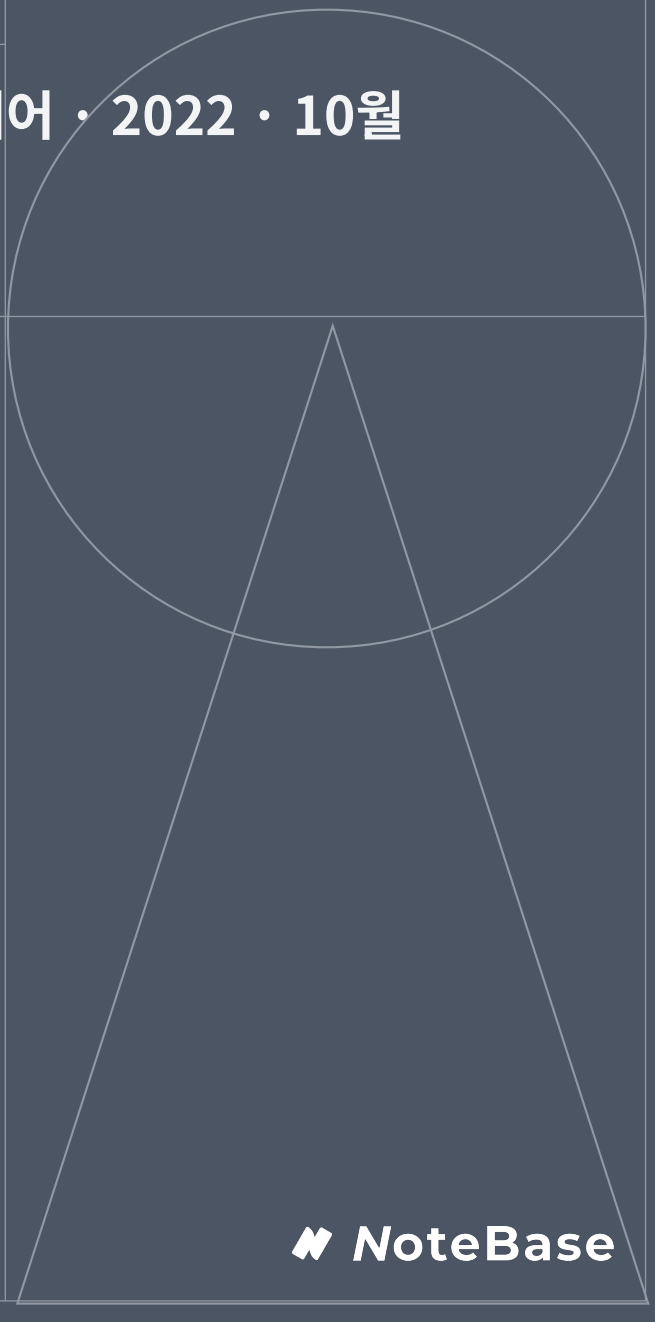
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2022 · 10월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2022 · 10월

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2022 · 10월

문 1. $(0.5-j0.5)e^{(-1+j2)t}$**의 실수부는?**

① $0.25e^{-t}\cos(t)-0.25e^{-t}\sin(t)$

② $0.25e^{-t}\cos(t)+0.25e^{-t}\sin(t)$

③ $0.5e^{-t}\cos(2t)-0.5e^{-t}\sin(2t)$

④ $0.5e^{-t}\cos(2t)+0.5e^{-t}\sin(2t)$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 오일러 공식으로 $e^{(-1+j2)t}$를 삼각함수형으로 바꾼 뒤 복소수 곱의 실수부를 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 식은 $(0.5-j0.5)e^{(-1+j2)t}$이다.
구해야 할 값은 전체 식의 실수부이다.
주의할 조건은 $e^{(-1+j2)t}=e^{-t}e^{j2t}$로 분리한 뒤 $e^{j2t}=\cos 2t+j\sin 2t$를 적용해야 한다는 점이다.

사용할 공식

사용 공식은 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$이다.
이 문제는 지수부에 실수부 $-t$와 허수부 $j2t$가 함께 있으므로 $e^{(-1+j2)t}=e^{-t}(\cos 2t+j\sin 2t)$로 바꾸면 실수부를 직접 정리할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

1. $e^{(-1+j2)t} = e^{-t}(\cos 2t + j\sin 2t)$로 쓴다.
2. 따라서
$(0.5 - j0.5)e^{(-1+j2)t} = e^{-t}(0.5 - j0.5)(\cos 2t + j\sin 2t)$
이다.
3. 곱을 전개하면
$(0.5 - j0.5)(\cos 2t + j\sin 2t) = 0.5\cos 2t + 0.5\sin 2t + j(0.5\sin 2t - 0.5\cos 2t)$
이다.
4. 따라서 실수부는 $0.5e^{-t}\cos 2t + 0.5e^{-t}\sin 2t$이다.

선지 판단

① X: $\cos t$, $\sin t$가 들어가 있어 각주파수를 2가 아니라 1로 잘못 읽었다. 또한 계수도 0.25로 줄어 있어 틀리며, 올바르게는 $0.5e^{-t}\cos 2t + 0.5e^{-t}\sin 2t$이다.
② X: ①과 같이 $2t$를 t로 잘못 바꾼 선지이다. 부호는 일부 맞아 보여도 주기와 계수가 모두 틀리며, 올바르게는 $0.5e^{-t}\cos 2t + 0.5e^{-t}\sin 2t$이다.
③ X: $\cos 2t$, $\sin 2t$까지는 맞지만 실수부를 구할 때 $-j \cdot j = +1$을 놓쳐 $\sin 2t$ 항의 부호를 음수로 잘못 두었다. 올바르게는 $0.5e^{-t}\cos 2t - 0.5e^{-t}\sin 2t$가 아니라 $0.5e^{-t}\cos 2t + 0.5e^{-t}\sin 2t$이다.
④ O: $e^{-t}(0.5 - j0.5)(\cos 2t + j\sin 2t)$의 실수부를 정확히 정리한 값이다.

오답 포인트

지수부의 $j2t$를 보고도 $\cos 2t$, $\sin 2t$가 아니라 $\cos t$, $\sin t$로 쓰는 실수가 잦다. 또 복소수 곱에서 $-j \cdot j = +1$을 놓치면 ③처럼 $\sin 2t$ 항의 부호가 뒤집힌다.

다시 나오면 이렇게 판단

복소지수의 실수부 문제는 먼저 $e^{at}e^{jbt}$로 분리하고, 다음에 $e^{jbt} = \cos bt + j\sin bt$를 적용한 뒤 마지막에 실수항만 남겨 판단한다.

암기 포인트

$e^{(a+jb)t} = e^{at}(\cos bt + j\sin bt)$이고, 실수부는 삼각함수 부분을 전개한 뒤 j가 없는 항만 모은 값이다.

NoteBase

문 2. <보기>의 비선형 시스템을 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ 주변에서 선형화한 것으로 가장 옳은 것은?

<보기>

$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \sin(x_2) + \tan(x_1),\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1^3$

① $\dot{x}_1 = x_1 + x_2,\ \dot{x}_2 = 3x_1$

② $\dot{x}_1 = x_1 - x_2,\ \dot{x}_2 = 3x_1$

③ $\dot{x}_1 = x_1 + x_2,\ \dot{x}_2 = 0$

④ $\dot{x}_1 = x_1 - x_2,\ \dot{x}_2 = 0$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 비선형 상태방정식을 원점 $(x_1, x_2) = (0, 0)$에서 야코비안으로 선형화할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 식은 $\dot{x}_1 = x_1 x_2 - \sin(x_2) + \tan(x_1), \dot{x}_2 = x_1^3$이다.
선형화 기준점은 $(0, 0)$이다.
선형화에서는 1차항만 남기고 $x_1 x_2, x_1^3$ 같은 2차 이상 항은 버린다.

사용할 공식

비선형 시스템 $\dot{x} = f(x)$를 평형점 근방에서 선형화하면
$\dot{x} \approx Ax, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$
로 둔다.
이 문제는 원점 주변 선형화이므로 각 상태변수에 대한 편미분으로 야코비안 행렬을 구한 뒤, 그 값을 $(0, 0)$에 대입하면 된다.

계산 과정

$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \sin(x_2) + \tan(x_1), f_2(x_1, x_2) = x_1^3$이다.
$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2 + \sec^2(x_1), \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1 - \cos(x_2)$
$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3x_1^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$
원점에서 평가하면
A=bmatrix 1 & -1 \ 0 & 0 bmatrix
이므로 선형화된 시스템은
$\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = 0$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X: $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$는 $-\sin(x_2)$의 1차항이 $-x_2$라는 점을 놓쳐 부호가 틀렸다. 또 $\dot{x}_2 = 3x_1$도 틀리다. x_1^3의 편미분은 $3x_1^2$이고 원점에서는 0이므로 올바르게는 $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = 0$이다.
② X: $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$는 맞지만 $\dot{x}_2 = 3x_1$가 틀리다. x_1^3를 선형화하면 1차항이 남지 않으므로 올바르게는 $\dot{x}_2 = 0$이다.
③ X: $\dot{x}_2 = 0$는 맞지만 $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$의 x_2 부호가 틀리다. 올바르게는 $-\sin(x_2) \approx -x_2$이므로 $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$이다.
④ O: 야코비안의 원점 값이 bmatrix1 & -1 \ 0 & 0bmatrix이므로 $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = 0$가 정확하다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 두 가지이다. 첫째, $-\sin(x_2)$를 보고 x_2의 부호를 반대로 쓰기 쉽다. 둘째, x_1^3을 미분한 뒤 기준점 $(0, 0)$을 대입하지 않고 $3x_1$처럼 1차항으로 착각하기 쉽다. 선형화는 식을 그대로 옮기는 작업이 아니라 기준점에서의 1차 근사라는 점이 핵심이다.

다시 나오면 이렇게 판단

비선형 시스템 선형화 문제는 기준점 확인, 각 상태변수에 대한 편미분 계산, 기준점 대입, 2차 이상 항 제거의 순서로 판단한다. 특히 곱항과 3차항은 원점 선형화에서 보통 사라지는지 먼저 확인하면 된다.

암기 포인트

원점 선형화는 야코비안의 원점 값만 남긴다. x_1x_2, x_1^3 같은 2차 이상 항은 1차 선형모형에 남지 않는다.

NoteBase

문 3. <보기>와 같은 시스템에서 $x(t)$에 대한 식은?

<보기>

$\dot{x} = Ax + Bu$

① $x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$
② $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$
③ $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{At}Bu(\tau)d\tau$
④ $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(\tau-t)}Bu(\tau)d\tau$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 연속시간 선형 상태방정식 $\dot{x} = Ax + Bu$의 일반해를 정확히 쓰는지를 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\dot{x} = Ax + Bu$이다.
구해야 할 값은 상태벡터 $x(t)$의 시간응답이다.
초기상태에 의한 자유응답과 입력 $u(t)$에 의한 강제응답을 함께 포함해야 한다.

사용할 공식

연속시간 선형시스템의 상태해는 $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$이다.
이 식은 초기조건이 만드는 자유응답 $e^{At}x(0)$과 입력이 만드는 컨벌루션 적분항을 함께 나타내므로 이 문제에 그대로 적용된다.

선지별 해설

① X: $\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$만 남겨 두어 입력에 의한 강제응답만 쓴 식이다. 일반해에는 초기상태 항 $e^{At}x(0)$이 추가되어야 하므로 틀리다. 틀린 표현은 자유응답 누락이며, 올바르게는 $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$이다.
② O: 자유응답 $e^{At}x(0)$과 강제응답 $\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$를 모두 포함하고, 상태천이행렬의 시간차도 $t-\tau$로 정확하다. 상태방정식의 일반해와 일치하므로 옳다.
③ X: 적분 커널을 $e^{A\tau}$로 썼는데, 일반해의 상태천이행렬은 현재시각과 적분변수의 차이인 $e^{A(t-\tau)}$가 되어야 한다. 틀린 표현은 지수부 $A\tau$이며, 올바르게는 $A(t-\tau)$이다.
④ X: 적분 커널을 $e^{A(\tau-t)}$로 써서 시간차의 부호가 반대로 들어갔다. 일반해는 현재시각에서 과거 입력의 영향을 누적하므로 $e^{A(t-\tau)}$가 맞다. 틀린 표현은 $\tau-t$이며, 올바르게는 $t-\tau$이다.

NoteBase

오답 포인트

①처럼 초기조건 항을 빼먹거나, ③·④처럼 적분 커널의 시간차 $t-\tau$를 τ 또는 $\tau-t$로 잘못 쓰는 경우가 대표적인 함정이다. 이 문항은 자유응답과 강제응답을 함께 적고, 적분항의 지수부 부호까지 확인하는지를 노렸다.

다시 나오면 이렇게 판단

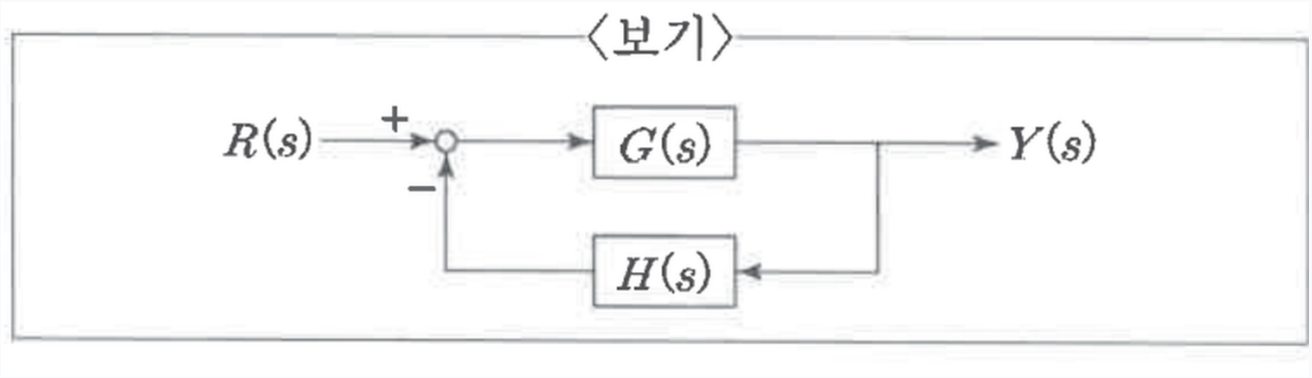
상태방정식 해를 묻는 문항은 먼저 일반해가 자유응답 $e^{At}x(0)$와 강제응답 적분항의 합인지 확인하고, 그다음 적분 커널이 반드시 $e^{A(t-\tau)}$ 형태인지 점검하면 된다.

암기 포인트

연속시간 상태해는 자유응답=e^Atx(0), 강제응답= ∫ _0^t e^A(t-τ)Bu(τ) dτ의 합이다.

NoteBase

문 4. <보기>에서 $G(s)=\frac{10}{s(s+2)}$이고 $H(s)=\frac{1}{s+1}$일 때, $R(s)$에서 $Y(s)$로의 전달함수 $G_0(s)$는?



① $\frac{s+10}{s^3+2s^2+s+1}$
② $\frac{s+10}{s^3+2s^2+2s+10}$
③ $\frac{10(s+1)}{s^3+3s^2+s+1}$
④ $\frac{10(s+1)}{s^3+3s^2+2s+10}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 음의 되먹임 폐루프에서 $G_0(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$를 적용해 $R(s)$에서 $Y(s)$까지의 전달함수를 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 값: $G(s)=\frac{10}{s(s+2)}$, $H(s)=\frac{1}{s+1}$이다.
구해야 할 값: $R(s)$에서 $Y(s)$로의 폐루프 전달함수 $G_0(s)$이다.
주의할 조건: 보기의 합점이 음의 되먹임이므로 분모가 $1-GH$가 아니라 $1+GH$가 된다.

사용할 공식

음의 되먹임 폐루프 전달함수는
$G_0(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$
이다.
이 공식을 쓰는 이유는 출력 $Y(s)$가 $H(s)$를 거쳐 합점의 음의 입력으로 되돌아가는 표준 음의 피드백 구조이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 먼저 $G(s)H(s)$를 구하면
$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{10}{s(s+2)(s+1)}$
이다.
2. 이를 폐루프 공식에 대입하면
$G_0(s) = \frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1+\frac{10}{s(s+2)(s+1)}}$
이다.
3. 분모를 통분하면
$G_0(s) = \frac{10}{s(s+2)} \cdot \frac{s(s+2)(s+1)}{s(s+2)(s+1)+10} = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+1)+10}$
이다.
4. $s(s+2)(s+1) = s(s^2+3s+2) = s^3+3s^2+2s$이므로
$G_0(s) = \frac{10(s+1)}{s^3+3s^2+2s+10}$
이 된다.

선지 판단

① X: 분자가 $10(s+1)$이 아니라 $s+10$으로 잘못 적혀 있고, 분모에도 폐루프 항 $+10$이 빠져 있다.
올바르게는 $\frac{10(s+1)}{s^3+3s^2+2s+10}$이다.
② X: 분모 끝의 $+10$은 반영했지만 분자는 여전히 $s+10$으로 잘못되었고, $s(s+2)(s+1)$ 전개에서 $3s^2$ 항을 $2s^2$로 잘못 계산했다. 올바르게는 $\frac{10(s+1)}{s^3+3s^2+2s+10}$이다.
③ X: 분자는 맞지만 분모를 s^3+3s^2+s+1로 잘못 만들었다. $s(s+2)(s+1)$는 s^3+3s^2+2s이고 여기에 피드백 항 $+10$이 더해져야 한다. 올바르게는 $\frac{10(s+1)}{s^3+3s^2+2s+10}$이다.
④ O: $G_0(s) = \frac{10(s+1)}{s^3+3s^2+2s+10}$와 정확히 일치한다.

오답 포인트

개루프 전달함수 $G(s)$만 보고 분자를 그대로 두거나, $H(s)$의 분모 $s+1$이 통분 과정에서 어떻게 반영되는지를 놓치면 ①, ②처럼 틀리기 쉽다. 또 $s(s+2)(s+1)$ 전개를 급하게 하면 $3s^2$, $2s$ 항이 무너져 ②, ③ 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

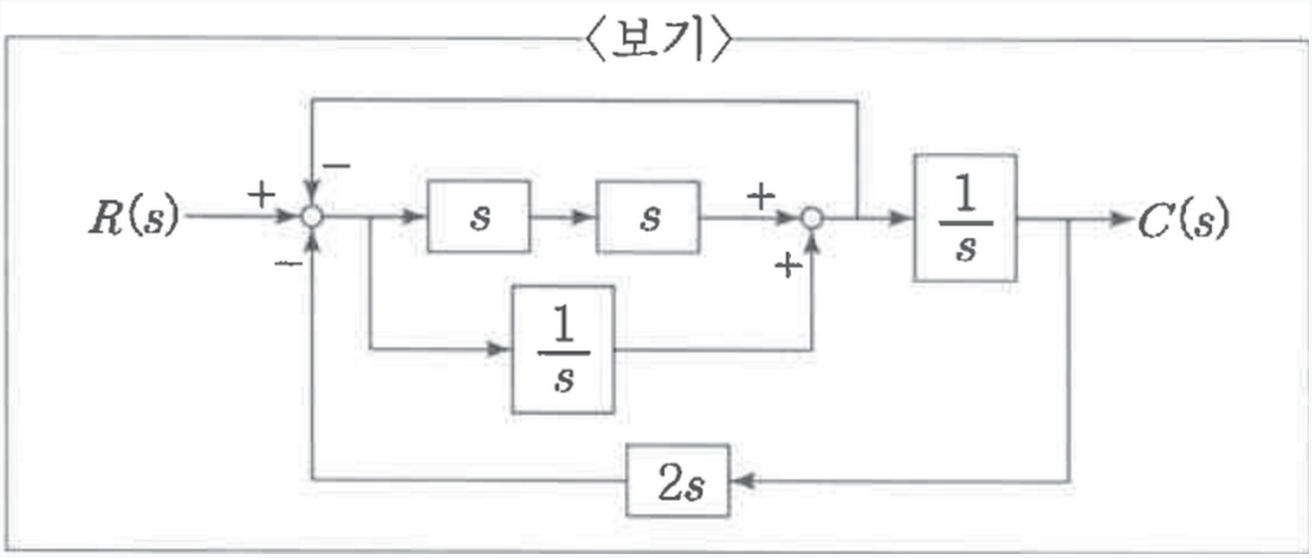
블록선도 문제는 먼저 피드백 부호를 확인하고, 음의 되먹임이면 $\frac{G}{1+GH}$를 바로 세운다. 그다음 GH를 구해 통분하고, 마지막에 다항식 전개 $s(s+2)(s+1)$만 정확히 검산하면 된다.

암기 포인트

음의 되먹임 폐루프는 $G_0 = \frac{G}{1+GH}$이고, 이 문제의 분모는 $s(s+2)(s+1)+10$으로 정리된다.

NoteBase

문 5. <보기>와 같은 블록선도를 갖는 시스템의 전달함수 $T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$는?



① $T(s)=\frac{s^3}{3s^4+s^2+3s}$
② $T(s)=\frac{s^3+1}{3s^4+s^2+3s}$
③ $T(s)=\frac{s^3+2}{3s^4+s^2+3s}$
④ $T(s)=\frac{s^3+1}{3s^4+s^2+3s+1}$

정답 2번

출제 포인트

블록선도에서 직렬·병렬 결합과 두 되먹임 신호의 위치를 정확히 읽어 폐루프 전달함수 $T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$를 구하는 문제이다.

조건 정리

첫 번째 합점의 출력을 $E(s)$, 두 번째 합점의 출력을 $X(s)$로 둔다.
그러면 내부 경로는 $E(s)\to s\to s$와 $E(s)\to\frac{1}{s}$의 병렬 구조이고, 최종 출력은 $X(s)\to\frac{1}{s}\to C(s)$이다.

NoteBase

계산 과정

내부 병렬 경로를 먼저 정리하면

$X(s) = \left(s^2 + \frac{1}{s}\right)E(s) = \frac{s^3+1}{s}E(s)$

이다.

최종 적분기를 지나므로

$C(s) = \frac{1}{s}X(s) = \frac{s^3+1}{s^2}E(s)$

이다.

첫 번째 합점의 관계식은

$E(s) = R(s) - X(s) - 2sC(s)$

이다.

그런데 $C(s) = \frac{X(s)}{s}$이므로 $2sC(s) = 2X(s)$가 되어

$E(s) = R(s) - 3X(s)$

이다.

여기에 $X(s) = \frac{s^3+1}{s}E(s)$를 대입하면

$E(s) = R(s) - 3\frac{s^3+1}{s}E(s)$

$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s}{3s^3+s+3}$

이다.

따라서

$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^3+1}{s^2} \cdot \frac{s}{3s^3+s+3} = \frac{s^3+1}{3s^4+s^2+3s}$

이다.

NoteBase

선지별 해설

① X

틀린 표현은 분자 s^3이다. 아래 병렬 경로의 $\frac{1}{s}$가 두 번째 합점에 더해지므로 $X(s) = (s^2 + \frac{1}{s})E(s)$가 된다. 따라서 분자는 s^3가 아니라 $s^3 + 1$이어야 한다.

② O

$T(s) = \frac{s^3 + 1}{3s^4 + s^2 + 3s}$로 계산되므로 맞는 식이다. 내부 병렬 경로가 분자의 $+1$을 만들고, 두 되먹임이 분모의 $3s^4 + s^2 + 3s$를 만든다.

③ X

틀린 표현은 분자 $s^3 + 2$이다. 분자의 상수항은 내부 $\frac{1}{s}$ 경로에서 오는 1만 생긴다. 외부 피드백의 $2s$는 폐루프 관계식에 들어가 분모를 바꾸는 항이지 분자에 2를 더하는 항이 아니다. 올바르게는 $s^3 + 1$이다.

④ X

틀린 표현은 분모의 상수항 $+1$이다. 첫 번째 합점은 $E(s) = R(s) - X(s) - 2sC(s) = R(s) - 3X(s)$로 정리되므로 폐루프 분모는 $3s^4 + s^2 + 3s$가 된다. 상수항 1이 추가되지 않는다. 올바르게는 $\frac{s^3 + 1}{3s^4 + s^2 + 3s}$이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 두 번째 합점 출력 $X(s)$와 최종 출력 $C(s)$를 같은 신호로 착각하는 데 있다. 위쪽 되먹임은 $X(s)$ 자체이고 아래쪽 되먹임은 $2sC(s)$인데, $C(s) = \frac{X(s)}{s}$이므로 결국 $2sC(s) = 2X(s)$가 된다. 이 대응을 놓치면 분모에 불필요한 상수항을 넣거나 분자에 2를 잘못 더하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 문제는 합점 사이의 신호를 먼저 $E(s)$, $X(s)$처럼 따로 둔 뒤 내부 직렬·병렬을 먼저 줄이고, 각 되먹임을 같은 기준 신호로 바꿔 닫는 순서로 판단한다. 이 문제에서는 먼저 $\frac{X(s)}{E(s)}$, 다음에 $\frac{C(s)}{X(s)}$, 마지막에 첫 번째 합점 식을 세우면 혼동이 줄어든다.

암기 포인트

블록선도는 합점 사이 신호를 변수로 두고, 되먹임은 같은 신호 기준으로 환산한 뒤 폐루프를 정리한다.

NoteBase

문 6. 전달함수 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2+4s+3}$에 대하여 $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$와 같을 때, 전달함수에서 변환한 상태공간 방정식에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은?

① $u(t) = -x_1(t)$일 때, 특성방정식은 $s^2 + 4s + 5 = 0$이다.

② $u(t) = -x_2(t)$일 때, 특성방정식은 $s^2 + 5s + 3 = 0$이다.

③ 주어진 시스템은 가제어(controllable)하다.

④ 주어진 시스템은 가관측(observable)하다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 전달함수 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2+4s+3}$를 상태공간식으로 바꾸고, 상태피드백에 따른 폐루프 특성방정식과 가제어성·가관측성을 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2+4s+3}$이다.
상태변수는 $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$이다.
따라서 미분방정식은 $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 2u$이고,
$\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + 2u$, $y = x_1$가 된다.

사용할 공식

상태방정식은 $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$로 쓴다.
여기서
A=bmatrix0&1\\-3&-4bmatrix, B=bmatrix0\\2bmatrix, C=bmatrix1&0bmatrix
상태피드백 $u = -Kx$를 걸면 폐루프 행렬은 $A - BK$가 된다.
가제어성은 $\mathcal{C} = [B\ AB]$, 가관측성은 O=bmatrixC\bmatrix의 rank로 판단한다.

NoteBase

계산 과정

1. 전달함수 분모에서 s^2+4s+3을 읽어 $\ddot{y}+4\dot{y}+3y=2u$를 만든다.
2. $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$를 대입하면 $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=-3x_1-4x_2+2u$이므로
A=bmatrix0&1\\-3&-4bmatrix, B=bmatrix0\\2bmatrix, C=bmatrix1&0bmatrix
3. $u=-x_1$이면 $K=[1\ 0]$이므로
A-BK=bmatrix0&1\\-5&-4bmatrix
특성방정식은 $s^2+4s+5=0$이다.
4. $u=-x_2$이면 $K=[0\ 1]$이므로
A-BK=bmatrix0&1\\-3&-6bmatrix
특성방정식은 $s^2+6s+3=0$이다.
5. 가제어성 행렬은
AB=Abmatrix0\\2bmatrix=bmatrix2\\-8bmatrix, C=bmatrix0&2\\2&-8bmatrix
이고 $\det \mathcal{C}=-4\neq 0$이므로 가제어이다.
6. 가관측성 행렬은
CA=bmatrix1&0bmatrixbmatrix0&1\\-3&-4bmatrix=bmatrix0&1bmatrix,
O=bmatrix1&0\\0&1bmatrix
이고 rank가 2이므로 가관측이다.

선지별 해설

① O
$u=-x_1$이면 폐루프 행렬은 bmatrix0&1\\-5&-4bmatrix가 되고 특성방정식은 $s^2+4s+5=0$이다. 선지의 진술이 맞다.

② X
$u=-x_2$이면 입력항의 $-2x_2$가 $\dot{x}_2$에 더해져 $\dot{x}_2=-3x_1-6x_2$가 된다. 따라서 특성방정식은 $s^2+6s+3=0$이다. 틀린 표현은 "$s^2+5s+3=0$"이고, 올바르게는 "$s^2+6s+3=0$이다"가 된다.

③ O
가제어성 행렬 C=[B AB]=bmatrix0&2\\2&-8bmatrix의 determinant가 0이 아니므로 rank가 2이다. 상태 2개를 모두 입력으로 제어할 수 있으므로 가제어이다.

④ O
가관측성 행렬 O=bmatrixC\bmatrix=bmatrix1&0\\0&1bmatrix는 rank가 2이다. 출력 $y=x_1$만으로도 두 상태를 복원할 수 있으므로 가관측이다.

NoteBase

오답 포인트

②는 상태피드백이 $u = -x_2$일 때 입력행렬 B의 계수 2까지 함께 반영해야 한다는 점을 놓치기 쉬운 선지이다. $-x_2$를 넣으면 x_2의 계수가 1만 커진다고 착각해 $s^2 + 5s + 3$으로 오판하기 쉽지만, 실제로는 $2u = -2x_2$가 들어가므로 x_2 계수는 4에서 6으로 바뀐다.

다시 나오면 이렇게 판단

전달함수에서 상태공간식으로 바꾸는 문제는 먼저 분모로 미분방정식을 만들고, 다음에 상태변수 정의를 대입해 A, B, C를 적는다. 그 뒤 상태피드백은 $A - BK$, 가제어성은 $[B\ AB]$, 가관측성은 bmatrixC\bmatrix 순서로 확인하면 된다.

암기 포인트

상태피드백은 $A - BK$로 바뀌고, 2차 시스템의 가제어성·가관측성은 $[B\ AB]$, bmatrixC\bmatrix의 rank로 바로 판단한다.

NoteBase

문 7. 비례제어, 미분제어, 적분제어 동작이 시스템 성능에 미치는 영향으로 가장 옳지 않은 것은?

① 적분기가 포함되지 않은 시스템에 대하여 비례제어를 수행하면 계단응답에서 정상상태오차가 발생한다.

② 비례적분 제어기를 사용하면 계단외란토크에 의한 정상상태오차를 제거할 수 있다.

③ 미분제어기는 정상상태오차를 없앨 수는 없지만 직접적으로 정상상태오차에 영향을 준다.

④ 미분제어기는 주로 비례제어, 비례적분 제어기와 함께 사용된다.

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 비례제어, 적분제어, 미분제어가 정상상태오차와 과도응답에 각각 어떤 영향을 주는지를 구별할 수 있는지를 묻는다.

핵심 개념

비례제어는 현재 오차의 크기에 비례하여 제어입력을 만드는 동작이며, 응답을 빠르게 하지만 적분요소가 없으면 정상상태오차가 남을 수 있다.
적분제어는 오차의 누적값에 비례하여 제어입력을 만드는 동작이며, 상수입력이나 계단외란에 대한 정상상태오차를 제거하는 역할을 한다.
미분제어는 오차의 변화율에 비례하여 제어입력을 만드는 동작이며, 감쇠를 키워 오버슈트와 과도응답을 개선하지만 정상상태오차를 직접 바꾸지는 않는다.

선지별 해설

1번 O: 적분기가 없는 시스템에 비례제어만 적용하면 계단입력에 대해 정상상태오차가 일반적으로 남는다. 적분동작이 없으면 오차를 끝까지 누적해서 없애는 메커니즘이 없기 때문이다.
2번 O: 비례적분 제어기는 적분동작을 포함하므로 계단외란토크처럼 일정한 외란에 대해서도 정상상태오차를 0으로 만들 수 있다. 이 선지는 적분제어의 대표 기능을 정확히 설명한다.
3번 X: 틀린 부분은 "직접적으로 정상상태오차에 영향을 준다"이다. 미분제어기는 정상상태오차를 없애지 못할 뿐 아니라 정상상태오차를 직접 줄이는 동작도 아니다. 올바르게는 미분제어기는 과도응답과 감쇠특성에 주로 영향을 주고, 정상상태오차를 직접 제거하는 것은 적분제어이다.
4번 O: 미분제어는 단독으로 쓰이기보다 비례제어와 결합한 PD 제어, 비례적분제어와 결합한 PID 제어의 일부로 쓰이는 경우가 일반적이다. 미분제어는 응답 개선에는 유용하지만 단독으로는 정상상태 성능 개선 효과가 작다.

오답 포인트

3번은 "정상상태오차를 없앨 수는 없다"까지는 맞는 말이라서 그 뒤 문장도 맞다고 착각하기 쉽다. 그러나 정상상태오차에 직접 작용하는 것은 적분제어이고, 미분제어는 변화율을 이용해 과도구간만 다듬는다는 점이 핵심 함정이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

정상상태오차를 묻는 선지는 먼저 적분동작의 유무를 확인하면 된다. P는 오차 크기에 비례해 반응하고, I는 누적오차를 없애며, D는 변화율을 이용해 과도특성을 개선한다고 구분하면 빠르게 판단할 수 있다.

암기 포인트

P는 현재오차, I는 오차제거, D는 과도응답 개선이다.

NoteBase

문 8. 전달함수 $G(s)=\frac{s+8}{s^5-s^4+3s^3-3s^2+3s-2}$에 대하여 우반면, 좌반면, $j\omega$축상에 존재하는 극점의 개수는?

① 우반면: 1, 좌반면: 2, $j\omega$축: 2

② 우반면: 2, 좌반면: 2, $j\omega$축: 1

③ 우반면: 2, 좌반면: 3, $j\omega$축: 0

④ 우반면: 3, 좌반면: 2, $j\omega$축: 0

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 Routh 배열의 첫 열 부호변화를 이용해 특성방정식의 우반면 극점 수와 좌반면 극점 수, $j\omega$축 극점 유무를 판별하는 문제이다.

조건 정리

분모 특성방정식은 $s^5-s^4+3s^3-3s^2+3s-2=0$이다.
구해야 할 값은 우반면 극점 수, 좌반면 극점 수, $j\omega$축상 극점 수이다.
분모의 근 분포만 보면 되므로 분자 $s+8$은 극점 개수 판단에 영향을 주지 않는다.

사용할 공식

Routh 배열의 첫 열에서 부호가 바뀌는 횟수는 우반면 근의 개수와 같다.
전체 차수에서 우반면 근 수와 $j\omega$축 근 수를 빼면 좌반면 근 수가 된다.
이 원리를 쓰는 이유는 실제 근을 전부 직접 구하지 않고도 반평면별 근 개수를 판별할 수 있기 때문이다.

계산 과정

Routh 배열의 앞 두 행은 다음과 같다.
arrayc|ccc s^5 & 1 & 3 & 3 ; s^4 & -1 & -3 & -2 array
여기서 s^3행 첫 항이 0이므로 $\varepsilon>0$로 두고 진행하면 첫 열은
$1,\ -1,\ \varepsilon,\ -3+\frac{1}{\varepsilon},\ \frac{-\varepsilon(2\varepsilon-3)-1}{3\varepsilon-1},\ -2$
가 된다.
$\varepsilon\to 0^+$에서 각 부호는
$+,\ -,\ +,\ +,\ +,\ -$
이므로 부호변화는 3회이다.
따라서 우반면 극점은 3개이다.
전체 극점 수는 5개이므로 좌반면 극점은 $5-3=2$개이다.
행 전체가 0이 되는 경우가 없으므로 $j\omega$축상 극점은 0개이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 1,2,2는 우반면 극점을 1개로 본 경우이다. 첫 열 부호변화가 3회이므로 틀리다. 올바르게는 우반면 3개, 좌반면 2개, $j\omega$축 0개이다.
② X: 2,2,1은 우반면 극점 수를 하나 적게 세고 $j\omega$축 극점을 1개로 잘못 둔 경우이다. Routh 배열에서 영행이 나오지 않으므로 $j\omega$축 극점은 없다. 올바르게는 3,2,0이다.
③ X: 2,3,0은 $j\omega$축 극점이 없다는 점은 맞지만 부호변화 3회를 2회로 잘못 센 경우이다. 올바르게는 좌반면과 우반면 개수가 뒤집히지 않고 3,2,0이다.
④ O: 부호변화가 3회이므로 우반면 3개이다. 전체 5차식에서 $j\omega$축 극점이 0개이므로 좌반면은 2개가 되어 3,2,0이 맞다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 s^3행 첫 항이 0이라는 이유만으로 $j\omega$축 극점이 있다고 단정하는 데 있다. 첫 항만 0인 경우는 ε 대체로 계속 진행하고, 행 전체가 0이 될 때만 보조방정식을 써서 $j\omega$축 근을 의심한다. 또한 첫 열 부호변화를 중간에서 하나 놓치면 2,3,0 같은 오답으로 간다.

다시 나오면 이렇게 판단

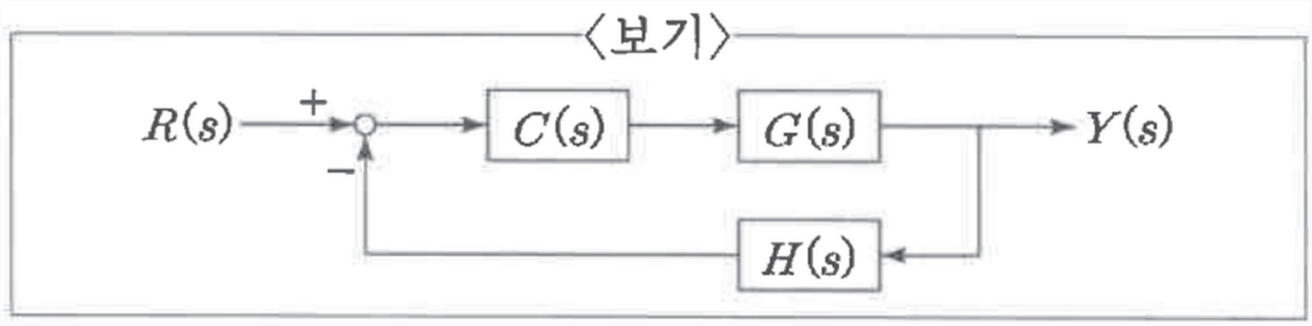
반평면별 극점 개수 문제는 특성방정식만 뽑아 Routh 배열 첫 열의 부호를 끝까지 확인한다. 첫 항 0은 ε 처리, 행 전체 0은 보조방정식 처리로 구분하면 $j\omega$축 근 유무와 우반면 근 수를 안정적으로 판단할 수 있다.

암기 포인트

Routh 첫 열 부호변화 수는 우반면 근 수이고, 영행이 없으면 $j\omega$축 근은 없다.

NoteBase

문 9. <보기>의 블록선도에서 $G(s)=\frac{1}{Ls+R}$, $H(s)=1$이고, $C(s)=K_P+\frac{K_I}{s}$일 때, 정상상태오차는? (단, $R(s)$는 단위계단함수이며 L, R, K_P, K_I는 모두 양의 상수이다.)



① 0
② $\frac{1}{1+\frac{K_PK_I}{R}}$
③ $\frac{R}{1+K_P+K_I}$
④ $\frac{1}{1+\frac{K_P+K_I}{R}}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 PI 제어기가 포함된 단위 피드백계에서 단위계단 입력에 대한 정상상태오차를 최종값정리로 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 값: $G(s)=\frac{1}{Ls+R}, H(s)=1, C(s)=K_P+\frac{K_I}{s}$이다.
구해야 할 값: 단위계단입력 $R(s)=\frac{1}{s}$에 대한 정상상태오차 e_{ss}이다.
주의할 조건: PI 제어기의 적분항 $\frac{K_I}{s}$가 있으므로 저주파에서 개루프 이득이 무한대로 커진다.

사용할 공식

$E(s)=\frac{R(s)}{1+C(s)G(s)H(s)}$
$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)$
이 공식을 쓰는 이유: 정상상태오차는 오차 전달함수를 구한 뒤 최종값정리를 적용하면 직접 판단할 수 있기 때문이다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2022 · 10월

계산 과정

1. 개루프 전달함수는 $C(s)G(s)H(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s}\right)\frac{1}{Ls+R} = \frac{K_P s + K_I}{s(Ls+R)}$이다.
2. 단위계단입력은 $R(s) = \frac{1}{s}$이므로 $E(s) = \frac{1/s}{1+\frac{K_P s + K_I}{s(Ls+R)}}$이다.
3. 따라서 $e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\frac{K_P s + K_I}{s(Ls+R)}}$이다.
4. $s \to 0$에서 $Ls + R \to R$이고 적분항 때문에 $\frac{K_P s + K_I}{s(Ls+R)} \to \infty$이므로 $e_{ss} = 0$이다.

선지 판단

1번 O: 계산 결과 정상상태오차는 0이다.
2번 X: $\frac{1}{1+\frac{K_P K_I}{R}}$는 적분항 $\frac{K_I}{s}$를 상수처럼 처리한 값이다. 틀린 표현은 적분동작을 유한 이득으로 본 점이고, 올바르게는 적분동작 때문에 $s \to 0$에서 개루프 이득이 무한대가 되어 오차가 0이 된다.
3번 X: $\frac{R}{1+K_P+K_I}$는 회로 상수 R과 제어기 상수를 단순한 정적 비율로 묶은 값이다. 틀린 표현은 정상상태오차가 유한한 상수값으로 남는다고 본 점이고, 올바르게는 적분제어가 있으므로 단위계단 입력의 정상상태오차는 0이다.
4번 X: $\frac{1}{1+\frac{K_P+K_I}{R}}$는 $K_P + \frac{K_I}{s}$를 $K_P + K_I$로 오해한 값이다. 틀린 표현은 $\frac{K_I}{s}$의 s를 없애 버린 점이고, 올바르게는 $s \to 0$에서 적분항이 지배하여 오차가 0이 된다.

오답 포인트

정상상태오차 문제에서 PI 제어기의 적분항을 정적 이득처럼 취급하면 2번이나 4번 같은 유한값을 고르게 된다. 이 문항의 함정은 K_I가 아니라 $\frac{K_I}{s}$라는 점을 끝까지 유지하지 않는 데 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

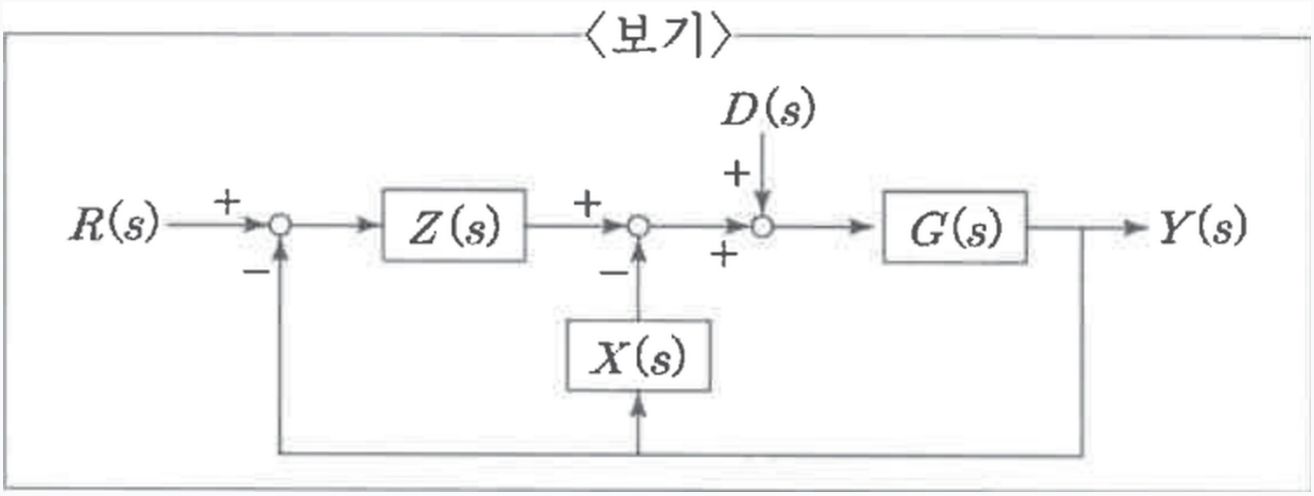
정상상태오차 문제는 입력형태를 먼저 확인하고, 그다음 개루프 전달함수에 적분기 $\frac{1}{s}$가 포함되는지를 본 뒤, 최종값정리로 $s \to 0$ 극한을 계산해 0인지 유한값인지 판단한다.

암기 포인트

폐루프가 안정이고 단위계단 입력에 적분제어가 1개 들어가면 정상상태오차는 0이다.

NoteBase

문 10. <보기>의 폐루프 시스템에 대하여, 전달함수 $Y(s)/R(s)$와 $Y(s)/D(s)$를 옳게 짝지은 것은?



① $Y(s)/R(s)$: $\frac{G(s)Z(s)}{1-G(s)X(s)+G(s)Z(s)}$, $Y(s)/D(s)$: $\frac{G(s)}{1-G(s)X(s)+G(s)Z(s)}$
② $Y(s)/R(s)$: $\frac{G(s)Z(s)}{1+G(s)X(s)+G(s)Z(s)}$, $Y(s)/D(s)$: $\frac{G(s)}{1+G(s)X(s)+G(s)Z(s)}$
③ $Y(s)/R(s)$: $\frac{-G(s)Z(s)}{1-G(s)X(s)+G(s)Z(s)}$, $Y(s)/D(s)$: $\frac{-G(s)}{1-G(s)X(s)+G(s)Z(s)}$
④ $Y(s)/R(s)$: $\frac{G(s)Z(s)}{1+G(s)X(s)+G(s)Z(s)}$, $Y(s)/D(s)$: $\frac{G(s)X(s)}{1+G(s)X(s)+G(s)Z(s)}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 블록선도의 합점 부호와 외란 입력 위치를 식으로 옮겨 $Y(s)/R(s)$, $Y(s)/D(s)$를 동시에 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 값: 첫 번째 합점은 $R(s)-Y(s)$이고, 그 뒤에 $Z(s)$가 있다.
구해야 할 값: $Y(s)/R(s)$, $Y(s)/D(s)$이다.
주의할 조건: 출력 $Y(s)$는 첫 번째 합점에는 그대로 음의 되먹임으로, 두 번째 합점에는 $X(s)$를 거쳐 음의 되먹임으로 들어간다. $D(s)$는 $G(s)$ 직전에서 양으로 더해진다.

사용할 공식

합점의 부호와 블록 위치를 그대로 반영해 전체 방정식을 세운다.
$Y(s)=G(s)\{Z(s)[R(s)-Y(s)]-X(s)Y(s)+D(s)\}$
이 공식을 쓰는 이유: 이 문항은 표준 폐루프 공식 암기보다 각 합점의 신호를 차례로 정리하는 것이 더 직접적이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 첫 번째 합점 출력은 $e_1(s) = R(s) - Y(s)$이다.
2. $Z(s)$를 지난 뒤 두 번째 합점 출력은 $e_2(s) = Z(s)[R(s) - Y(s)] - X(s)Y(s)$이다.
3. 세 번째 합점에서 외란이 양으로 더해지므로 $u(s) = Z(s)[R(s) - Y(s)] - X(s)Y(s) + D(s)$이다.
4. 따라서

$Y(s) = G(s)Z(s)R(s) - G(s)Z(s)Y(s) - G(s)X(s)Y(s) + G(s)D(s)$

$Y(s)[1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s)] = G(s)Z(s)R(s) + G(s)D(s)$

5. 그러므로

$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)Z(s)}{1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s)}$, $\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s)}$

이다.

선지 판단

1번: X. $X(s)Y(s)$는 두 번째 합점에 음의 되먹임으로 들어가지만, 이를 좌변으로 넘기면 분모에는 $+G(s)X(s)$가 생긴다. 틀린 표현은 분모의 $-G(s)X(s)$이고, 올바르게는 $1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s)$이다.

2번: O. $Y(s)/R(s)$의 분자는 기준입력 경로이므로 $G(s)Z(s)$이고, $Y(s)/D(s)$의 분자는 외란이 주입된 뒤 바로 $G(s)$를 지나므로 $G(s)$이다. 두 경우 모두 폐루프 분모는 $1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s)$로 같으므로 맞다.

3번: X. 기준입력 $R(s)$는 첫 번째 합점에 양으로 들어가므로 $Y(s)/R(s)$의 분자가 $-G(s)Z(s)$가 될 수 없다. 틀린 표현은 분자 $-G(s)Z(s)$와 분모의 $-G(s)X(s)$이고, 올바르게는 $G(s)Z(s)$, $1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s)$이다.

4번: X. 외란 $D(s)$는 $X(s)$를 거치지 않고 $G(s)$ 직전에 바로 더해진다. 틀린 표현은 $Y(s)/D(s)$의 분자 $G(s)X(s)$이고, 올바르게는 $G(s)$이다.

오답 포인트

두 번째 합점의 음의 되먹임 $X(s)Y(s)$를 식으로 세운 뒤 좌변으로 넘기는 과정에서 부호를 그대로 유지해 $-G(s)X(s)$로 적기 쉽다. 또 외란 $D(s)$의 주입 위치를 $X(s)$ 앞이나 뒤로 잘못 읽으면 $Y(s)/D(s)$의 분자를 $G(s)$가 아니라 $G(s)X(s)$로 착각하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 문제는 각 합점의 출력식을 왼쪽부터 한 줄씩 쓰고, 마지막에 $Y(s)$가 들어간 항만 한쪽으로 모아 분모를 만든다. 외란 전달함수는 외란이 어느 지점에서 주입되는지만 먼저 확인하면 분자를 빠르게 정리할 수 있다.

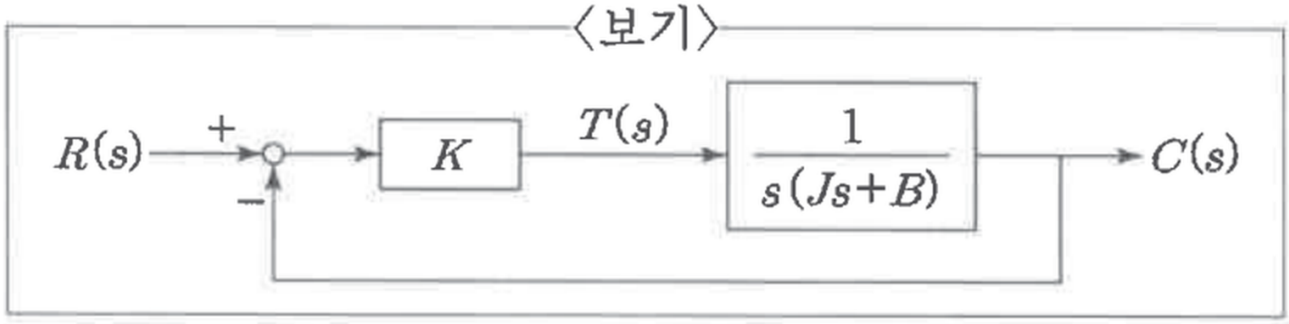
암기 포인트

음의 되먹임 항도 좌변으로 넘기면 폐루프 분모에서는 더하기가 되고, 외란 전달함수의 분자는 외란 주입점 이후의 순방향 블록만 남는다.

NoteBase

문 11. <보기>와 같은 블록선도를 갖는 피드백시스템에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

<보기>



① $0 < \frac{B}{2\sqrt{JK}} < 1$이면 폐루프극점은 켤레복소수로 주어진다.

② $0 < \frac{B}{2\sqrt{JK}} < 1$이면 s평면의 오른쪽 반평면에 극점이 존재한다.

③ 단위계단입력에 대해 B가 0이면, 과도응답은 시간이 지나면 사라진다.

④ 폐루프전달함수 $\frac{C(s)}{R(s)}$는 $\frac{1}{Js^2+Bs+K}$이다.

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 블록선도에서 폐루프 전달함수와 특성방정식을 구한 뒤 감쇠비와 극의 위치를 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 전향경로는 $G(s) = \frac{K}{s(Js+B)}$이고 피드백은 단위피드백이다.
구해야 할 값: 폐루프 전달함수, 특성방정식, 극의 형태와 안정성이다.
주의할 조건: 선지의 핵심은 $Js^2 + Bs + K = 0$를 표준 2차식과 비교해 $\zeta = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$를 읽는 데 있다.

사용할 공식

폐루프 전달함수는 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$이다.
특성방정식은 $1 + G(s) = 0$에서 구한다.
표준 2차식 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$와 비교하면 감쇠비를 판단할 수 있다.
이 공식을 쓰는 이유: 블록선도가 단위 음의 피드백 구조이므로 폐루프 전달함수와 극은 이 식으로 바로 정리되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 전향경로 전달함수는 $G(s) = K \cdot \frac{1}{s(Js+B)} = \frac{K}{Js^2+Bs}$이다.
2. 따라서 폐루프 전달함수는
$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{Js^2+Bs}}{1+\frac{K}{Js^2+Bs}} = \frac{K}{Js^2+Bs+K}$
이다.
3. 폐루프 특성방정식은 $Js^2+Bs+K=0$이다. 이를 J로 나누면 $s^2+\frac{B}{J}s+\frac{K}{J}=0$이므로
$2\zeta\omega_n = \frac{B}{J}, \quad \omega_n^2 = \frac{K}{J}$
이고
$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$
이다.
4. 따라서 $0<\zeta<1$, 즉 $0<\frac{B}{2\sqrt{JK}}<1$이면 극은 좌반평면의 켤레복소근이 된다. 또 $B=0$이면 극은 순허수축 위의 $\pm j\sqrt{K/J}$가 되어 감쇠가 없어 진동이 계속된다.

선지별 해설

① O
$0<\frac{B}{2\sqrt{JK}}<1$는 감쇠비 $0<\zeta<1$인 경우이므로 폐루프 극점은 켤레복소수로 주어진다. 이때 실수부는 음수이므로 감쇠진동 응답이 나타난다.

② X
틀린 표현은 "s평면의 오른쪽 반평면에 극점이 존재한다"이다. $0<\zeta<1$이면 극은 켤레복소근이지만 실수부는 음수이므로 오른쪽 반평면이 아니라 왼쪽 반평면에 존재한다. 올바르게는 "s평면의 왼쪽 반평면에 켤레복소 극점이 존재한다"이다.

③ X
틀린 표현은 "B가 0이면, 과도응답은 시간이 지나면 사라진다"이다. $B=0$이면 감쇠가 전혀 없어 극이 순허수축 위에 놓이므로 과도응답은 사라지지 않고 지속진동 형태로 남는다. 올바르게는 "B가 0이면 감쇠가 없어 과도응답이 사라지지 않는다"이다.

④ X
틀린 표현은 "폐루프전달함수 $\frac{C(s)}{R(s)}$는 $\frac{1}{Js^2+Bs+K}$이다"이다. 단위 피드백에서 폐루프 전달함수는 $\frac{K}{Js^2+Bs+K}$가 된다. 올바르게는 "폐루프전달함수 $\frac{C(s)}{R(s)}$는 $\frac{K}{Js^2+Bs+K}$이다"이다.

오답 포인트

②는 복소근이라는 사실만 보고 불안정한 오른쪽 반평면으로 오해하기 쉽다는 점이 함정이다. 복소근인지 여부와 안정성은 별개이며 실수부 부호를 따로 봐야 한다. ③은 $B=0$을 단순화된 안정상태로 착각하기 쉽지만 실제로는 감쇠가 0이어서 진동이 계속된다. ④는 폐루프 전달함수에서 분자 K를 빠뜨리는 실수가 자주 나온다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 문제는 먼저 $G(s)$를 정리하고 $\frac{G}{1+G}$로 폐루프 전달함수를 만든 뒤, 분모를 표준 2차식과 비교해 감쇠비와 극의 위치를 판단하면 된다. 복소근 여부는 ζ 범위로, 안정성은 극의 실수부 부호로 구분하면 된다.

암기 포인트

단위 2차계에서 $0 < \zeta < 1$이면 좌반평면 켤레복소근, $\zeta = 0$이면 순허수축 위 극으로 지속진동이 나타난다.

NoteBase

문 12. 어떠한 개루프 시스템의 전달함수가 $G(s)=\frac{1}{s(s^2+s+a)}$로 주어질 때, 이득여유(gain margin)가 20[dB]이 되도록 하는 a의 값과, 그때의 위상교차 주파수(phase-crossover frequency) ω_p의 값[rad/s]을 옳게 짝지은 것은? (단, a는 양의 상수이다.)

① a: 5, ω_p: $\sqrt{5}$

② a: 5, ω_p: 5

③ a: 10, ω_p: $\sqrt{10}$

④ a: 10, ω_p: 10

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 위상교차 주파수에서의 위상 조건과 이득여유 정의를 이용해 a와 ω_p를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수: $G(s)=\frac{1}{s(s^2+s+a)}$
구해야 할 값: a, 위상교차 주파수 ω_p
주의할 조건: 이득여유 20 dB는 $20\log_{10}(GM)=20$, 즉 $GM=10$을 뜻한다.

사용할 공식

위상교차 조건: $\angle G(j\omega_p)=-180^\circ$
이득여유 정의: $GM=\frac{1}{|G(j\omega_p)|}$
이 공식을 쓰는 이유는 위상교차 주파수를 먼저 정한 뒤, 그 주파수에서의 크기로 이득여유를 바로 연결할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. $s=j\omega$를 대입하면
$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega\{(j\omega)^2+j\omega+a\}}=\frac{1}{j\omega\{a-\omega^2+j\omega\}}$
2. 위상교차에서는 $\angle G(j\omega_p)=-180^\circ$이어야 하므로 분모의 두 번째 인수 $a-\omega^2+j\omega$의 위상은 90°가 된다. 따라서 실수부가 0이 되어 $a-\omega_p^2=0$, 즉 $\omega_p=\sqrt{a}$이다.
3. 이때 $a-\omega_p^2+j\omega_p=j\omega_p$이므로
$|G(j\omega_p)|=\frac{1}{\omega_p\cdot\omega_p}=\frac{1}{a}$
4. 이득여유가 20 dB이면 $GM=10$이고, $GM=\frac{1}{|G(j\omega_p)|}=a$이므로 $a=10$이다.
5. 따라서 $\omega_p=\sqrt{10}\,\text{rad/s}$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: $a=5$이면 위상교차 주파수는 $\sqrt{5}$이지만, 이득여유는 $GM=a=5$이므로 $20\log_{10}5\approx 13.98$dB이다. 틀린 표현은 $a=5$가 20 dB 조건을 만족한다는 점이고, 올바르게는 $a=10$이어야 한다.
② X: $a=5$이면 ω_p는 $\sqrt{5}$여야 하므로 $\omega_p=5$는 위상교차 조건부터 맞지 않는다. 틀린 표현은 $\omega_p=5$이고, 올바르게는 $\omega_p=\sqrt{5}$ rad/s이다. 또한 $a=5$ 자체도 20 dB 조건을 만족하지 않는다.
③ O: $a=10$이면 $GM=a=10$이어서 $20\log_{10}10=20$dB가 된다. 이때 위상교차 주파수는 $\omega_p=\sqrt{a}=\sqrt{10}$ rad/s이므로 보기와 일치한다.
④ X: $a=10$은 맞지만 ω_p는 $\sqrt{a}=\sqrt{10}$이지 10이 아니다. 틀린 표현은 $\omega_p=10$이고, 올바르게는 $\omega_p=\sqrt{10}$ rad/s이다.

오답 포인트

위상교차 주파수는 먼저 위상 조건 $a-\omega^2=0$에서 정해진다. 이 점을 놓치면 ②, ④처럼 a와 ω_p를 같은 수로 적는 오답에 걸리기 쉽다. 또 이득여유 20 dB를 선형값 20으로 오해하면 a를 잘못 구하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

개루프 전달함수의 이득여유 문제는 먼저 $\angle G(j\omega)=-180^\circ$에서 ω_p를 구하고, 그다음 $GM=1/|G(j\omega_p)|$를 적용해 수치를 맞춘다. dB가 주어지면 반드시 $20\log_{10}(GM)$을 이용해 선형값으로 바꾼다.

암기 포인트

이득여유는 위상교차점에서 판단한다. 이 문항에서는 $\omega_p=\sqrt{a}$, $GM=a$, 20 dB는 $GM=10$이라는 연결만 잡으면 된다.

NoteBase

문 13. <보기>의 상태 방정식을 가지는 시스템에 대하여 상태 궤환 제어기(state feedback controller) $u = -[k_1\ k_2\ k_3]x$를 설계할 때, 이에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은?

<보기>

x=bmatrix0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&1bmatrixx+bmatrix0\\0\\1bmatrixu

① 폐루프 시스템의 특성방정식은 $s^3 + (k_1 + 2)s^2 + (k_2 + 4)s + (k_3 - 1) = 0$이다.

② 폐루프 시스템의 특성방정식이 임의의 3차 다항식 $s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0 = 0$과 같도록 하는 k_1, k_2, k_3는 항상 존재한다.

③ <보기>의 상태 방정식은 제어가능(controllable)하다.

④ 만약 k_3가 $0 < k_3 < 1$를 만족한다면, 폐루프 시스템은 k_1, k_2 값과 관계없이 항상 불안정하다.

정답 1번

출제 포인트

상태궤환 $u = -Kx$를 적용한 폐루프 행렬 $A - BK$, 특성방정식의 계수 대응, 제어가능성, 안정도 필요조건을 함께 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 상태방정식은 $\dot{x} = Ax + Bu$이고
A=bmatrix0&1&0\ 0&0&1\ -2&-4&1bmatrix, B=bmatrix0\ 0\ 1bmatrix이다.
상태궤환은 $u = -[k_1\ k_2\ k_3]x$이므로 폐루프 행렬은 $A - BK$가 된다.
이 형태에서는 마지막 행만 $(-2 - k_1,\ -4 - k_2, 1 - k_3)$로 바뀐다.

사용할 공식

폐루프 행렬은
$A_{cl} = A - BK$
이다.
특성방정식은
$\det(sI - A_{cl}) = 0$
으로 구한다.
제어가능성은 제어가능행렬
$\mathcal{C} = [B\ AB\ A^2B]$
의 rank 또는 행렬식으로 판단한다.
3차 단위원계 다항식 $s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$의 안정 필요조건은 $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$이다.

NoteBase

계산 과정

1. $K = [k_1\ k_2\ k_3]$이므로
A-BK=bmatrix0&1&0\ 0&0&1\ -2-k_1&-4-k_2&1-k_3bmatrix
이다.
2. 따라서 폐루프 특성방정식은
$\det(sI - (A - BK)) = s^3 + (k_3 - 1)s^2 + (k_2 + 4)s + (k_1 + 2) = 0$
이다.
3. 제어가능행렬은
C=[B AB A^2B]=bmatrix0&0&1\ 0&1&1\ 1&1&-3bmatrix
이고,
$\det(\mathcal{C}) = -1 \neq 0$
이므로 제어가능하다.
4. $0 < k_3 < 1$이면 s^2의 계수 $k_3 - 1 < 0$이므로 안정한 3차 Hurwitz 다항식이 될 수 없다.

선지별 해설

① X
실제 특성방정식은 $s^3 + (k_3 - 1)s^2 + (k_2 + 4)s + (k_1 + 2) = 0$이다. 보기처럼 s^2항 계수를 $k_1 + 2$, 상수항을 $k_3 - 1$로 둔 것은 대응 순서를 뒤바꾼 것이다. 틀린 표현은 "
$s^3 + (k_1 + 2)s^2 + (k_2 + 4)s + (k_3 - 1) = 0$"이고, 올바르게는 "
$s^3 + (k_3 - 1)s^2 + (k_2 + 4)s + (k_1 + 2) = 0$"이다.

② O
임의의 3차 다항식 $s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0$를 원하면 $k_3 = b_2 + 1$, $k_2 = b_1 - 4$, $k_1 = b_0 - 2$로 두면 된다. 계수를 직접 일대일로 맞출 수 있으므로 항상 존재한다.

③ O
제어가능행렬의 행렬식이 -1로 0이 아니므로 상태는 모두 입력 u로 제어할 수 있다. 따라서 이 상태방정식은 제어가능하다.

④ O
$0 < k_3 < 1$이면 $k_3 - 1 < 0$이어서 특성방정식의 s^2항 계수가 음수가 된다. 안정한 3차 단위원계 다항식은 계수들이 양수여야 하므로 k_1, k_2 값과 무관하게 항상 불안정하다.

NoteBase

오답 포인트

상태궤환 $u = -Kx$에서는 마지막 행에 k_1, k_2, k_3가 그대로 순서대로 들어가지만, 특성방정식에서는 그 값이 상수항, s항, s^2항 순으로 나타난다. 많은 수험생이 k_1을 첫 번째로 보이는 s^2항에 억지로 대응시키거나, 부호 $u = -Kx$를 빼먹어 계수를 뒤집는다.

다시 나오면 이렇게 판단

동반형에 가까운 상태방정식에서 상태궤환이 나오면 먼저 $A - BK$를 써서 마지막 행이 어떻게 바뀌는지 확인한다. 그다음 $\det(sI - A_{cl})$를 전개해 s^3, s^2, s, 1의 계수를 차례로 읽는다. 안정도 문장은 Routh 조건이나 계수 부호의 필요조건부터 빠르게 점검한다.

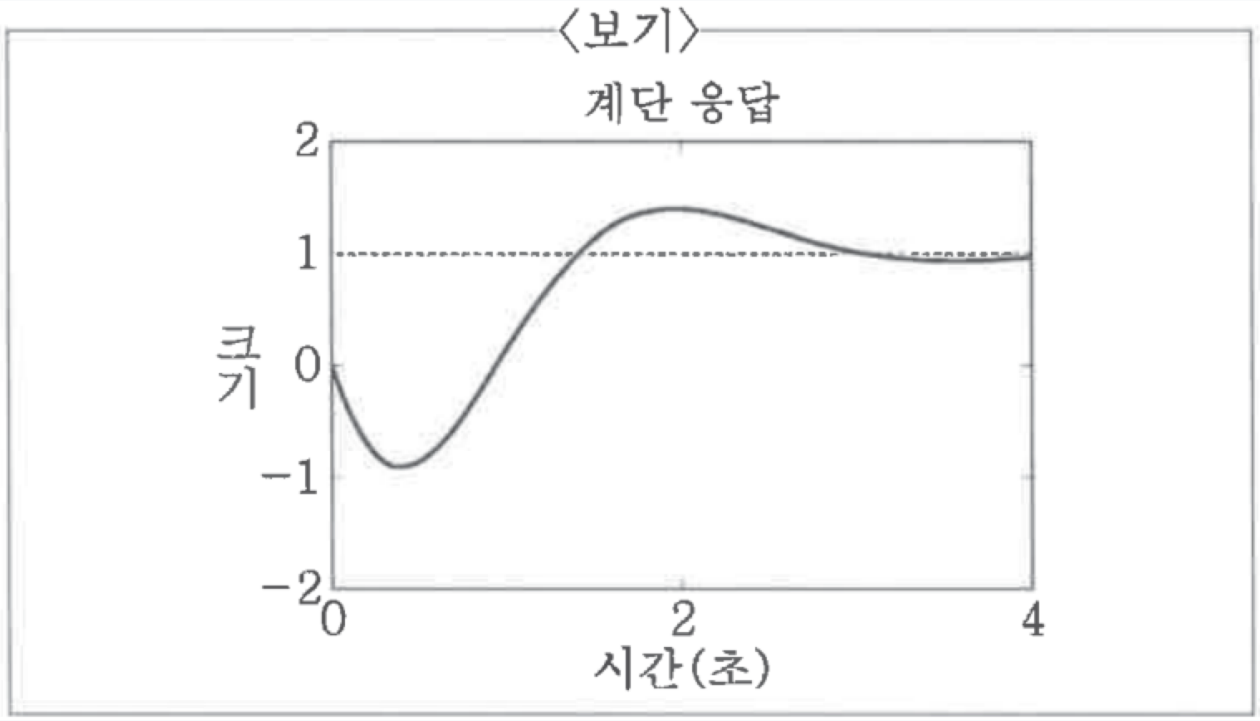
암기 포인트

상태궤환 $u = -Kx$이면 폐루프는 $A - BK$가 된다. 이 문제 형태에서는 $k_1 \rightarrow$ 상수항, $k_2 \rightarrow s$항, $k_3 \rightarrow s^2$항으로 대응한다.

NoteBase

문 14. 어떠한 선형 시불변 시스템의 단위계단응답(unit step response)이 <보기>와 같다고 할 때, 시스템의 전달함수로 가장 적합한 것은?

〈보기〉



① $\frac{-5s+5}{s^2+2s+5}$

② $\frac{5s+5}{s^2+2s+5}$

③ $\frac{5s-5}{s^2+2s+5}$

④ $\frac{5s+5}{s^2-2s+5}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 계단응답 그래프에서 최종값, 초기 진행방향, 안정성을 읽어 전달함수의 영점과 극점을 판별하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① O
- $G(s) = \frac{-5s+5}{s^2+2s+5} = \frac{-5(s-1)}{s^2+2s+5}$ 이므로 영점은 $s = 1$에 있고, 이는 초기 역응답을 만든다.
- $G(0) = 1$ 이므로 단위계단 입력의 최종값은 1이 된다. 그래프의 최종 수렴값과 일치한다.
- 분모 $s^2 + 2s + 5$ 는 감쇠되는 진동응답을 만드는 안정한 2차계이므로 그림의 오버슈트와 수렴 모습도 맞는다.

② X
- 분모가 $s^2 + 2s + 5$ 이고 $G(0) = 1$ 인 점까지는 맞지만, 분자가 $5s + 5 = 5(s + 1)$ 이라서 영점이 좌반평면 $s = -1$ 에 있다.
- 이 경우 계단응답은 처음부터 양의 방향으로 움직이는 것이 자연스럽고, 그림처럼 먼저 음의 방향으로 내려가는 역응답이 나오지 않는다.
- 틀린 표현은 이 전달함수가 초기 역응답까지 설명할 수 있다고 본 점이다. 올바르게는 좌반평면 영점을 가진 $\frac{5s+5}{s^2+2s+5}$ 는 그림과 같은 초기 언더슈트를 만들지 못한다.

③ X
- 분자 $5s - 5 = 5(s - 1)$ 이라서 우반평면 영점이 있다는 점은 그림의 초기 역응답과 일부 맞아 보일 수 있다.
- 그러나 $G(0) = -1$ 이므로 단위계단응답의 최종값은 -1이 된다. 그림은 결국 +1로 수렴하므로 결정적으로 맞지 않는다.
- 틀린 표현은 상수항 부호 때문에 직류이득이 -1이 된다는 점을 놓친 것이다. 올바르게는 최종값이 +1이 되려면 같은 분모에서는 $-5s + 5$ 형태여야 한다.

④ X
- 분모가 $s^2 - 2s + 5$ 이면 극점은 $1 \pm 2j$ 이고 실수부가 양수이므로 불안정하다.
- 불안정한 계는 그림처럼 1로 감쇠 수렴하지 못한다. 진폭이 커지거나 발산하는 형태가 된다.
- 틀린 표현은 분모 부호를 잘못 보아도 비슷한 진동응답이 나온다고 본 점이다. 올바르게는 안정 수렴 그래프는 분모가 $s^2 + 2s + 5$ 처럼 감쇠항의 부호가 양수여야 한다.

오답 포인트

최종값이 1이라는 이유만으로 ①과 ②를 비슷하게 보면 ②로 흔들리기 쉽다. 이 문제의 핵심 함정은 초기 역응답이며, 처음에 출력이 반대 방향으로 움직이면 우반평면 영점을 의심해야 한다. 또한 분모의 $\pm 2s$ 부호를 대충 보면 ④의 불안정을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

계단응답 문제는 먼저 끝값으로 $G(0)$ 를 확인하고, 다음으로 수렴 여부로 극점의 안정성을 본 뒤, 마지막으로 처음 움직이는 방향을 보고 우반평면 영점에 따른 역응답인지 판단하면 된다.

NoteBase

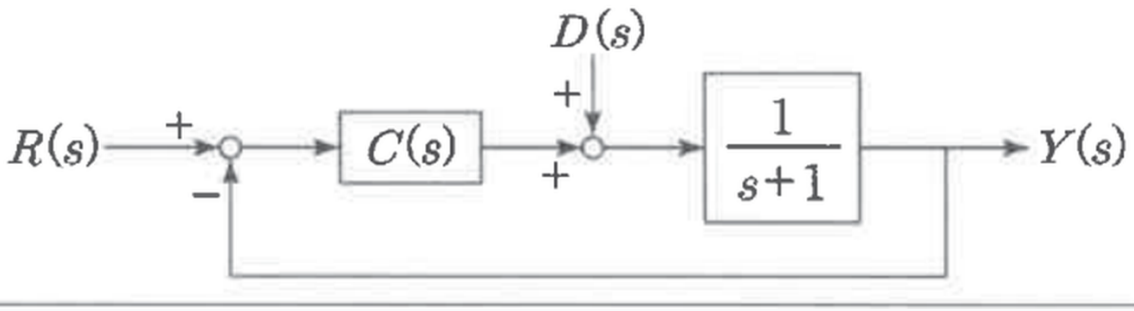
암기 포인트

계단응답이 먼저 반대로 움직이면 우반평면 영점, 끝값은 $G(0)$, 감쇠하며 수렴하면 극점은 좌반평면이라고 정리된다.

NoteBase

문 15. <보기>의 폐루프 시스템에서 외란 신호 $d(t)$의 라플라스 변환 $D(s)$가 $D(s)=\frac{1}{s^2+4}$로 주어질 때 출력 신호 $y(t)$의 정상상태응답이 $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$이 되도록 하는 제어기 $C(s)$로 가장 알맞은 것은? (단, $R(s)=0$이며, $y(t)$는 $Y(s)$의 라플라스 역변환이다.)

<보기>



① $C(s)=\frac{1}{s}$

② $C(s)=2+\frac{1}{s}$

③ $C(s)=\frac{s+2}{s^2+4}$

④ $C(s)=\frac{2s+1}{s^2+4}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 외란 전달함수 $Y(s)/D(s)$를 구한 뒤, $D(s)=\frac{1}{s^2+4}$인 정현파 외란을 정상상태에서 제거하려면 제어기가 s^2+4 내부모형을 포함하면서도 폐루프가 안정해야 한다는 점을 묻는 문제이다.

조건 정리

- 플랜트는 $G(s)=\frac{1}{s+1}$이다.
- 외란은 제어기 뒤, 플랜트 앞에 더해진다.
- $R(s)=0$이므로 외란에 대한 응답만 보면 된다.
- 외란의 라플라스변환은 $D(s)=\frac{1}{s^2+4}$이므로 주파수 2의 정현파 외란이다.
- 목표는 정상상태에서 $y(t)\to 0$이 되도록 하는 것이다.

NoteBase

사용할 공식

외란 전달함수는
$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} D(s)$
이다.
여기서 $G(s) = \frac{1}{s+1}$이므로
$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{C(s)}{s+1}} = \frac{1}{s+1+C(s)}$
가 된다.

이 공식을 쓰는 이유는 이 문제의 외란이 플랜트 입력점에 가산되는 형태이기 때문이다. 또한 정현파 외란 $\frac{1}{s^2+4}$를 없애려면 제어기에 같은 인자 $s^2 + 4$가 들어가 외란모형을 내부에 포함해야 하고, 그 뒤 폐루프 특성방정식이 안정해야 한다.

계산 과정

1. $R(s) = 0$에서 $Y(s)/D(s) = 1/(s + 1 + C(s))$를 만든다.
2. 정상상태에서 정현파 외란을 제거하려면 $C(s)$에 $s^2 + 4$가 포함되어야 하므로 후보는 ③, ④로 좁혀진다.
3. ③을 대입하면
$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{s+1+\frac{s+2}{s^2+4}} = \frac{s^2+4}{(s+1)(s^2+4)+s+2}$
이고 $D(s) = \frac{1}{s^2+4}$와 곱하면
$Y(s) = \frac{1}{s^3+s^2+5s+6}$
가 된다. 특성다항식 $s^3 + s^2 + 5s + 6$은 $a_1 a_2 = 1 \cdot 5 < 6 = a_3$이므로 안정하지 않다.
4. ④를 대입하면
$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{s+1+\frac{2s+1}{s^2+4}} = \frac{s^2+4}{(s+1)(s^2+4)+2s+1}$
이고 $D(s) = \frac{1}{s^2+4}$와 곱하면
$Y(s) = \frac{1}{s^3+s^2+6s+5}$
가 된다. 특성다항식 $s^3 + s^2 + 6s + 5$는 $a_1 a_2 = 1 \cdot 6 > 5 = a_3$이므로 안정하다.
5. 따라서 외란모형을 포함하면서 정상상태 응답을 0으로 만드는 것은 ④이다.

NoteBase

선지별 해설

① X
- $C(s)=\frac{1}{s}$이면 적분기는 있어 상수외란 제거에는 유리하지만, s^2+4 정현파 외란의 내부모형이 없다.
- 실제로 $Y(s)=\frac{s}{(s^2+4)(s^2+s+1)}$가 되어 극 $\pm 2j$가 남으므로 정상상태에서 진동 성분이 사라지지 않는다.
- 틀린 표현은 이 제어기로 정현파 외란을 없앨 수 있다고 보는 점이다. 올바르게는 s^2+4를 포함한 제어기여야 한다.

② X
- $C(s)=2+\frac{1}{s}$도 ①과 마찬가지로 적분기만 있을 뿐 s^2+4 내부모형이 없다.
- $Y(s)=\frac{s}{(s^2+4)(s^2+3s+1)}$가 되어 역시 $\pm 2j$ 극이 남는다.
- 틀린 표현은 비례항을 더하면 정현파 외란까지 제거된다고 보는 점이다. 올바르게는 외란 주파수에 해당하는 s^2+4 인자가 필요하다.

③ X
- $C(s)=\frac{s+2}{s^2+4}$는 s^2+4를 포함하므로 외란모형은 넣었지만, 폐루프가 안정하지 않다.
- $Y(s)=\frac{1}{s^3+s^2+5s+6}$이고 특성다항식이 불안정이므로 $y(t)\to 0$가 보장되지 않는다.
- 틀린 표현은 외란모형만 넣으면 충분하다고 보는 점이다. 올바르게는 외란모형 포함과 폐루프 안정성을 동시에 만족해야 한다.

④ O
- $C(s)=\frac{2s+1}{s^2+4}$이면 s^2+4가 제어기에 포함되어 정현파 외란모형을 내부에 둔다.
- 이때 $Y(s)=\frac{1}{s^3+s^2+6s+5}$가 되어 외란항 s^2+4가 제거되고, 폐루프도 안정하다.
- 따라서 정상상태에서 $y(t)\to 0$가 되어 정답이 된다.

오답 포인트

적분기 $1/s$만 있으면 모든 외란이 제거된다고 오해하기 쉽다. 적분기는 상수외란에 대한 내부모형일 뿐이고, $D(s)=\frac{1}{s^2+4}$ 같은 정현파 외란에는 s^2+4가 필요하다. 또 ③처럼 외란모형이 들어 있어도 폐루프 안정성을 확인하지 않으면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

외란 제거 문제는 먼저 외란이 들어가는 위치에서 $Y(s)/D(s)$를 만든다. 그 다음 외란의 분모가 상수면 $1/s$, 정현파면 $s^2+\omega^2$ 내부모형이 필요한지 본다. 마지막으로 후보 제어기를 대입해 외란 인자가 실제로 제거되는지와 폐루프 특성방정식이 안정한지를 함께 확인하면 된다.

NoteBase

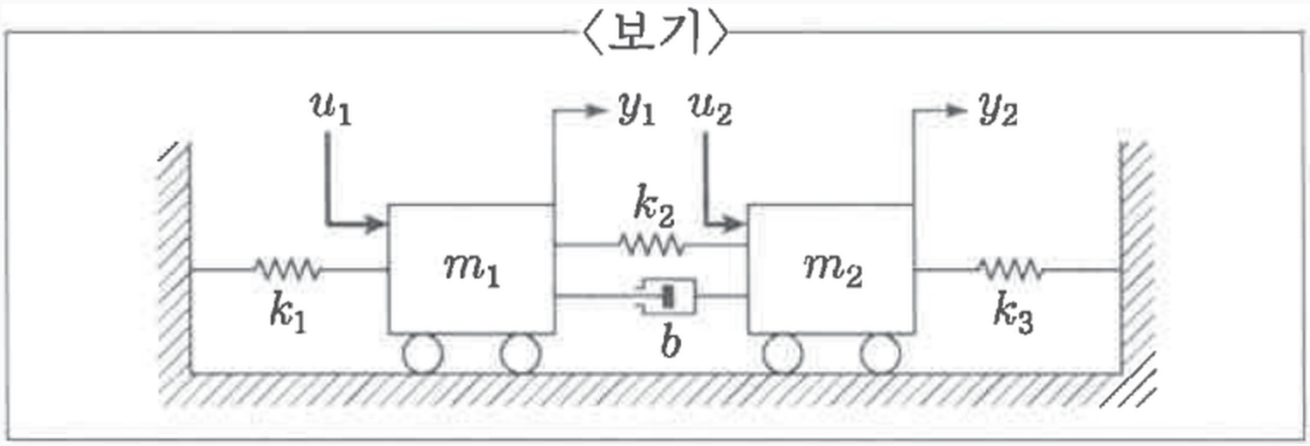
암기 포인트

상수외란은 $1/s$, 주파수 ω의 정현파 외란은 $s^2 + \omega^2$ 내부모형으로 막고, 최종 선택은 항상 폐루프 안정성까지 확인해야 한다.

NoteBase

문 16. <보기>와 같은 기계시스템에 대한 상태 방정식으로 가장 옳은 것은? (단, u_1, u_2와 y_1, y_2는 각각 m_1과 m_2의 입력과 변위출력들이다. 또한 상태 방정식 표현을 위해 $y_1 = x_1$, $\dot{y}_1 = x_2$, $y_2 = x_3$, $\dot{y}_2 = x_4$라 가정한다.)

<보기>



① bmatrixx_1\\x_2\\x_3\\x_4bmatrix=bmatrix0&1&0&0\\-(k_1)/(m_1)&-(b)/(m_1)&(k_2)/(m_1)&(b)/(m_1)\\0&0&0&1\\(k_2)/(m_2)&(b)/(m_2)&(-k_2-k_3)/(m_2)&-(b)/(m_2)bmatrixbmatrixx_1_2_3_4bmatrix+bmatrix0&0\\(1)/(m_1)&0\\0&0\\0&(1)/(m_2)bmatrixbmatrixu_1_2bmatrix

② bmatrixx_1\\x_2\\x_3\\x_4bmatrix=bmatrix0&1&0&0\\(-k_1-k_2)/(m_1)&-(b)/(m_1)&(k_2)/(m_1)&(b)/(m_1)\\0&0&0&1\\(k_2)/(m_2)&(b)/(m_2)&-(k_3)/(m_2)&-(b)/(m_2)bmatrixbmatrixx_1_2_3_4bmatrix+bmatrix0&0\\(1)/(m_1)&0\\0&0\\0&(1)/(m_2)bmatrixbmatrixu_1_2bmatrix

③ bmatrixx_1\\x_2\\x_3\\x_4bmatrix=bmatrix0&1&0&0\\(-k_1-k_2)/(m_1)&-(b)/(m_1)&(k_2)/(m_1)&(b)/(m_1)\\0&0&0&1\\(k_2)/(m_2)&(b)/(m_2)&(-k_2-k_3)/(m_2)&-(b)/(m_2)bmatrixbmatrixx_1_2_3_4bmatrix+bmatrix0&0\\(1)/(m_1)&0\\0&0\\0&(1)/(m_2)bmatrixbmatrixu_1_2bmatrix

④ bmatrixx_1\\x_2\\x_3\\x_4bmatrix=bmatrix0&1&0&0\\(k_1+k_2)/(m_1)&(b)/(m_1)&-(k_2)/(m_1)&-(b)/(m_1)\\0&0&0&1\\(k_2)/(m_2)&(b)/(m_2)&(-k_2-k_3)/(m_2)&-(b)/(m_2)bmatrixbmatrixx_1_2_3_4bmatrix+bmatrix0&0\\(1)/(m_1)&0\\0&0\\0&(1)/(m_2)bmatrixbmatrixu_1_2bmatrix

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 2자유도 질량-스프링-댐퍼계에서 결합 스프링 k_2와 감쇠기 b가 두 질량의 상대변위와 상대속도로 작용한다는 점을 상태방정식 행렬로 옮길 수 있는지를 묻는다.

NoteBase

선지별 해설

① X: m_1 식에서 결합 스프링 k_2의 복원력이 빠졌다. 2행 1열을 $-k_1/m_1$로 둔 것이 틀린 표현이고, 올바르게는 $-(k_1+k_2)/m_1$이어야 한다.
② X: m_2 식에서 k_2가 y_2에 주는 복원력이 빠졌다. 4행 3열을 $-k_3/m_2$로 둔 것이 틀린 표현이고, 올바르게는 $-(k_2+k_3)/m_2$이어야 한다.
③ O: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_3 = x_4$가 맞고, 결합요소의 상대변위·상대속도 항이 두 질량 방정식에 반대 부호로 정확히 반영되어 있으며, 입력행렬도 u_1/m_1, u_2/m_2 위치가 맞다.
④ X: m_1 방정식의 부호가 전반적으로 반대이다. 2행의 $(k_1+k_2)/m_1$, b/m_1, $-k_2/m_1$, $-b/m_1$ 배치는 틀린 표현이고, 올바르게는 $-(k_1+k_2)/m_1$, $-b/m_1$, k_2/m_1, b/m_1이어야 한다.

오답 포인트

가운데 k_2와 b를 한쪽 질량에만 작용하는 요소처럼 보면 ①이나 ②처럼 한 항이 빠진다. 복원력과 감쇠력은 상대차이를 줄이는 방향으로 작용하므로 부호를 반대로 쓰면 ④처럼 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 m_1, m_2 각각에 대해 힘평형을 세우고, 결합요소는 항상 상대변위 $y_2 - y_1$, 상대속도 $\dot{y}_2 - \dot{y}_1$로 적는다. 그다음 $x_1 = y_1, x_2 = \dot{y}_1, x_3 = y_2, x_4 = \dot{y}_2$를 대응시키면 행렬의 각 항 부호를 바로 판별할 수 있다.

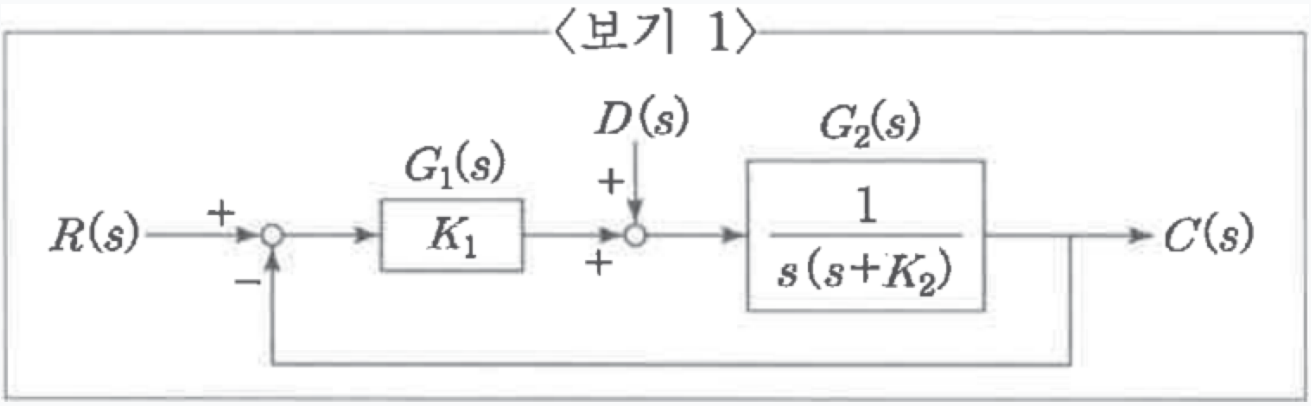
암기 포인트

결합 스프링·댐퍼는 절대값이 아니라 상대변위와 상대속도로 쓰며, 두 질량 방정식에는 같은 크기와 반대 부호로 들어간다.

NoteBase

문 17. <보기 1>의 피드백시스템에 대하여 <보기 2>의 규격을 만족하기 위한 K_1과 K_2는? (단, K_1과 K_2는 양수이다.)

<보기 1>



<보기 2>

- 규격 1: 단위 계단 외란(unit step) $D(s)$에 의한 ($R(s) = 0$으로 가정) 정상상태오차 $e_{\infty D} = -0.001$
- 규격 2: 단위 램프 입력(unit ramp) $R(s)$에 의한 ($D(s) = 0$으로 가정) 정상상태오차 $e_{\infty R} = 0.025$

① K_1: 10, K_2: 10

② K_1: 100, K_2: 20

③ K_1: 1,000, K_2: 25

④ K_1: 1,000, K_2: 40

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 플랜트 입력 외란에 대한 정상상태오차와 단위 램프 입력에 대한 속도오차정수를 이용해 K_1, K_2를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 계는 단위 음의 되먹임계이다.
전진경로는 $\frac{K_1}{s(s+K_2)}$이다.
외란 $D(s)$는 K_1 뒤, 플랜트 입력단에 더해진다.
규격 1은 $R(s) = 0$, 단위 계단 외란 $D(s) = \frac{1}{s}$, 정상상태오차 $e_{\infty D} = -0.001$이다.
규격 2는 $D(s) = 0$, 단위 램프 입력 $R(s) = \frac{1}{s^2}$, 정상상태오차 $e_{\infty R} = 0.025$이다.

NoteBase

사용할 공식

외란만 있을 때는 $E(s) = R(s) - C(s) = -C(s)$이고,
$C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + K_1 G_2(s)} D(s)$
이므로
$e_{\infty D} = \lim_{s \to 0} sE(s) = -\lim_{s \to 0} \frac{G_2(s)}{1 + K_1 G_2(s)} = -\frac{1}{K_1}$
이다.
램프 입력에 대해서는 단위 되먹임계의 속도오차정수
$K_V = \lim_{s \to 0} s \frac{K_1}{s(s + K_2)} = \frac{K_1}{K_2}, \quad e_{\infty R} = \frac{1}{K_v} = \frac{K_2}{K_1}$
를 사용한다.
이 공식을 쓰는 이유는 규격 1이 입력 외란에 대한 정상상태오차이고, 규격 2가 type 1 시스템의 단위 램프 정상상태오차이기 때문이다.

계산 과정

1. 규격 1에서
$-\frac{1}{K_1} = -0.001$
이므로 $K_1 = 1000$이다.
2. 규격 2에서
$\frac{K_2}{K_1} = 0.025$
이므로 $K_2 = 0.025 K_1 = 25$이다.
3. 따라서 $(K_1, K_2) = (1000, 25)$이다.

선지별 해설

① X
$K_1 = 10$이면 외란에 대한 정상상태오차가 $e_{\infty D} = -1/10 = -0.1$이 되어 규격 1을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 'K1=10, K2=10'이며, 올바르게는 'K1=1000, K2=25'이다.
② X
$K_1 = 100$이면 외란에 대한 정상상태오차가 -0.01이므로 규격 1부터 불만족이다. 또한 $K_2 = 20$이면 램프 오차가 $20/100 = 0.2$이다. 틀린 표현은 'K1=100, K2=20'이며, 올바르게는 'K1=1000, K2=25'이다.
③ O
$K_1 = 1000$이면 $e_{\infty D} = -1/1000 = -0.001$이고, $K_2 = 25$이면 $e_{\infty R} = 25/1000 = 0.025$이므로 두 규격을 모두 만족한다.
④ X
$K_1 = 1000$은 규격 1을 만족하지만 $K_2 = 40$이면 램프 오차가 $40/1000 = 0.04$가 되어 규격 2를 만족하지 못한다. 틀린 표현은 'K2=40'이며, 올바르게는 'K2=25'이다.

NoteBase

오답 포인트

외란이 플랜트 입력에 가산되므로 규격 1은 일반 추종오차 공식만으로 처리하면 안 된다. 이때 $R = 0$이면 $E = -C$가 되어 부호가 음수로 나온다. 또한 램프 오차에서 $K_v = K_1/K_2$인데 이를 뒤집어 쓰면 ④ 같은 오답을 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

규격이 둘 이상 주어지면 먼저 각 규격이 어떤 오차정수에 대응하는지 분리해서 본다. 외란 규격은 외란이 들어오는 위치에서 전달식을 다시 세우고, 램프 규격은 K_v를 구해 $e_\infty = 1/K_v$로 연결하면 빠르게 판단할 수 있다.

암기 포인트

이 문제의 핵심은 플랜트 입력 계단 외란이면 $e_{\infty D} = -1/K_1$, 단위 램프 추종오차면 $e_{\infty R} = K_2/K_1$라는 점이다.

NoteBase

문 18. <보기>의 상태 방정식을 가지는 시스템에 대하여, 입력 신호 $u(t)$와 출력 신호 $y(t)$를 이용하여 상태 변수 $x(t)$를 추정할 상태관측기(state observer)로 가장 적합한 식은? (단, $x(0)$는 임의의 초깃값이다.)

<보기>

x=bmatrix0 & 1 \ 0 & 0bmatrixx+bmatrix1 \ 2bmatrixu, y=bmatrix1 & 0bmatrixx

① x=bmatrix0 & 1 \ 0 & 0bmatrixx

② x=bmatrix0 & 1 \ 0 & 0bmatrixx+bmatrix1 \ 2bmatrixu

③ x=bmatrix0 & 1 \ 0 & 0bmatrixx+bmatrix1 \ 2bmatrixu+bmatrix2 \ 1bmatrix(y-bmatrix1 & 0bmatrixx)

④ x=bmatrix0 & 1 \ 0 & 0bmatrixx+bmatrix1 \ 2bmatrixu+bmatrix-2 \ -1bmatrix(y-bmatrix1 & 0bmatrixx)

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 상태관측기의 기본식 $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$와 관측오차 동역학 $\dot{e} = (A - LC)e$의 안정조건을 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 시스템은 A=bmatrix0&1\\0&0bmatrix, B=bmatrix1\\2bmatrix, C=bmatrix1&0bmatrix이다.
상태관측기는 입력 $u(t)$와 출력 $y(t)$를 함께 사용해야 한다.
또한 $x(0)$가 임의이므로 초기 추정오차가 있어도 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$가 0으로 수렴해야 한다.

사용할 공식

상태관측기의 표준형은 $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$이다.
이때 추정오차 $e = x - \hat{x}$는 $\dot{e} = (A - LC)e$를 만족한다.
이 공식을 쓰는 이유는 입력항 Bu가 있어야 실제 시스템과 같은 구동을 따라가고, 출력오차 피드백 $L(y - C\hat{x})$가 있어야 임의 초기값에서 오차를 줄일 수 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 후보 식이 먼저 $A\hat{x}+Bu+L(y-C\hat{x})$ 꼴인지 확인한다. 따라서 ①은 입력항과 보정항이 모두 없고, ②는 보정항이 없다.
2. ③은 L=bmatrix2\\1bmatrix이므로 A-LC=bmatrix0&1\\0&0bmatrix-bmatrix2\\1bmatrixbmatrix1&0bmatrix=bmatrix-2&1\\-1&0bmatrix
특성방정식은 $\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$이므로 고유값이 모두 -1이다.
3. ④는 L=bmatrix-2\\-1bmatrix이므로 A-LC=bmatrix0&1\\0&0bmatrix-bmatrix-2\\-1bmatrixbmatrix1&0bmatrix=bmatrix2&1\\1&0bmatrix
특성방정식은 $\lambda^2-2\lambda-1=0$이고 한 근이 $1+\sqrt{2}$이어서 불안정하다.

선지별 해설

① X: $\dot{\hat{x}}=A\hat{x}$는 실제 시스템의 입력 Bu도 반영하지 않고 출력오차 보정도 없다. $u(t)\neq 0$이면 시스템을 따라갈 수 없고, 초기오차도 줄어들지 않는다. 틀린 표현은 관측기에 Bu와 $L(y-C\hat{x})$가 모두 빠진 점이며, 올바르게는 $\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+L(y-C\hat{x})$ 꼴이어야 한다.
② X: $\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu$는 플랜트 복사모델일 뿐 y를 이용한 보정이 없다. 이 경우 오차는 $\dot{e}=Ae$이고 A의 고유값이 모두 0이어서 임의 초기값에서 점근적으로 수렴하지 않는다. 틀린 표현은 보정항이 없는 점이며, 올바르게는 안정한 L을 더해 $A-LC$가 안정해야 한다.
③ O: x=Ax+Bu+bmatrix2\\1bmatrix(y-Cx)는 상태관측기 기본식과 일치한다. 또한 A-LC=bmatrix-2&1\\-1&0bmatrix의 고유값이 모두 -1이므로 관측오차가 0으로 수렴한다.
④ X: 식의 모양은 관측기와 같지만 L=bmatrix-2\\-1bmatrix를 쓰면 A-LC=bmatrix2&1\\1&0bmatrix가 되어 불안정하다. 틀린 표현은 이 보정이 오차를 수렴시킨다고 보는 점이며, 올바르게는 $A-LC$의 극이 좌반평면에 오도록 L을 선택해야 한다.

오답 포인트

관측기를 단순히 $A\hat{x}+Bu$로만 쓰면 된다고 착각하기 쉽다. 이 문항의 핵심은 입력 복사만으로는 임의 초기오차를 없앨 수 없고, 반드시 출력오차 피드백이 있어야 한다는 점이다. 또 보정항이 들어가더라도 L의 부호와 크기에 따라 $A-LC$가 불안정해질 수 있다는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

관측기 문항은 먼저 식이 $A\hat{x}+Bu+L(y-C\hat{x})$ 기본형인지 확인하고, 그다음 $A-LC$의 고유값이 모두 좌반평면에 있는지 본다. 입력항이 빠지거나 보정항이 없거나, 보정이 있어도 $A-LC$가 불안정하면 오답이다.

NoteBase

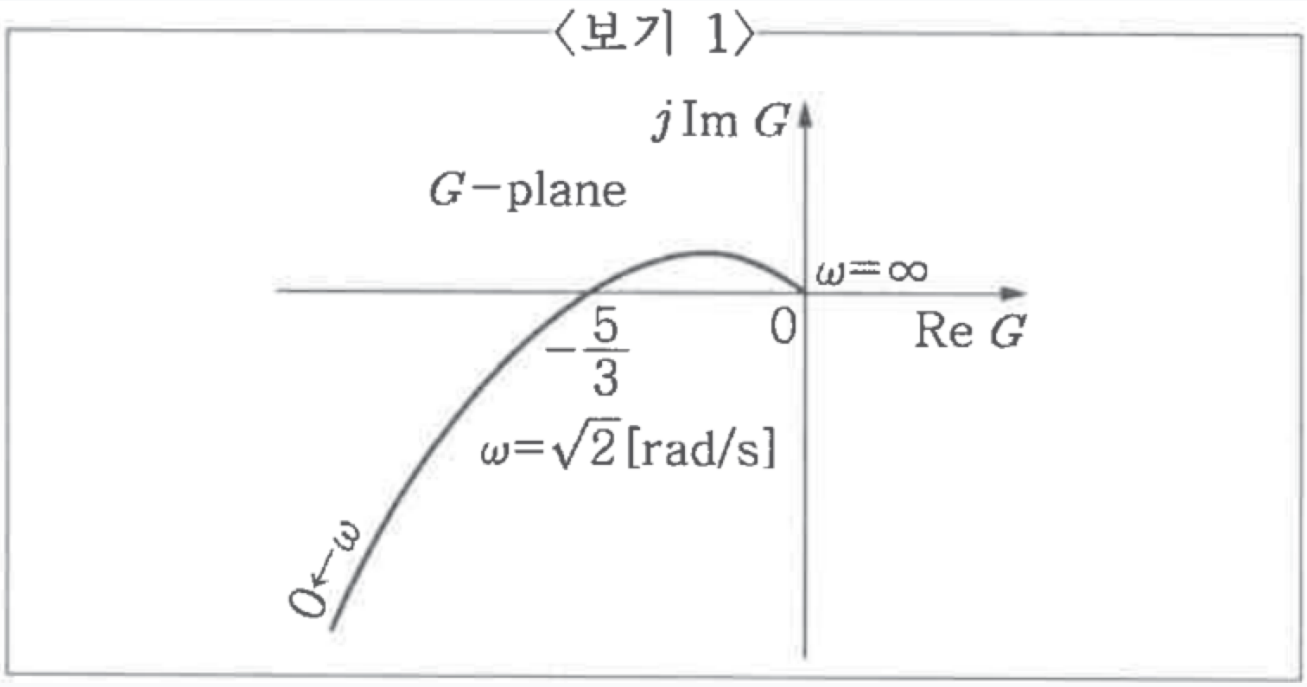
암기 포인트

상태관측기는 플랜트 복사 $A\hat{x} + Bu$에 출력오차 피드백 $L(y - C\hat{x})$를 더한 형태이며, 정답 판정은 $A - LC$ 안정 여부로 끝난다.

NoteBase

문 19. <보기 1>과 같은 나이퀴스트(Nyquist) 선도에 대응하는 전달함수가 <보기 2>와 같을 때 $a + b$의 값은?

<보기 1>



<보기 2>

$G(s) = \frac{10}{s(s+a)(s+b)}$

① 3

② 4

③ 5

④ 6

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 선도의 실수축 교점 조건으로 ab를 구하고, 그 교점의 실수값으로 $a + b$를 역산하는 문제이다.

NoteBase

계산 근거

$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(a+j\omega)(b+j\omega)}$ 이다.
분모를 정리하면
$j\omega(a+j\omega)(b+j\omega) = -\omega^2(a+b) + j\omega(ab-\omega^2)$
가 된다.
실수축 교점에서는 허수부가 0이어야 하므로 $ab-\omega^2 = 0$ 이고, 그림에서 $\omega = \sqrt{2}$ 이므로 $ab = 2$ 이다.
이때
$G(j\sqrt{2}) = \frac{10}{-2(a+b)} = -\frac{5}{a+b}$
이다.
그림의 교점이 $-\frac{5}{3}$ 이므로 $-\frac{5}{a+b} = -\frac{5}{3}$ 이고, 따라서 $a+b=3$ 이다.

선지별 해설

① 3: O. 실수축 교점 조건으로 $ab=2$ 를 구하고, 교점값 $-\frac{5}{3}$ 을 대입하면 $a+b=3$ 이 된다.
② 4: X. 계산 결과는 4가 아니라 3이다. 틀린 표현은 'a+b=4'이고, 올바르게는 'a+b=3'이다.
③ 5: X. 그림의 $-\frac{5}{3}$ 을 분자 5와만 연결해 $a+b=5$ 로 보면 안 된다. 올바르게는 $-\frac{5}{a+b} = -\frac{5}{3}$ 으로 두어 $a+b=3$ 을 구한다.
④ 6: X. $ab=2$ 와 $a+b$ 를 혼동하거나 교점식을 잘못 뒤집으면 나올 수 있는 오답이다. 올바르게는 $ab=2$, $a+b=3$ 이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 실수축 교점에서 바로 $a+b$ 가 나온다고 착각하는 데 있다. 먼저 허수부 0 조건으로 $ab=\omega^2$ 를 구하고, 그다음 교점의 실수값이 $-\frac{5}{a+b}$ 임을 연결해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

나이퀴스트 선도에서 특정 주파수의 실수축 교점이 주어지면 먼저 $G(j\omega)$ 분모의 허수부를 0으로 두어 ab 를 구한다. 그 주파수에서의 실수값까지 대입해 남은 미지수 $a+b$ 를 정리하면 된다.

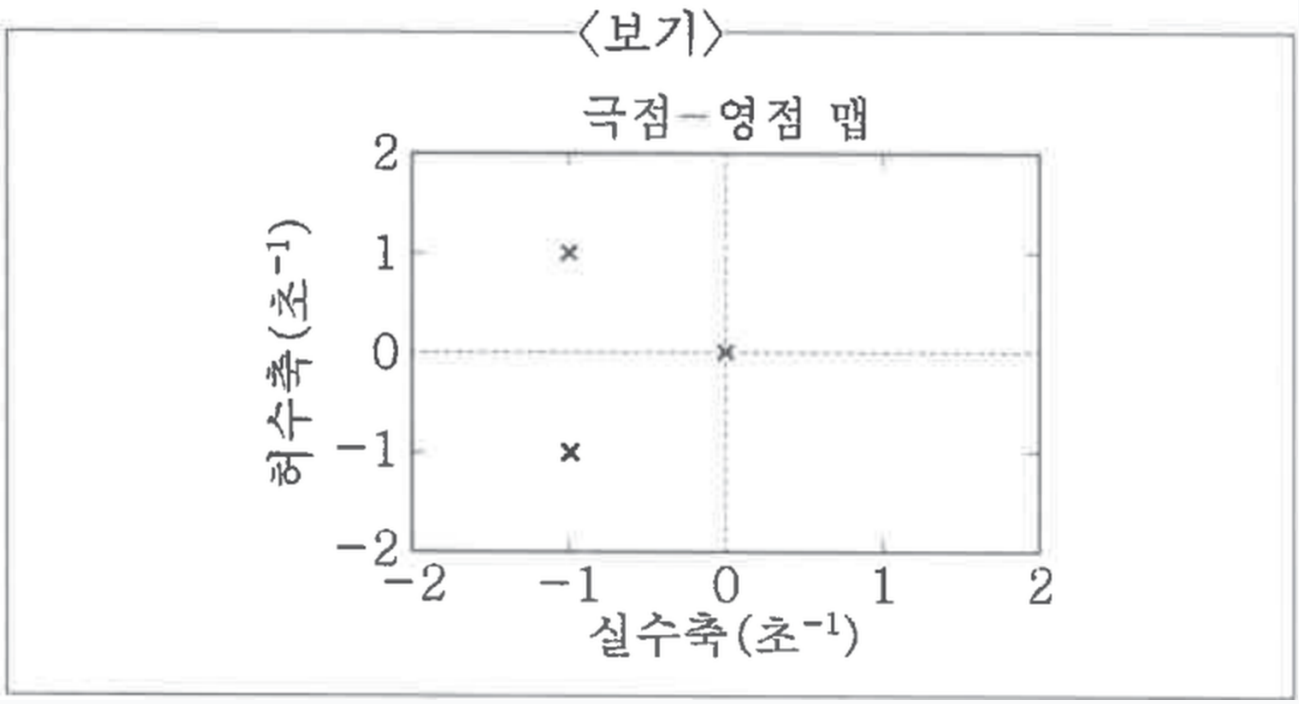
암기 포인트

$\frac{K}{s(s+a)(s+b)}$ 꼴은 실수축 교점에서 $ab=\omega^2$ 가 먼저 나오고, 교점의 실수값으로 $a+b$ 를 마무리한다.

NoteBase

문 20. 극점(pole)이 <보기>와 같이 위치한 개루프 전달함수 $G(s)$에 대하여, $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$의 안정성을 판단할 근궤적선도(root locus)에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, $K>0$는 임의의 상수이며, <보기>에서 극점은 x로 표시되었으며 중첩되지 않았다고 가정하고, $G(s)$의 유한한 영점(zero)은 존재하지 않는다고 가정한다. 또한 극점 중 하나는 s평면의 원점에 위치한다고 가정한다.)

〈보기〉



① $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$을 안정하게 하는 $K>0$는 항상 존재한다.

② 임의의 $K>0$에 대하여 $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$의 극점 중 하나는 항상 실수축 위에 존재한다.

③ 실수축 위의 두 점 $(-2, j0)$과 $(0, j0)$ 사이에 점근선의 교차점이 존재한다.

④ 근궤적의 각 지로(branch)는 s가 커짐에 따라 90°, 180°, 270°의 각도를 가지는 점근선들로 접근한다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 극점-영점 맵에서 개루프 극점의 위치를 읽고 실축 근궤적, 점근선의 교차점, 점근선 각도를 판단할 수 있는지를 묻는다.

NoteBase

선지별 해설

① O: 폐루프 특성방정식은 극점 배치로부터 $s(s^2+2s+2)+K=0$, 즉 $s^3+2s^2+2s+K=0$ 꼴로 볼 수 있다. 이때 Routh 판별에서 $0<K<4$이면 안정이므로 시스템을 안정하게 하는 양의 이득이 존재한다.
② O: 실축 근궤적은 실수축에서 자기 오른쪽에 있는 실극점·실영점의 개수가 홀수인 구간에만 존재한다. 이 문제에서는 실극점이 원점 하나뿐이므로 $(-\infty, 0)$ 구간에 실축 근궤적이 있고, 원점에서 출발한 한 지로는 항상 실수축 위에 남는다.
③ O: 점근선 교차점은 $\sigma_a=\frac{\sum p-\sum z}{n-m}=\frac{(-1+j)+(-1-j)+0}{3}=-\frac{2}{3}$이다. 따라서 교차점은 실수축의 $(-2, 0)$ 사이에 존재한다.
④ X: 틀린 표현은 "90°, 180°, 270°"이다. 점근선 각도는 $\theta_q=\frac{(2q+1)180^\circ}{3}$이므로 $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$가 된다. 올바르게는 "이 근궤적의 점근선 각도는 60°, 180°, 300°이다"가 된다.

오답 포인트

복소극점 2개와 원점 극점 1개가 있으면 점근선이 3개라는 점은 비교적 쉽게 보이지만, 각도를 90도 간격으로 착각하면 ④를 걸러내지 못한다. 점근선 각도는 $\frac{(2q+1)180^\circ}{n-m}$ 공식을 그대로 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 실극점·실영점 개수로 실축 근궤적 구간을 확인하고, 다음에 $n-m$으로 점근선 개수와 각도를 계산한 뒤, 마지막으로 점근선 교차점 σ_a를 구하면 선지를 빠르게 판단할 수 있다.

암기 포인트

유한 영점이 없고 극점이 3개이면 점근선은 3개이며 각도는 $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$, 중심은 극점합을 3으로 나눈 값이다.

NoteBase