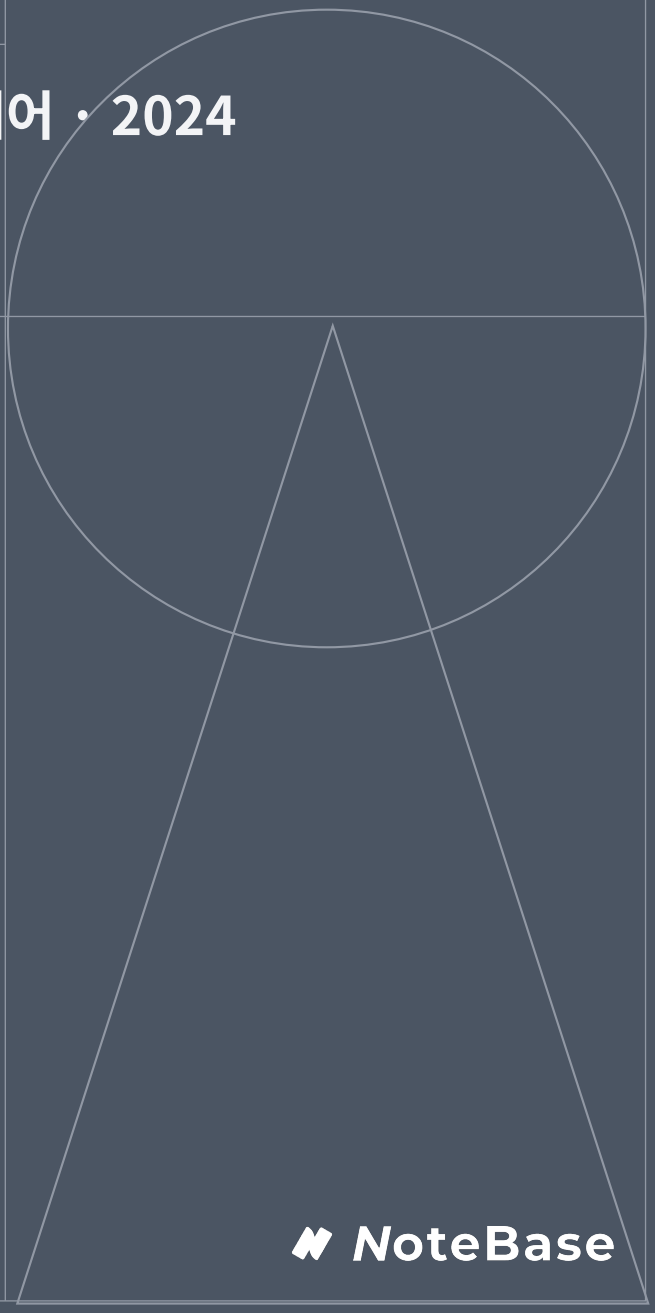
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2024



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2024

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2024

문 1. 자동제어시스템에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은?

① 선형제어시스템은 비례성과 중첩의 원리가 성립하는 시스템이다.

② 추종제어는 목표값이 시간에 따라 변하지 않는 제어이다.

③ 시변제어시스템은 제어시스템의 파라미터가 시간에 따라 변하는 시스템이다.

④ 프로세스제어는 온도, 유량, 압력, 농도, 습도, 비중, pH 등을 제어량으로 하는 제어이다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 선형제어, 추종제어, 시변시스템, 프로세스제어의 기본 정의를 정확히 구별할 수 있는지를 묻는다.

핵심 개념

선형제어시스템은 비례성과 중첩의 원리가 성립하는 시스템이다. 추종제어는 목표값이 시간에 따라 변하는 입력을 따라가도록 하는 제어이고, 목표값이 일정한 제어는 정치제어이다. 시변시스템은 시스템 파라미터가 시간에 따라 변하는 시스템이다. 프로세스제어는 온도, 압력, 유량, 농도, pH 등 공정변수를 제어량으로 다루는 제어이다.

선지별 해설

1번: O. 선형시스템의 기본 성질은 비례성과 중첩성이다. 입력을 상수배하면 출력도 같은 비율로 변하고, 여러 입력의 합에 대한 응답이 각 응답의 합으로 나타난다.
2번: X. 틀린 부분은 "목표값이 시간에 따라 변하지 않는"이다. 추종제어는 시간에 따라 변하는 목표값을 따라가는 제어이고, 목표값이 일정한 제어는 정치제어이다.
3번: O. 시변제어시스템은 시스템의 계수나 파라미터가 시간에 따라 변하는 시스템을 뜻하므로 설명이 옳다.
4번: O. 프로세스제어는 화학공정이나 산업공정에서 온도, 유량, 압력, 농도, 습도, 비중, pH 같은 공정변수를 제어량으로 하는 제어이다.

오답 포인트

추종제어와 정치제어를 서로 바꿔 외우면 2번에 걸린다. 이 문항은 "목표값이 시간에 따라 변하는가, 일정한가"라는 한 문장 차이를 이용해 함정을 만든다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

제어 방식 정의 문제가 나오면 먼저 목표값의 시간변화 여부를 보고 추종제어와 정치제어를 구분한 뒤, 선형성은 비례성과 중첩성, 시변성은 파라미터의 시간변화, 프로세스제어는 공정변수 제어라는 기준으로 판단한다.

암기 포인트

추종은 변하는 목표값을 따라가고, 정치는 일정한 목표값을 유지한다. 선형은 비례·중첩, 시변은 파라미터 시간변화이다.

NoteBase

문 2. 입력과 출력의 관계가 $\dot{y}(t)+y(t)=u(t)$로 주어진 시스템에 입력으로 $u(t)=u_s(t)-u_s(t-1)$를 가했을 때, 이 시스템의 응답으로 가장 옳은 것은? (단, $t \geq 0$, $y(0)=0$이고, $u_s(t)$는 단위계단함수이다.)

① $y(t)=(1-e^{-t})u_s(t)-(1-e^{-(t-1)})u_s(t-1)$

② $y(t)=(1-e^{-t})u_s(t)-(1-e^{-t})u_s(t-1)$

③ $y(t)=(1-e^{-t})u_s(t)-(1-e^{-(t-1)})u_s(t)$

④ $y(t)=(1-e^{-t})u_s(t-1)-(1-e^{-t})u_s(t-1)$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 1차 시스템의 단위계단응답을 구한 뒤, 폭 1의 펄스 입력 $u(t)=u_s(t)-u_s(t-1)$에 대해 시불변성으로 지연 응답을 빼는지를 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 시스템은 $\dot{y}(t)+y(t)=u(t)$이다.
초기조건은 $y(0)=0$이다.
입력은 $u(t)=u_s(t)-u_s(t-1)$이므로 0초에 켜지고 1초에 꺼지는 직사각파이다.

사용할 공식

전달함수는 $G(s)=\frac{1}{s+1}$이다.
따라서 단위계단응답은 $y_s(t)=(1-e^{-t})u_s(t)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 주어진 입력이 단위계단 두 개의 차이이므로, 선형성과 시불변성에 따라 출력도 두 계단응답의 차이로 바로 쓸 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. $u(t)=u_s(t)$일 때의 응답은 $y_s(t)=(1-e^{-t})u_s(t)$이다.
2. $u_s(t-1)$에 대한 응답은 1초 지연된 $(1-e^{-(t-1)})u_s(t-1)$이다.
3. 따라서 전체 응답은 $y(t)=(1-e^{-t})u_s(t)-(1-e^{-(t-1)})u_s(t-1)$ 이다.

NoteBase

선지 판단

1번 O: 단위계단응답에서 1초 지연된 응답을 빼는 정확한 형태이다.
2번 X: 지연된 항의 지수부를 e^{-t}로 쓰면 시간 이동이 반영되지 않는다. 틀린 표현은 e^{-t}이고, 올바르게는 $e^{-(t-1)}$이다.
3번 X: 둘째 항의 계단함수를 $u_s(t)$로 쓰면 $0 \le t < 1$ 구간에서도 감산이 시작되어 펄스 입력의 꺼지는 시점이 반영되지 않는다. 틀린 표현은 $u_s(t)$이고, 올바르게는 $u_s(t-1)$이다.
4번 X: 두 항이 모두 $(1-e^{-t})u_s(t-1)$로 같아 서로 상쇄되므로 결과가 0이 된다. 이는 실제 펄스응답과 맞지 않는다. 올바르게는 첫 항이 $(1-e^{-t})u_s(t)$, 둘째 항이 $(1-e^{-(t-1)})u_s(t-1)$이다.

오답 포인트

지연된 입력 $u_s(t-1)$를 보면 계단함수만 $t-1$로 바꾸고 지수항은 그대로 두는 실수가 자주 나온다. 시간지연은 계단함수와 응답식 내부 시간변수 둘 다 함께 $t-1$로 이동해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

직사각파나 펄스 입력이 보이면 먼저 이를 계단함수들의 합차로 분해하고, 단위계단응답을 구한 뒤 지연된 항은 응답 전체를 $t-1$로 바꿔서 붙인다고 판단한다.

암기 포인트

1차 시스템의 폭 T 펄스응답은 스텝응답에서 T만큼 지연된 스텝응답을 뺀 형태이다.

NoteBase

문 3. 주어진 함수에 대한 라플라스 변환으로 가장 옳은 것은? (단, $t \geq 0$이고, $u_s(t)$는 단위계단함수, $F(s)$는 함수 $f(t)$의 라플라스 변환이다.)

① $f(t) = e^{-t}(1 - \cos 2t)$이면, $F(s) = \frac{4}{(s+1)(s^2+2s+5)}$이다.
② $f(t) = e^{-2t}t^2$이면, $F(s) = \frac{2}{(s-2)^3}$이다.
③ $f(t) = 5e^{-2(t-3)}u_s(t-3)$이면, $F(s) = \frac{5e^{3s}}{s+2}$이다.
④ $f(t) = \int_0^t \cos(\tau)(t-\tau)d\tau$이면, $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$이다.

정답 1번

출제 포인트

지수이동 정리, 시간지연 정리, 컨볼루션 정리를 이용해 각 함수의 라플라스 변환을 정확히 대응시키는 문제이다.

조건 정리

각 선지는 서로 다른 기본 정리를 묻는다.
1번은 e^{-t}에 의한 s-이동이다.
2번은 t^2의 기본 변환에 e^{-2t} 이동을 붙이는 경우이다.
3번은 $u_s(t-3)$가 붙은 시간지연형이다.
4번은 $\int_0^t \cos(\tau)(t-\tau)d\tau$ 꼴의 컨볼루션형이다.

사용할 공식

$L\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a), L\{t^2\} = 2/s^3, L\{g(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}G(s), L\{(x*y)(t)\} = X(s)Y(s)$를 쓴다.
이 공식을 쓰는 이유는 각 선지가 모두 기본 함수에 지수이동, 시간지연, 컨볼루션이 붙은 전형적인 라플라스 변환 형태이기 때문이다.

계산 과정

1번은 먼저 $L\{1-\cos 2t\} = 1/s - s/(s^2+4) = 4/(s(s^2+4))$이다. 여기에 e^{-t}가 곱해졌으므로 $s \to s+1$을 대입하여 $F(s) = 4/((s+1)((s+1)^2+4)) = 4/((s+1)(s^2+2s+5))$가 된다.
2번은 $L\{t^2\} = 2/s^3$이므로 e^{-2t}를 반영하면 $2/(s+2)^3$가 된다.
3번은 $g(t) = 5e^{-2t}$로 두면 $f(t) = g(t-3)u_s(t-3)$이므로 $F(s) = e^{-3s} \cdot 5/(s+2) = 5e^{-3s}/(s+2)$가 된다.
4번은 $\cos t$와 t의 컨볼루션이므로 $F(s) = \{s/(s^2+1)\} \cdot \{1/s^2\} = 1/(s(s^2+1))$가 된다.

선지별 해설

1번 O: $1-\cos 2t$의 변환이 $4/(s(s^2+4))$이고, e^{-t} 때문에 $s \to s+1$이 되어 $4/((s+1)(s^2+2s+5))$가 된다. 제시식과 일치한다.
2번 X: $L\{e^{-2t}t^2\} = 2/(s+2)^3$이어야 한다. 틀린 표현은 $(s-2)^3$이고, 올바르게는 $(s+2)^3$이다. 지수감쇠 e^{-2t}를 성장항처럼 반대로 옮긴 오답이다.
3번 X: 시간지연 정리에 따라 $L\{5e^{-2(t-3)}u_s(t-3)\} = 5e^{-3s}/(s+2)$이다. 틀린 표현은 e^{3s}이고, 올바르게는 e^{-3s}이다. 지연항의 부호를 반대로 쓴 오답이다.
4번 X: $\int_0^t \cos(\tau)(t-\tau)d\tau$는 컨볼루션이므로 $s/(s^2+1) \cdot 1/s^2 = 1/(s(s^2+1))$이다. 틀린 표현은 $1/(s^2(s^2+1))$이고, 올바르게는 $1/(s(s^2+1))$이다. $\cos t$의 분자 s를 빠뜨린 오답이다.

오답 포인트

지수이동에서는 e^{-at}를 보면 항상 $s+a$가 된다는 점을 놓치기 쉽다. 시간지연에서는 $u(t-a)$가 붙으면 e^{-as}가 곱해지는데, 이를 e^{as}로 뒤집는 실수가 자주 나온다. 컨볼루션에서는 각 함수의 기본 라플라스 변환을 끝까지 써 놓지 않으면 $\cos t$의 분자 s를 빠뜨리기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

라플라스 변환 문제는 식의 모양부터 분류해서 판단한다. e^{-at}가 보이면 $s \to s+a$ 이동으로 처리하고, $u(t-a)$가 보이면 먼저 $g(t-a)u(t-a)$ 꼴인지 확인한 뒤 $e^{-as}G(s)$를 적용한다. $\int_0^t$ 형태의 곱적분이 보이면 컨볼루션으로 바꾸어 두 함수의 변환을 곱한다.

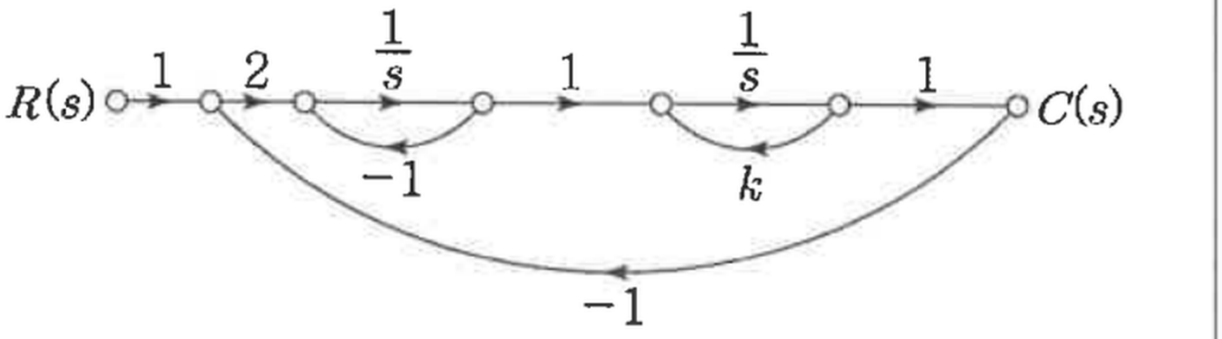
암기 포인트

지수감쇠는 $s+a$, 시간지연은 e^{-as}, 컨볼루션은 라플라스 변환의 곱이다.

NoteBase

문 4. <보기>의 신호흐름선도에서 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2+3s+4}$가 되기 위한 상수 k의 값은?

<보기>



① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 신호흐름선도의 각 노드 관계를 식으로 바꾸어 $\frac{C(s)}{R(s)}$의 분모 계수를 맞추고 k를 구하는 문제이다.

조건 정리

전진경로는 $1 \to 2 \to \frac{1}{s} \to 1 \to \frac{1}{s} \to 1$이다.
첫 번째 적분기 구간에는 -1의 내부 되먹임이 있고, 두 번째 적분기 구간에는 k의 내부 되먹임이 있다.
출력 $C(s)$에서 입력 쪽으로 -1의 외부 되먹임이 있으므로 입력 합점 뒤 노드는 $R(s) - C(s)$가 된다.

사용할 공식

노드를 x_1, x_2, x_3, x_4와 $C(s)$로 두면
$x_1 = R - C, \quad x_2 = 2x_1 - x_3, \quad sx_3 = x_2, \quad x_4 = x_3 + kC, \quad sC = x_4$
로 정리된다.
이 식을 쓰는 이유는 신호흐름선도는 각 합점과 적분기 앞뒤 관계를 그대로 식으로 옮기면 전달함수를 가장 빠르게 구할 수 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

먼저 $sC = x_4 = x_3 + kC$이므로 $x_3 = (s-k)C$이다.

또 $sx_3 = x_2 = 2(R-C) - x_3$이므로

$(s+1)x_3 + 2C = 2R$

이다.

여기에 $x_3 = (s-k)C$를 대입하면

$(s+1)(s-k)C + 2C = 2R$

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{(s+1)(s-k)+2} = \frac{2}{s^2 + (1-k)s + (2-k)}$

이다.

문제의 조건 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2+3s+4}$와 비교하면

$1-k = 3, \quad 2-k = 4$

이므로 $k = -2$이다.

선지별 해설

1번 O: $k=-2$를 대입하면 분모가 $s^2 + (1-(-2))s + (2-(-2)) = s^2+3s+4$가 된다. 문제의 전달함수와 정확히 일치하므로 옳다.

2번 X: $k=-1$이면 분모가 s^2+2s+3이 된다. s의 계수와 상수항이 모두 부족하다. 틀린 표현은 "$k=-1$"이고, 올바르게는 "$k=-2$"이다.

3번 X: $k=1$이면 분모가 $s^2+0s+1 = s^2+1$이 된다. 내부 되먹임의 부호를 잘못 처리하면 나올 수 있는 값이다. 틀린 표현은 "$k=1$"이고, 올바르게는 "$k=-2$"이다.

4번 X: $k=2$이면 분모가 s^2-s가 되어 주어진 s^2+3s+4와 전혀 맞지 않는다. 틀린 표현은 "$k=2$"이고, 올바르게는 "$k=-2$"이다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 되먹임 가지의 부호를 반대로 쓰는 실수와, 적분기 $\frac{1}{s}$를 sx=입력 관계로 바꾸지 않고 그대로 두는 실수이다. 이 문항에서는 $x_3 = (s-k)C$를 $x_3 = (s+k)C$로 잘못 두면 오답으로 바로 이어진다.

다시 나오면 이렇게 판단

신호흐름선도 문제는 합점 식을 먼저 세우고, 적분기는 sx=입력 형태로 바꾼 뒤, 마지막에 전달함수 분모 계수를 비교하는 순서로 판단한다.

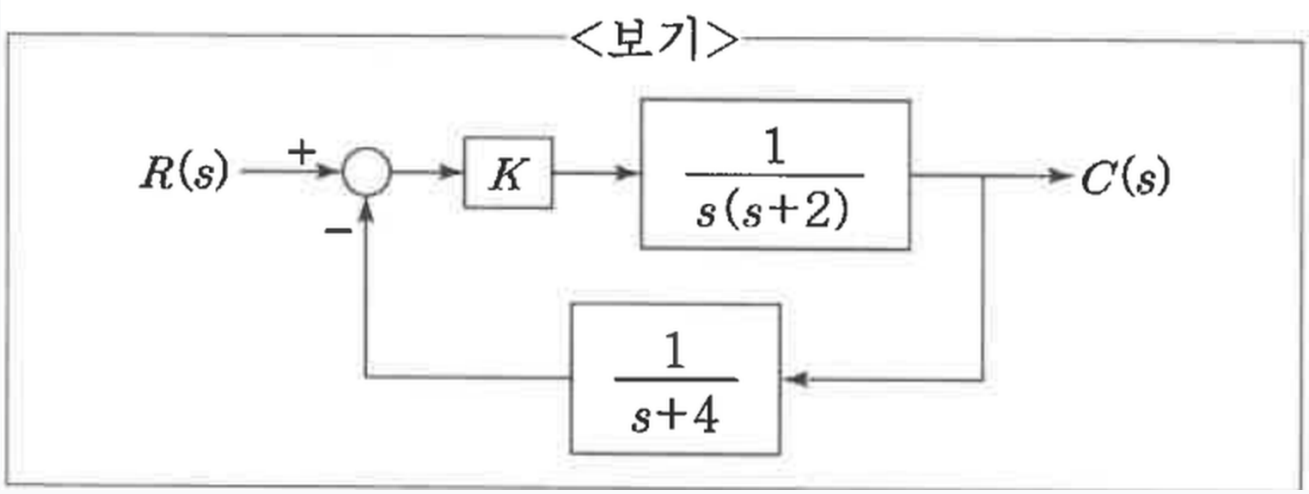
암기 포인트

신호흐름선도는 가지를 바로 외우기보다 합점 식과 $\frac{1}{s} \leftrightarrow sx$ 변환으로 전달함수를 만든다고 기억해 둔다.

NoteBase

문 5. <보기>의 블록선도를 갖는 제어시스템의 근궤적이 허수축과 만날 때, K의 값과 근궤적이 허수축과 만나는 점을 옳게 짝지은 것은? (단, K는 양의 상수이다.)

<보기>



① K: 36, 허수축과 만나는 점: $\pm j\sqrt{6}$

② K: 36, 허수축과 만나는 점: $\pm j6$

③ K: 48, 허수축과 만나는 점: $\pm j\sqrt{8}$

④ K: 48, 허수축과 만나는 점: $\pm j8$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 폐루프 특성방정식을 세운 뒤 Routh 판별법으로 허수축 교차 조건과 그때의 K, 교차점 s를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 순방향 전달함수는 $G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$이고 피드백 전달함수는 $H(s) = \frac{1}{s+4}$이다.
음의 피드백이므로 특성방정식은 $1 + G(s)H(s) = 0$이다.
구해야 할 값은 허수축 교차 시의 K와 교차점 s이다.

사용할 공식

특성방정식은 $1 + G(s)H(s) = 0$이고, 3차식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$가 허수축과 만나는 경계는 Routh 배열의 s^1행이 0이 되는 경우이다.
이 공식을 쓰는 이유는 근궤적의 허수축 교차점이 안정 경계에 해당하므로 특성방정식의 계수 조건으로 바로 구할 수 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 특성방정식을 세우면 $1+\frac{K}{s(s+2)(s+4)}=0$이므로 $s(s+2)(s+4)+K=0$이다.
2. 전개하면 $s^3+6s^2+8s+K=0$이다.
3. Routh 배열의 첫 두 행은 $s^3:[1,8]$, $s^2:[6,K]$이므로 s^1행 첫 원소는 $\frac{6\cdot 8-K}{6}=\frac{48-K}{6}$이다.
4. 허수축 교차 조건은 $\frac{48-K}{6}=0$이므로 $K=48$이다.
5. 이때 보조방정식은 $6s^2+48=0$, 즉 $s^2+8=0$이므로 교차점은 $s=\pm j\sqrt{8}$이다.

선지 판단

① X: $K=36$이면 Routh 조건 $48-K=0$를 만족하지 않으므로 허수축 교차가 일어나지 않는다. 교차점도 $\pm j\sqrt{6}$가 아니라 $\pm j\sqrt{8}$이다. 틀린 표현은 'K=36, 허수축과 만나는 점 $\pm j\sqrt{6}$'이고, 올바르게는 'K=48, 허수축과 만나는 점 $\pm j\sqrt{8}$'이다.
② X: $K=36$이 이미 틀렸고 교차점도 $\pm j6$가 아니다. $6s^2+48=0$에서 $s^2=-8$이므로 허수부의 크기는 6이 아니라 $\sqrt{8}$이다. 올바르게는 'K=48, 허수축과 만나는 점 $\pm j\sqrt{8}$'이다.
③ O: Routh 조건으로 $K=48$이 나오고, 보조방정식에서 $s=\pm j\sqrt{8}$이 나온다. 제시된 짝이 계산 결과와 정확히 일치한다.
④ X: $K=48$까지는 맞지만 교차점을 $\pm j8$로 둔 점이 틀렸다. $s^2=-8$이면 $s=\pm j\sqrt{8}$이지 $\pm j8$이 아니다. 틀린 표현은 '$\pm j8$'이고, 올바르게는 '$\pm j\sqrt{8}$'이다.
계산 결과 $K=48$, 교차점 $s=\pm j\sqrt{8}$이므로 정답은 3번이다.

오답 포인트

이 문제는 피드백 블록 $\frac{1}{s+4}$를 특성방정식에 반영하지 않거나, 보조방정식에서 $s^2=-8$을 얻고도 마지막에 제곱근을 취하지 않으면 틀린다. 36은 허수축 교차 조건을 잘못 세운 값이고, $\pm j8$은 $\omega^2=8$을 $\omega=8$로 오해한 값이다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 문제에서 허수축 교차를 묻으면 먼저 $1+G(s)H(s)=0$로 폐루프 특성방정식을 만들고, 그다음 Routh 배열에서 경계조건을 구한 뒤 보조방정식으로 ω를 계산한다.

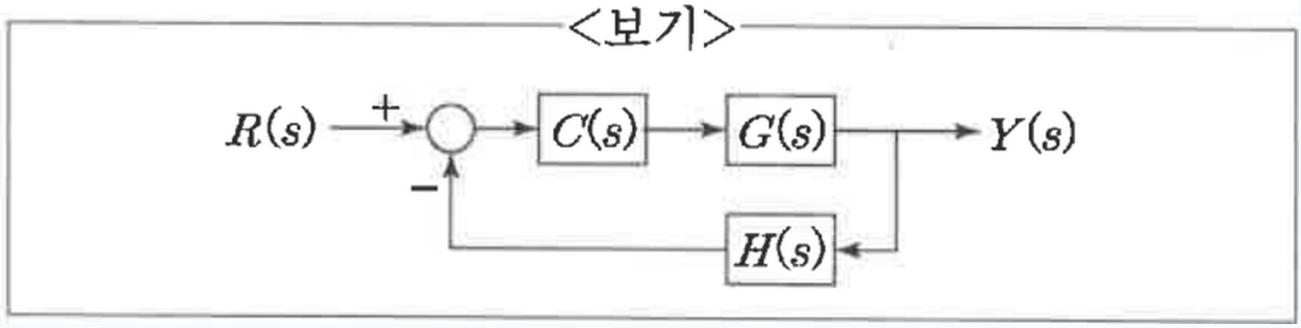
암기 포인트

3차 특성방정식의 허수축 교차는 Routh의 s^1행이 0이 되는 순간이며, 교차점은 바로 위 행의 보조방정식으로 구한다.

NoteBase

문 6. <보기>의 블록선도에서 $G(s)=\frac{1}{Ls+R}$, $H(s)=1$, $C(s)=K_P+K_Ds$일 때, 정상상태오차는? (단, L, R, K_P, K_D는 모두 양의 상수이며, $R(s)$는 단위계단함수이다.)

<보기>



① 0

② ∞

③ $\frac{R}{K_P+R}$

④ $\frac{1}{1+\frac{K_P+K_D}{R}}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 단위계단입력에 대한 폐루프계의 정상상태오차를 최종값정리로 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 값: $G(s)=\frac{1}{Ls+R}$, $C(s)=K_P+K_Ds$, $H(s)=1$
구해야 할 값: 단위계단입력 $R(s)=\frac{1}{s}$ 에 대한 정상상태오차 e_{ss}
주의할 조건: 미분항 K_Ds 는 $s\to 0$ 에서 0이 되므로 정상상태오차의 DC 성분에는 직접 남지 않는다.

사용할 공식

정상상태오차는 $e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)$, $E(s)=\frac{R(s)}{1+C(s)G(s)H(s)}$ 이다.
이 공식을 쓰는 이유: 문제는 단위계단입력에 대한 폐루프 정상상태오차를 묻고 있으므로 오차 전달함수에 최종값정리를 적용하면 된다.

계산 과정

1. 개루프 전달함수는 $C(s)G(s)H(s)=\frac{K_P+K_Ds}{Ls+R}$ 이다.
2. 따라서 $e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\frac{K_P+K_Ds}{Ls+R}}$ 이다.
3. $s\to 0$ 을 대입하면 $K_Ds\to 0$, $Ls+R\to R$ 이므로 $e_{ss}=\frac{1}{1+\frac{K_P}{R}}=\frac{R}{K_P+R}$ 이다.

NoteBase

선지 판단

1번 X: 0은 적분기가 있는 계에서 단위계단 정상상태오차가 사라질 때의 값이다. 이 계는 개루프에 $1/s$ 적분기가 없으므로 0이 아니다. 틀린 표현은 정상상태오차를 0으로 본 점이며, 올바르게는 $e_{ss} = \frac{R}{K_P + R}$ 이다.
2번 X: ∞ 는 정상상태오차가 발산하는 경우인데, 이 문제의 폐루프 특성방정식은 $(L + K_D)s + (R + K_P) = 0$ 이므로 양의 상수 조건에서 안정하다. 적분기가 없는 0형 계의 단위계단 오차는 유한한 상수이다. 올바르게는 $e_{ss} = \frac{R}{K_P + R}$ 이다.
3번 O: 계산 결과가 $\frac{R}{K_P + R}$ 이므로 옳다. 미분이득 K_D 는 정상상태에서 사라지고 비례이득 K_P 와 저항 R 만 남는다.
4번 X: $\frac{1}{1 + \frac{K_P + K_D}{R}}$ 는 미분이득 K_D 를 DC 이득처럼 더한 식이라서 틀리다. 틀린 표현은 K_D 가 정상상태오차 식에 그대로 남는다는 점이며, 올바르게는 $\frac{1}{1 + \frac{K_P}{R}} = \frac{R}{K_P + R}$ 이다.

오답 포인트

미분제어기라는 이유만으로 K_D 를 정상상태오차 식에 넣으면 4번처럼 틀린다. 반대로 적분기가 없다는 사실을 놓치면 1번처럼 오차가 0이라고 오판하기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

정상상태오차 문제는 먼저 개루프에 적분기 $1/s$ 가 있는지 확인해 시스템 타입을 판단한다. 그다음 $e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$ 를 적용해 $s \to 0$ 에서 남는 항만 계산하면 된다.

암기 포인트

단위계단 정상상태오차는 적분기가 없으면 0이 아니고, 미분항은 $s \to 0$ 에서 사라진다.

NoteBase

문 7. 전달함수가 $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$으로 주어진 시스템의 단위계단응답에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, $\omega_n > 0$이고, $0 < \zeta < 1$이다.)

① 최대첨두시간(peak time)은 $\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$이다.

② 최대 오버슈트(maximum overshoot)는 ζ가 커질수록 작아진다.

③ 시간이 증가함에 따라 단위계단응답은 1로 수렴한다.

④ ζ가 일정하면 정착시간(settling time)은 ω_n에 비례한다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 표준 2차 언더댐프드 시스템의 단위계단응답에서 최대첨두시간, 최대 오버슈트, 정상상태값, 정착시간의 관계를 구별하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 형태의 표준 2차계이다.
$0 < \zeta < 1$이므로 언더댐프드 응답이 나타난다.
단위계단입력에 대한 정상상태값은 1이다.

사용할 공식

감쇠진동수는 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 이다.
최대첨두시간은 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$이다.
최대 오버슈트는 $M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$ 이다.
정착시간은 보통 2% 기준에서 $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 문제의 전달함수가 표준 2차계의 단위계단응답 식과 정확히 일치하기 때문이다.

계산 과정

1. 전달함수 분모를 표준형과 비교하면 자연진동수 ω_n과 감쇠비 ζ를 그대로 읽을 수 있다.
2. $0 < \zeta < 1$이므로 응답은 감쇠진동하면서 최종값 1로 수렴한다.
3. 각 성능지표의 식을 비교하면 t_p는 $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 의 역수, M_p는 ζ가 커질수록 감소하는 지수함수, t_s는 $\zeta\omega_n$의 역수이다.
4. 따라서 ζ가 일정할 때 정착시간은 ω_n에 비례하지 않고 반비례한다.

NoteBase

선지 판단

1번 O: 최대첨두시간은 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$이므로 옳다. 첫 번째 최대값에 도달하는 시간은 감쇠진동수 ω_d로 결정된다.

2번 O: 최대 오버슈트는 $M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$이므로 ζ가 커질수록 작아진다. 감쇠가 커질수록 튀어 오르는 정도가 줄어든다.

3번 O: 이 시스템의 DC 이득은 1이므로 단위계단응답은 시간이 충분히 지나면 1로 수렴한다. 최종값 정리는 $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$을 준다.

4번 X: 정착시간은 $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$이므로 ζ가 일정하면 ω_n이 커질수록 작아진다. 틀린 표현은 \"ω_n에 비례한다\"이고, 올바르게는 \"ω_n에 반비례한다\"이다.

오답 포인트

정착시간 식을 $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$가 아니라 분모와 분자를 뒤집어 기억하면 4번을 놓치기 쉽다. 또 최대첨두시간과 정착시간이 모두 시간 상수라는 이유로 같은 비례관계를 가진다고 착각하기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

표준 2차계가 나오면 먼저 t_p, M_p, t_s의 기본식을 따로 적어 두고 어느 변수가 분모에 있는지 확인한다. ω_n이 커질수록 시간 관련 지표는 대체로 짧아지고, ζ가 커질수록 오버슈트는 작아진다는 기준으로 선지를 판단한다.

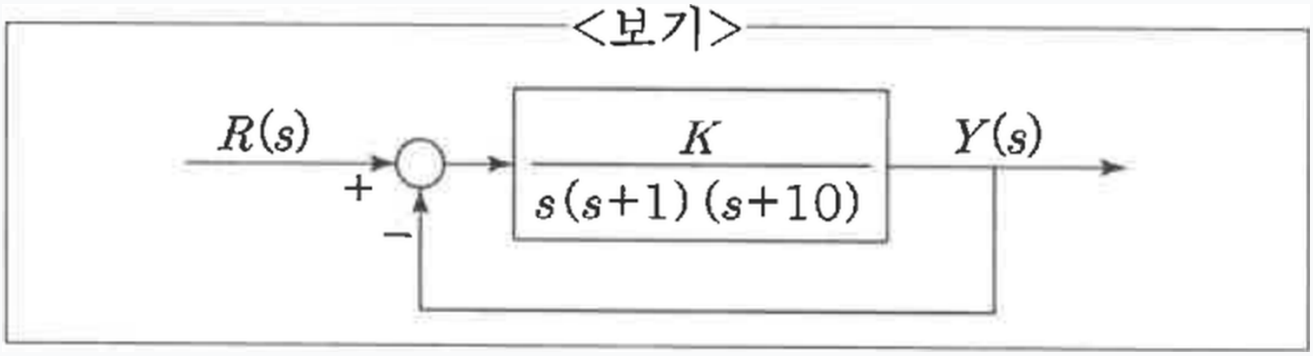
암기 포인트

언더댐프드 2차계에서 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, $M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$, $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$이다.

NoteBase

문 8. <보기>의 시스템에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, K는 양의 상수이다.)

<보기>



① 근궤적은 $s = \frac{-11 + \sqrt{91}}{3}$에서 실수축 이탈점(breakaway point)을 갖는다.

② $K = 110$일 때, $s = \pm 10$에 극점이 존재한다.

③ $0 < K < 110$이면 주어진 시스템은 안정하다.

④ 근궤적은 세 개의 지로(branch)를 갖는다.

정답 2번

출제 포인트

단위 음의 되먹임 시스템의 특성방정식 $s^3 + 11s^2 + 10s + K = 0$에서 근궤적의 실수축 구간, 이탈점, 허수축 교차점, 안정조건을 함께 판정하는 문제이다.

조건 정리

개루프 전달함수는 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+10)}$이다.
개루프 극점은 $s = 0,\ -1,\ -10$이고 영점은 없다.
폐루프 특성방정식은 $1 + G(s) = 0$이므로 $s(s+1)(s+10) + K = 0$, 즉 $s^3 + 11s^2 + 10s + K = 0$이다.

사용할 공식

근궤적의 branch 수는 개루프 극점 수와 같다.
실수축 근궤적은 그 점의 오른쪽에 있는 실수축 극점·영점 개수가 홀수인 구간에 존재한다.
이탈점은 $K = -s(s+1)(s+10)$에 대해 $\frac{dK}{ds} = 0$으로 구한다.
안정도와 허수축 교차점은 특성방정식 $s^3 + 11s^2 + 10s + K = 0$의 Routh 표로 판정한다.
이 공식을 쓰는 이유는 각 선지가 이탈점, 허수축 교차, 안정조건, branch 개수를 각각 묻고 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 개루프 극점이 3개, 영점이 0개이므로 근궤적 branch는 3개이다.
2. 실수축 근궤적 구간은 $(-\infty,\ -10)$, $(-1,\ 0)$이다. 이탈점은 $K=-s(s+1)(s+10)$에서 $\frac{dK}{ds}=-(3s^2+22s+10)=0$을 풀어 $s=\frac{-11\pm\sqrt{91}}{3}$를 얻는다. 이 중 $\frac{-11+\sqrt{91}}{3}\approx -0.487$만 $(-1,\ 0)$ 구간에 있으므로 실제 이탈점이다.
3. Routh 표는 첫 열이 $1,\ 11,\ \frac{110-K}{11},\ K$가 되므로 안정조건은 $0<K<110$이다.
4. $K=110$이면 s^1행이 0이 되고, 보조방정식은 $11s^2+110=0$이다. 따라서 허수축 교차점은 $s=\pm j\sqrt{10}$이다.

선지별 해설

① O: $\frac{dK}{ds}=0$으로 얻는 두 해는 $s=\frac{-11\pm\sqrt{91}}{3}$이다. 이 중 $\frac{-11+\sqrt{91}}{3}$만 실수축 근궤적 구간 $(-1,\ 0)$ 위에 있으므로 실제 실수축 이탈점이다.

② X: $K=110$일 때 허수축 교차점은 보조방정식 $11s^2+110=0$에서 $s=\pm j\sqrt{10}$이다. 선지의 \"$\pm 10j$\"가 틀린 표현이며, 올바르게는 \"$K=110$일 때 $s=\pm j\sqrt{10}$에 극점이 존재한다\"이다.

③ O: Routh 표 첫 열이 모두 양수가 되려면 $K>0$이고 $110-K>0$이어야 하므로 안정조건은 $0<K<110$이다.

④ O: 근궤적의 branch 수는 개루프 극점 수와 같고, 이 시스템의 개루프 극점은 $0,\ -1,\ -10$의 3개이므로 branch도 3개이다.

오답 포인트

2번은 경계이득 $K=110$과 허수축 교차점의 위치를 혼동하면 틀리기 쉽다. $11s^2+110=0$을 정리하면 $s^2=-10$인데, 이를 $s^2=-100$처럼 잘못 계산하면 $\pm 10j$라는 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적 문제는 먼저 개루프 극점·영점 개수로 branch 수와 실수축 구간을 정리하고, 다음으로 $K=-1/G_0(s)$에서 $\frac{dK}{ds}=0$으로 이탈점을 찾은 뒤, 안정도와 허수축 교차는 Routh 표 첫 열 부호와 보조방정식으로 판정한다.

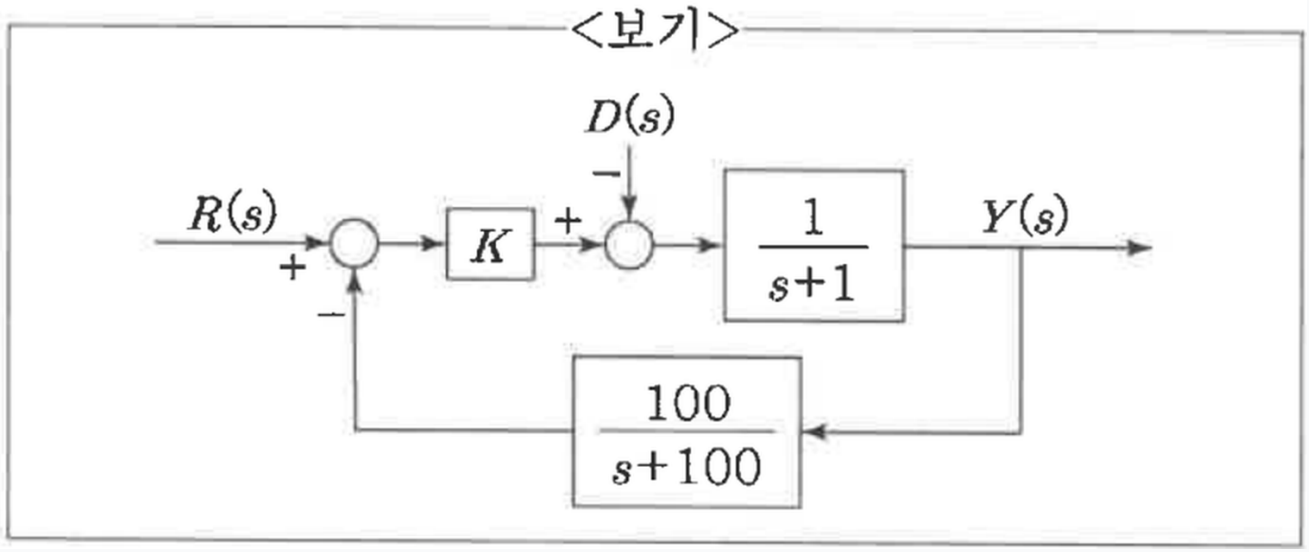
암기 포인트

근궤적 branch 수는 개루프 극점 수와 같고, 3차 특성방정식 $s^3+as^2+bs+K=0$의 안정 경계는 Routh에서 $K=ab$ 형태로 바로 드러난다.

NoteBase

문 9. <보기>의 시스템에서 $R(s)=\frac{1}{s}$, $D(s)=\frac{0.01}{s}$ 일 때, 정상상태오차가 0.01이 되도록 하는 K의 값은? (단, K는 상수이다.)

<보기>



① 1

② 10

③ 50

④ 100

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 외란이 있는 비단위 피드백계에서 최종값정리를 이용해 정상상태오차를 구하고, 그 오차가 0.01이 되도록 하는 K를 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $R(s)=1/s$, $D(s)=0.01/s$, 전진경로 $G(s)=1/(s+1)$, 피드백경로 $H(s)=100/(s+100)$이다. 구해야 할 값은 정상상태오차 $e_{ss}=0.01$을 만족하는 상수 K이다. 외란 $D(s)$는 두 번째 합점에 음의 부호로 들어간다.

사용할 공식

정상상태오차는 $e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)$이다. 이 계에서는 $E(s)=R(s)-H(s)Y(s)$, $Y(s)=G(s)\{KE(s)-D(s)\}$이므로 $E(s)=\frac{R(s)+H(s)G(s)D(s)}{1+KG(s)H(s)}$가 된다. 기준입력과 외란이 모두 계단입력이고 정상상태를 묻기 때문에 최종값정리를 쓰는 것이 맞다.

NoteBase

계산 과정

1. $G(0)=1$, $H(0)=1$이므로 정상상태에서는 $G(s)H(s)\to 1$이다.
2. 따라서 $e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\frac{1+0.01}{1+K}=\frac{1.01}{1+K}$가 된다.
3. 이를 0.01과 같게 두면 $\frac{1.01}{1+K}=0.01$이다.
4. 정리하면 $1.01=0.01(1+K)$, $101=1+K$이므로 $K=100$이다.

선지별 해설

① X: 1번은 $K=1$이라는 뜻이다. 계산 결과는 $K=100$이므로 틀리다. 올바르게는 정상상태오차 0.01을 만들려면 K가 1이 아니라 100이어야 한다.
② X: 2번은 $K=10$이라는 뜻이다. $K=10$이면 $e_{ss}=1.01/11$이 되어 약 0.0918이므로 조건을 만족하지 못한다. 올바르게는 $K=10$이 아니라 $K=100$이어야 한다.
③ X: 3번은 $K=50$이라는 뜻이다. $K=50$이면 $e_{ss}=1.01/51$이 되어 약 0.0198이므로 여전히 0.01보다 크다. 올바르게는 $K=50$이 아니라 $K=100$이어야 한다.
④ O: 4번은 $K=100$이라는 뜻이다. $K=100$을 대입하면 $e_{ss}=1.01/101=0.01$이 되어 문제 조건과 정확히 일치한다.

오답 포인트

외란 입력 $D(s)$의 크기 0.01을 빼먹고 $e_{ss}=1/(1+K)$로 두면 $K=99$ 같은 오답이 나온다. 또 비단위 피드백이라도 정상상태에서는 $H(0)=100/100=1$이라는 점을 확인하지 않으면 식을 불필요하게 복잡하게 만들 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도에서 정상상태오차를 묻는 계산형 문제는 먼저 오차신호 $E(s)$를 식으로 세우고, 다음에 $e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)$를 적용한 뒤, 마지막에 $G(0)$, $H(0)$, 입력 크기와 외란 크기를 함께 대입해 값을 맞추는 순서로 판단한다.

암기 포인트

계단입력과 계단외란이 함께 있으면 정상상태오차는 기준입력 항과 외란 항을 함께 반영해 계산한다.

NoteBase

문 10. 개루프 전달함수가 $\frac{e^{-s}}{s(s+1)}$로 주어진 시스템의 이득 교차주파수를 ω_g라고 할 때, ω_g^2의 값은? (단, $\sqrt{5}=2.236$으로 가정한다.)

① 0.146

② 0.382

③ 0.618

④ 0.786

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 시간지연 항의 크기는 1이라는 점을 이용하여 이득 교차주파수에서 $|G(j\omega)|=1$을 풀고 ω_g^2를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 개루프 전달함수는 $G(s)=\frac{e^{-s}}{s(s+1)}$이다.
구해야 할 값은 이득 교차주파수 ω_g의 제곱이다.
시간지연 항 $e^{-j\omega}$는 위상만 바꾸고 크기는 바꾸지 않으므로 크기 계산에서는 1로 본다.

사용할 공식

이득 교차주파수는 $|G(j\omega_g)|=1$을 만족한다.
따라서 $\left|\frac{e^{-j\omega}}{j\omega(1+j\omega)}\right|=\frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}=1$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이득 교차주파수가 개루프 주파수응답의 크기가 1이 되는 점이기 때문이다.

계산 과정

1. $\frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}=1$에서 $\omega\sqrt{1+\omega^2}=1$이다.
2. 양변을 제곱하면 $\omega^2(1+\omega^2)=1$이고, $\omega^4+\omega^2-1=0$이다.
3. $x=\omega^2$로 두면 $x^2+x-1=0$이다.
4. $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$인데, $\omega^2>0$이므로 $\omega_g^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx\frac{2.236-1}{2}=0.618$이다.

선지 판단

1번 X: 0.146은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 → 올바르게는 $\omega_g^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$이다.
2번 X: 0.382는 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$에 해당하는 값으로, 이 식에서는 나오지 않는다. 틀린 값 → 올바르게는 0.618이다.
3번 O: $\omega_g^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$이므로 맞는 값이다.
4번 X: 0.786은 ω_g의 값에 가깝고 ω_g^2의 값이 아니다. 틀린 표현은 제곱값과 주파수값의 혼동이다. 올바르게는 $\omega_g\approx 0.786$, $\omega_g^2\approx 0.618$이다.

NoteBase

오답 포인트

시간지연 항 e^{-s} 때문에 크기까지 변한다고 오해하거나, 마지막에 ω_g를 구해 놓고 문제에서 요구한 ω_g^2와 혼동하면 틀린다. 4번은 바로 그 혼동을 노린 선지이다.

다시 나오면 이렇게 판단

주파수응답 계산 문제는 먼저 시간지연 항이 크기에 영향을 주는지 확인하고, 다음에 $|G(j\omega)| = 1$을 세운 뒤, 마지막에 문제에서 묻는 값이 ω인지 ω^2인지까지 확인하면 된다.

암기 포인트

시간지연 항은 크기 1, 이득 교차주파수는 $|G(j\omega)| = 1$, 마지막에는 요구값이 ω인지 ω^2인지 구분하는 문제이다.

NoteBase

문 11. 개루프 전달함수가 $\frac{1}{s(s+1)(s+4)}$로 주어진 시스템의 이득여유[dB]는?

① 0

② $20\log_{10} 4$

③ $20\log_{10} 20$

④ $20\log_{10} 40$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 위상교차주파수에서의 크기를 구한 뒤 이득 여유를 dB로 환산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 개루프 전달함수는 $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$이다.
구해야 할 값: 이득 여유 GM_{dB}이다.
주의할 조건: 이득 여유는 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$가 되는 위상교차주파수 ω_{pc}에서의 크기로 구한다.

사용할 공식

$GM = \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$, $GM_{dB} = 20\log_{10} GM$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이득 여유가 위상교차주파수에서 폐루프가 한계안정에 도달하려면 현재 개루프 이득을 몇 배 더 키워야 하는지를 뜻하기 때문이다.

계산 과정

1. 위상은 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}(\omega/4)$이다.
2. 위상교차 조건 $-90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}(\omega/4) = -180^\circ$에서 $\tan^{-1}\omega + \tan^{-1}(\omega/4) = 90^\circ$가 된다.
양수 구간에서는 두 각의 합이 90°이면 곱이 1이므로 $\omega \cdot \omega/4 = 1$, 따라서 $\omega_{pc} = 2$이다.
3. $\omega = 2$에서 크기는 $|G(j2)| = \frac{1}{|j2||1+j2||4+j2|} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{20}$이다.
4. 따라서 $GM = 20$, $GM_{dB} = 20\log_{10} 20$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 0 dB라면 위상교차주파수에서 $|G(j\omega_{pc})| = 1$이어야 한다. 실제로는 $|G(j2)| = 1/20$이므로 틀리다. 틀린 표현은 '이득 여유가 0 dB이다'이고, 올바르게는 '이득 여유가 $20\log_{10} 20$ dB이다'이다.
② X: 위상교차주파수에서 필요한 이득 증가는 4배가 아니라 20배이다. 틀린 표현은 '이득 여유가 $20\log_{10} 4$ dB이다'이고, 올바르게는 '이득 여유가 $20\log_{10} 20$ dB이다'이다. 이 값은 위상교차주파수에서 각 극의 크기 기여를 일부 누락하면 나오는 오답이다.
③ O: $\omega_{pc} = 2$에서 $|G(j2)| = 1/20$이므로 이득 여유는 20배이고, dB로는 $20\log_{10} 20$이다. 따라서 옳다.
④ X: 위상교차주파수에서 분모 크기는 40이 아니라 20이다. 틀린 표현은 '이득 여유가 $20\log_{10} 40$ dB이다'이고, 올바르게는 '이득 여유가 $20\log_{10} 20$ dB이다'이다. 이 값은 크기 항을 중복해서 곱한 계산 실수이다.

오답 포인트

이득 여유 문제에서 가장 흔한 실수는 위상교차주파수를 찾지 않고 임의의 주파수에서 크기를 계산하는 경우이다. 이 문항에서는 적분극이 이미 -90°를 주므로 나머지 두 실극이 합쳐서 -90°를 만드는 $\omega_{pc} = 2$를 먼저 잡아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

개루프 안정도 계산은 먼저 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$가 되는 주파수를 찾고, 그다음 그 주파수에서의 크기를 계산한 뒤, 마지막에 역수를 취해 $20\log_{10}$으로 환산하는 순서로 판단한다.

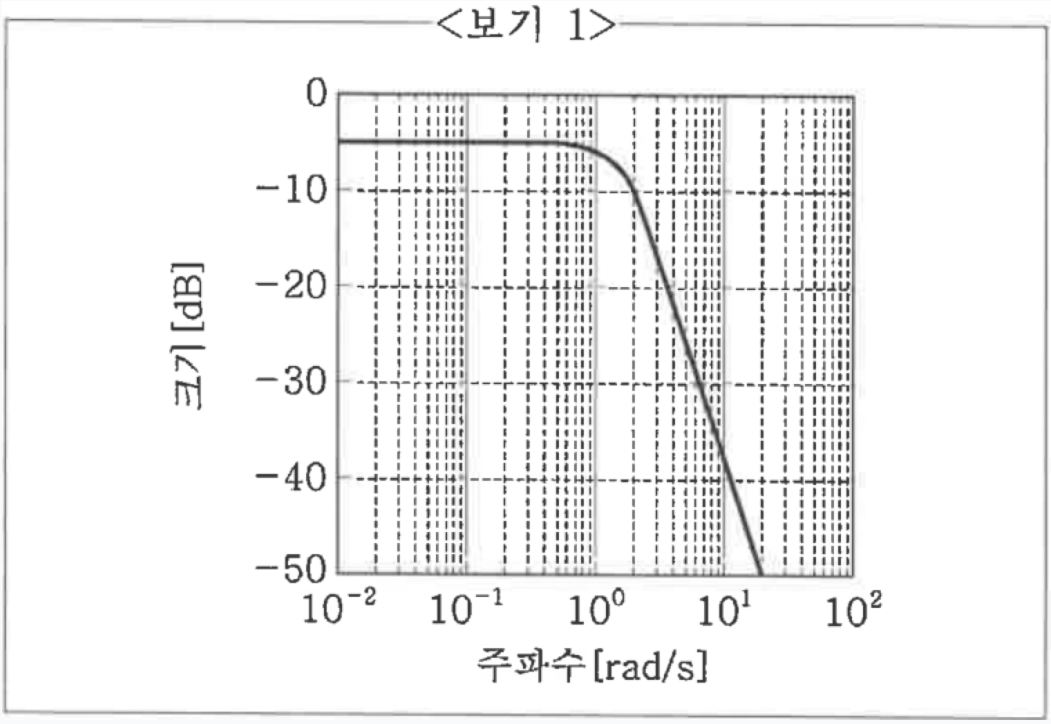
암기 포인트

이득 여유는 $\angle G = -180^\circ$에서의 크기의 역수이고, dB 값은 $20\log_{10} GM$이다.

NoteBase

문 12. <보기 1>은 분모가 2차이며 안정한 전달함수 G(s)의 보데(Bode) 크기 선도이다. <보기 2>에서 G(s)에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기 1>



<보기 2>

ㄱ. G(s)는 유한한 영점을 가지지 않는다.

ㄴ. $G(s)\frac{s-a}{s+a}$의 보데 크기 선도는 G(s)의 보데 크기 선도와 동일하다. (단, $a > 0$이다.)

ㄷ. G(s)와 크기 특성이 동일하며 안정한 모든 전달함수들 중에서 G(s)의 위상각이 최대이다.

① ㄱ, ㄴ

② ㄱ, ㄷ

③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 보데 크기선도에서 고주파 기울기와 전 주파수 크기 불변 인자를 읽어 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 진위를 판별할 수 있는지를 묻는다.

NoteBase

선지별 해설

1번 O: ㄱ, ㄴ의 조합이다. ㄱ은 고주파 기울기가 $-40dB/dec$이므로 분모 2차에 대해 유한 영점 수가 0개여야 성립한다. ㄴ은 $\left|\frac{j\omega-a}{j\omega+a}\right|=1$ 이므로 $G(s)\frac{s-a}{s+a}$는 모든 주파수에서 크기선도가 같다.
2번 X: ㄱ은 맞지만 ㄷ이 틀리므로 오답이다. 틀린 표현은 'ㄱ, ㄷ'이며 올바르게는 'ㄱ, ㄴ'이다. ㄷ은 같은 크기 특성을 갖는 안정한 전달함수라도 올패스 인자나 시간지연이 붙으면 위상은 달라질 수 있어, 이 그래프만으로 $G(s)$의 위상이 최대라고 단정할 수 없다.
3번 X: ㄴ은 맞지만 ㄷ이 틀리므로 오답이다. 틀린 표현은 'ㄴ, ㄷ'이며 올바르게는 'ㄱ, ㄴ'이다. ㄱ을 빠뜨리면 고주파 기울기에서 읽히는 유한 영점 0개의 정보를 놓치게 된다.
4번 X: ㄱ, ㄴ은 맞지만 ㄷ이 틀리므로 오답이다. 틀린 표현은 'ㄱ, ㄴ, ㄷ'이며 올바르게는 'ㄱ, ㄴ'이다. 크기선도 동일성은 위상 최대성까지 보장하지 않는다.

오답 포인트

ㄴ의 올패스 성질만 기억하고 ㄷ까지 같이 맞다고 넘기기 쉽다. 그러나 보데 크기선도는 크기만 보여 줄 뿐 위상은 올패스 인자나 시간지연 때문에 달라질 수 있으므로, '크기가 같다'와 '위상이 최대이다'를 같은 말로 처리하면 틀린다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 고주파 기울기로 극과 영점의 개수 차를 읽고, 그다음 크기를 바꾸지 않는 인자 여부를 본다. 마지막으로 위상에 대한 단정이 나오면 최소위상 조건이나 시간지연 배제 조건이 따로 주어졌는지를 확인한 뒤 판단한다.

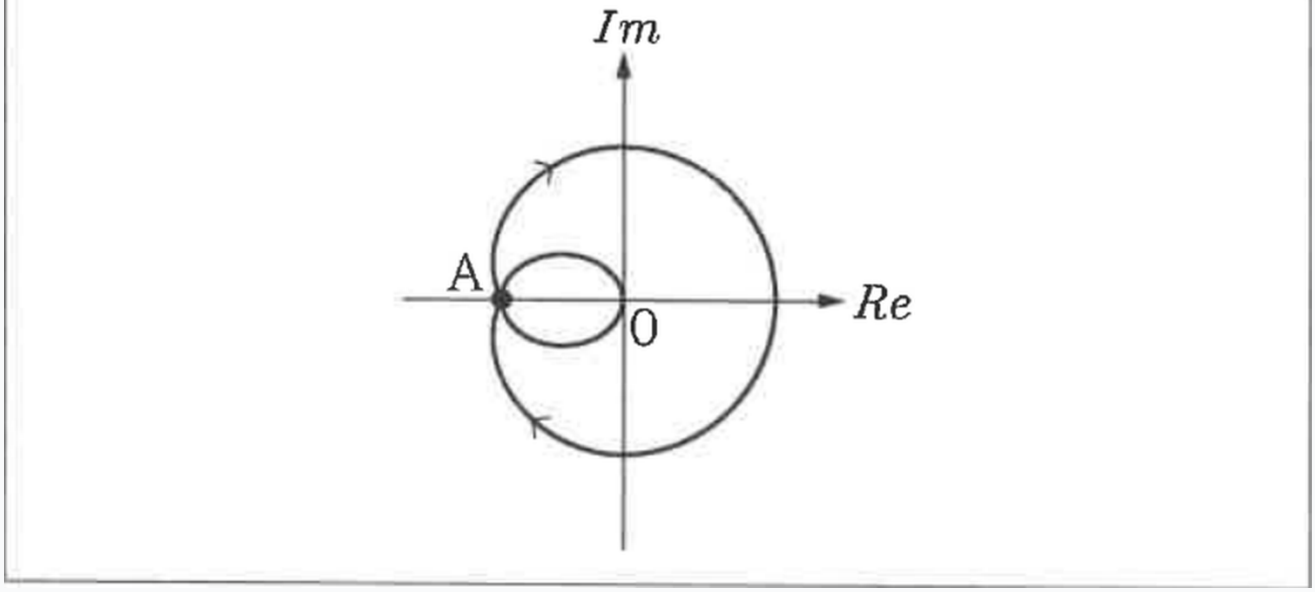
암기 포인트

고주파 기울기 $-40dB/dec$와 분모 2차가 만나면 유한 영점은 0개이다. $\frac{s-a}{s+a}$는 크기는 그대로 두고 위상만 바꾸는 대표 인자이다.

NoteBase

문 13. <보기>는 전달함수 $G(s)=\frac{-s+1}{s^2+4s+3}$의 나이퀴스트(Nyquist) 선도이다. 전달함수 $H(s)=\frac{-2s+4}{s^2+8s+12}$의 이득여유[$dB$]과 위상교차주파수[$rad/s$]를 옳게 짝지은 것은? (단, 점 A는 $-0.2512+j0$이며, 이 점에 해당하는 각주파수는 $2.65[rad/s]$이다. $\log(0.2512)=-0.6$으로 가정한다.)

<보기>



① 이득여유[dB]: 3, 위상교차주파수[rad/s]: 2.65

② 이득여유[dB]: 6, 위상교차주파수[rad/s]: 2.65

③ 이득여유[dB]: 6, 위상교차주파수[rad/s]: 5.3

④ 이득여유[dB]: 12, 위상교차주파수[rad/s]: 5.3

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 $H(s)=G(s/2)$ 관계를 이용해 위상교차주파수의 배율 변화를 찾고, 위상교차점의 크기에서 이득여유를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $G(s)=\frac{-s+1}{s^2+4s+3}$의 나이퀴스트 선도에서 점 $A=-0.2512+j0$와 그 점의 각주파수 2.65 rad/s이다. 구해야 할 값은 $H(s)=\frac{-2s+4}{s^2+8s+12}$의 이득여유와 위상교차주파수이다. 점 A는 음의 실수축 위 점이므로 위상교차점에 해당한다.

NoteBase

사용할 공식

$G(s/2) = \frac{-s/2+1}{s^2/4+2s+3} = \frac{-2s+4}{s^2+8s+12} = H(s)$이다. 따라서 H의 나이퀴스트 선도는 G와 모양이 같고, 같은 점에 대응하는 주파수만 2배가 된다. 이득여유는 위상교차점에서 $GM = \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$, dB값은 $20\log GM$으로 구한다.

계산 과정

1. $H(s) = G(s/2)$이므로 $H(j\omega) = G(j\omega/2)$이다. 따라서 G가 2.65 rad/s에서 점 A를 지나면 H는 그 2배인 5.3 rad/s에서 같은 점 A를 지난다.
2. 위상교차주파수에서의 크기는 $|A| = 0.2512$이므로 이득여유는 $GM = \frac{1}{0.2512} \approx 3.98$이다.
3. dB로 바꾸면 $20\log(3.98) = -20\log(0.2512) = -20 \times (-0.6) = 12$ dB이다. 따라서 위상교차주파수는 5.3 rad/s, 이득여유는 12 dB이다.

선지별 해설

① X: 위상교차주파수를 2.65 rad/s로 둔 부분이 틀렸다. 2.65 rad/s는 G에서의 값이고, $H(s) = G(s/2)$이므로 H에서는 5.3 rad/s가 된다. 또한 이득여유도 3 dB가 아니라 12 dB이다.
② X: 이득여유를 6 dB로 본 부분이 틀렸다. $|A| = 0.2512$이면 $GM_{dB} = -20\log(0.2512) = 12$ dB이다. 위상교차주파수도 2.65 rad/s가 아니라 5.3 rad/s이다.
③ X: 위상교차주파수 5.3 rad/s는 맞지만 이득여유 6 dB가 틀렸다. 올바르게는 이득여유 12 dB이다.
④ O: $H(s) = G(s/2)$이므로 위상교차주파수는 2배인 5.3 rad/s가 되고, 점 A의 크기에서 구한 이득여유는 12 dB가 된다.

오답 포인트

전달함수의 시간축 스케일 변환을 놓치면 위상교차주파수를 그대로 2.65 rad/s로 적기 쉽다. 또 이득여유를 dB로 바꿀 때 전력비처럼 10log를 쓰면 6 dB 오답이 나오기 쉽다. 이 문제는 주파수 스케일과 20log 사용 여부를 동시에 묻는 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

새 전달함수가 원래 전달함수의 $G(s/a)$ 꼴인지 먼저 본다. 이 꼴이면 나이퀴스트의 모양은 같고 같은 점에 대응하는 주파수는 a배가 된다. 그다음 음의 실수축 교점의 크기 $|A|$로 $GM_{dB} = -20\log|A|$를 계산하면 된다.

암기 포인트

$H(s) = G(s/a)$이면 나이퀴스트 모양은 같고 주파수만 a배가 되며, 음의 실수축 교점 A에서 이득여유[dB]는 $-20\log|A|$이다.

NoteBase

문 14. 전달함수 $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{2s^2+4s+8}$로 표현되는 선형 시불변 시스템의 정상상태 출력이 $y(t)=\sin 2t$라고 할 때, 입력 신호 $u(t)$로 가장 옳은 것은? (단, $t\geq 0$, $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$, $U(s)=\mathcal{L}\{u(t)\}$이다.)

① $4\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$

② $4\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$

③ $8\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$

④ $8\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 주파수 $\omega=2$에서의 전달함수 값을 이용해 정상상태 출력 $y(t)=\sin 2t$를 만드는 입력의 진폭과 위상을 역산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 전달함수는 $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{2s^2+4s+8}$이다. 정상상태 출력은 $y(t)=\sin 2t$이다.
구해야 할 값: 입력 $u(t)$의 진폭과 위상이다.
주의할 조건: 정상상태 정현파 응답에서는 $s=j\omega$를 대입한 주파수응답의 크기와 위상을 사용한다.

사용할 공식

사용 공식은 $G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$와 정현파 정상상태 응답의 크기비·위상차이다.
이 공식을 쓰는 이유: 출력이 $\sin 2t$인 정현파이므로 $\omega=2$에서 시스템이 입력 진폭을 얼마나 줄이고 위상을 얼마나 지연시키는지만 알면 입력을 바로 역으로 구할 수 있다.

계산 과정

1. $\omega=2$를 대입하면 $G(j2)=\frac{1}{2(j2)^2+4(j2)+8}=\frac{1}{-8+j8+8}=\frac{1}{j8}$이다.
2. 따라서 $G(j2)=\frac{1}{8}e^{-j\pi/2}$이므로 크기는 $\frac{1}{8}$, 위상은 $-\frac{\pi}{2}$이다.
3. 입력을 $u(t)=A\sin(2t+\phi)$라 두면 출력은 $y(t)=\frac{A}{8}\sin\left(2t+\phi-\frac{\pi}{2}\right)$가 된다.
4. 이것이 $\sin 2t$와 같아야 하므로 $\frac{A}{8}=1$, $\phi-\frac{\pi}{2}=0$이다. 따라서 $A=8$, $\phi=\frac{\pi}{2}$이다.
5. 입력은 $u(t)=8\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$이다.

NoteBase

선지 판단

1번 X: $4\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$는 진폭이 4라서 시스템의 크기 $\frac{1}{8}$를 거친 출력 진폭이 $\frac{1}{2}$밖에 되지 않는다. 위상도 $-\frac{\pi}{2}$로 시작해 출력은 추가로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 더 지연된다. 올바르게는 $8\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$이다.
2번 X: $4\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$는 위상 선행은 맞지만 진폭이 4라서 출력 진폭이 1이 아니라 $\frac{1}{2}$가 된다. 올바르게는 진폭을 8로 보정한 $8\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$이다.
3번 X: $8\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$는 진폭은 맞지만 입력 위상이 잘못되었다. 시스템이 다시 $-\frac{\pi}{2}$만큼 지연시키므로 출력은 $\sin(2t-\pi)$가 되어 $\sin 2t$가 아니다. 올바르게는 $+\frac{\pi}{2}$만큼 선행한 $8\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$이다.
4번 O: $8\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$를 입력하면 시스템이 진폭을 $\frac{1}{8}$로 줄여 출력 진폭이 1이 되고, 위상을 $-\frac{\pi}{2}$만큼 지연시켜 정확히 $\sin 2t$가 된다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 크기와 위상을 따로 보지 않고 하나만 맞추는 데 있다. 2번은 위상만 맞고 진폭이 틀리며, 3번은 진폭만 맞고 위상이 틀린다. 또한 $\frac{1}{j}=e^{-j\pi/2}$의 위상을 $+\frac{\pi}{2}$로 착각하면 3번을 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

정현파 정상상태 입력 문제는 먼저 $G(j\omega)$를 구해 크기와 위상을 분리하고, 그다음 출력의 진폭과 위상을 맞추도록 입력의 진폭은 역수만큼 보정하고 위상은 지연량의 반대 방향으로 보상하면 된다.

암기 포인트

$G(j\omega)=|G(j\omega)|\angle\theta$이면 입력은 출력보다 진폭을 $\frac{1}{|G|}$배 크게 하고 위상은 $-\theta$만큼 미리 보상한 형태가 된다.

NoteBase

문 15. 주파수 응답에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, 입력은 $R(j\omega)$, 출력은 $Y(j\omega)$이고, $Y(j\omega) = M(j\omega)R(j\omega)$이다.)

① 첨두공진치는 $|M(j\omega)|$의 최댓값으로, 안정한 피드백 제어시스템의 상대적 안정도에 대한 척도가 될 수 있다.

② 대역폭은 $|M(j\omega)|$가 주파수 0일 때의 값에 비해 66.7%로 떨어질 때의 주파수로 정의한다.

③ 차단율은 높은 주파수에서 $|M(j\omega)|$의 기울기를 의미하며, 두 개의 시스템이 동일한 대역폭을 가지더라도 차단율은 서로 다를 수 있다.

④ 공진주파수는 첨두공진치가 발생할 때의 주파수를 의미한다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 주파수 응답의 대표 지표인 첨두공진치, 대역폭, 차단율, 공진주파수의 정의를 정확히 구별할 수 있는지를 묻는다.

핵심 개념

첨두공진치: $|M(j\omega)|$의 최대값으로, 폐루프계가 공진에 얼마나 민감한지를 보여 주는 값이다. 키워드는 최대값, 상대적 안정도이다.
대역폭: $|M(j\omega)|$가 $\omega = 0$에서의 값의 70.7%까지 떨어지는 주파수 범위의 경계이다. 키워드는 70.7%, $-3dB$이다.
차단율: 고주파 영역에서 $|M(j\omega)|$가 감소하는 기울기이다. 키워드는 고주파 기울기, 감쇠 속도이다.
공진주파수: 첨두공진치가 나타나는 주파수이다. 키워드는 공진점, 최대응답 주파수이다.

선지별 해설

1번 O: 첨두공진치는 $|M(j\omega)|$의 최대값을 뜻하며, 값이 클수록 공진이 크게 나타나 상대적 안정도가 나빠지는 경향을 읽을 수 있다. 따라서 상대적 안정도의 척도가 될 수 있다는 설명은 옳다.
2번 X: 틀린 부분은 "66.7%"이다. 대역폭은 $|M(j\omega)|$가 $\omega = 0$에서의 값에 비해 70.7%로 떨어지는 주파수, 즉 $-3dB$ 점으로 정의한다. 올바르게는 "70.7%로 떨어질 때의 주파수로 정의한다"이다.
3번 O: 차단율은 고주파 영역에서 진폭비가 얼마나 급하게 감소하는지를 나타내는 기울기이다. 대역폭이 같아도 시스템 차수나 극 배치가 다르면 고주파 감쇠 기울기는 달라질 수 있으므로 옳다.
4번 O: 공진주파수는 첨두공진치가 발생하는 주파수를 뜻한다. 최대 공진이 나타나는 지점을 말하므로 설명이 맞다.

오답 포인트

2번은 대역폭의 기준 비율을 헷갈리게 만드는 선지이다. 66.7%와 70.7%는 숫자가 비슷해 보이지만, 대역폭의 기준은 항상 70.7%, 즉 $1/\sqrt{2}$, $-3dB$라는 점이 핵심이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

주파수 응답 문항은 먼저 최대값인지, $-3dB$ 기준인지, 고주파 기울기인지, 최대값이 발생하는 주파수인지를 구분하면 된다. 최대값이면 첨두공진치, 최대값이 생기는 주파수이면 공진주파수, 70.7% 기준이면 대역폭, 고주파 감쇠 기울기이면 차단율이다.

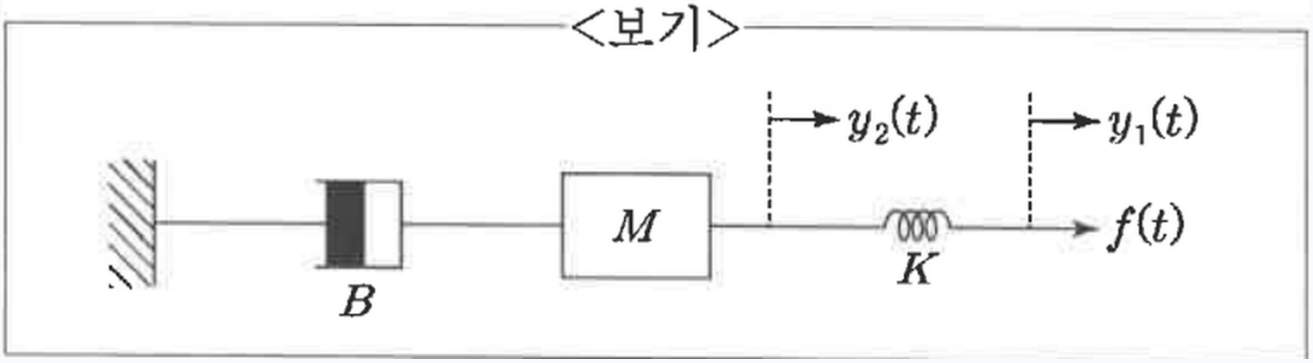
암기 포인트

첨두공진치는 최대값, 공진주파수는 그때의 주파수, 대역폭은 70.7%, 차단율은 고주파 기울기이다.

NoteBase

문 16. <보기>의 질량, 댐퍼 및 스프링으로 구성된 직선운동 시스템에서 $f(t)$는 외부에서 가한 힘이고 $y_1(t)$, $y_2(t)$는 각각의 위치에서 움직인 거리이다. 전달함수 $\frac{Y_1(s)}{F(s)}$로 가장 옳은 것은? (단, $t \geq 0$, $M = 1[kg]$, $B = 2[Ns/m]$, $K = 2[N/m]$, $Y_1(s) = \mathcal{L}\{y_1(t)\}$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ 이다.)

<보기>



① $\frac{s^2+2s+2}{s^2+4s}$
② $\frac{1}{s^2+2s}$
③ $\frac{s^2+2s+2}{2s(s+2)}$
④ $\frac{2}{s^2+2s}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 질량-댐퍼-스프링 직선운동계에서 스프링 변형식과 질량의 운동방정식을 이용해 전달함수 $\frac{Y_1(s)}{F(s)}$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $M = 1, B = 2, K = 2$이다.
구해야 할 값은 $\frac{Y_1(s)}{F(s)}$이다.
그림에서 $y_2(t)$는 질량 위치, $y_1(t)$는 힘이 작용하는 스프링 오른쪽 끝 위치이다.
초기조건은 모두 0이므로 라플라스 변환 시 초기항이 없다.

사용할 공식

질량에 작용하는 힘평형은 $M\ddot{y}_2 + B\dot{y}_2 = f(t)$이다.
스프링 힘은 $f(t) = K(y_1 - y_2)$이므로 $y_1 = y_2 + \frac{f(t)}{K}$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 외력이 스프링 오른쪽 끝에 직접 가해지므로, 스프링 내부력과 외력이 같고 y_1은 질량 변위 y_2에 스프링 변형량 $\frac{f}{K}$가 더해진 값이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 질량의 운동방정식에 $M=1, B=2$를 대입하면 $\ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 = f(t)$이다.
2. 라플라스 변환하면 $(s^2+2s)Y_2(s) = F(s)$이므로 $\frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2+2s}$이다.
3. 스프링 관계식 $f(t) = K(y_1 - y_2)$에 $K=2$를 대입하면 $y_1 = y_2 + \frac{f(t)}{2}$이다.
4. 라플라스 변환하면 $Y_1(s) = Y_2(s) + \frac{1}{2}F(s)$이다.
5. 따라서 $\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{Y_2(s)}{F(s)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{s^2+2s} + \frac{1}{2}$이다.
6. 통분하면 $\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{2+s^2+2s}{2(s^2+2s)} = \frac{s^2+2s+2}{2s(s+2)}$이다.

선지별 해설

① X: $\frac{s^2+2s+2}{s^2+4s}$는 정답식의 분모 $2s(s+2) = 2s^2+4s$에서 계수 2를 분자에 반영하지 못한 값이다. 틀린 표현은 분모가 s^2+4s라는 점이며, 올바르게는 $2s(s+2)$ 또는 $2s^2+4s$가 되어야 한다.

② X: $\frac{1}{s^2+2s}$는 $\frac{Y_2(s)}{F(s)}$만 구한 값이다. 틀린 표현은 이를 $\frac{Y_1(s)}{F(s)}$로 본 점이며, 올바르게는 스프링 변형량 $\frac{F(s)}{K}$가 추가되어 $\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2+2s} + \frac{1}{2}$가 된다.

③ O: $\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2+2s} + \frac{1}{2} = \frac{s^2+2s+2}{2s(s+2)}$이므로 옳다. 질량 변위 전달함수에 스프링 변형량 항이 더해진 형태라는 점이 핵심이다.

④ X: $\frac{2}{s^2+2s}$는 $\frac{1}{2}$를 더해야 할 자리에 분자 2를 곱한 값이다. 틀린 표현은 스프링 항을 배수항으로 처리한 점이며, 올바르게는 $\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{Y_2(s)}{F(s)} + \frac{1}{2}$이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 y_1과 y_2를 같은 위치변수로 보고 $\frac{Y_2(s)}{F(s)}$를 그대로 답으로 고르는 점이다. 또 $\frac{f}{K}$를 더해야 하는 관계를 분자 배수로 잘못 처리하면 ④ 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

질량-스프링-댐퍼 전달함수 문제는 먼저 각 변위가 어느 지점의 좌표인지 확인하고, 다음에 질량의 운동방정식으로 중간변수 Y_2를 구한 뒤, 스프링 변형식 $f = K\Delta y$로 목표변수 Y_1를 연결하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

스프링 끝점 변위는 질량 변위에 스프링 변형량을 더한 값이므로 $y_1 = y_2 + \frac{f}{K}$이다.

NoteBase

문 17. <보기>의 상태공간 모델이 관측 가능하지 않을 때, 상수 a의 조건은?

<보기>
(dx(t))/(dt)=bmatrix0&1&0\\0&1&1\\2&a&1bmatrixx(t)+bmatrix0\\1\\1bmatrixu(t)
y(t)=bmatrix1&1&0bmatrixx(t)

① $a = 0$

② $a = 2$

③ $a = 3$

④ $a = 6$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 상태공간 모델의 관측가능성을 관측행렬의 행렬식으로 판별하는 문제이다.

조건 정리

주어진 상태행렬은 A=bmatrix0&1&0; 0&1&1; 2&a&1bmatrix이고 출력행렬은 C=bmatrix1&1&0bmatrix이다.
구해야 할 값은 시스템이 관측 가능하지 않게 만드는 상수 a이다.
관측 불가능 조건은 관측행렬 O=bmatrixC^2bmatrix의 랭크가 3보다 작아지는 경우이다.

사용할 공식

관측행렬은 O=bmatrixC^2bmatrix이다.
이 문제는 3차 시스템이므로 $\det(\mathcal{O}) = 0$이면 관측 불가능, $\det(\mathcal{O}) \neq 0$이면 관측 가능이다.
여기서 CA=bmatrix0&2&1bmatrix, CA^2=bmatrix2&a+2&3bmatrix이다.

계산 과정

관측행렬은 O=bmatrix1&1&0; 0&2&1; 2&a+2&3bmatrix이다.
따라서 (O)=vmatrix1&1&0; 0&2&1; 2&a+2&3vmatrix=1·\2·3-1·(a+2)\-1·\0·3-1·2\=6-a이다.
관측 가능하지 않으려면 $\det(\mathcal{O}) = 0$이어야 하므로 $6 - a = 0$이고, 따라서 $a = 6$이다.

NoteBase

선지별 해설

1번 X: $a = 0$이면 $\det(\mathcal{O}) = 6$이므로 관측 가능하다. 틀린 표현은 '관측 가능하지 않다'이고, 올바르게는 'a=0일 때는 관측 가능하다'이다.
2번 X: $a = 2$이면 $\det(\mathcal{O}) = 4$이므로 관측 가능하다. 틀린 표현은 '관측 가능하지 않다'이고, 올바르게는 'a=2일 때는 관측 가능하다'이다.
3번 X: $a = 3$이면 $\det(\mathcal{O}) = 3$이므로 관측 가능하다. 틀린 표현은 '관측 가능하지 않다'이고, 올바르게는 'a=3일 때는 관측 가능하다'이다.
4번 O: $a = 6$이면 $\det(\mathcal{O}) = 0$이 되어 관측행렬의 랭크가 3보다 작아지므로 관측 가능하지 않다. 따라서 정답 조건을 만족한다.

오답 포인트

제어가능성 행렬 bmatrixB&AB&A^2Bbmatrix와 관측행렬 bmatrixC^2bmatrix을 혼동하기 쉽다. 또 CA와 CA^2를 구할 때 행벡터와 행렬의 곱 순서를 바꾸거나, 행렬식이 0이 아닌데도 관측 불가능으로 판단하는 실수가 자주 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

관측가능성 문제는 먼저 C, CA, CA^2를 차례로 만들어 관측행렬을 구성한 뒤, 3차 시스템이면 행렬식이 0인지 바로 확인하면 된다. 행렬식이 0이면 관측 불가능, 0이 아니면 관측 가능으로 판단한다.

암기 포인트

3차 상태공간의 관측가능성은 bmatrixC^2bmatrix=0 여부로 빠르게 판별할 수 있다.

NoteBase

문 18. $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx$ **형태의 상태공간모델로 주어진 시스템에** $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$ **형태의 상태관측기를 설계하고자 한다. A=bmatrix-3&1\\0&-1bmatrix, B=bmatrix0\\1bmatrix, C=bmatrix1&0bmatrix이라 할 때, 상태관측기 오차** $\tilde{x} = x - \hat{x}$**에 대한 상태방정식 시스템 행렬의 고윳값이** -2**와** -5**가 되도록 하는** L**로 가장 옳은 것은?**

① L=bmatrix4\\-3bmatrix

② L=bmatrix-3\\4bmatrix

③ L=bmatrix4\\3bmatrix

④ L=bmatrix3\\4bmatrix

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 상태관측기 오차방정식의 시스템 행렬을 $A - LC$로 두고, 원하는 고유값에 맞도록 L을 극배치하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 A=bmatrix-3&1; 0&-1bmatrix, C=bmatrix1&0bmatrix이다. 구해야 할 값은 관측기 이득 L=bmatrixl_1_2bmatrix이다. 원하는 오차동역학의 고유값은 -2, -5이므로 목표 특성방정식은 $(s + 2)(s + 5) = s^2 + 7s + 10$이다.

사용할 공식

관측기 오차를 $\tilde{x} = x - \hat{x}$라 두면 $\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$가 된다. 따라서 $A - LC$의 특성방정식을 구해 목표 다항식 $s^2 + 7s + 10$와 계수를 일치시키면 된다. 이 공식을 쓰는 이유는 관측기 오차의 수렴 속도와 형태를 결정하는 것이 바로 $A - LC$의 고유값이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. L=bmatrixl_1_2bmatrix이면 LC=bmatrixl_1&0_2&0bmatrix이다.
2. 따라서
A-LC=bmatrix-3-l_1&1; -l_2&-1bmatrix
이다.
3. 특성방정식은
≤ft(sI-(A-LC))=vmatrixs+3+l_1&-1_2&s+1vmatrix=(s+3+l_1)(s+1)+l_2
이므로
$s^2 + (4 + l_1)s + (3 + l_1 + l_2)$
가 된다.
4. 이를 목표 다항식 $s^2 + 7s + 10$와 비교하면
$4 + l_1 = 7, \quad 3 + l_1 + l_2 = 10$
이므로 $l_1 = 3, l_2 = 4$이다.
5. 따라서 L=bmatrix3; 4bmatrix이므로 정답은 4번이다.

선지 판단

1번 X: L=bmatrix4; -3bmatrix이면 특성방정식은 $s^2 + 8s + 4$가 된다. 목표인 $s^2 + 7s + 10$와 계수가 모두 맞지 않는다. 틀린 표현은 L=bmatrix4; -3bmatrix이다. 올바르게는 L=bmatrix3; 4bmatrix이다.
2번 X: L=bmatrix-3; 4bmatrix이면 특성방정식은 $s^2 + s + 4$가 된다. s의 계수와 상수항이 모두 목표와 다르다. 틀린 표현은 L=bmatrix-3; 4bmatrix이다. 올바르게는 L=bmatrix3; 4bmatrix이다.
3번 X: L=bmatrix4; 3bmatrix이면 특성방정식은 $s^2 + 8s + 10$이 된다. 상수항 10은 맞지만 s의 계수가 8로 틀리다. 틀린 표현은 L=bmatrix4; 3bmatrix이다. 올바르게는 L=bmatrix3; 4bmatrix이다.
4번 O: L=bmatrix3; 4bmatrix이면 특성방정식은 $s^2 + 7s + 10 = (s + 2)(s + 5)$가 된다. 원하는 고유값 -2, -5를 정확히 만족하므로 옳다.

오답 포인트

관측기 오차방정식을 $A + LC$로 잘못 두거나, 계수 비교에서 한 항만 맞추고 나머지를 놓치면 3번 같은 오답에 걸린다. 특히 3번은 상수항만 맞아서 맞는 값처럼 보이지만 s의 계수까지 함께 비교해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

관측기 설계 문제는 먼저 오차를 $\tilde{x} = x - \hat{x}$로 두고 $\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$를 만든다. 그다음 $A - LC$의 특성방정식을 전개한 뒤 목표 고유값으로 만든 다항식과 계수를 일치시키면 된다.

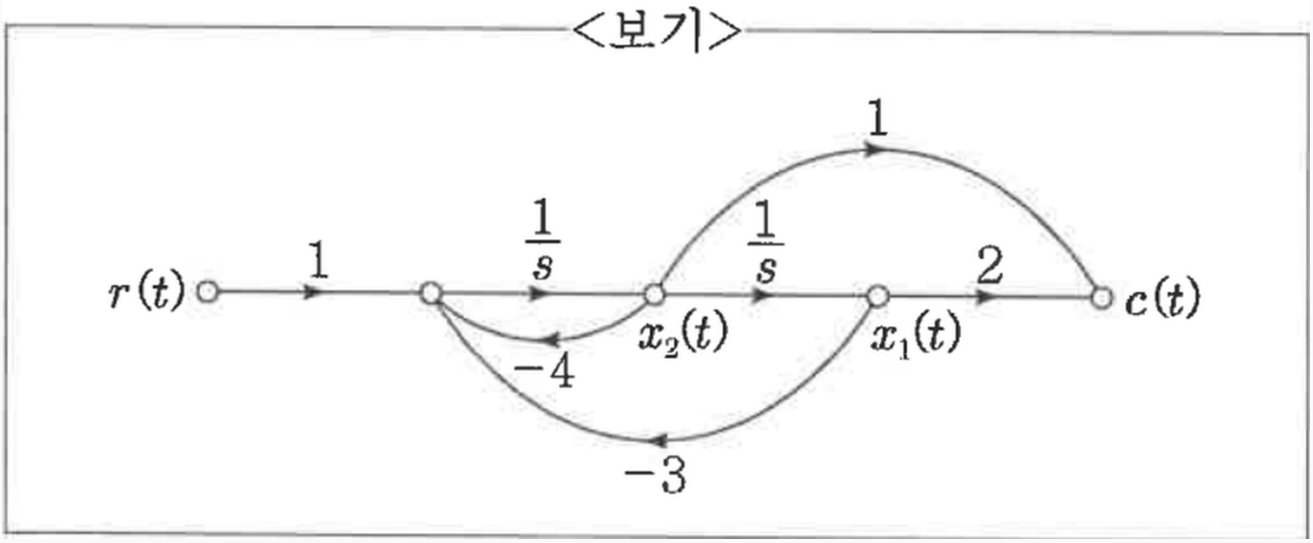
암기 포인트

관측기 극배치는 $A - LC$, 상태피드백 극배치는 $A - BK$이다. 극배치 계산은 특성방정식 계수 비교로 정리된다.

NoteBase

문 19. <보기>의 신호흐름선도에 대한 상태천이행렬로 가장 옳은 것은? (단, x(t)=bmatrixx_1(t) \ x_2(t)bmatrix 이다.)

<보기>



① bmatrix(3)/(2)e^-t-(1)/(2)e^-3t & (1)/(2)e^-t-(1)/(2)e^-3t \ -(3)/(2)e^-t+(3)/(2)e^-3t & -(1)/(2)e^-t+(3)/(2)e^-3tbmatrix

② bmatrix(3)/(2)e^-t+(1)/(2)e^-3t & (1)/(2)e^-t-(1)/(2)e^-3t \ -(3)/(2)e^-t+(3)/(2)e^-3t & -(1)/(2)e^-t+(3)/(2)e^-3tbmatrix

③ bmatrix(3)/(2)e^-t-(1)/(2)e^-3t & (1)/(2)e^-t+(1)/(2)e^-3t \ -(3)/(2)e^-t+(3)/(2)e^-3t & -(1)/(2)e^-t+(3)/(2)e^-3tbmatrix

④ bmatrix(3)/(2)e^-t-(1)/(2)e^-3t & (1)/(2)e^-t-(1)/(2)e^-3t \ -(3)/(2)e^-t-(3)/(2)e^-3t & (1)/(2)e^-t+(3)/(2)e^-3tbmatrix

정답 1번

출제 포인트

신호흐름선도에서 상태방정식의 상태행렬 A를 읽어 상태천이행렬 $\Phi(t) = e^{At}$를 구하는 문제이다.

조건 정리

상태변수는 $x(t) = [x_1(t)x_2(t)]^T$이다. 도식에서 첫 번째 적분기 출력이 $x_2(t)$, 두 번째 적분기 출력이 $x_1(t)$이므로 $\dot{x}_1 = x_2$이다. 첫 번째 적분기 입력은 $-3x_1 - 4x_2 + r(t)$이므로 $\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + r(t)$이다. 따라서 상태행렬은 A=bmatrix0&1; -3&-4bmatrix이다.

NoteBase

사용할 공식

상태천이행렬은 $\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$이다. 이 공식을 쓰는 이유는 신호흐름선도에서 이미 상태행렬 A를 바로 읽을 수 있으므로 $(sI - A)^{-1}$를 구해 역라플라스 변환하면 각 원소를 정확하게 얻을 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. sI-A=bmatrixs&-1; 3&s+4bmatrix이다.
2. (sI-A)^-1=1s^2+4s+3bmatrixs+4&1; -3&sbmatrix=1(s+1)(s+3)bmatrixs+4&1; -3&sbmatrix이다.
3. 각 원소를 부분분수로 나누면 $\frac{s+4}{(s+1)(s+3)} = \frac{3/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+3}$, 1(s+1)(s+3)=(1/2)/(s+1)-(1/2)/(s+3), $\frac{-3}{(s+1)(s+3)} = \frac{-3/2}{s+1} + \frac{3/2}{s+3}$, $\frac{s}{(s+1)(s+3)} = \frac{-1/2}{s+1} + \frac{3/2}{s+3}$이다.
4. 따라서 (t)=e^At=bmatrix(3)/(2)e^-t-(1)/(2)e^-3t&(1)/(2)e^-t-(1)/(2)e^-3t; -(3)/(2)e^-t+(3)/(2)e^-3t&-(1)/(2)e^-t+(3)/(2)e^-3tbmatrix 이다.

선지별 해설

① O: 계산으로 구한 $\Phi(t)$와 완전히 일치한다. 또한 $t = 0$을 대입하면 I가 되어 상태천이행렬의 기본조건도 만족한다.

② X: $(1, 1)$ 원소가 $\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$이면 $t = 0$에서 2가 되어 $\Phi(0) = I$를 만족하지 못한다. 틀린 표현은 $+\frac{1}{2}e^{-3t}$이고, 올바르게는 $-\frac{1}{2}e^{-3t}$이다.

③ X: $(1, 2)$ 원소가 $\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$이면 $t = 0$에서 1이 되어 비대각 원소가 0이어야 한다는 조건을 깨뜨린다. 틀린 표현은 $+\frac{1}{2}e^{-3t}$이고, 올바르게는 $-\frac{1}{2}e^{-3t}$이다.

④ X: 아래 행의 두 원소 부호가 잘못되었다. 이 보기는 $t = 0$에서 bmatrix1&0; -3&2bmatrix가 되어 $\Phi(0) = I$를 만족하지 못한다. 올바르게는 $(2, 1)$ 원소가 $-\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t}$, $(2, 2)$ 원소가 $-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t}$이다.

오답 포인트

출력식 $c(t) = x_2 + 2x_1$를 상태방정식과 섞거나, 적분기 출력의 순서를 반대로 읽으면 상태행렬 자체가 틀어진다. 또한 상태천이행렬은 반드시 $\Phi(0) = I$를 만족하므로 부호 하나가 헷갈릴 때는 $t = 0$ 검산으로 바로 걸러낼 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

신호흐름선도 문제는 적분기 출력이 어떤 상태인지부터 정하고, 적분기 직전 신호를 각 상태의 미분으로 읽어 A를 만든 뒤, $(sI - A)^{-1}$ 또는 고유값으로 $\Phi(t)$를 구한다. 마지막에는 반드시 $t = 0$을 넣어 단위행렬이 되는지 검산한다.

암기 포인트

적분기 출력이 상태이고, 상태천이행렬은 항상 $\Phi(0) = I$이다.

문 20. <보기 1>의 2차 상태공간 방정식의 상태를 이용하여 정의된 새로운 변수 $z_1 = x_1 + cx_2,\ z_2 = dx_1 + x_2$가 <보기 2>를 만족한다고 할 때, $a+b+c+d$로 가장 옳은 것은? (단, $a,\ b,\ c,\ d$는 상수이다.)

<보기 1>

(d)/(dt)bmatrixx_1_2bmatrix=bmatrix-1&1\\0&2bmatrixbmatrixx_1_2bmatrix+bmatrixa\bmatrixu

<보기 2>

(d)/(dt)bmatrixz_1_2bmatrix=bmatrix-1&0\\0&2bmatrixbmatrixz_1_2bmatrix+bmatrix1\\-1bmatrixu

① $-\frac{4}{3}$
② $-\frac{2}{3}$
③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{3}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태변환 $z = Tx$에 대해 $TA = \bar{A}T,\ \bar{B} = TB$를 적용하여 a, b, c, d와 $a+b+c+d$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 상태행렬은 A=bmatrix-1&1; 0&2bmatrix, 입력행렬은 B=bmatrixabmatrix이다.
새 변수는 $z_1 = x_1 + cx_2, z_2 = dx_1 + x_2$이므로 $z = Tx$, T=bmatrix1&c&1bmatrix이다.
변환 후 상태방정식은 z=bmatrix-1&0; 0&2bmatrixz+bmatrix1; -1bmatrixu이다.

사용할 공식

상태변환 $z = Tx$이면 $\dot{z} = T\dot{x} = TAT^{-1}z + TBu$이다. 따라서 상태행렬은 $TAT^{-1} = \bar{A}$를 만족하고, 이는 $TA = \bar{A}T$로 바꾸어 계산할 수 있다. 입력벡터도 같은 변환행렬로 $\bar{B} = TB$를 만족해야 한다.

NoteBase

계산 과정

1. $TA = \bar{A}T$를 쓴다.
alignedT A&=bmatrix1&c&1bmatrixbmatrix-1&1; 0&2bmatrix=bmatrix-1&1+2c; -d&d+2bmatrix,;
AT&=bmatrix-1&0; 0&2bmatrixbmatrix1&c&1bmatrix=bmatrix-1&-c; 2d&2bmatrix.aligned
두 행렬을 같게 두면 $1 + 2c = -c$, $-d = 2d$이므로 $c = -1/3$, $d = 0$이다.
2. $\bar{B} = TB$를 쓴다.
alignedTB&=bmatrix1&-1/3; 0&1bmatrixbmatrixabmatrix=bmatrixa-b/3bmatrix=bmatrix1;
-1bmatrix.aligned
따라서 $b = -1$, $a + 1/3 = 1$이므로 $a = 2/3$이다.
3. 최종합은 $a + b + c + d = 2/3 - 1 - 1/3 + 0 = -2/3$이다.

선지 판단

1번(X): 선택지 값은 $-4/3$이다. 실제 계산값은 $-2/3$이므로 틀리다. 틀린 표현은 $-4/3$이고, 올바르게는 $-2/3$이다.
2번(O): $c = -1/3$, $d = 0$, $b = -1$, $a = 2/3$이므로 $a + b + c + d = -2/3$가 된다. 계산 결과와 일치하므로 옳다.
3번(X): 선택지 값은 $2/3$이다. 실제 계산값은 $-2/3$이므로 틀리다. 틀린 표현은 $2/3$이고, 올바르게는 $-2/3$이다.
4번(X): 선택지 값은 $4/3$이다. 실제 계산값은 $-2/3$이므로 틀리다. 틀린 표현은 $4/3$이고, 올바르게는 $-2/3$이다.

오답 포인트

상태변환 문제에서 가장 흔한 실수는 $TAT^{-1} = \bar{A}$를 바로 전개하다가 식을 복잡하게 만드는 경우와, $TB = \bar{B}$에서 $b = -1$의 부호를 놓치는 경우이다. 이 문항은 $TA = \bar{A}T$로 단순화한 뒤 상태행렬과 입력행렬을 따로 맞추면 실수가 줄어든다.

다시 나오면 이렇게 판단

새 상태변수가 주어지면 먼저 $z = Tx$의 형태로 행렬 T를 만든다. 다음으로 $TA = \bar{A}T$에서 변환계수 c, d를 구하고, 이어서 $TB = \bar{B}$에서 a, b를 구한 뒤 마지막에 요구한 조합값을 계산하면 된다.

암기 포인트

상태변환 $z = Tx$의 핵심식은 $\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu$이며, 계산은 보통 $TA = \bar{A}T$로 바꾸면 가장 빠르다.

NoteBase