8} = \frac{0.5}{s^2 + 2s + 4}$

선지 판단

① $0.5 / (s^2 + 2s + 4)$ — 유도 결과와 일치. 정답 (O)

② $(s + 0.5) / (s^2 + 2s + 4)$ — 분자에 s항이 들어 있으나 상대 변위 전달함수 분자는 상수이어야 한다. 오답 (X)

③ $3 / (9s^2 + 4s + 8)$ — 분모를 9로 나누면s^2의 계수가 1이 되지 않고, 계수도 맞지 않는다. 오답 (X)

④ $(s + 3) / (9s^2 + 4s + 8)$ — 분자에 s항이 있고 분모 계수도 틀렸다. 오답 (X)

NoteBase

오답 포인트

두 운동방정식을 더하면$s^2X_1 + 2s^2X_2 = F$가 나오는데, 이를 놓치고 각 방정식을 개별로만 풀면 분자에 s항이 생기거나 분모 계수가 달라진다(선지 ②④). 또한 분자가 상수(1 또는 0.5)임을 확인하지 않으면 ②나 ④를 고르기 쉽다. 분모를 약분하지 않으면 ③처럼 9가 붙은 형태로 오인할 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 질량-스프링-댐퍼 시스템에서 '상대 변위 $x = x_2 - x_1$'의 전달함수는 두 운동방정식의 합산(X_1 소거)과 $X_2 - X_1$ 관계식의 조합으로 분자가 상수가 된다. 분자에 s가 포함된 선지는 즉시 제거한다. 분모의 최고차 계수를 1로 통일해 계수를 비교하면 답을 빠르게 확정할 수 있다.

암기 포인트

두 식을 더하면 교차 힘 항이 소거되어 $m_1s^2X_1 + m_2s^2X_2 = F$가 된다. 상대 변위 전달함수 분자: 상수, 분모: (m_1+m_2)의 최고차항 → $2s^2$, 중간항: 3b = 4 s, 상수항: 3k = 8 → $X/F = 1/(2s^2+4\,s+8) = 0.5/(s^2+2\,s+4)$.

NoteBase

문 5. 개루프 전달함수가 $G(s)H(s)=\frac{K}{s(s^2+4s+8)}$로 주어진 시스템의 근궤적이 복소 극점 $s=-2-j2$에서 출발하는 각도(angle of departure)로 가장 적절한 것은?

① -135°

② -45°

③ 45°

④ 135°

정답 3번

출제 포인트

근궤적(root locus)에서 복소 극점으로부터 출발하는 각도(angle of departure)를 계산하는 문제다. 개루프 전달함수의 각 극점이 해당 복소 극점에서 만드는 벡터 각도를 합산한 뒤 출발각 공식에 대입한다.

조건 정리

개루프 전달함수: $G(s)H(s)=\frac{K}{s(s^2+4s+8)}$
분모 $s^2+4s+8=0$의 근: $s=-2\pm j2$
극점 세 개: $s_1=0$, $s_2=-2+j2$, $s_3=-2-j2$
출발 극점: $s_p=-2-j2$ (복소 극점)

사용할 공식

출발각 공식: $\phi_{dep}=180^\circ-\sum\angle(s_p-p_k)$
여기서 p_k는 출발 극점을 제외한 나머지 극점들이다.
(영점이 있으면 영점에서의 각도를 더해 주지만, 이 문제에는 영점이 없다.)

NoteBase

계산 과정

극점 $s_1 = 0$에 대한 기여:
$s_p - s_1 = (-2 - j2) - 0 = -2 - j2$
벡터가 3사분면에 위치하므로 $\angle(-2 - j2) = 180° + \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = 180° + 45° = 225°$

켤레 극점 $s_2 = -2 + j2$에 대한 기여:
$s_p - s_2 = (-2 - j2) - (-2 + j2) = -j4$
$\angle(-j4) = -90°$ (즉 270°)

각도 합산:
$\sum \angle = 225° + 270° = 495°$

출발각:
$\phi_{dep} = 180° - 495° = -315°$
$-315° + 360° = 45°$

선지 판단

① -135°: 각도 합산 오류(예: 225°+90°=315° → 180°-315°=-135°). 켤레 극점 기여를 90°로 잘못 계산한 결과다. 틀림.
② -45°: 계산 경로가 맞지 않는다. 틀림.
③ 45°: 출발각 공식을 정확히 적용하면 $-315° \equiv 45°$가 된다. 옳음.
④ 135°: 극점 기여 각도를 부호 반대로 적용하거나 합산 오류에서 나온 값이다. 틀림.

오답 포인트

①번(-135°)이 가장 빈번한 오답이다. 켤레 극점 $s_2 = -2 + j2$에서 s_p로의 벡터는 순수 허수 $-j4$이므로 각도가 -90°(=270°)인데, 이를 +90°로 오판하면 합계가 225°+90°=315°가 되어 180°-315°=-135°가 나온다. 벡터의 방향(아래 방향 = -90°)을 정확히 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

복소 극점의 출발각 문제가 나오면: ① 출발 극점을 제외한 나머지 극점 목록을 쓴다. ② 각 극점에서 출발 극점으로의 벡터($s_p - p_k$)를 구한다. ③ 벡터가 속한 사분면으로 각도를 정확히 계산한다(3사분면=180°+예각, 음의 허수축=-90°). ④ 합산 후 180°에서 빼고, 결과를 (-180°, 180°] 범위로 환원한다.

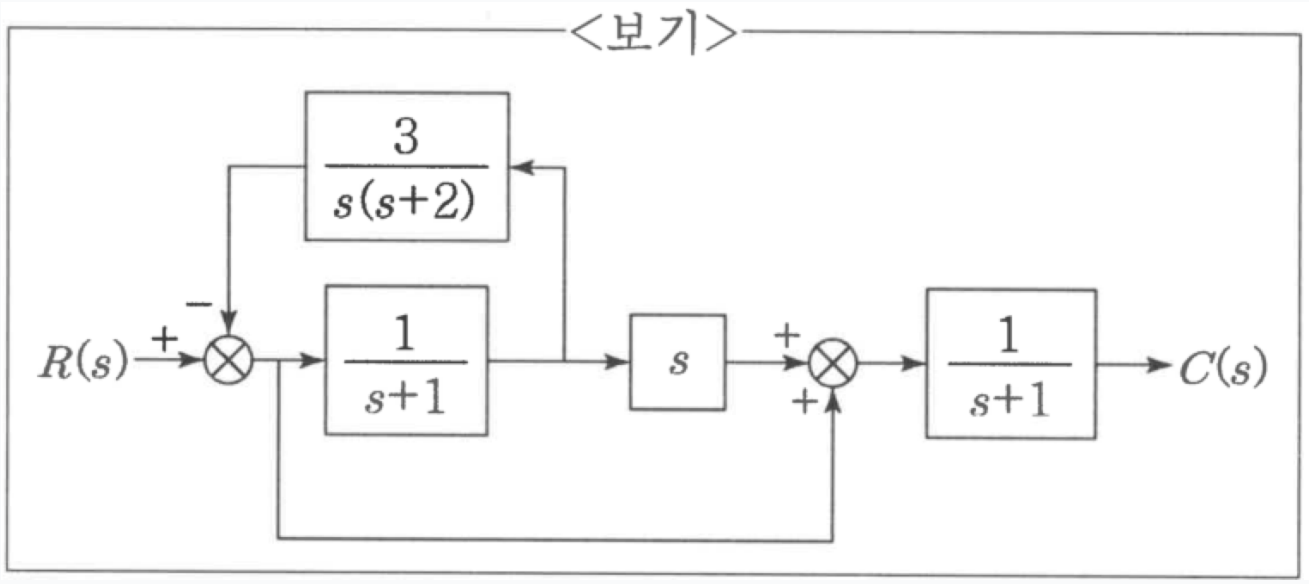
암기 포인트

출발각 공식: _dep = 180° - Σ (극점 기여) + Σ (영점 기여)
이 문제의 핵심 수치: 극점 $s = 0$ 기여 225°, 켤레 극점 기여 270°(-90°), 합 495°, 출발각 45°.

NoteBase

문 6. <보기>와 같은 블록선도를 갖는 시스템의 전달함수 $C(s)/R(s)$의 특성방정식은?

<보기>



① $s^3 + 5s^2 + 7s + 3 = 0$

② $s^3 + 5s^2 + 7s + 5 = 0$

③ $s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 3 = 0$

④ $s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 5s + 3 = 0$

정답 4번

출제 포인트

피드백 블록선도에서 신호흐름 방정식을 세워 전달함수 C(s)/R(s)를 구한 뒤, 특성방정식(분모=0)을 확인하는 문제다. 피드백 경로가 어느 노드에서 분기되고 어느 가산점으로 들어가는지를 정확히 읽어야 한다.

조건 정리

블록선도 구성 요소: 가산점 Σ_1(왼쪽, R(+) 입력, 위쪽 신호 (−) 입력), 블록 G_1=1/(s+1), 블록 G_2=s, 가산점 Σ_2(오른쪽, 단일 양(+)입력), 블록 G_3=1/(s+1), 출력 C(s). 피드백 블록: 3/[s(s+2)]. 피드백 경로: G_1 출력 노드 V에서 분기 → 3/[s(s+2)] 통과 → Σ_1의 위쪽(−)으로 귀환.

사용할 공식

신호흐름 방정식을 직접 연립하여 C/R을 구한다. 특성방정식 = 전달함수 C(s)/R(s) 분모 = 0.

NoteBase

계산 과정

① 노드 정의: E=Σ_1 출력, V=G_1 출력, Y=G_2 출력, C=G_3 출력.

② 각 방정식:

$V = \frac{E}{s+1}$

$Y = sV = \frac{sE}{s+1}$

$C = \frac{Y}{s+1} = \frac{sE}{(s+1)^2}$

피드백: $\frac{3}{s(s+2)} \cdot V = \frac{3E}{s(s+1)(s+2)}$

$E = R - \frac{3E}{s(s+1)(s+2)}$

③ E 정리:

$E\left[1 + \frac{3}{s(s+1)(s+2)}\right] = R$

$E \cdot \frac{s(s+1)(s+2)+3}{s(s+1)(s+2)} = R$

$s(s+1)(s+2)+3 = s^3 + 3s^2 + 2s + 3$

④ 전달함수:

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{sE/(s+1)^2}{R} = \frac{s^2(s+2)}{(s+1)(s^3+3s^2+2s+3)}$

분모 전개:

$(s+1)(s^3+3s^2+2s+3)$

$= s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 3s + s^3 + 3s^2 + 2s + 3$

$= s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 5s + 3$

⑤ 특성방정식: $s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 5s + 3 = 0$

선지 판단

①$s^3+5s^2+7\,s+3=0$ → 3차, 분모가 맞지 않음. 오답.

②$s^3+5s^2+7\,s+5=0$ → 3차, 분모가 맞지 않음. 오답.

③$s^4+4s^3+5s^2+2\,s+3=0$ → 4차이나 s 계수가 2로 다름. 오답.

④$s^4+4s^3+5s^2+5\,s+3=0$ → 위 계산과 일치. 정답.

NoteBase

오답 포인트

①②는 3차 특성방정식으로, 외부 단위 피드백 C→Σ_1을 추가로 잘못 설정했을 때 나오는 결과다. ③은 피드백 분기점을 Y(s블록 출력)로 착각하거나 부호 오류가 있을 때 나온다. 핵심 오류는 3/[s(s+2)] 블록의 입력 노드를 C(s)나 Y로 잘못 읽는 것이다. 이 블록의 입력은 G_1=1/(s+1) 출력 V(s)이므로 피드백 신호는 3 V/[s(s+2)]=3E/[s(s+1)(s+2)]다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 문제는 ① 피드백 화살표의 입력·출력 노드를 정확히 특정하고, ② 가산점마다 방정식을 세우고, ③ 변수를 순서대로 소거해 E→C를 구한 뒤, ④ C/R 분모를 0으로 놓아 특성방정식을 얻는다. 특성방정식의 차수가 4차면 블록 요소 극점의 합과 일치하는지 검토한다. 이 문제의 극점: 1/(s+1) 두 개(s=−1 중복), 3/[s(s+2)](s=0, s=−2) → 4극 → 4차 특성방정식이 맞다.

암기 포인트

블록선도 특성방정식 차수 = 시스템 전체 극점 수. 1/(s+1)이 두 개, 3/[s(s+2)]의 분모 s(s+2)에서 두 개 → 총 4극 → 4차. 피드백 블록 3/[s(s+2)]는 s(s+2) 분모로 0과 −2에 극점을 추가한다. 특성방정식을 쓸 때 전달함수 분모 = (s+1)×[s(s+1)(s+2)+3]임을 기억하면 전개 실수를 줄일 수 있다.

NoteBase

문 7. 2차 선형 시불변 시스템의 두 개의 극점이 $-a \pm bj$일 때, 세 번째 극점을 $-c + 0j$ 위치에 추가한 3차 시스템의 응답 특성에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, 여기서 a, b, c는 양의 실수이다.)

① 세 번째 극점이 추가됨에 따라 시스템의 차수가 증가하고, 그에 따라 과도 응답의 복잡성이 증가할 수 있다.

② 3차 시스템은 안정하다.

③ $c \gg a$이면 3차 시스템의 지배극점은 $-c + 0j$이다.

④ $c \to \infty$이면 3차 시스템의 응답에서 극점 $-c + 0j$의 영향은 점점 사라진다.

정답 3번

출제 포인트

3차 시스템에서 지배극점(dominant pole)의 정의와 판별 조건을 묻는 문제다. 지배극점은 원점에 가장 가까운 극점, 즉 실부의 절댓값이 가장 작은 극점이다.

핵심 개념

지배극점: 시스템의 과도응답을 실질적으로 지배하는 극점. 원점에 가장 가까운 극점(실부 절댓값 최소)이 이에 해당한다. 멀리 있는 극점은 응답이 빠르게 감쇠해 무시할 수 있다.

안정성 조건: 모든 극점의 실부가 음수이면 안정한 시스템이다.

실부 절댓값과 응답 속도: 실부 절댓값이 클수록 해당 모드가 빠르게 소멸한다. $c \to \infty$이면 $-c$ 극점의 모드는 극도로 빠르게 감쇠해 응답에 기여하지 못한다.

선지별 해설

① (O) 세 번째 극점을 추가하면 시스템 차수가 2차→3차로 증가하고, 그에 따라 과도응답의 모드가 늘어나 복잡성이 증가할 수 있다. 옳은 설명이다.
② (O) 원래 2차 시스템 극점 실부 = $-a < 0$, 추가 극점 실부 = $-c < 0$. 모든 극점의 실부가 음수이므로 3차 시스템은 안정하다. 옳은 설명이다.
③ (X) $c \gg a$이면 $|-c| \gg |-a|$이므로 $-c + 0j$은 원점에서 멀리 있고, $-a \pm bj$가 원점에 가까운 극점이다. 따라서 지배극점은 $-c + 0j$가 아니라 $-a \pm bj$이다. 틀린 설명이다.
④ (O) $c \to \infty$이면 $-c + 0j$ 극점에 해당하는 과도응답 모드가 무한히 빠르게 감쇠하여 실질적으로 소멸한다. 따라서 그 극점의 영향은 점점 사라진다. 옳은 설명이다.

오답 포인트

③은 $c \gg a$라는 조건을 $-c$가 더 크다는 의미로 혼동하면 틀린다. c가 크다는 것은 $-c$가 원점에서 더 멀다는 뜻이므로 지배극점이 되지 못한다. 지배극점은 절댓값이 가장 '작은' 실부를 갖는 극점임을 기억해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

지배극점 문제는 반드시 '원점에 가장 가까운 극점 = 실부 절댓값이 가장 작은 극점'임을 확인한다. $c \gg a$ 조건이 주어지면 $-c$쪽이 원점에서 훨씬 멀어 지배극점이 될 수 없다.

암기 포인트

지배극점 = 실부 절댓값이 최소인 극점(원점 최근접). 나머지 극점이 지배극점보다 실부 절댓값이 5배 이상 크면 무시 가능하다는 경험칙도 함께 기억한다.

NoteBase

문 8. <보기>와 같은 전달함수로 표현되는 제어시스템의 단위 계단응답에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, ζ는 감쇠비이고, ω_n은 비감쇠 고유 진동수이다.)

<보기>

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

① $0 < \zeta < 1$인 경우, ω_n의 값과 무관하게 ζ가 증가할수록 오버슈트가 감소한다.

② $0 < \zeta < 1$인 경우, ω_n이 일정하면 ζ가 증가할수록 정착시간(settling time)이 감소한다.

③ $\zeta = 1$인 경우, ω_n이 일정하면 $\zeta > 1$인 경우에 비해 상승시간(rise time)이 더 길다.

④ $\zeta > 1$인 경우, 오버슈트가 발생하지 않는다.

정답 3번

출제 포인트

2차 표준형 제어시스템의 단위계단응답 특성(오버슈트, 정착시간, 상승시간)과 감쇠비 ζ의 관계를 묻는 문항이다. 전달함수 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 에서 ζ 값에 따른 응답 특성 변화를 정확히 구분해야 한다.

조건 정리

ζ: 감쇠비, ωn: 비감쇠 고유진동수. $0 < \zeta < 1$: 부족제동(underdamped), $\zeta = 1$: 임계제동(critically damped), $\zeta > 1$: 과제동(overdamped).

사용할 공식

오버슈트: $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$ $(0 < \zeta < 1)$
정착시간(2% 기준): $T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$ (부족제동 근사)
상승시간: ζ가 클수록(응답이 느릴수록) 상승시간 증가.

선지 판단

① [옳음] 오버슈트 공식 $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$은 ωn과 무관하고 ζ만의 함수이다. $0 < \zeta < 1$ 구간에서 ζ가 증가할수록 지수 값이 감소하므로 오버슈트는 감소한다. 옳은 설명이다.
② [옳음] 정착시간 근사식 $T_s \approx 4/(\zeta\omega_n)$에서 ωn이 일정하면 ζ가 클수록 $\zeta\omega_n$이 커져 Ts가 줄어든다. 옳은 설명이다.
③ [틀림] $\zeta = 1$(임계제동)은 $\zeta > 1$(과제동)보다 응답이 빠르고 상승시간이 짧다. $\zeta > 1$로 갈수록 시스템이 더 느려져 상승시간이 길어지므로, "$\zeta = 1$이 $\zeta > 1$보다 상승시간이 더 길다"는 거짓이다. 올바른 표현: $\zeta = 1$인 경우 $\zeta > 1$인 경우에 비해 상승시간이 더 짧다.
④ [옳음] $\zeta > 1$(과제동)이면 두 극점이 모두 실수 음수 값으로 응답이 지수 감쇠 형태가 되어 진동이 없으므로 오버슈트가 발생하지 않는다. 옳은 설명이다.

NoteBase

오답 포인트

③에서 임계제동과 과제동의 상승시간을 비교할 때 방향을 반대로 생각하기 쉽다. ζ가 클수록 시스템이 '더 느리게' 응답하므로 상승시간은 길어진다. ζ = 1(임계제동)이 ζ > 1(과제동)보다 더 빠르게 목표값에 접근하므로 상승시간이 짧다.

다시 나오면 이렇게 판단

2차 시스템 특성량과 ζ의 관계를 비교하는 선지가 나오면: 오버슈트는 ζ만의 함수(ωn 무관), 정착시간은 $4/(\zeta\omega_n)$ → ζ↑ 이면 감소, 상승시간은 ζ↑ 이면 증가(응답이 느려짐). ζ = 1은 오버슈트 없는 것 중 가장 빠른 응답이므로 ζ > 1보다 상승시간이 짧다는 점을 기억한다.

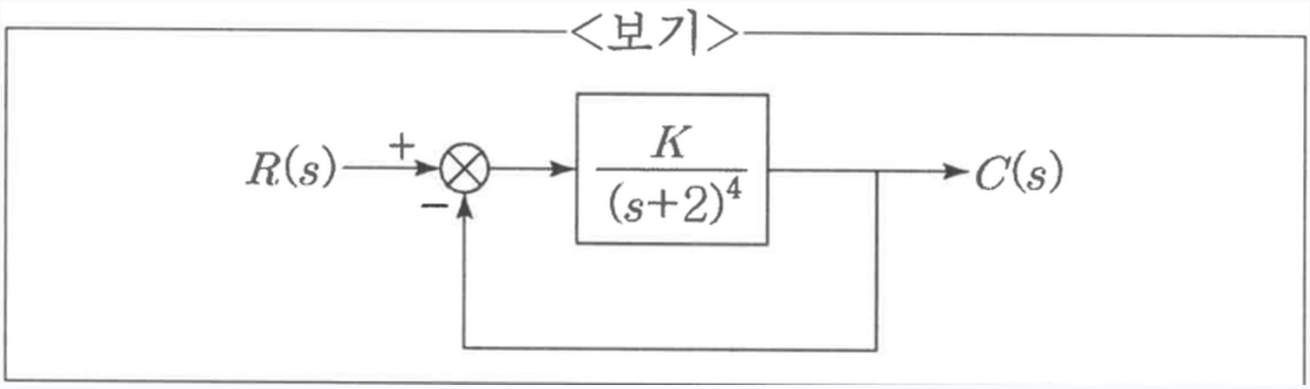
암기 포인트

ζ↑ → 오버슈트↓, 상승시간↑, 정착시간(ωn고정)↓. 임계제동(ζ=1)은 오버슈트 없는 응답 중 가장 빠르다. 과제동(ζ>1)은 오버슈트 없고 임계제동보다 느리다.

NoteBase

문 9. <보기>의 시스템의 위상여유가 0°가 되도록 하는 K의 값은?

<보기>



① 8

② 16

③ 32

④ 64

정답 4번

출제 포인트

위상여유(Phase Margin)가 0°가 되는 조건을 이용해 이득 K를 구한다. 위상여유 0°는 이득교차 주파수에서 개루프 위상이 정확히 -180°임을 뜻하므로, 위상 조건으로 이득교차 주파수를 먼저 구한 뒤 이득 조건으로 K를 결정한다.

조건 정리

개루프 전달함수: $G(s) = \frac{K}{(s+2)^4}$
위상여유 0° ☒ 이득교차 주파수 ω_g에서 $\angle G(j\omega_g) = -180^\circ$ 이고 $|G(j\omega_g)| = 1$.

사용할 공식

위상 조건: $\angle G(j\omega_g) = -4 \cdot \arctan\left(\frac{\omega_g}{2}\right) = -180^\circ$
이득 조건: $|G(j\omega_g)| = \frac{K}{(\omega_g^2+4)^2} = 1$

NoteBase

계산 과정

[위상 조건으로 ω_g 결정]
$-4 \cdot \arctan\left(\frac{\omega_g}{2}\right) = -180°$
$\arctan\left(\frac{\omega_g}{2}\right) = 45°$
(_g)/(2) = 45° = 1 _g = 2 rad/s

[이득 조건으로 K 결정]
$|j\omega_g + 2| = \sqrt{\omega_g^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$
$(2\sqrt{2})^4 = (2\sqrt{2})^2 \times (2\sqrt{2})^2 = 8 \times 8 = 64$
$K = 64$

선지 판단

① 8 — K=8이면 $|G(j2)| = 8/64 = 0.125 < 1$이므로 이득교차 주파수가 2 rad/s보다 낮아 위상여유 0°가 되지 않는다. 틀림.
② 16 — K=16이면 $|G(j2)| = 16/64 = 0.25 < 1$. 위상여유 0°가 안 된다. 틀림.
③ 32 — K=32이면 $|G(j2)| = 32/64 = 0.5 < 1$. 역시 위상여유 0°가 안 된다. 틀림.
④ 64 — K=64이면 $|G(j2)| = 64/64 = 1$이고 이때 위상 = -180°이므로 위상여유 = 0°. 맞음.

오답 포인트

①②③을 선택하면 이득 조건 $|G(j\omega_g)| = 1$을 만족하는 ω_g를 따로 구하지 않고 ω_g=2를 그대로 쓴 뒤 K 계산을 절반·4분의 1 등으로 잘못 끊은 경우가 많다. $(2\sqrt{2})^4 = 64$ 암산이 틀려 32나 16으로 답하는 실수도 흔하다.

다시 나오면 이렇게 판단

위상여유 0° 문제는 두 단계로 나눈다. 1단계: 위상 조건(-180°)으로 ω_g를 구한다. 2단계: 그 ω_g에서 이득 조건(크기=1)으로 K를 구한다. 극점이 (s+a)^n 형태이면 위상 한 극점당 arctan(ω/a)씩 쌓인다는 점을 기억한다.

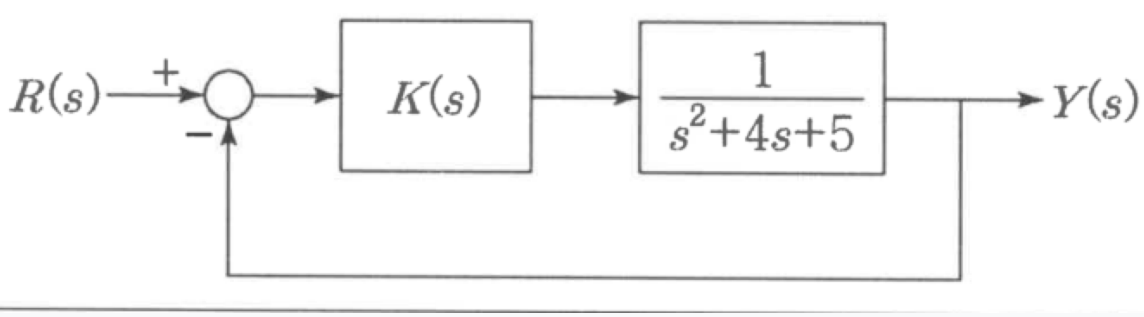
암기 포인트

$G(s) = \frac{K}{(s+2)^4}$에서 위상여유 0°가 되는 K=64.
핵심 수치: $\omega_g = 2$ rad/s, $|j2 + 2| = 2\sqrt{2}$, $(2\sqrt{2})^4 = 64$.

NoteBase

문 10. <보기>와 같은 제어시스템의 단위계단응답에 대한 정상상태 오차를 제거하기 위해 가장 옳은 $K(s)$는?

<보기>



① $K(s) = 20$

② $K(s) = 1 + 20s$

③ $K(s) = 20 + s$

④ $K(s) = 1 + \frac{1}{s}$

정답 4번

출제 포인트

단위 음피드백 시스템에서 단위계단 입력에 대한 정상상태 오차를 0으로 만들기 위해 필요한 제어기 구조를 판단하는 문제다. 핵심은 개루프 전달함수에 적분기($1/s$ 항)가 포함되어야 한다는 조건이다.

조건 정리

플랜트: $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+5}$, 단위 음피드백. 입력: 단위계단 $R(s) = 1/s$. 정상상태 오차 공식(최종값 정리): $e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\cdot R(s)}{1+K(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+K(s)G(s)}$. 오차를 0으로 만들려면 $\lim_{s\to 0} K(s)G(s) = \infty$ 이어야 한다.

사용할 공식

단위계단 정상상태 오차: $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$, 여기서 위치상수 $K_p = \lim_{s\to 0} K(s)G(s)$. $e_{ss} = 0$이 되려면 $K_p = \infty$ 이어야 하므로, 개루프 전달함수 $K(s)G(s)$가 $s = 0$에서 극점을 가져야 한다(즉 $K(s)$가 $1/s$ 항을 포함해야 한다).

계산 과정

① $K(s) = 20$: $\lim_{s\to 0} 20\cdot\frac{1}{5} = 4$, $e_{ss} = \frac{1}{5} = 0.2$. 오차 남음.

② $K(s) = 1 + 20s$: $\lim_{s\to 0} (1+0)\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$, $e_{ss} = \frac{5}{6}$. 오차 남음.

③ $K(s) = 20 + s$: $\lim_{s\to 0} 20\cdot\frac{1}{5} = 4$, $e_{ss} = \frac{1}{5}$. 오차 남음.

④ $K(s) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}$: $s \to 0$일 때 $\frac{1}{s} \to \infty$이므로 $K(s)G(s) \to \infty$, $e_{ss} = 0$. 오차 제거 성공.

NoteBase

선지 판단

① K(s)=20 — X. 비례 제어기(P제어). 개루프에 적분기 없음. $K_p = 4$이므로 $e_{ss} = 0.2$로 오차가 남는다.
② K(s)=1+20 s — X. PD 제어기. 미분 항이 추가되어도 $s \to 0$에서 미분 항은 0이 된다. $K_p = 1/5$이므로 오차가 더 크다.
③ K(s)=20+s — X. P+D 형태. ②와 동일한 이유로 $s \to 0$에서 미분 항 소멸, $K_p = 4$, $e_{ss} = 0.2$.
④ K(s)=1+1/s — O. PI 제어기. $1/s$ 항이 $s \to 0$에서 무한대가 되어 $K_p = \infty$, $e_{ss} = 0$. 계단 입력 정상상태 오차를 완전히 제거한다.

오답 포인트

①③: 이득을 크게 잡으면(K=20) 오차가 줄어들지만 0이 되지는 않는다. 0으로 만들려면 반드시 적분기가 필요하다.
②: PD 제어기는 과도응답(진동·오버슈트)을 개선하지만 계단 입력 정상상태 오차 제거 능력은 없다. 오히려 비례이득이 1로 줄어 오차가 더 크다.
④의 함정: PI 제어기는 1/s 적분기를 포함해 정상상태 오차를 0으로 만들어 주지만, 시스템 차수가 올라가 안정성을 별도로 확인해야 한다는 점을 간과하기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위계단 입력 → 정상상태 오차 제거 → 개루프에 적분기(1/s) 필요 → 제어기 K(s)에 1/s 항이 있는지 확인. 단위램프 입력이면 적분기 2개가 필요하다. 발문이 '오차를 줄이기 위해'이면 이득 증가(P제어)도 후보가 되지만, '제거하기 위해(=0으로)'이면 반드시 적분기가 있어야 한다.

암기 포인트

제어기 유형과 정상상태 오차 제거 능력: P제어(비례) → 계단 오차 줄이되 제거 불가 / PD제어 → 계단 오차 제거 불가(과도 개선만) / PI제어(1+1/s) → 계단 오차 완전 제거 / PID제어(1+1/s+s) → 계단 오차 완전 제거 + 과도 개선. '오차 제거 = 적분기 포함'을 공식처럼 외워 둔다.

NoteBase

문 11. 방정식 $s^5 + 6s^3 + 5s^2 + 8s + 20 = 0$의 근에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

① 모든 근이 좌반평면에 존재한다.

② 좌반평면에 3개의 근이 존재한다.

③ 허수축에 2개의 근이 존재한다.

④ 실수축에 2개의 근이 존재한다.

정답 3번

출제 포인트

5차 특성방정식을 인수분해하여 근의 위치(좌반평면·허수축·우반평면)를 파악하는 문제다. s^4 계수가 0인 특이 Routh 배열 상황을 인수분해로 우회할 수 있음을 묻는다.

조건 정리

특성방정식: $s^5 + 6s^3 + 5s^2 + 8s + 20 = 0$. s^4 항의 계수가 0이므로 Routh 배열에서 특이 행이 발생한다. 직접 인수분해를 먼저 시도한다.

사용할 공식

인수분해: 공통인수 묶기. 나머지 3차 인수의 안정성은 Routh-Hurwitz 판별(ε 치환법). 우반평면 근의 수 = Routh 첫 열의 부호 변화 횟수.

NoteBase

계산 과정

① 인수분해

$s^5 + 6s^3 + 5s^2 + 8s + 20$

$= s(s^4 + 6s^2 + 8) + 5(s^2 + 4)$

$= s(s^2 + 2)(s^2 + 4) + 5(s^2 + 4)$

$= (s^2 + 4)(s^3 + 2s + 5)$

② 인수 $s^2 + 4 = 0 \rightarrow s = \pm 2j$ (허수축 위 2개의 근)

③ 인수 $s^3 + 2s + 5 = 0$에 Routh 배열 적용

s^2 계수가 0이므로 ε 치환:

s^3: 1, 2

s^2: ε, 5

s^1: $\frac{2\varepsilon - 5}{\varepsilon} \approx -\frac{5}{\varepsilon}$ ($\varepsilon \rightarrow 0^+$이면 음수)

s^0: 5

첫 열 부호: $1,\ \varepsilon(+),\ -5/\varepsilon(-),\ 5(+) \rightarrow$ 부호 변화 2회 → 우반평면에 2개의 근, 좌반평면에 1개의 근

④ 전체 근 분포 (총 5개)

허수축: 2개 ($\pm 2j$), 우반평면: 2개, 좌반평면: 1개

선지 판단

① 모든 근이 좌반평면에 존재한다. → ☒ 허수축에 2개, 우반평면에 2개가 있으므로 틀렸다.

② 좌반평면에 3개의 근이 존재한다. → ☒ 좌반평면의 근은 1개뿐이다.

③ 허수축에 2개의 근이 존재한다. → ✓ $s^2 + 4 = 0$의 근 $s = \pm 2j$가 정확히 허수축 위에 있다.

④ 실수축에 2개의 근이 존재한다. → ☒ 5개의 근 중 실수근은 없다. 실수근이 존재하려면 실계수 다항식에서 홀수 차수 실인수가 있어야 하는데, 여기서 3차 인수 $s^3 + 2s + 5$의 실수근을 확인하면 $s = 0$일 때 5>0, $s = -1$일 때 2>0, $s = -2$일 때 $-8 - 4 + 5 = -7 < 0$이므로 -2와 -1 사이에 실수근 1개가 있다. 그러나 이 근은 좌반평면의 실수축 위에 있으며, 선지가 묻는 전체 실수축 근은 1개이지 2개가 아니다.

오답 포인트

① 번의 함정: 계수가 모두 양수이면 좌반평면에만 근이 있다고 착각하기 쉽다. 그러나 s^4 계수가 0이므로 Routh 조건 위반—계수가 모두 양수여도 빠진 항이 있으면 불안정 근이 발생할 수 있다.

④ 번의 함정: $s^3 + 2s + 5 = 0$에 실수근이 1개 있다는 사실을 알더라도, 실수축 근의 총수는 1개이지 2개가 아니다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

특성방정식에서 s^4 항(또는 중간 차수 항)이 빠져 있으면 즉시 인수분해를 시도한다. $s^2 + \omega^2$ 형태의 인수가 나오면 그 근은 허수축 위($\pm j\omega$)에 정확히 놓인다. 남은 인수에 Routh 배열을 적용해 좌/우반평면 근 개수를 센다. 이 구조의 시스템은 marginal stability(경계 안정) 상태다.

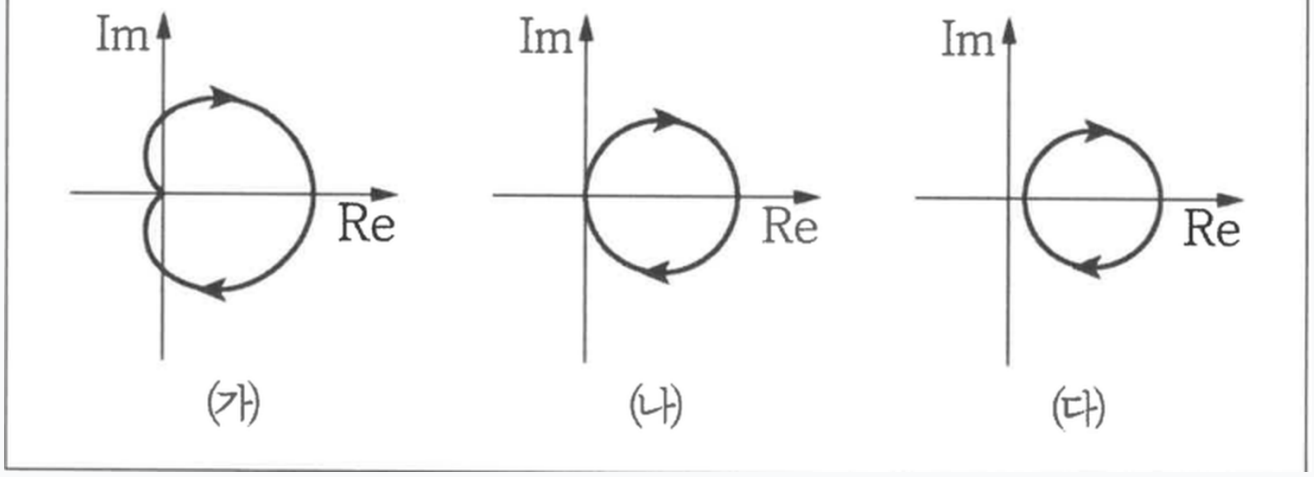
암기 포인트

$s^2 + \omega^2 = 0$의 근 = $\pm j\omega$ (허수축). 계수에 빈 차수가 있으면 반드시 인수분해 또는 ε 치환 사용. Routh 첫 열 부호 변화 횟수 = 우반평면 근의 수.

NoteBase

문 12. <보기>에 3개의 나이퀴스트(Nyquist) 선도가 주어져 있다. 각 선도의 전달함수를 가장 바르게 나열한 것은?

<보기>



① (가): $\frac{1}{s^2+2s+1}$, (나): $\frac{1}{s+1}$, (다): $\frac{s+1}{s+10}$
② (가): $\frac{1}{s+1}$, (나): $\frac{s+1}{s+10}$, (다): $\frac{1}{s^2+2s+1}$
③ (가): $\frac{s+1}{s+10}$, (나): $\frac{1}{s^2+2s+1}$, (다): $\frac{1}{s+1}$
④ (가): $\frac{1}{s^2+2s+1}$, (나): $\frac{s+1}{s+10}$, (다): $\frac{1}{s+1}$

정답 1번

출제 포인트

나이퀴스트 선도(Nyquist plot)의 모양을 보고 해당하는 전달함수를 역추론하는 문제다. 핵심은 $\omega = 0$일 때의 시작점(DC 이득), $\omega \to \infty$일 때의 수렴점, 그리고 위상의 총 변화량(-90° per pole)을 이용해 궤적 모양을 예측하는 것이다.

선지 판단

① (가) $\frac{1}{s^2+2s+1}$, (나) $\frac{1}{s+1}$, (다) $\frac{s+1}{s+10}$ — 각 선도와 정확히 일치한다. 정답.
② (가) $\frac{1}{s+1}$ → (가)는 2차 시스템 모양인데 1차 전달함수를 배정했으므로 틀리다.
③ (가) $\frac{s+1}{s+10}$ → (가)에 DC 이득 0.1의 영점 포함 전달함수를 배정했으므로 틀리다.
④ (나) $\frac{s+1}{s+10}$, (다) $\frac{1}{s+1}$ → (나)와 (다)의 배정이 서로 바뀌었으므로 틀리다.

NoteBase

오답 포인트

②④는 (가)~(다) 중 일부 배정을 서로 바꿔 놓아 혼동을 유발한다. 특히 $\frac{1}{s+1}$과 $\frac{s+1}{s+10}$을 혼동하기 쉬운데, 두 함수 모두 DC 이득이 작고 우반면에 위치하지만 방향이 반대다. $\frac{1}{s+1}$은 DC 이득 1에서 시작해 0으로 수렴(반원), $\frac{s+1}{s+10}$은 DC 이득 0.1에서 시작해 1로 수렴(소원)한다.

다시 나오면 이렇게 판단

나이퀴스트 선도 → 전달함수 역추론 3단계: 1단계 $\omega = 0$ 대입해 DC 이득(시작점)을 구한다. 2단계 $\omega \to \infty$ 대입해 수렴점(끝점)을 구한다. 3단계 극점 개수만큼 위상이 -90°씩 회전하므로 총 위상변화로 어느 방향에서 수렴하는지 확인한다. 이 세 가지를 맞추면 선도 모양을 특정할 수 있다.

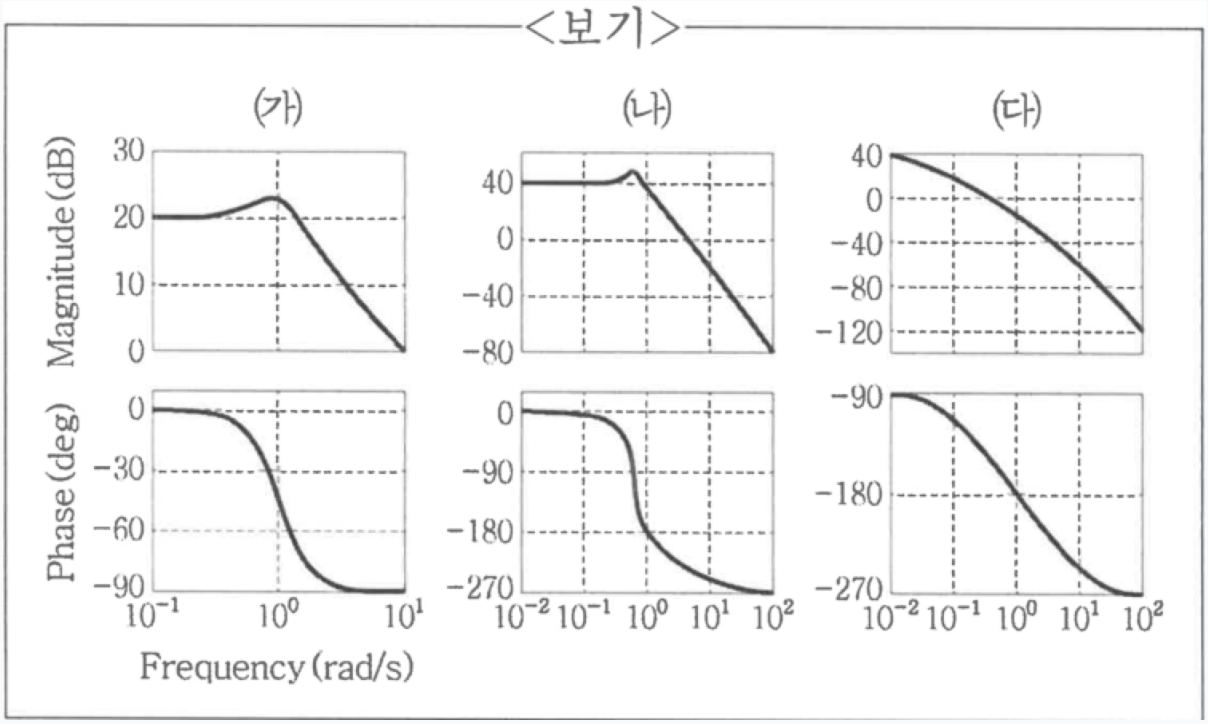
암기 포인트

$\frac{1}{(s+1)^2}$: DC 이득 1, 극점 2개(위상 총 -180°), 음의 실축 방향 수렴 → 허수축 왼쪽 원. $\frac{1}{s+1}$: DC 이득 1, 극점 1개(위상 -90°), 허수축 방향 수렴 → 허수축에 접하는 반원. $\frac{s+1}{s+10}$: DC 이득 0.1(=1/10), 영점 1개·극점 1개(위상 순증가 후 복귀 0°), 크기 1로 수렴 → 우반면 소형 원.

NoteBase

문 13. <보기>와 같이 개루프 전달함수 $P(s)$의 보드선도가 3개 주어져 있다. 3가지 모두에 대하여 $P(s)$는 열린 우반평면에 극점이 존재하지 않을 때, $P(s)$의 단위 피드백제어시스템에서 단위 계단입력에 대한 정상상태 오차 값을 가장 바르게 나열한 것은?

<보기>



① (가): $\frac{1}{11}$, (나): $\frac{1}{101}$, (다): $\frac{1}{101}$

② (가): $\frac{1}{11}$, (나): $\frac{1}{101}$, (다): 0

③ (가): $\frac{1}{11}$, (나): ∞, (다): 0

④ (가): $\frac{1}{21}$, (나): $\frac{1}{41}$, (다): $\frac{1}{41}$

정답 3번

출제 포인트

보드선도(Bode plot) 3개에서 각각 시스템 형(Type)·저주파 이득·폐루프 안정성을 판별하고 단위 계단입력에 대한 정상상태 오차를 구하는 문제이다. (가)는 Type 0 안정 시스템의 위치 오차 상수 계산, (나)는 높은 DC 이득으로 인한 폐루프 불안정 판별, (다)는 Type 1 시스템의 계단 정상상태 오차가 0임을 각각 묻는다.

NoteBase

자료 읽는 순서

① 저주파 극한(ω→0)에서 위상이 0°로 시작하면 Type 0, −90°로 시작하면 Type 1으로 판별한다. 크기선도의 저주파 기울기로도 교차 확인한다(0 dB/dec → Type 0, −20 dB/dec → Type 1).
② Type 0이면 저주파 크기 A [dB]에서 위치 오차 상수를 구한다: $K_p = 10^{A/20}$.
③ 위상이 −180°를 통과하는지 확인한다. 통과한다면 그 주파수(위상교차주파수)에서 크기가 0 dB 이상인지 본다. 0 dB 이상이면 이득여유가 음수가 되어 폐루프가 불안정하다.
④ 안정한 Type 0: $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$. 안정한 Type 1 이상: $e_{ss} = 0$. 폐루프 불안정: $e_{ss} = \infty$.

선지별 해설

① (가) 1/11, (나) 1/101, (다) 1/101 — (나)의 폐루프 불안정성과 (다)의 Type 1 특성을 모두 간과하고 세 시스템을 안정 Type 0으로 처리하였다. X

② (가) 1/11, (나) 1/101, (다) 0 — (다)를 Type 1으로 바르게 판별하였으나, (나)가 안정하다고 잘못 가정하여 $e_{ss} = \frac{1}{1+100} = \frac{1}{101}$로 계산하였다. X

③ (가) 1/11, (나) ∞, (다) 0 — 세 시스템 모두 정확하게 판별하였다. (가): 저주파 크기 20 dB → $K_p = 10$, 위상 최대 −90°로 −180° 미통과, 폐루프 안정, $e_{ss} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$. (나): 저주파 크기 40 dB → $K_p = 100$, 위상이 −180°를 통과하는 시점에 크기가 0 dB 이상이므로 폐루프 불안정, $e_{ss} = \infty$. (다): 저주파 위상 −90° → Type 1이다. 위상이 −180°를 통과하지만 그 위상교차주파수에서 이미 크기가 0 dB 미만(이득여유 > 0 dB)이므로 폐루프는 안정하다. −180° 통과 시점의 크기가 0 dB 이상인 (나)는 폐루프 불안정인 반면, 그 시점의 크기가 0 dB 아래인 (다)는 폐루프 안정이라는 점이 두 경우를 가른다. Type 1 안정 시스템이므로 $e_{ss} = 0$. O

④ (가) 1/21, (나) 1/41, (다) 1/41 — (가)의 저주파 크기를 약 26 dB($K_p \approx 20$)로 오독하였으며 (다)의 Type 1 특성도 반영하지 못하였다. X

오답 포인트

개루프 P(s)가 안정(RHP 극점 없음)이더라도 단위 피드백 폐루프는 불안정할 수 있다. (나)는 위상이 0°에서 −270°로 내려가므로 중간에 −180°를 반드시 통과한다. DC 이득이 40 dB(= 이득 100)로 매우 높기 때문에 위상이 −180°에 도달하는 시점에 크기가 아직 0 dB를 초과하여 이득여유가 음수가 되고 폐루프가 불안정하다. 이 경우 정상상태가 존재하지 않으므로 $e_{ss} = \infty$이다. 반면 (가)는 위상이 −90°까지만 감소하여 −180°를 통과하지 않으므로 어떤 이득에서도 안정하다.

다시 나오면 이렇게 판단

저주파 위상으로 Type을 확인한 뒤, 위상이 −180°를 통과하는지 본다. 통과한다면 그 주파수에서 크기가 0 dB 이상인지 확인한다. 0 dB 이상이면 폐루프 불안정($e_{ss} = \infty$), 0 dB 미만이면 안정이다. 안정이 확인된 뒤 Type 0이면 저주파 dB 값으로 K_p를 계산해 $\frac{1}{1+K_p}$를 구하고, Type 1 이상이면 $e_{ss} = 0$으로 결론 낸다.

NoteBase

암기 포인트

단위 피드백 + 단위 계단입력 정상상태 오차: Type 0 안정 → $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$(K_p = 저주파 이득, 20 dB → $K_p = 10$, 40 dB → $K_p = 100$); Type 1 이상 안정 → $e_{ss} = 0$; 폐루프 불안정 → $e_{ss} = \infty$.
보드선도 Type 읽기: 저주파 위상 시작값 = $-90^\circ \times$ Type.
폐루프 불안정 조건: 위상교차주파수에서 크기 ≥ 0 dB(이득여유 < 0 dB).

NoteBase

문 14. 전달함수가 $G_c(s) = K_P + K_D s$로 주어지는 PD 제어기에 대해 보드 선도의 특징으로 가장 옳은 것은?

① 저주파수 영역에서는 이득이 0에 가깝고, 고주파수 영역에서는 일정한 이득을 갖는다.

② 저주파수 영역에서는 일정한 이득을 갖고, 주파수가 증가함에 따라 이득이 계속 증가하며 위상은 0 °에서 +90 °로 변한다.

③ 주파수가 증가함에 따라 저주파수 영역에서는 이득이 감소하고, 고주파수 영역에서는 이득이 증가한다.

④ 주파수에 관계없이 이득과 위상이 일정하다.

정답 2번

출제 포인트

PD 제어기 $G_c(s) = K_P + K_D s$의 보드 선도(이득 특성과 위상 특성)를 주파수 영역에서 정확히 분석할 수 있는지를 묻는 문제이다.

조건 정리

전달함수: $G_c(s) = K_P + K_D s$. 주파수 응답은 $s = j\omega$를 대입하여 $G_c(j\omega) = K_P + K_D j\omega$로 구한다. $K_P > 0$, $K_D > 0$으로 가정한다.

사용할 공식

이득(크기): $|G_c(j\omega)| = \sqrt{K_P^2 + (K_D\omega)^2}$
위상: $\angle G_c(j\omega) = \arctan\left(\frac{K_D\omega}{K_P}\right)$

계산 과정

저주파 영역($\omega \to 0$): 이득 $\to \sqrt{K_P^2} = K_P \to$ 일정한 값(0에 가깝지 않다). 위상 $\to \arctan(0) = 0°$.

고주파 영역($\omega \to \infty$): 이득 $\to K_D\omega \to \omega$에 비례하여 계속 증가(보드 선도에서 기울기 +20 dB/decade). 위상 $\to \arctan(\infty) = +90°$.

따라서 PD 제어기의 보드 선도는 저주파에서 이득이 일정(K_P)하고, 주파수가 증가할수록 이득이 계속 증가하며, 위상은 0°에서 +90°로 변한다.

NoteBase

선지 판단

① X — '저주파에서 이득이 0에 가깝다'는 틀린 설명이다. 저주파 이득은 K_P(0이 아닌 상수)이며, '고주파에서 일정한 이득'이라는 것도 틀렸다. 고주파에서는 이득이 계속 증가한다. → 이득과 위상 모두 반대로 기술한 오선지.
② O — 저주파에서 일정한 이득 K_P, 주파수 증가에 따라 이득 계속 증가, 위상 0°에서 +90°로 변화 — 계산 결과와 완전히 일치한다.
③ X — '저주파에서 이득이 감소한다'는 틀린 설명이다. 저주파에서는 이득이 일정(K_P)하며 감소하지 않는다. 고주파에서 이득이 증가한다는 부분은 맞지만, 전체 설명이 오류이다.
④ X — '주파수에 관계없이 이득과 위상이 일정하다'는 순수 이득 요소($G_c = K_P$)에 해당하는 설명이다. PD 제어기는 미분항 $K_D s$가 있으므로 이득도, 위상도 주파수에 따라 변한다.

오답 포인트

①번이 가장 혼동하기 쉬운 오선지다. PI 제어기 $G_c(s) = K_P + K_I/s$는 저주파에서 이득이 매우 크고 고주파에서 이득이 K_P에 수렴하는데, 이것과 PD 제어기를 뒤바꿔 기억하면 ①을 정답으로 고르게 된다. PD는 '미분(D)'이므로 고주파일수록 강조한다는 원리를 기억하면 혼동이 없다.

다시 나오면 이렇게 판단

PD 제어기 보드 선도 문제는 $s = j\omega$를 대입해 저주파($\omega \to 0$)와 고주파($\omega \to \infty$) 극한을 직접 계산한다. 이득 크기식의 극한을 구하면 저주파=K_P(상수), 고주파=$K_D\omega$(증가). 위상식의 극한은 저주파=0°, 고주파=+90°. 이 네 값만 확인하면 보기를 바로 걸러낼 수 있다.

암기 포인트

PD 제어기 보드 선도 핵심 4가지: (1) 저주파 이득=K_P(일정), (2) 고주파 이득=$K_D\omega$(계속 증가, +20 dB/decade), (3) 저주파 위상=0°, (4) 고주파 위상=+90°. — PI와 비교: PI는 저주파 이득 증가(적분 때문에 $\omega \to 0$이면 이득 $\to \infty$)·위상 −90° ~ 0°, PD는 반대로 고주파 이득 증가·위상 0° ~ +90°.

문 15. <보기>와 같은 상태공간방정식으로 표현되는 시스템의 안정성과 가관측성에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

<보기>

x(t)=bmatrix0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 1 \ 1 & 0 & 0bmatrixx(t), y(t)=bmatrix0 & 0 & 1bmatrixx(t)

① 시스템이 안정하고 관측 가능하다.

② 시스템이 안정하고 관측 불가능하다.

③ 시스템이 불안정하고 관측 가능하다.

④ 시스템이 불안정하고 관측 불가능하다.

정답 3번

출제 포인트

상태공간방정식으로 주어진 시스템의 안정성(특성방정식의 고유값 위치)과 가관측성(관측가능성 행렬의 랭크)을 각각 판별하는 문제다.

조건 정리

시스템 행렬 A = bmatrix0&1&0\\0&0&1\\1&0&0bmatrix, 출력 행렬 C = bmatrix0&0&1bmatrix. 3차 연속시간 시스템이므로 안정 조건은 모든 고유값의 실수부 < 0, 가관측 조건은 관측가능성 행렬의 랭크 = 3.

사용할 공식

안정성: $\det(\lambda I - A) = 0$의 근(고유값)을 구해 모두 좌반평면(실수부 < 0)인지 확인.
가관측성: 관측가능성 행렬 O = bmatrixC^2bmatrix의 랭크가 상태 차원 n = 3이면 가관측.

NoteBase

계산 과정

[안정성]
특성다항식: $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 1$
→ 고유값: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = e^{\pm j2\pi/3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\lambda_1 = 1$은 실수부 = 1 > 0이므로 우반평면에 위치 → 시스템 불안정.

[가관측성]
C = bmatrix0&0&1bmatrix
CA = bmatrix0&0&1bmatrixbmatrix0&1&0\\0&0&1\\1&0&0bmatrix = bmatrix1&0&0bmatrix
CA^2 = bmatrix1&0&0bmatrixbmatrix0&1&0\\0&0&1\\1&0&0bmatrix = bmatrix0&1&0bmatrix
관측가능성 행렬: O = bmatrix0&0&1\\1&0&0\\0&1&0bmatrix
이 행렬은 표준 기저벡터의 순열 행렬로, $\det(\mathcal{O}) = \pm 1 \neq 0$ → 랭크 = 3 → 완전 가관측.

선지 판단

① 시스템이 안정하고 관측 가능하다. → X. 안정 판단이 틀림. $\lambda = 1$(우반평면)이 존재하므로 불안정.
② 시스템이 안정하고 관측 불가능하다. → X. 안정 판단과 가관측 판단 모두 틀림.
③ 시스템이 불안정하고 관측 가능하다. → O. $\lambda = 1 > 0$이므로 불안정, $\mathcal{O}$의 랭크=3이므로 가관측. 정답.
④ 시스템이 불안정하고 관측 불가능하다. → X. 불안정 판단은 맞으나 가관측 불가 판단이 틀림.

오답 포인트

① ②처럼 $\lambda^3 = 1$의 근을 단순히 '1의 세제곱근이니 크기가 1이다'고만 판단해 안정으로 착각하기 쉽다.
연속시간 시스템의 안정 기준은 고유값의 크기(이산시간)가 아니라 실수부 부호다. $\lambda = 1$은 실수부=1로 명확히 불안정.
④처럼 관측가능성 행렬 계산을 생략하고 '출력이 한 성분만이니 정보가 부족하다'고 직관으로 판단하면 오답이 된다. 실제 계산하면 $\mathcal{O}$가 순열 행렬로 full rank임을 확인할 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태방정식 $\dot{x} = Ax$의 안정성은 $\det(\lambda I - A) = 0$을 풀어 모든 근의 실수부가 음수인지 확인한다. $\lambda^3 = 1$처럼 단위근이 나오면 $\lambda = 1$이 반드시 포함되므로 즉시 불안정으로 판정한다. 가관측성은 $[C^T \ (CA)^T \ (CA^2)^T]^T$가 full rank인지 행렬식으로 판별한다.

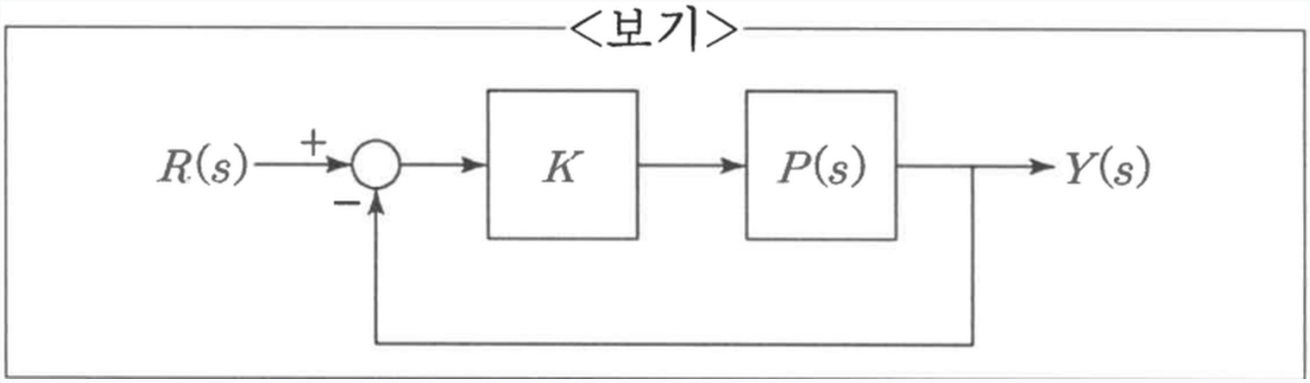
암기 포인트

연속시간 안정 기준: Re(고유값) < 0 (전부). 이산시간 안정 기준: |고유값| < 1 (전부). 혼동 주의.
가관측성 행렬: $\mathcal{O} = [C;\ CA;\ CA^2;\ \cdots;\ CA^{n-1}]$, n차 시스템이면 행 수 = n, 랭크 = n이면 가관측.
순열 행렬의 행렬식은 항상 ± 1 → 역행렬 존재 → full rank.

NoteBase

문 16. <보기>의 제어시스템에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

<보기>



① $P(s)$가 열린우반평면에 극점을 하나 가지고 있으면, K값이 충분히 커지더라도 제어시스템은 안정화될 수 없다.

② $P(s)$가 열린우반평면에 영점을 하나 가지고 있으면, K값이 충분히 커질 때 제어시스템도 열린우반평면에 극점을 하나 가진다.

③ 이득여유와 위상여유가 양수이면, 이 제어시스템은 안정하다.

④ K값을 조절하여 제어시스템의 영점을 조절할 수 있다.

정답 2번

출제 포인트

단위 음의 피드백 시스템(개루프 = K·P(s))에서 비례이득 K를 변화시킬 때 폐루프 극점의 이동(루트궤적)과 안정도의 관계, 그리고 이득·위상 여유의 적용 한계를 묻는 문제다.

핵심 개념

루트궤적 핵심 규칙

· K=0: 폐루프 극점 = 개루프 극점(출발점)

· K→∞: 폐루프 극점 → 개루프 영점(도착점)

즉, K가 충분히 커지면 폐루프 극점은 개루프 영점의 위치로 수렴한다.

이득여유(GM)·위상여유(PM) 안정 판별의 전제

· GM > 0, PM > 0 이면 안정 → 이 판별법은 최소위상(minimum-phase) 시스템에서만 보장된다.

· 비최소위상 또는 불안정 개루프를 가진 시스템에서는 GM·PM이 양수여도 불안정할 수 있다.

폐루프 영점

· 폐루프 전달함수 분자 = K·P(s) → 영점은 P(s)의 영점과 동일

· K(이득 상수)를 바꿔도 분자의 영점 위치는 변하지 않는다.

NoteBase

선지별 해설

① (X) P(s)가 우반평면에 극점을 가지더라도 K를 키워 안정화할 수 있다.
예: P(s) = 1/(s-1)이면 폐루프 극점 = -(K-1), K > 1이면 좌반평면 → 안정. 루트궤적 출발점(우반평면 극점)이 K 증가에 따라 좌반평면으로 이동하는 경우는 충분히 존재하므로 '안정화될 수 없다'는 설명은 틀렸다.

② (O) K → ∞일 때 폐루프 극점은 개루프 영점으로 수렴한다(루트궤적 도착점 규칙). P(s)가 우반평면에 영점 z_0($\mathrm{Re}(z_0) > 0$)을 가지면, K가 충분히 커질 때 폐루프 극점 하나가 z_0로 수렴하여 시스템이 우반평면 극점을 갖게 된다. 옳은 설명이다.

③ (X) 이득여유와 위상여유가 양수여도 무조건 안정은 아니다. 이 판별법은 최소위상 시스템을 전제로 하며, 비최소위상 시스템(우반평면 영점 포함)이나 불안정 개루프 시스템에는 그대로 적용할 수 없다. '이 제어시스템은 안정하다'는 일반적 단정은 틀렸다.

④ (X) 폐루프 전달함수 분자는 K·P(s)이고, K는 스칼라 이득이다. 영점은 분자 다항식의 근이므로 P(s)의 영점과 동일하며 K 값과 무관하다. K 조절로 영점을 바꿀 수 없다.

오답 포인트

①의 함정: 불안정 플랜트(우반평면 극점)는 '항상 안정화 불가'로 착각하기 쉽다. 루트궤적이 K 증가에 따라 좌반평면으로 건너올 수 있으면 안정화가 가능하다.
③의 함정: GM·PM 양수 = 안정이라는 공식을 최소위상 전제 없이 외운 경우 틀린다. '이 제어시스템'이라는 표현이 특별히 최소위상임을 보장하지 않는다.
④의 함정: K를 바꾸면 폐루프 극점 위치는 바뀌지만 영점 위치는 바뀌지 않는다. 극점과 영점을 혼동하면 틀린다.

다시 나오면 이렇게 판단

루트궤적 문제에서 'K → ∞ 폐루프 극점의 행방'을 물으면 → 개루프 영점 위치를 먼저 확인한다. 우반평면 영점이 있으면 K 대형 시 폐루프가 그 영점으로 빨려 들어가 불안정해진다.
GM·PM 양수 = 안정 판별은 '최소위상 시스템'이라는 조건이 붙었을 때만 쓸 수 있다. 조건이 없으면 반례 가능성을 의심한다.

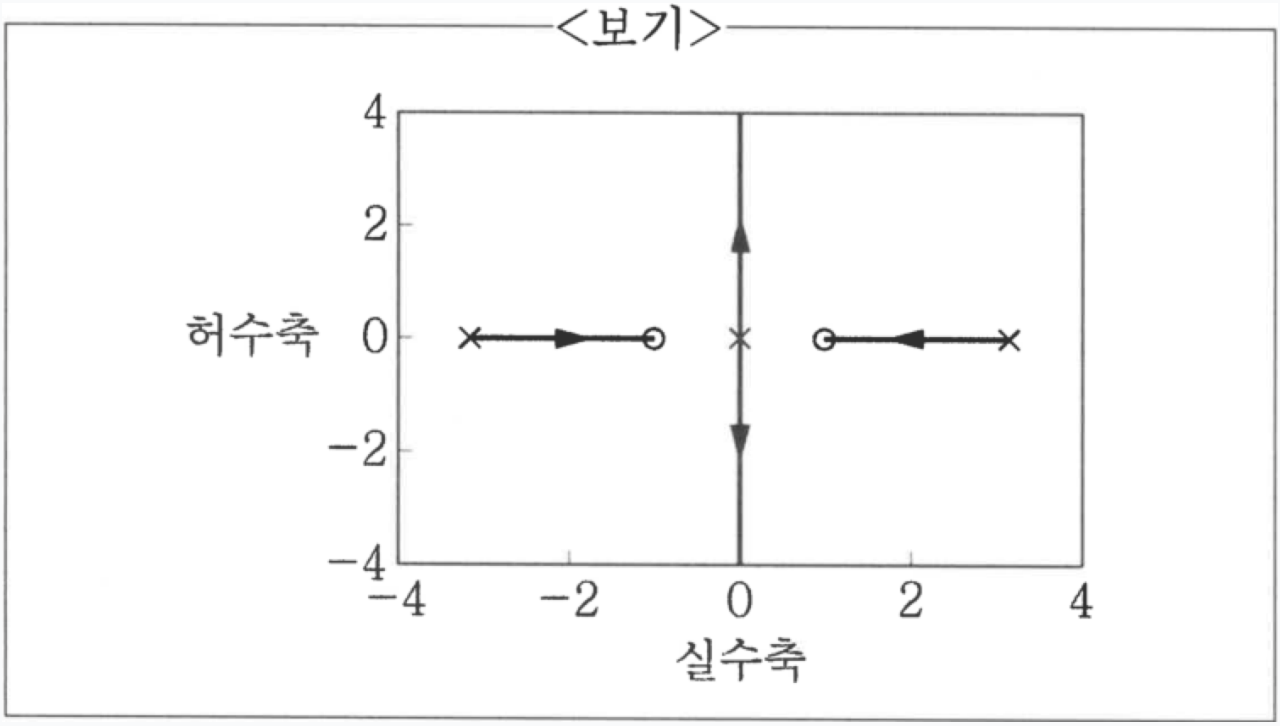
암기 포인트

루트궤적 도착점 = 개루프 영점 → K가 크면 폐루프 극점은 영점으로 수렴
우반평면 영점이 있는 P(s): 비최소위상(non-minimum phase) 플랜트 → K 대형 시 폐루프 불안정
K(비례이득)는 폐루프 극점을 움직이고, 폐루프 영점은 움직이지 못한다
GM·PM 양수 → 안정 보장은 최소위상 시스템에서만

NoteBase

문 17. <보기>에 어떤 시스템의 근궤적이 그려져 있다. 가장 올바른 설명은?

<보기>



① 이 시스템은 3차 시스템이다.

② 만약 게인을 매우 크게 하면 단순 피드백 제어기는 위 시스템을 안정화할 수 있다.

③ 이 시스템은 절대 안정화하지 못한다.

④ 만약 이 시스템이 안정화되더라도 언더슈트가 존재할 것이다.

정답 4번

출제 포인트

근궤적(root locus)에서 개루프 극점·영점의 위치를 읽어 시스템 차수, 안정성, 비최소위상 특성을 판단하는 문제다.

NoteBase

선지별 해설

① 극점이 세 개(s = -2, 0, +2)이므로 3차 시스템이라는 설명은 옳다. 하지만 ④가 더 핵심적인 특성을 짚으므로 ①은 정답이 아니다.
② s = +2 극점에서 출발한 가지는 K가 아무리 커도 우반평면 영점 s = +1로 수렴하므로, 단순 피드백(비례 게인)만으로는 그 근을 좌반평면으로 옮길 수 없다. '게인을 크게 하면 안정화할 수 있다'는 설명은 틀렸다. × → 틀린 표현: '게인을 크게 하면 안정화 가능' → 올바른 표현: 우반평면 영점으로 수렴하는 가지가 항상 우반평면에 머물러 단순 게인 증가로는 안정화 불가
③ K > 0 근궤적만으로는 우반평면 가지가 사라지지 않지만, '절대'라는 표현은 음의 게인(K < 0) 적용이나 보상기 추가 등 다른 제어 구성을 전혀 배제하는 강한 주장이다. 더욱이 선지 ④가 '안정화되더라도'라는 조건문을 사용하여 안정화 가능성을 열어두고 있으므로, ③의 '절대 안정화 불가' 주장은 과도하다. × → 틀림
④ 개루프 영점 s = +1이 우반평면에 있다. 이런 영점을 비최소위상(non-minimum phase) 영점이라 하며, 시스템이 어떤 방법으로 안정화되더라도 폐루프 전달함수에 우반평면 영점이 남아 단위 계단 응답 초기에 출력이 목표 반대 방향으로 먼저 움직이는 언더슈트(undershoot)가 반드시 나타난다. ○ → 올바름

오답 포인트

①은 사실이지만 가장 특징적인 설명이 아니므로 정답이 아니다. ②는 우반평면 영점을 간과한 함정이다. ③은 '절대'라는 단어 때문에 틀린다. 이 문제의 핵심은 우반평면 영점(s = +1)이 만들어내는 비최소위상 특성이다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적 그림에서 ○(영점)가 우반평면(실수부 > 0)에 있으면 → 비최소위상 시스템 → 언더슈트 발생 조건 즉시 체크. 극점이 우반평면에 있으면 → 개루프 불안정 → 단순 비례 게인으로 안정화 가능 여부 별도 검토.

암기 포인트

비최소위상 시스템(우반평면 영점 존재) → 계단 응답 초기에 반드시 언더슈트 발생. 우반평면 극점+우반평면 영점이 함께 있으면 해당 가지는 K 값에 무관하게 항상 우반평면에 머문다(극점과 영점 사이의 실수축 구간은 근궤적에 포함되지 않음).

NoteBase

문 18. <보기>와 같이 시스템의 상태천이행렬이 주어졌을 때, 상태공간방정식으로 가장 옳은 것은?

<보기>

bmatrix (2e^-t+e^5t)/(3) & (-e^-t+e^5t)/(3) \ (-2e^-t+2e^5t)/(3) & (e^-t+2e^5t)/(3) bmatrix

① x(t)=bmatrix1 & 2\\4 & 3bmatrixx(t)+bmatrix1\\1bmatrixu(t)

② x(t)=bmatrix1 & 4\\2 & 3bmatrixx(t)+bmatrix1\\1bmatrixu(t)

③ x(t)=bmatrix1 & 4\\2 & 3bmatrixx(t)+bmatrix1\\-1bmatrixu(t)

④ x(t)=bmatrix2 & 1\\3 & 4bmatrixx(t)+bmatrix1\\-1bmatrixu(t)

정답 1번

출제 포인트

상태천이행렬 $\Phi(t) = e^{At}$가 주어졌을 때, $\dot{\Phi}(t)|_{t=0} = A$ 관계를 이용해 시스템 행렬 A를 역산하는 문제다.

조건 정리

보기의 상태천이행렬:

(t) = bmatrix (2e^-t+e^5t)/(3) & (-e^-t+e^5t)/(3) \ (-2e^-t+2e^5t)/(3) & (e^-t+2e^5t)/(3) bmatrix

지수항이 e^{-t}와 e^{5t}이므로 시스템 행렬 A의 고유값은 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$.

사용할 공식

$A = \dot{\Phi}(t)|_{t=0}$: 상태천이행렬을 t로 미분한 뒤 $t = 0$을 대입하면 시스템 행렬 A를 얻는다. 또한 $\Phi(0) = I$이 반드시 성립해야 한다.

계산 과정

$\Phi(t)$를 t에 대해 미분:

(t) = bmatrix (-2e^-t+5e^5t)/(3) & (e^-t+5e^5t)/(3) \ (2e^-t+10e^5t)/(3) & (-e^-t+10e^5t)/(3) bmatrix

$t = 0$ 대입:

$a_{11} = \frac{-2+5}{3} = 1$

$a_{12} = \frac{1+5}{3} = 2$

$a_{21} = \frac{2+10}{3} = 4$

$a_{22} = \frac{-1+10}{3} = 3$

따라서 A = bmatrix1&2\\4&3bmatrix.

NoteBase

선지 판단

① A = bmatrix1&2\\4&3bmatrix: 위 계산 결과와 완전히 일치. 정답.
② A = bmatrix1&4\\2&3bmatrix: $a_{12}=4$, $a_{21}=2$로 계산값($a_{12}=2$, $a_{21}=4$)과 다름. 오답.
③ A = bmatrix1&4\\2&3bmatrix, B = bmatrix1\\-1bmatrix: A 자체가 틀렸으므로 오답.
④ A = bmatrix2&1\\3&4bmatrix: $a_{11}=2$, $a_{22}=4$로 계산값과 다름. 오답.

오답 포인트

②와 ③은 A의 (1,2)원소와 (2,1)원소를 서로 뒤바꾼 함정이다. 행렬의 행·열 순서를 혼동하면 미분 결과가 같아 보여도 행렬 자체가 달라진다. ④는 대각원소도 틀렸다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태천이행렬 $\Phi(t)$가 주어지면 1단계: $\Phi(0)=I$ 검산(오류 걸러내기), 2단계: $\dot{\Phi}(0)=A$ 계산. 각 원소를 t로 미분하고 $t=0$을 대입하면 A가 바로 나온다. 선지가 모두 비슷해 보이면 반드시 원소를 하나씩 대입해 확인한다.

암기 포인트

$\Phi(t)=e^{At}$ 에서 $\Phi(0)=I$, $\dot{\Phi}(0)=A$. 지수 항의 밑(여기서는 -1과 5)이 곧 A의 고유값이다.

NoteBase

문 19. <보기>와 같은 상태공간방정식으로 표현되는 시스템에 대하여 $u(t) = -Kx(t)$의 형태로 표현되는 상태 피드백 제어기를 설계할 때, 폐루프 시스템의 극점이 $-2,\ -1+j,\ -1-j$에 배치되도록 하는 이득행렬 K로 가장 옳은 것은?

<보기>

x(t)=bmatrix0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & -8 & -6bmatrixx(t)+bmatrix0\\0\\1bmatrixu(t)

① K=bmatrix3 & -2 & -2bmatrix

② K=bmatrix3 & 2 & -2bmatrix

③ K=bmatrix-2 & -2 & 3bmatrix

④ K=bmatrix-2 & 2 & 3bmatrix

정답 1번

출제 포인트

상태 피드백 제어기 설계(극점 배치법). 상태방정식 ☒ = Ax + Bu에서 u = −Kx를 적용하면 폐루프 행렬이 A − BK가 된다. 이 행렬의 특성방정식 계수와 목표 극점으로 만든 다항식의 계수를 일치시켜 K를 구한다.

조건 정리

A = [[0,1,0],[0,0,1],[-1,-8,-6]], B = [0,0,1]☒. 목표 극점: -2, -1+j, -1-j. K = [k_1 k_2 k_3] (행벡터).

사용할 공식

폐루프 행렬 Acl = A − BK. B의 마지막 행만 1이므로 Acl 마지막 행 = [-1-k_1, -8-k_2, -6-k_3]이고 나머지 행은 A와 동일한 동반행렬 구조가 된다. 특성방정식: $\det(sI - A_{cl}) = s^3 + (6 + k_3)s^2 + (8 + k_2)s + (1 + k_1)$.

계산 과정

목표 극점으로부터 원하는 특성다항식을 전개한다.

$(s + 2)(s + 1 - j)(s + 1 + j) = (s + 2)(s^2 + 2s + 2) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$

계수 대응:

s^2: 6 + k_3 = 4 → k_3 = -2

s^1: 8 + k_2 = 6 → k_2 = -2

s^0: 1 + k_1 = 4 → k_1 = 3

K = [3 -2 -2].

NoteBase

선지 판단

① K = [3 -2 -2]: k_1=3, k_2=-2, k_3=-2. 특성방정식$s^3+4s^2+6\,s+4$ → 극점 -2, -1±j. 정확히 일치. ○
② K = [3 2 -2]: k_2=+2이면 8+2=10 →s^1 계수 10 ≠ 6. ☒
③ K = [-2 -2 3]: k_3=3이면 6+3=9 →s^2 계수 9 ≠ 4. ☒
④ K = [-2 2 3]: k_1=-2이면 1+(-2)=-1 →s^0 계수 -1 ≠ 4. ☒

오답 포인트

②는 k_2의 부호를 +로 잘못 택한 함정이다. 목표s^1 계수는 6인데 현재 A 행렬에 이미 8이 들어 있으므로 k_2는 반드시 음수(-2)가 되어야 한다. 부호를 놓치면 ②를 정답으로 오해하기 쉽다. ③④는 k_3 위치(s^2 계수)와 k_1 위치(s^0 계수)를 혼동한 경우다.

다시 나오면 이렇게 판단

B = [0,0,1]☒처럼 마지막 원소만 1인 입력 행렬은 동반행렬 구조를 만들기 때문에 특성방정식이$s^3+(a_{22}+k_3)s^2+(a_{11}+k_2)s+(a_{00}+k_1)$ 형태로 바로 읽힌다. 목표 다항식을 전개해 각 계수를 빼면 k를 한 번에 구할 수 있다. 계산 전 목표 극점을 $(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)$ 형태로 반드시 전개해 검산한다.

암기 포인트

극점 배치 핵심: 원하는 극점 다항식 = 폐루프 특성방정식. 동반행렬 구조(가제어 표준형)에서는 마지막 행의 원소가 K에 의해 직접 이동한다. 복소 공액 극점 -1±j의 2차 인수는 $(s+1)^2+1=s^2+2\,s+2$임을 바로 쓸 수 있어야 한다.

NoteBase

문 20. 선형 시불변 시스템 x=bmatrix0 & 1\\-3 & -4bmatrixx+bmatrix1\\1bmatrixu에 대해 $x(t) = Pz(t)$로 상태변수를 변환하여 대각 행렬 형태의 시스템 $\dot{z} = \overline{A}z + \overline{B}u$을 만들려 한다. 이때 행렬 $\overline{A}$로 가장 옳은 것은?

① bmatrix-1 & 0\\0 & 3bmatrix

② bmatrix-1 & 0\\0 & -3bmatrix

③ bmatrix1 & 0\\0 & 3bmatrix

④ bmatrix1 & 0\\0 & -3bmatrix

정답 2번

출제 포인트

상태방정식 $\dot{x} = Ax + Bu$에서 상태변수 변환 $x = Pz$를 적용하면 $\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu$가 되어 $\bar{A} = P^{-1}AP$이다. P를 고유벡터 행렬로 잡으면 $\bar{A}$는 고유값을 대각 원소로 갖는 대각 행렬이 된다. 따라서 핵심은 행렬 A의 고유값을 구하는 것이다.

조건 정리

주어진 시스템 행렬 A = bmatrix0 & 1 \ -3 & -4bmatrix.

사용할 공식

특성방정식: $\det(A - \lambda I) = 0$. 대각화 결과: A = bmatrix_1 & 0 \ 0 & _2bmatrix.

계산 과정

특성방정식을 세운다.

(A - λ I) = bmatrix-λ & 1 \ -3 & -4-λbmatrix = (-λ)(-4-λ) - (1)(-3)

$= \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$

고유값: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$.

따라서 대각 행렬 A = bmatrix-1 & 0 \ 0 & -3bmatrix.

선지 판단

① bmatrix-1 & 0 \ 0 & 3bmatrix — X. $\lambda_2 = 3$이 아니라 -3이다.

② bmatrix-1 & 0 \ 0 & -3bmatrix — O. 고유값 $-1, -3$을 대각에 배치한 올바른 대각 행렬이다.

③ bmatrix1 & 0 \ 0 & 3bmatrix — X. 두 고유값의 부호가 모두 틀렸다.

④ bmatrix1 & 0 \ 0 & -3bmatrix — X. $\lambda_1 = 1$이 아니라 -1이다.

NoteBase

오답 포인트

①과 ④는 λ_1의 부호를 양(+1)으로 착각한 경우이고, ③은 두 고유값 모두 부호를 반대로 쓴 경우이다. 특성방정식 전개 시 $-\lambda \times (-4-\lambda)$의 부호를 잘못 처리하면 $\lambda^2 - 4\lambda + 3$으로 오계산해 $\lambda = 1, 3$이 나오는 함정이 있다. 전개를 천천히 확인할 것.

다시 나오면 이렇게 판단

상태변환으로 대각 행렬을 만들 때는 항상 특성방정식 $\det(A - \lambda I) = 0$으로 고유값을 구하고, 그 고유값을 대각에 그대로 배치한다. 부호 실수를 막으려면 $\lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0$ 공식을 병행 확인한다. 여기서는 $\mathrm{tr}(A) = 0 + (-4) = -4$, $\det(A) = 0 \times (-4) - 1 \times (-3) = 3$이므로 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$이 맞음을 재확인할 수 있다.

암기 포인트

2×2 행렬의 고유값 공식: $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$. 이 문항에서 $\mathrm{tr}(A) = -4$, $\det(A) = 3$이므로 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$, 고유값 $-1,\ -3$. 대각 행렬의 대각 원소 = 고유값.

NoteBase