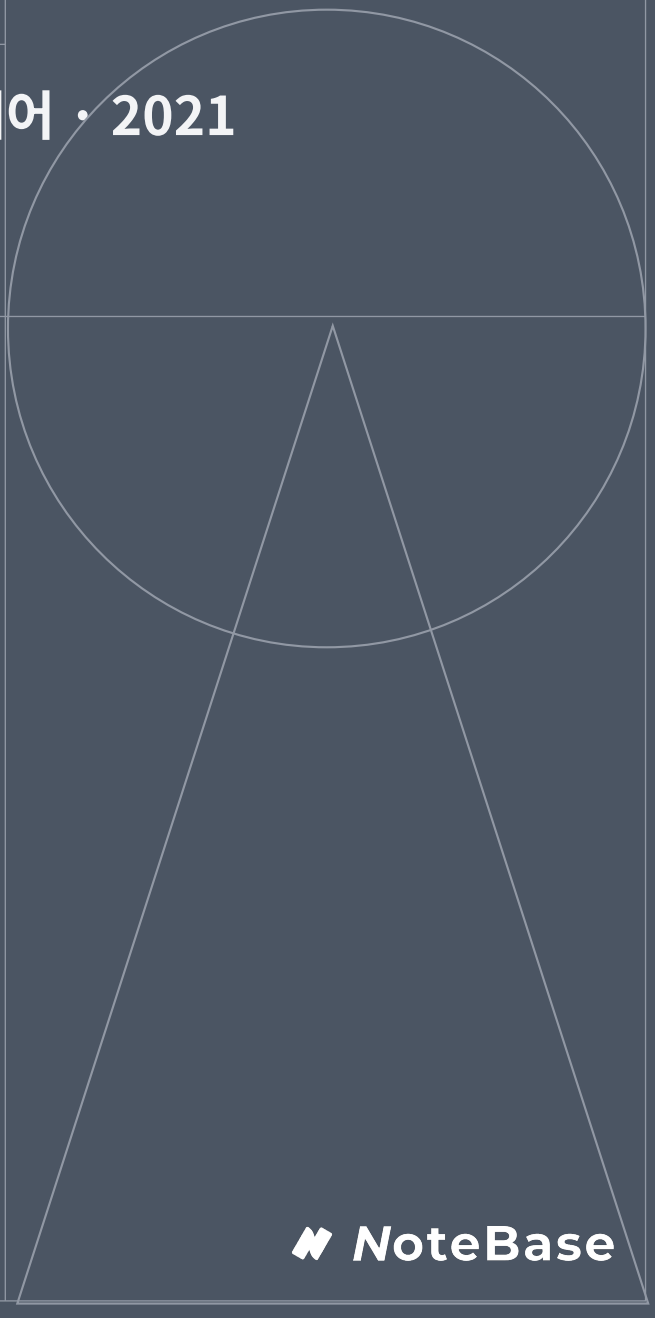
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2021



NoteBase

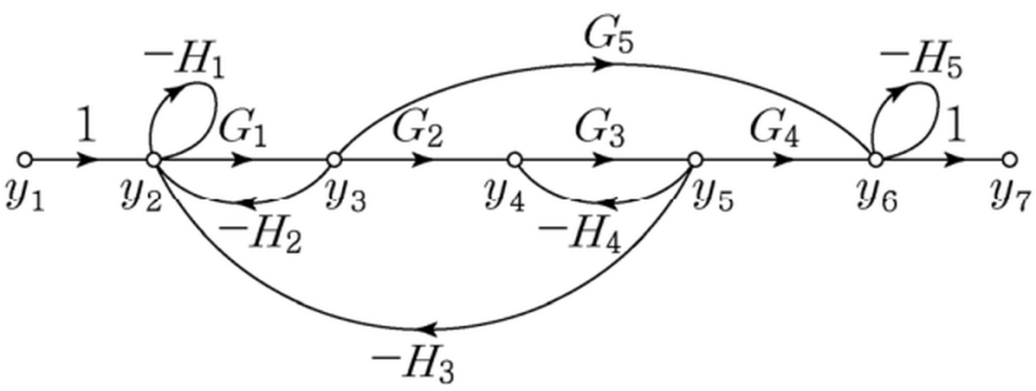
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2021

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2021

문 1. <보기>의 신호흐름선도에서 $y_2 \rightarrow y_6$ 사이의 이득관계로 가장 옳은 것은?

<보기>



① $\frac{y_6}{y_2} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5 + H_4G_1G_3G_5}{1 + H_4G_3 + H_4H_5G_3}$

② $\frac{y_6}{y_2} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5 + H_4G_1G_3G_5}{1 + H_5 + H_4G_3 + H_4H_5G_3}$

③ $\frac{y_6}{y_2} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + H_4G_1G_3G_5}{1 + H_5 + H_4G_3 + H_4H_5G_3}$

④ $\frac{y_6}{y_2} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5 + G_1G_3G_5}{1 + H_5 + H_4G_3 + H_4H_5G_3}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 신호흐름선도에서 y_2를 기준 입력으로 고정한 뒤, $y_2 \rightarrow y_6$의 전진경로와 루프를 찾아 Mason의 이득공식으로 전달이득을 구하는 문제이다.

조건 정리

구해야 할 값은 $\frac{y_6}{y_2}$이다.

전진경로는 $P_1 = G_1G_2G_3G_4$, $P_2 = G_1G_5$이다.

y_2를 입력 노드로 두면 $-H_1$, $-H_2$, $-H_3$는 source 쪽으로 되먹임되는 가지이므로 $y_2 \rightarrow y_6$ 전달이득 계산에는 포함하지 않는다.

따라서 고려할 루프는 $L_1 = -G_3H_4$, $L_2 = -H_5$이다.

NoteBase

사용할 공식

Mason의 이득공식은 $T = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$이다.
이 문제는 전진경로가 둘이고, $y_4 \leftrightarrow y_5$의 국부 피드백과 y_6의 자기루프가 함께 있으므로 각 경로에 닿지 않는 루프를 구분하는 Mason 공식을 쓰는 것이 가장 직접적이다.

계산 과정

전체 행렬식은 $\Delta = 1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2$이므로
$\Delta = 1 - (-G_3H_4 - H_5) + (-G_3H_4)(-H_5) = 1 + H_4G_3 + H_5 + H_4H_5G_3$
이다.
첫 번째 전진경로 P_1은 두 루프 모두와 접촉하므로 $\Delta_1 = 1$이다.
두 번째 전진경로 P_2는 $-H_5$와는 접촉하지만 $-G_3H_4$와는 접촉하지 않으므로 $\Delta_2 = 1 - L_1 = 1 + H_4G_3$이다.
따라서
$\frac{y_6}{y_2} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1 + H_4G_3)}{1 + H_5 + H_4G_3 + H_4H_5G_3}$
이고, 정리하면
$\frac{y_6}{y_2} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5 + H_4G_1G_3G_5}{1 + H_5 + H_4G_3 + H_4H_5G_3}$
이다.

선지별 해설

① X
분모에서 $+H_5$ 단독항이 빠져 있다. y_6의 자기루프 $-H_5$는 전체 행렬식 Δ에 독립 루프로 반드시 반영된다.
틀린 표현은 분모 $1 + H_4G_3 + H_4H_5G_3$이고, 올바르게는 $1 + H_5 + H_4G_3 + H_4H_5G_3$이다.

② O
두 전진경로 $G_1G_2G_3G_4$, G_1G_5를 모두 포함했고, 두 번째 경로에만 $\Delta_2 = 1 + H_4G_3$가 곱해지는 점까지 정확히 반영한 식이다.

③ X
직행 전진경로 $P_2 = G_1G_5$가 통째로 빠져 있다. $y_2 \to y_3 \to y_6$ 경로가 존재하므로 분자에 G_1G_5가 반드시 들어가야 한다.
틀린 표현은 분자 $G_1G_2G_3G_4 + H_4G_1G_3G_5$이고, 올바르게는 $G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5 + H_4G_1G_3G_5$이다.

④ X
보정항 $H_4G_1G_3G_5$에서 H_4가 빠져 있다. 이는 $\Delta_2 = 1 + H_4G_3$를 $1 + G_3$처럼 잘못 적용한 식이다.
틀린 표현은 $G_1G_3G_5$이고, 올바르게는 $H_4G_1G_3G_5$이다.

NoteBase

오답 포인트

이 문항의 함정은 source를 y_2로 고정한다는 점을 놓치고 $-H_1$, $-H_2$, $-H_3$까지 모두 집어넣거나, 반대로 y_6의 자기루프 $-H_5$를 누락하는 데 있다. 또 P_2는 y_4, y_5를 지나지 않으므로 $-G_3H_4$와 비접촉이라는 점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

내부 노드 사이 전달이득을 묻는 신호흐름선도는 먼저 입력으로 고정된 시작 노드를 정한 뒤, 그 노드에서 도착 노드까지의 전진경로를 모두 적는다. 그 다음 전체 루프와 각 전진경로에 닿지 않는 루프만 따로 골라 Δ, Δ_k를 계산하면 된다.

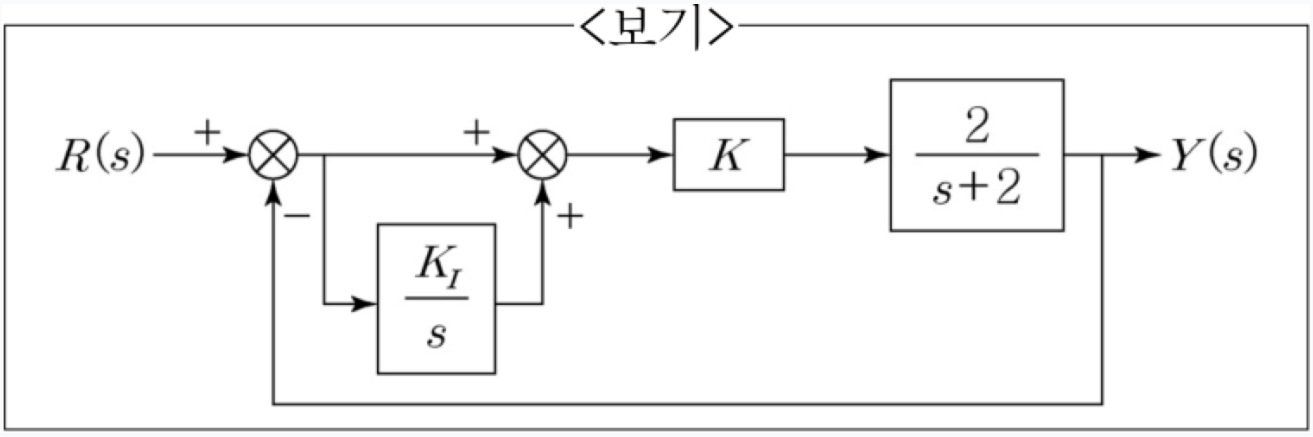
암기 포인트

Mason 공식은 $T = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$이고, 각 Δ_k에는 해당 전진경로와 접촉하지 않는 루프만 들어간다.

NoteBase

문 2. <보기>와 같이 구성된 전달함수 $G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}$의 극점(pole)이 $-3\pm j2$일 때, 이에 대응하는 K와 K_I의 값은?

<보기>



① K: 2, K_I: 3.25

② K: 2.5, K_I: 3

③ K: 3, K_I: 2.75

④ K: 3.25, K_I: 2

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 PI 제어기가 포함된 단위 피드백계의 특성방정식을 세우고, 원하는 폐루프 극점으로부터 K와 K_I를 비교 결정하는 계산형 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
- 폐루프 극점은 $-3\pm j2$이다.
- 전진 경로는 K와 $\frac{2}{s+2}$이다.
- 오차 신호에 적분기 $\frac{K_I}{s}$가 병렬로 더해지는 PI 구조이다.

구해야 할 값:
- K, K_I

주의할 조건:
- 단위 음의 피드백계이므로 특성방정식은 $1+L(s)=0$으로 잡는다.

NoteBase

사용할 공식

개루프 전달함수는
$L(s) = K\left(1 + \frac{K_I}{s}\right)\frac{2}{s+2} = \frac{2K(s+K_I)}{s(s+2)}$
이다.
따라서 폐루프 특성방정식은
$1 + L(s) = 0$
에서
$s(s+2) + 2K(s+K_I) = 0$
으로 얻어진다.
이 공식을 쓰는 이유는 문제의 블록선도가 단위 음의 피드백 폐루프이기 때문이다.

계산 과정

1. 특성방정식을 정리하면
$s^2 + (2+2K)s + 2KK_I = 0$
이다.
2. 극점이 $-3 \pm j2$이므로 목표 특성다항식은
$(s+3-j2)(s+3+j2) = s^2 + 6s + 13$
이다.
3. 계수를 비교하면
$2 + 2K = 6 \Rightarrow K = 2$
$2KK_I = 13 \Rightarrow 4K_I = 13 \Rightarrow K_I = \frac{13}{4} = 3.25$
이다.

선지 판단

① O: 계산 결과가 $K = 2, K_I = 3.25$이므로 일치한다.
② X: 제시값 $K = 2.5, K_I = 3$을 대입하면 s의 계수는 $2 + 2K = 7$가 되어 목표 계수 6과 맞지 않는다. 틀린 표현은 "$K = 2.5, K_I = 3$"이고, 올바르게는 "$K = 2, K_I = 3.25$"이다.
③ X: 제시값 $K = 3, K_I = 2.75$을 대입하면 상수항은 $2KK_I = 16.5$가 되어 목표 상수항 13과 다르다. 틀린 표현은 "$K = 3, K_I = 2.75$"이고, 올바르게는 "$K = 2, K_I = 3.25$"이다.
④ X: 제시값 $K = 3.25, K_I = 2$를 대입하면 s의 계수는 8.5, 상수항은 13으로 일부만 맞는다. 한 계수만 맞아도 정답이 될 수 없다. 틀린 표현은 "$K = 3.25, K_I = 2$"이고, 올바르게는 "$K = 2, K_I = 3.25$"이다.

오답 포인트

PI 제어기의 병렬 구조를 $1 + \frac{K_I}{s}$가 아니라 $\frac{K_I}{s}$만으로 보거나, 극점으로부터 만든 다항식 $s^2 + 6s + 13$의 상수항 13을 놓치면 오답이 나온다. ④처럼 상수항만 맞는 값을 정답처럼 고르기 쉽다는 점이 함정이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 계산 문제는 먼저 제어기 구조를 식으로 바꾸고, 다음에 단위 피드백 특성방정식을 만든 뒤, 마지막으로 원하는 극점에서 얻은 목표 다항식과 계수를 비교하는 순서로 판단한다.

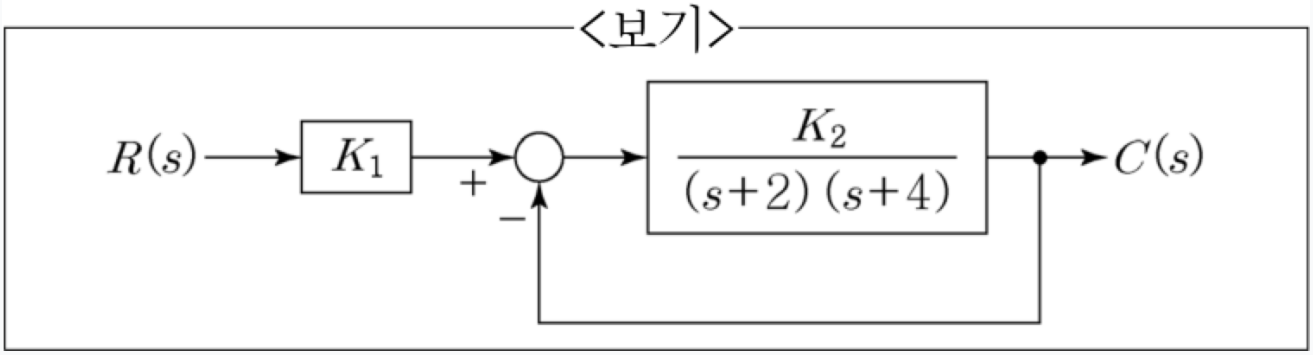
암기 포인트

복소극점 $-a \pm jb$의 목표 다항식은 $s^2 + 2as + (a^2 + b^2)$이고, 계수비교로 제어기 이득을 바로 구할 수 있다.

NoteBase

문 3. <보기>의 시스템에 대한 설명으로 가장 옳은 것은? (단, $T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$, K_1과 K_2는 양의 상수이고, S_α^β는 α에 의한 β의 감도(sensitivity)를 의미한다.)

<보기>



① $T(s)=\frac{K_1K_2}{s^2+6s+8+K_1K_2}$이다.

② 단위계단입력에 대한 정상상태오차는 $\frac{8+K_2-K_1K_2}{8+K_2}$이다.

③ $S_{K_1}^T=K_2$이다.

④ $S_{K_2}^T=K_1$이다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 블록선도의 폐루프 전달함수 $T(s)$, 단위계단입력에 대한 정상상태오차, 감도 S_α^β의 정의를 이용해 각 선지를 판별하는 문제이다.

조건 정리

- 주어진 블록선도는 입력 $R(s)$가 먼저 K_1을 지난 뒤, 단위 음의 되먹임이 걸린 $\frac{K_2}{(s+2)(s+4)}$ 블록으로 들어가는 구조이다.
- 구해야 할 값은 $T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$, 단위계단입력에 대한 정상상태오차, $S_{K_1}^T$, $S_{K_2}^T$이다.
- 입력 앞의 K_1은 전치 보상기처럼 작용하므로 폐루프 분모에 K_1K_2가 더해진다고 보면 안 된다.

NoteBase

사용할 공식

전진경로를 $G(s)=\frac{K_2}{(s+2)(s+4)}$라 두면 폐루프 전달함수는
$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_1G(s)}{1+G(s)}$
이다.
단위계단입력에 대한 정상상태오차는 출력 추종오차 $e_{ss}=1-T(0)$로 계산한다.
감도는
$S_\alpha^\beta=\frac{\partial \ln \beta}{\partial \ln \alpha}$
를 사용한다.
이 공식을 쓰는 이유는 이 문항이 블록선도의 폐루프 전달함수, 영점 주파수에서의 추종 성능, 매개변수 변화에 대한 민감도를 직접 묻기 때문이다.

계산 과정

1. 폐루프 관계식은 $C(s)=G(s)\{K_1R(s)-C(s)\}$이다.
2. 이를 정리하면
$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_1G(s)}{1+G(s)}=\frac{K_1K_2}{(s+2)(s+4)+K_2}=\frac{K_1K_2}{s^2+6s+8+K_2}$
이다.
3. 따라서 $T(0)=\frac{K_1K_2}{8+K_2}$이고, 단위계단입력에 대한 정상상태오차는
$e_{ss}=1-T(0)=1-\frac{K_1K_2}{8+K_2}=\frac{8+K_2-K_1K_2}{8+K_2}$
이다.
4. $A=s^2+6s+8$로 두면 $T=\frac{K_1K_2}{A+K_2}$이므로
$S_{K_1}^T=\frac{\partial \ln T}{\partial \ln K_1}=1,\qquad S_{K_2}^T=\frac{\partial \ln T}{\partial \ln K_2}=\frac{A}{A+K_2}=\frac{s^2+6s+8}{s^2+6s+8+K_2}$
이다.

선지별 해설

① X. 계산한 폐루프 전달함수는 $T(s)=\frac{K_1K_2}{s^2+6s+8+K_2}$이다. 따라서 "분모가 $s^2+6s+8+K_1K_2$이다"가 틀린 표현이며, 올바르게는 "분모가 $s^2+6s+8+K_2$이다"이다.
② O. 단위계단입력에 대한 정상상태오차를 출력 추종오차 $e_{ss}=1-T(0)$로 두면 $e_{ss}=\frac{8+K_2-K_1K_2}{8+K_2}$가 된다. 선지의 식과 일치하므로 옳다.
③ X. K_1은 전달함수의 분자에 1차로만 곱해지므로 $S_{K_1}^T=1$이다. 따라서 "$S_{K_1}^T=K_2$"가 틀린 표현이며, 올바르게는 "$S_{K_1}^T=1$"이다.
④ X. K_2는 분자와 분모에 함께 들어가므로 감도가 상수가 아니다. 따라서 "$S_{K_2}^T=K_1$"가 틀린 표현이며, 올바르게는 "$S_{K_2}^T=\frac{s^2+6s+8}{s^2+6s+8+K_2}$"이다.

NoteBase

오답 포인트

①의 함정은 입력 앞에 있는 K_1을 루프이득 전체에 그대로 곱해 폐루프 분모까지 K_1K_2로 바꾸는 실수이다. ③, ④의 함정은 감도를 단순히 다른 상수와 같다고 착각하는 것이다. ②는 합산점 오차 $K_1R - C$와 출력 추종오차 $R - C$를 구분하지 못하면 헷갈릴 수 있는데, 이 선지는 $T(s) = C(s)/R(s)$를 기준으로 한 추종오차를 묻고 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 문제는 먼저 합산점 식을 세워 C/R를 정리하고, 그다음 $s = 0$을 대입해 정상상태 값을 구하며, 감도는 $\partial \ln T / \partial \ln K$ 정의로 판단하면 된다. 입력 앞의 상수는 분자에 직접 작용하는지, 폐루프 분모까지 바꾸는지부터 분리해서 본다.

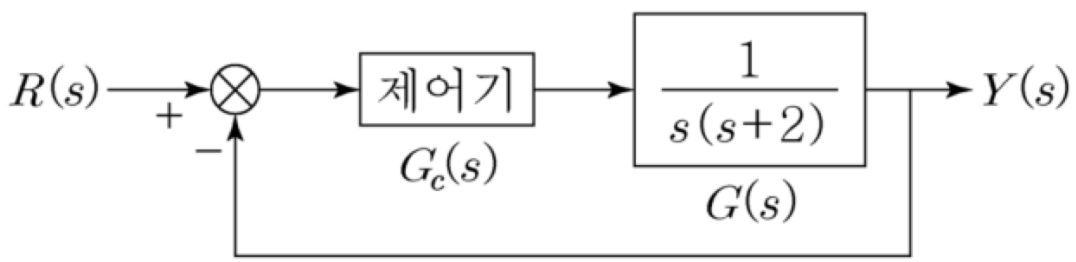
암기 포인트

단위 음의 되먹임에서 전치 이득 K_1은 분자를 키우고, 감도는 $S_{K_1}^{T} = 1$처럼 로그미분으로 바로 정리된다.

NoteBase

문 4. 개루프전달함수 $G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$에 단위임펄스함수(unit-impulse function)를 입력으로 인가하면 정상상태오차를 갖게 된다. <보기>와 같은 폐루프 제어시스템을 설계하여 안정하면서도 정상상태오차를 없애기 위한 제어기 $G_c(s)$로 가장 옳은 것은?

<보기>



① $1+\frac{3}{s}$

② 1

③ $\frac{3}{s}$

④ $1-3s$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 단위피드백 폐루프에서 단위임펄스 입력의 정상상태오차가 0이 되는지와 특성방정식이 안정한지를 함께 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 플랜트는 $G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$이다.
단위피드백이므로 오차전달함수는 $E(s)=\frac{R(s)}{1+G_c(s)G(s)}$이다.
단위임펄스 입력이므로 $R(s)=1$이고, 정상상태오차는 $e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)$로 판단한다.

사용할 공식

$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G_c(s)G(s)}$
$1+G_c(s)G(s)=0$
첫 식은 단위임펄스 입력에 대한 정상상태오차를 구하는 식이고, 둘째 식은 폐루프 안정성을 보는 특성방정식이다.

NoteBase

계산 과정

1. ②의 경우 $G_c(s)=1$이므로 $L(s)=G_c(s)G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$이다.
2. 정상상태오차는 $e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+1/[s(s+2)]}=\lim_{s\to 0}\frac{s^2(s+2)}{s(s+2)+1}=0$이므로 0이 된다.
3. 특성방정식은 $1+\frac{1}{s(s+2)}=0\Rightarrow s(s+2)+1=0\Rightarrow s^2+2s+1=(s+1)^2=0$이다.
4. 폐루프 극이 모두 -1에 있으므로 안정하고, 정상상태오차도 0이므로 ②가 조건을 모두 만족한다.

선지별 해설

① X

- $G_c(s)=1+\frac{3}{s}$이면 특성방정식은 $s^2(s+2)+(s+3)=0\Rightarrow s^3+2s^2+s+3=0$이다.
- Routh 배열의 첫 열이 $1,\ 2,\ -\frac{1}{2},\ 3$으로 부호가 바뀌므로 불안정하다.
- 틀린 표현은 "안정하면서도"를 만족한다고 보는 점이다. 올바르게는 정상상태오차는 0이 될 수 있어도 안정하지 않으므로 적절한 제어기가 아니다.

② O

- $G_c(s)=1$이면 플랜트의 적분기 $1/s$ 덕분에 단위임펄스 입력에 대한 정상상태오차가 0이 된다.
- 특성방정식이 $(s+1)^2=0$이므로 폐루프는 안정하다.
- 정상상태오차 제거와 안정성을 동시에 만족하므로 옳다.

③ X

- $G_c(s)=\frac{3}{s}$이면 특성방정식은 $s^2(s+2)+3=0\Rightarrow s^3+2s^2+3=0$이다.
- Routh 배열의 첫 열이 $1,\ 2,\ -\frac{3}{2},\ 3$이 되어 불안정하다.
- 틀린 표현은 적분동작만 추가하면 된다고 보는 점이다. 올바르게는 적분기만 더하는 것으로는 안정성이 보장되지 않는다.

④ X

- $G_c(s)=1-3s$이면 특성방정식은 $s(s+2)+(1-3s)=0\Rightarrow s^2-s+1=0$이다.
- 근은 $\frac{1\pm j\sqrt{3}}{2}$이므로 실수부가 양수여서 불안정하다.
- 틀린 표현은 미분항을 넣은 이 제어기가 적절하다고 보는 점이다. 올바르게는 이 경우 음의 기울기의 미분항이 안정성을 해치므로 적절하지 않다.

오답 포인트

정상상태오차를 없애려면 무조건 적분제어를 추가해야 한다고 생각하기 쉽다. 그러나 이 플랜트는 이미 $1/s$ 적분기를 하나 가지고 있으므로 단위임펄스 입력에 대해서는 비례제어만으로도 오차 0이 가능하다. 이 문항의 함정은 오차 상수만 보고 ①이나 ③을 고른 뒤 안정성 검토를 빠뜨리게 만드는 점이다.

다시 나오면 이렇게 판단

입력 종류에 따라 필요한 시스템 형을 먼저 본다. 그다음 플랜트 자체에 적분기가 이미 들어 있는지 확인한다. 마지막으로 각 후보 제어기에 대해 특성방정식을 세워 Routh 판별이나 극 위치로 안정성을 확인하면 된다.

NoteBase

암기 포인트

플랜트에 적분기 1개가 있으면 단위임펄스 입력의 정상상태오차는 0이 될 수 있으므로, 추가 적분 여부보다 폐루프 안정성 검토가 더 중요하다.

NoteBase

문 5. 극점과 영점이 각각 $p_{1,2}=-3\pm j5$, $z=-10$에 위치한 시스템의 단위계단응답의 형태는? (단, $u_s(t)$는 단위계단함수이고 c_1, c_2, c_3, c_4는 상수를 나타낸다.)

① $[c_1e^{-3t}+c_2e^{-5t}+c_3e^{-10t}]u_s(t)$

② $[c_1e^{-3t}+c_2e^{-5t}+c_3]u_s(t)$

③ $[e^{-3t}(c_1\cos 5t+c_2\sin 5t)+c_3e^{-10t}+c_4]u_s(t)$

④ $[e^{-3t}(c_1\cos 5t+c_2\sin 5t)+c_3]u_s(t)$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 복소극점이 만드는 감쇠진동 항과 단위계단입력이 만드는 상수항을 구분하고, 영점은 응답의 계수만 바꾸며 새로운 지수항을 만들지 않는다는 점을 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 극점은 $p_{1,2}=-3\pm j5$이다.
주어진 영점은 $z=-10$이다.
입력은 단위계단함수이므로 라플라스 영역에서 $1/s$가 곱해진다.
복소켤레 극점 $-3\pm j5$는 시간응답에서 $e^{-3t}(c_1\cos 5t+c_2\sin 5t)$ 꼴의 감쇠진동 항을 만든다.
영점은 분자에 있으므로 새로운 모드의 지수항 e^{-10t}를 만들지 않는다.

사용할 공식

복소켤레 극점 $\sigma\pm j\omega$에 대응하는 시간응답의 기본형은 $e^{\sigma t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$이다.
단위계단응답은 시스템 전달함수에 $1/s$가 곱해지므로 안정계에서는 상수항이 함께 나타난다.
이 문항은 극점 위치로 응답의 모드를 정하고, 영점은 분자계수 변화로만 반영하는 전형적인 형태 판별 문제이다.

계산 과정

1. 극점 $-3\pm j5$를 보면 실수부 -3은 감쇠율, 허수부 ±5는 진동각주파수를 뜻하므로 응답에는 $e^{-3t}(c_1\cos 5t+c_2\sin 5t)$가 포함된다.
2. 입력이 단위계단이므로 응답의 라플라스식에는 $1/s$가 포함되어 시간영역에서는 상수항 c_3가 추가된다.
3. 영점 $z=-10$은 분자의 영점이므로 계수에는 영향을 주지만 e^{-10t} 같은 독립 지수항을 만들지 않는다.
4. 따라서 단위계단응답의 형태는 $[e^{-3t}(c_1\cos 5t+c_2\sin 5t)+c_3]u_s(t)$가 된다.

NoteBase

선지별 해설

① X: e^{-3t}, e^{-5t}, e^{-10t}처럼 모두 실수지수항으로 쓴 점이 틀리다. 복소극점 $-3 \pm j5$는 $e^{-3t}(c_1\cos 5t + c_2\sin 5t)$ 꼴을 만들어야 하고, -10은 영점이라서 e^{-10t} 항이 생기지 않는다. 틀린 표현은 "$c_2e^{-5t} + c_3e^{-10t}$"이고, 올바르게는 "$e^{-3t}(c_1\cos 5t + c_2\sin 5t) + c_3$"이다.
② X: 상수항이 있다는 점은 맞는 방향이지만, 복소극점을 e^{-3t}와 e^{-5t}의 두 실수극처럼 처리한 점이 틀리다. 허수부 5는 지수감쇠율이 아니라 진동성분 $\cos 5t$, $\sin 5t$로 나타난다. 틀린 표현은 "$c_1e^{-3t} + c_2e^{-5t}$"이고, 올바르게는 "$e^{-3t}(c_1\cos 5t + c_2\sin 5t)$"이다.
③ X: 복소극점을 감쇠진동 항으로 쓴 점과 상수항을 둔 점은 맞지만, 영점 -10을 극점처럼 보고 c_3e^{-10t}를 추가한 점이 틀리다. 영점은 응답 모드가 아니라 분자계수에 반영된다. 틀린 표현은 "$+c_3e^{-10t}$"이고, 올바르게는 그 항을 없애고 상수항만 남긴 "$+c_3$"이다.
④ O: 복소극점 $-3 \pm j5$에서 감쇠진동 항 $e^{-3t}(c_1\cos 5t + c_2\sin 5t)$가 나오고, 단위계단입력 $1/s$ 때문에 상수항 c_3가 더해진 형태이므로 옳다. 영점 -10은 계수값에만 영향을 주고 새로운 지수항은 만들지 않는다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 영점과 극점을 같은 방식으로 시간응답 항으로 옮기는 실수와, 복소극점의 허수부 5를 별도의 실수지수 e^{-5t}로 오해하는 데 있다. 특히 ③은 감쇠진동과 상수항까지는 맞아 보여서 영점이 응답 모드를 추가한다고 착각하면 쉽게 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

응답 형태 문제는 먼저 극점이 시간응답의 모드를 만든다고 보고, 복소극점이면 $e^{\sigma t}(A\cos \omega t + B\sin \omega t)$로 바꾼다. 그다음 입력이 단위계단이면 상수항이 붙는지 확인하고, 영점은 새로운 지수항이 아니라 계수 변화만 만든다고 판단하면 된다.

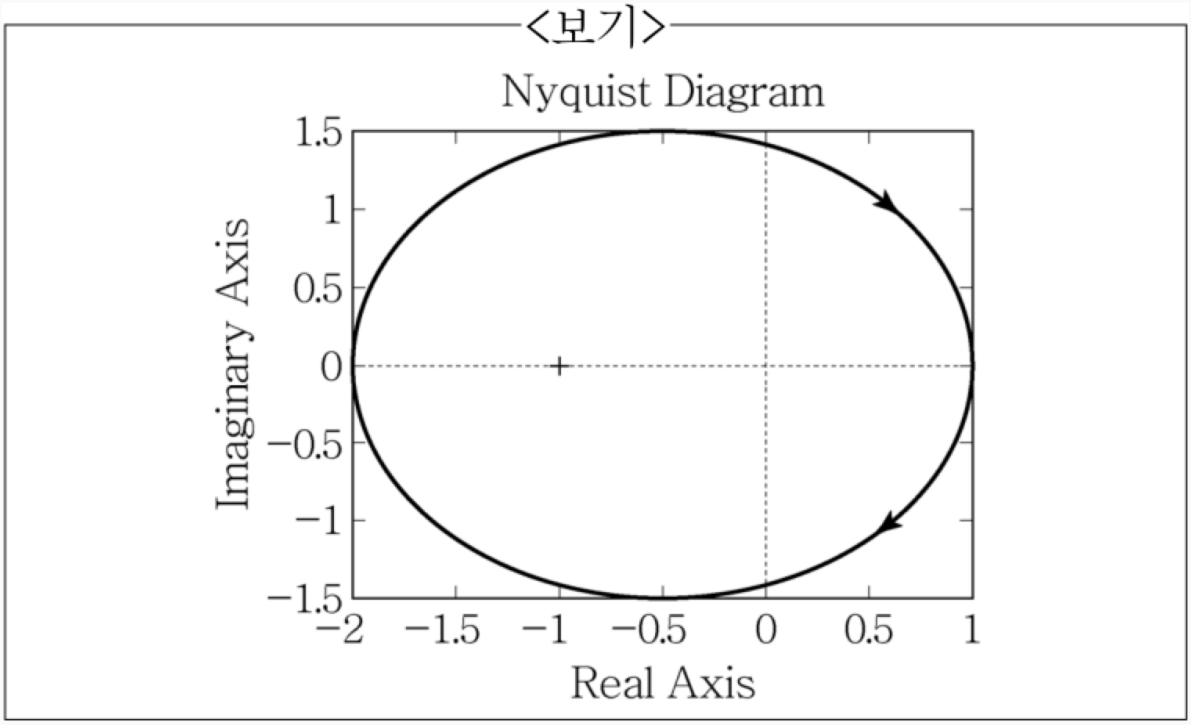
암기 포인트

극점은 모드를 만들고 영점은 계수를 바꾼다. $-3 \pm j5$는 $e^{-3t}(A\cos 5t + B\sin 5t)$, 단위계단은 상수항 추가이다.

NoteBase

문 6. <보기>와 같은 나이퀴스트(Nyquist) 선도에 대응하는 전달함수로서 가장 옳은 것은? (단, $T_1 > T_2 > 0$)

<보기>



① $G(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$
② $G(s) = \frac{T_1 s - 1}{T_2 s + 1}$
③ $G(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s - 1}$
④ $G(s) = \frac{-T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 선도의 실수축 절편과 원의 중심을 보고 $G(j\omega)$의 분자·분모 부호를 판별하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① X
$G(s)=\frac{T_1s+1}{T_2s+1}$이면 $G(0)=1$, $\omega\to\infty$에서 $G(j\omega)\to T_1/T_2>1$이므로 선도는 실수축의 오른쪽 영역에 놓인다. 그림처럼 왼쪽으로 -2까지 뻗는 원이 되지 않는다. 올바르게는 분자 1차항 부호가 음수인 $G(s)=\frac{-T_1s+1}{T_2s+1}$이어야 한다.

② X
$G(s)=\frac{T_1s-1}{T_2s+1}$이면 $G(0)=-1$이어서 선도가 실수축 -1에서 시작한다. 그림은 $\omega=0$에서 1을 지나므로 맞지 않는다. 올바르게는 정지 이득이 1인 형태여야 하므로 $G(s)=\frac{-T_1s+1}{T_2s+1}$이다.

③ X
$G(s)=\frac{T_1s+1}{T_2s-1}$도 $G(0)=-1$이므로 시작점이 다르다. 또한 분모 부호 때문에 그림처럼 1에서 출발해 좌측으로 감기는 원을 만들지 못한다. 올바르게는 분모는 T_2s+1, 분자는 $-T_1s+1$이어야 한다.

④ O
$G(s)=\frac{-T_1s+1}{T_2s+1}$이면 $G(j\omega)=\frac{1-jT_1\omega}{1+jT_2\omega}$이다. 여기서 $k=T_1/T_2$라 두면 궤적은 $\left(x-\frac{1-k}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1+k}{2}\right)^2$의 원이 된다. 그림의 중심은 $(-0.5,\,0)$, 반지름은 1.5이므로 $k=2$가 되어 실수축 절편이 1과 -2가 된다. 이는 그림과 일치한다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 식의 안정성 자체보다 먼저 $G(0)$와 $\omega\to\infty$에서의 종점 위치를 보아야 한다는 점이다. ②와 ③은 $G(0)=-1$이라 시작점에서 탈락하고, ①은 종점이 양의 실수축에 남아 그림의 좌측 절편과 맞지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

1차/1차 전달함수의 나이퀴스트 선도가 원으로 보이면 먼저 $\omega=0$에서의 값과 $\omega\to\infty$에서의 값을 본다.
시작점이 1이고 종점이 음의 실수축이면 분자 1차항 부호가 음수인 형태를 우선 고른다. 이어서 원의 중심과 반지름으로 T_1/T_2를 확인하면 된다.

암기 포인트

나이퀴스트 원은 양 끝점이 먼저 정답을 가른다. 이 그림은 $1\to -T_1/T_2$로 가야 하므로 $\frac{1-T_1s}{1+T_2s}$ 형태이다.

NoteBase

문 7. <보기>와 같이 주어진 시스템에 $r(t)=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$가 인가됐을 때, 정상상태 응답은?

<보기>
$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s+1}$

① $\sin t$
② $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$
③ $2\sin t$
④ $2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 주파수응답 $G(j\omega)$를 이용해 정현파 입력에 대한 정상상태 응답의 진폭과 위상을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s)=\frac{1}{s+1}$이다.
입력은 $r(t)=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$이므로 진폭은 $\sqrt{2}$, 각주파수는 $\omega=1$, 초기위상은 $\frac{\pi}{4}$이다.
구해야 할 값은 정상상태 출력 $y_{ss}(t)$이다.

사용할 공식

정현파 입력 $r(t)=A\sin(\omega t+\phi)$에 대한 정상상태 응답은
$y_{ss}(t)=A|G(j\omega)|\sin\left(\omega t+\phi+\angle G(j\omega)\right)$
이다.
이 공식을 쓰는 이유는 선형 시불변 시스템에서 정상상태 정현파 응답은 입력과 같은 주파수를 유지하고,
전달함수의 주파수응답이 진폭비와 위상차를 결정하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. $\omega = 1$이므로
$G(j) = \frac{1}{1+j}$
이다.
2. 크기와 위상을 구하면
$|G(j)| = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \angle G(j) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$
이다.
3. 따라서 출력 진폭은
$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$
이고, 출력 위상은
$\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$
이다.
4. 정상상태 응답은
$y_{ss}(t) = \sin t$
이다.

선지별 해설

① O: 계산 결과 정상상태 응답은 $\sin t$이다. 진폭은 1이고 위상은 0이므로 정답이다.
② X: $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$는 위상이 $+\frac{\pi}{2}$인 값이다. 이 시스템은 $\omega = 1$에서 $-\frac{\pi}{4}$만큼 지연시키므로 이런 위상은 나오지 않는다. 틀린 표현은 $+\frac{\pi}{2}$이고, 올바르게는 $\sin t$이다.
③ X: $2\sin t$는 진폭이 2인 값이다. 실제 출력 진폭은 입력 진폭 $\sqrt{2}$에 전달함수 크기 $\frac{1}{\sqrt{2}}$를 곱한 1이다. 틀린 표현은 진폭 2이고, 올바르게는 $\sin t$이다.
④ X: $2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$는 진폭과 위상을 모두 잘못 구한 값이다. 실제로는 진폭이 1이고 위상은 0이다. 틀린 표현은 진폭 2와 위상 $+\frac{\pi}{2}$이고, 올바르게는 $\sin t$이다.

오답 포인트

입력의 진폭 $\sqrt{2}$만 보고 출력 진폭을 그대로 두거나, $G(j)$의 위상 $-\frac{\pi}{4}$를 빼지 않으면 오답이 된다. 전달함수의 크기와 위상을 동시에 반영해야 한다는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

정현파 정상상태 응답 문제는 입력에서 A, ω, ϕ를 먼저 읽고, 그다음 $G(j\omega)$의 크기와 위상을 구해 진폭은 곱하고 위상은 더하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

정현파 정상상태 응답은 주파수는 그대로이고, 진폭은 $|G(j\omega)|$를 곱하며 위상은 $\angle G(j\omega)$만큼 이동한다.

NoteBase

문 8. <보기>와 같이 개루프전달함수가 주어진 시스템의 근궤적에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

<보기>

$\frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)}, \quad K>0$

① 근궤적 지로(branch) 중의 하나는 -4에서 시작해서 $-\infty$로 향한다.

② K가 커지면 폐루프 시스템이 불안정해질 수 있다.

③ 점근선은 두 개이다.

④ 실수축 -2와 -1 사이에 이탈점이 존재한다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 개루프전달함수의 극과 영점으로 근궤적의 실수축 구간, 점근선 개수, 이탈점을 판별할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

개루프 극은 $s=-1,\ -2$이고 개루프 영점은 $s=-4$이다.
근궤적 가지 수는 극의 개수인 2개이다.
가지 2개 중 1개는 영점 -4로 끝나고, 나머지 1개는 무한대로 간다.

사용할 공식

특성방정식은 $1+\frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)}=0$이므로 $(s+1)(s+2)+K(s+4)=0$이다.
점근선 개수는 $n-m$이고, 실수축 근궤적은 해당 점의 오른쪽에 있는 실수축상의 극과 영점 개수가 홀수인 구간에 존재한다.
이탈점은 $K=-\frac{(s+1)(s+2)}{s+4}$로 놓고 $\frac{dK}{ds}=0$에서 구한다.

계산 과정

점근선 개수는 $n-m=2-1=1$이므로 점근선은 1개이다.
실수축 근궤적 구간은 $(-\infty,\ -4)$와 $(-2,\ -1)$이다.
이탈점과 이입점은 $K=-\frac{(s+1)(s+2)}{s+4}$에서 $\frac{dK}{ds}=0$을 적용해 구한다.
$\frac{dK}{ds}=0$에서 $s^2+8s+10=0$이므로 $s=-4\pm\sqrt{6}$이다.
따라서 $s=-4+\sqrt{6}\approx -1.55$는 -2와 -1 사이의 이탈점이고, $s=-4-\sqrt{6}\approx -6.45$는 $-\infty$와 -4 사이의 이입점이다.
또한 폐루프 특성방정식은 $s^2+(K+3)s+(4K+2)=0$이므로 $K>0$에서 계수가 모두 양수여서 폐루프는 안정하다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 근궤적은 개루프 극에서 시작하고 개루프 영점 또는 무한대에서 끝난다. -4는 극이 아니라 영점이므로 가지가 -4에서 시작하는 것이 아니라 -4로 끝난다.
② X: 폐루프 특성방정식이 $s^2 + (K+3)s + (4K+2) = 0$이므로 $K > 0$에서 2차 계수들이 모두 양수이다. 따라서 근은 항상 좌반평면에 있어 불안정해지지 않는다. 틀린 표현은 "불안정해질 수 있다"이고, 올바르게는 "$K > 0$에서 안정하다"이다.
③ X: 점근선 개수는 극 개수 2에서 영점 개수 1을 뺀 값이므로 1개이다. 틀린 표현은 "두 개"이고, 올바르게는 "한 개"이다.
④ O: $\frac{dK}{ds} = 0$으로 구한 이탈점 중 $s = -4 + \sqrt{6} \approx -1.55$가 실수축 -2와 -1 사이에 있으므로 옳다.

오답 포인트

영점과 극의 역할을 바꾸어 보면 ①을 맞는 말처럼 착각하기 쉽다. 또 가지 수가 2개라는 사실을 점근선 수와 혼동하면 ③을 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적 문제는 먼저 극과 영점을 찍고, 다음에 실수축 구간과 $n - m$ 점근선 수를 확인한 뒤, 마지막으로 $\frac{dK}{ds} = 0$으로 이탈점과 이입점을 계산하면 된다.

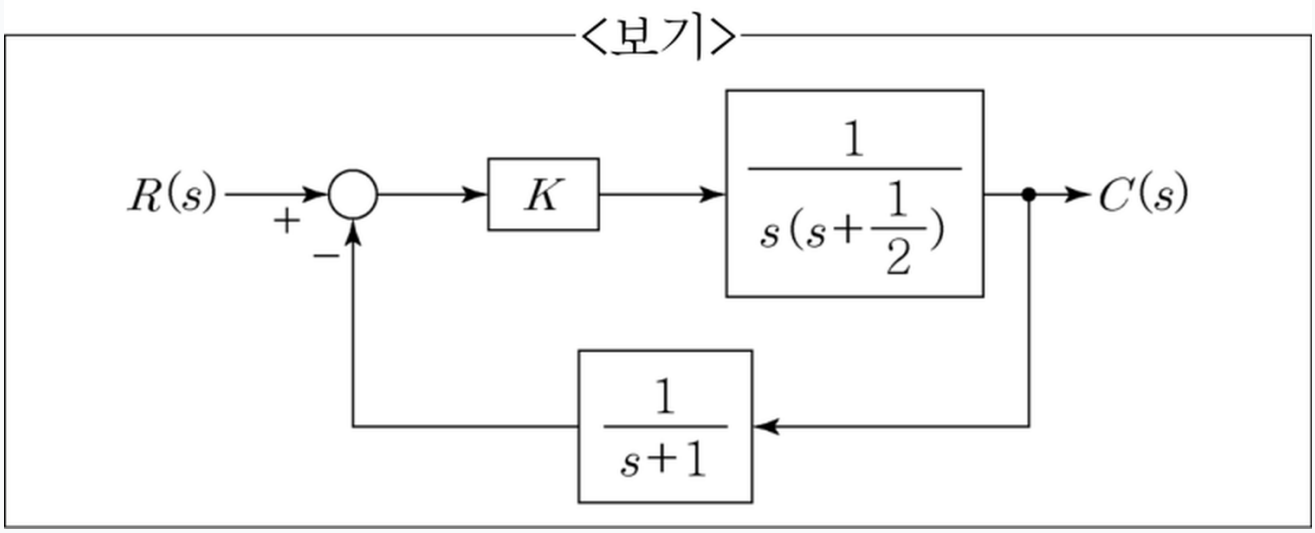
암기 포인트

근궤적은 극에서 출발해 영점 또는 무한대로 끝나며, 점근선 수는 극 수-영점 수이다.

NoteBase

문 9. <보기>와 같은 제어시스템에서 이득여유(gain margin)가 0[dB]이 되도록 하는 K의 값은? (단, $K>0$인 상수이다.)

<보기>



① 1
② $\frac{3}{4}$
③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{1}{2}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 개루프 전달함수의 위상교차주파수에서 크기를 구해 이득여유가 0[dB]가 되도록 하는 K를 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 순방향 전달함수는 $G(s)=\frac{K}{s(s+\frac{1}{2})}$이다.
피드백 전달함수는 $H(s)=\frac{1}{s+1}$이다.
따라서 개루프 전달함수는 $L(s)=G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+\frac{1}{2})(s+1)}$이다.
구해야 할 값은 이득여유가 0[dB]가 되게 하는 K이다.

NoteBase

사용할 공식

이득여유는 위상교차주파수 ω_{pc}에서 정의된다.

$\angle L(j\omega_{pc}) = -180^\circ$

$GM = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$

$20\log_{10} GM = 0\ \text{dB} \Rightarrow GM = 1 \Rightarrow |L(j\omega_{pc})| = 1$

이 공식을 쓰는 이유는 이득여유 0[dB]라는 조건이 위상교차주파수에서 개루프 크기가 정확히 1이라는 뜻이기 때문이다.

계산 과정

1. 위상 조건을 쓰면

$\angle L(j\omega) = -(90^\circ + \tan^{-1}(2\omega) + \tan^{-1}(\omega))$

이므로

$90^\circ + \tan^{-1}(2\omega) + \tan^{-1}(\omega) = 180^\circ$

이다.

2. 따라서 $\tan^{-1}(2\omega) + \tan^{-1}(\omega) = 90^\circ$이고,

$(2\omega)(\omega) = 1$

이 되어 $\omega_{pc} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

3. 이때 크기는

$|L(j\omega_{pc})| = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2 + (\frac{1}{2})^2}\sqrt{\omega^2 + 1}}$

이고 $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$를 대입하면 분모는

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$

이다. 따라서

$|L(j\omega_{pc})| = \frac{K}{3/4} = \frac{4K}{3}$

이다.

4. 이득여유가 0[dB]이면 $|L(j\omega_{pc})| = 1$이므로

$\frac{4K}{3} = 1 \Rightarrow K = \frac{3}{4}$

이다.

NoteBase

선지별 해설

① X
- $K=1$이면 $|L(j\omega_{pc})|=\frac{4}{3}$이어서 이득여유가 0[dB]가 아니다.
- 틀린 표현은 "$K=1$이면 0[dB]가 된다"이다. 올바르게는 위상교차주파수에서 크기가 1이 되도록 $K=\frac{3}{4}$가 되어야 한다.

② O
- 계산 결과 $K=\frac{3}{4}$일 때 $|L(j\omega_{pc})|=1$이 된다.
- 따라서 이득여유는 $20\log_{10}1=0$ dB가 되어 정답이다.

③ X
- $K=\frac{3}{2}$이면 $|L(j\omega_{pc})|=2$가 되어 이득여유가 0[dB]가 아니다.
- 틀린 표현은 "$K=\frac{3}{2}$가 임계값이다"이다. 올바르게는 K가 $\frac{3}{4}$일 때만 0[dB]가 된다.

④ X
- $K=\frac{1}{2}$이면 $|L(j\omega_{pc})|=\frac{2}{3}$이므로 이득여유가 0[dB]보다 크다.
- 틀린 표현은 "$K=\frac{1}{2}$이면 위상교차점에서 크기가 1이다"이다. 올바르게는 분모값 $\frac{3}{4}$와 같도록 K가 $\frac{3}{4}$여야 한다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 폐루프 전달함수가 아니라 개루프 전달함수 $G(s)H(s)$로 이득여유를 계산해야 한다는 점이다. 또한 위상조건에서 $\tan^{-1}(2\omega)+\tan^{-1}(\omega)=90^\circ$를 놓치거나, 위상교차주파수에서의 분모 크기 $\frac{3}{4}$를 역수와 혼동하면 ①, ③, ④ 같은 오답으로 흐르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

이득여유 문제는 먼저 개루프 전달함수 $L(s)=G(s)H(s)$를 만든다. 그다음 $\angle L(j\omega)=-180^\circ$가 되는 위상교차주파수를 찾고, 그 주파수에서 $|L(j\omega)|=1$ 조건을 대입해 미지 이득을 정하면 된다.

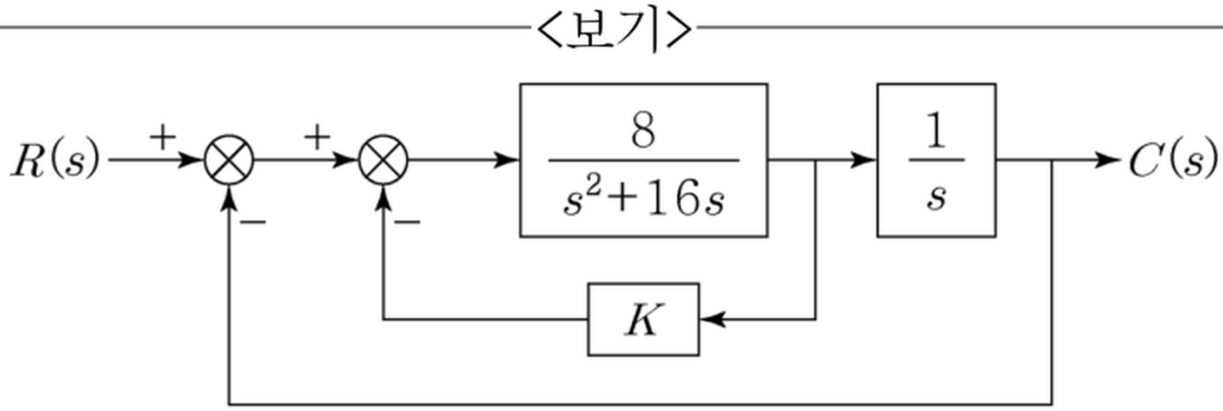
암기 포인트

이득여유 0[dB]는 위상교차주파수에서 $|L(j\omega)|=1$과 같은 뜻이다.

NoteBase

문 10. <보기>의 제어시스템이 절대 안정(asymptotically stable)하기 위한 K의 범위는?

<보기>



① $K > \frac{1}{16}$

② $K > \frac{1}{96}$

③ $K > \frac{1}{108}$

④ $K > 0$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 중첩 피드백 블록선도를 등가화한 뒤 3차 특성방정식에 Routh-Hurwitz 안정조건을 적용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

조건 정리

외부 루프는 출력 $C(s)$를 첫 번째 합점으로 되돌리는 단위 음의 피드백이다.
내부 루프는 $\frac{8}{s^2+16s}$ 블록의 출력을 이득 K를 거쳐 두 번째 합점으로 되돌리는 음의 피드백이다.
절대 안정은 폐루프 특성방정식의 모든 근의 실수부가 음수인 경우이다.

NoteBase

사용할 공식

내부 피드백이 걸린 블록의 등가 전달함수는
$G_{\text{in}}(s) = \frac{\frac{8}{s^2+16s}}{1+K\frac{8}{s^2+16s}} = \frac{8}{s^2+16s+8K}$
이다.
따라서 외부 루프의 전향 전달함수는
$G(s) = \frac{8}{s(s^2+16s+8K)}$
이고, 폐루프 특성방정식은
$1+G(s)=0 \Rightarrow s^3+16s^2+8Ks+8=0$
이다.
3차식 $s^3+a_1s^2+a_2s+a_3$가 안정하려면 $a_1>0, a_2>0, a_3>0, a_1a_2>a_3$를 만족해야 한다.
이 공식을 쓰는 이유는 이 문항이 블록선도에서 폐루프 특성방정식을 만든 뒤 안정판별식으로 K의 범위를 구하는 형태이기 때문이다.

계산 과정

1. 내부 피드백을 먼저 정리하면 $\frac{8}{s^2+16s}$ 블록은 $\frac{8}{s^2+16s+8K}$로 등가화된다.
2. 여기에 적분기 $\frac{1}{s}$가 직렬이므로 외부 루프 전향 전달함수는 $G(s)=\frac{8}{s(s^2+16s+8K)}$이다.
3. 단위 음의 피드백이므로 특성방정식은 $1+G(s)=0$, 즉 $s^3+16s^2+8Ks+8=0$이다.
4. 여기서 $a_1=16, a_2=8K, a_3=8$이므로 안정조건은 $8K>0$와 $16\cdot 8K>8$이다.
5. 따라서 $K>0$이면서 $128K>8$, 즉 $K>\frac{1}{16}$이어야 한다. 이 조건이 $K>0$보다 더 강하므로 최종 범위는 $K>\frac{1}{16}$이다.

선지별 해설

① O: 안정조건을 적용하면 $K>\frac{1}{16}$이므로 옳다.
② X: $K>\frac{1}{96}$은 하한이 너무 작다. 예를 들어 $K=\frac{1}{32}$이면 이 선택지는 만족하지만 실제로는 $16\cdot 8K=4<8$이어서 안정조건을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 '$K>\frac{1}{96}$'이고, 올바르게는 '$K>\frac{1}{16}$'이다.
③ X: $K>\frac{1}{108}$도 안정조건보다 느슨한 범위이다. $\frac{1}{108}<K\le\frac{1}{16}$인 구간에서는 여전히 특성방정식의 안정조건이 깨질 수 있다. 틀린 표현은 '$K>\frac{1}{108}$'이고, 올바르게는 '$K>\frac{1}{16}$'이다.
④ X: $K>0$만으로는 부족하다. $0<K\le\frac{1}{16}$이면 계수는 모두 양수여도 $a_1a_2>a_3$를 만족하지 못해 절대 안정이 아니다. 틀린 표현은 '$K>0$'이고, 올바르게는 '$K>\frac{1}{16}$'이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 $K>0$만 확인하고 끝내거나, 내부 피드백을 등가화하지 않은 채 성급하게 특성방정식을 쓰는 데 있다. ②, ③ 같은 값은 3차 안정조건 $a_1a_2>a_3$를 정확히 적용하지 못했을 때 나오기 쉬운 오답이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

중첩 피드백 블록선도는 안쪽 피드백부터 등가화한 뒤 바깥 폐루프 특성방정식을 만든다. 그다음 3차식이면 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 > a_3$를 순서대로 확인하면 된다.

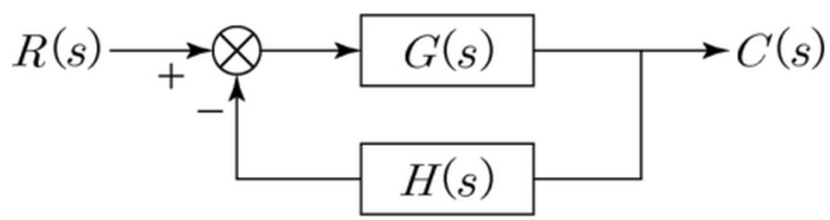
암기 포인트

3차 특성방정식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$의 안정 핵심은 계수 양수와 $a_1 a_2 > a_3$이다.

NoteBase

문 11. <보기>의 폐루프 시스템 내 루프전달함수 $G(s)H(s)$의 s평면의 오른쪽 반평면에 존재하는 극점의 개수를 A라고 할 때, 가장 옳지 않은 것은?

<보기>



① A가 0이고 Nyquist 선도를 그릴 때 $-1+j0$점을 감싸지 않는다면 시스템은 안정하다.

② A가 1이고 Nyquist 선도를 그릴 때 $-1+j0$점을 반시계방향으로 한 번 감싸면 시스템은 안정하다.

③ Nyquist 안정도 판별법을 이용하기 위해서는 A의 정보가 필요하다.

④ A가 1이고 Nyquist 선도를 그릴 때 $-1+j0$점을 시계방향으로 한 번 감싸면 시스템은 안정하다.

정답 4번

출제 포인트

Nyquist 안정도 판별에서 개루프 우반평면 극점 수 A와 $-1+j0$점의 감김 방향을 함께 해석하는지를 묻는 문제이다. 제시된 도식은 음의 되먹임 폐루프이므로 감김 수만 보지 않고 A까지 포함해 폐루프 안정도를 판단해야 한다.

핵심 개념

이 문항은 반시계방향 1회 감김을 $N=-1$, 시계방향 1회 감김을 $N=+1$로 보는 부호 약속으로 읽으면 된다. 폐루프의 우반평면 극점 수를 Z라 하면 $Z=A+N$으로 판단하고, 안정하려면 $Z=0$이어야 한다.

NoteBase

선지별 해설

① O

A=0이고 $-1+j0$점을 감싸지 않으면 $N=0$이므로 $Z=A+N=0$이 된다. 폐루프 우반평면 극점이 없으므로 안정하다는 판단이 맞다.

② O

A=1인데 $-1+j0$점을 반시계방향으로 한 번 감싸면 $N=-1$이므로 $Z=1+(-1)=0$이 된다. 개루프에 있던 우반평면 극점 1개를 감김으로 상쇄한 경우라서 안정하다.

③ O

Nyquist 판별은 감김 수만으로 끝나지 않고 개루프 전달함수 $G(s)H(s)$의 우반평면 극점 수 A를 함께 알아야 한다. 같은 감김이라도 A 값이 다르면 안정 여부가 달라지므로 이 선지는 옳다.

④ X

A=1인데 $-1+j0$점을 시계방향으로 한 번 감싸면 $N=+1$이므로 $Z=1+1=2$가 된다. 폐루프 우반평면 극점이 2개 생겨 안정하지 않다. 틀린 표현은 '시계방향으로 한 번 감싸면 시스템은 안정하다'이고, 올바르게는 '반시계방향으로 한 번 감싸야 안정하다' 또는 '시계방향으로 한 번 감싸면 불안정하다'이다.

오답 포인트

감김의 유무만 외우고 방향의 부호를 놓치면 ②와 ④를 뒤집기 쉽다. 또한 A를 무시하고 Nyquist 선도 모양만 보면 ③의 필요성을 놓치게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 발문이 묻는 값이 개루프 극점 수 A인지 폐루프 안정성인지 구분한다. 그다음 $-1+j0$점 감김 방향을 부호로 바꾸고 $Z=A+N$을 계산해 $Z=0$이면 안정, 0이 아니면 불안정으로 정리하면 된다.

암기 포인트

Nyquist는 감김 수만 보는 판별이 아니라 A와 감김 방향을 합쳐 $Z=0$인지 보는 판별이다.

NoteBase

문 12. 모든 유한 크기의 입력에 대해 출력의 크기가 유한한 응답을 가지는 시스템에서, 각 모델 형태에 대한 안정성 조건으로 가장 옳지 않은 것은?

① 전달함수 $G(s)$인 경우, 모든 극점이 s평면의 좌반에 존재한다.

② 상태방정식 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$인 경우, A의 모든 고유값(eigenvalue)의 실수부가 음이어야 한다.

③ 전달함수로부터 구한 특정방정식인 경우, 모든 근의 실수부가 음이어야 한다.

④ 임펄스응답함수 $g(t)$인 경우, $\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau > \infty$를 만족한다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 연속시간 LTI 시스템의 안정성을 전달함수, 상태방정식, 특정방정식, 임펄스응답으로 표현했을 때의 동치 조건을 묻는 문제이다.

핵심 개념

BIBO 안정은 모든 유한한 입력에 대해 출력도 유한하게 유지되는 성질이다.
전달함수와 특정방정식에서는 극점 또는 근이 모두 s평면 좌반면에 있어야 안정이다.
상태방정식에서는 행렬 A의 모든 고유값 실수부가 음수여야 안정이다.
임펄스응답으로는 $\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau < \infty$가 되어야 절대적분 가능하므로 안정이다.

NoteBase

선지별 해설

① O

전달함수 $G(s)$의 안정조건은 모든 극점이 s평면의 좌반면, 즉 실수부가 음수인 위치에 존재하는 것이다. 우반면 극점이나 허수축 위 극점이 있으면 출력이 발산하거나 감쇠하지 않아 안정이 아니다.

② O

상태방정식 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$에서 안정성은 상태천이행렬 e^{At}의 감쇠 여부로 판단하며, 이는 A의 모든 고유값 실수부가 음수인지로 결정된다. 따라서 선지의 진술은 맞다.

③ O

특정방정식의 근은 곧 시스템의 극점 위치를 결정한다. 모든 근의 실수부가 음수이면 특성근이 좌반면에 있으므로 안정하다는 판단이 맞다.

④ X

틀린 부분은 $\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau > \infty$이다.

실제로는 임펄스응답이 절대적분 가능해야 하므로 $\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau < \infty$가 되어야 안정이다. 적분값이 무한대이면 BIBO 안정조건을 만족하지 못한다.

오답 포인트

④는 부등호 방향 하나만 바꿔 놓은 함정이다. 안정성 조건에서는 극점 위치와 함께 임펄스응답의 절대적분 가능 조건을 같이 기억해야 하는데, $> \infty$를 $< \infty$로 바꾸어 읽지 못하면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

연속시간 안정성 문제는 표현 형식이 달라도 판단축이 같다. 전달함수와 특정방정식은 모든 극점 또는 근의 실수부가 음수인지 확인하고, 상태방정식은 A의 고유값 실수부를 확인하며, 임펄스응답은 절대적분 $\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau$가 유한한지를 확인하면 된다.

암기 포인트

안정은 좌반면, 절대적분은 유한이다.

NoteBase

문 13. <보기>와 같이 주어진 시스템에 단위계단입력 $u(t)=1$ (단, $t \geq 0$)을 가했을 때, 이에 대한 출력 $y(t)$로 옳은 것은?

<보기>

$\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+8y(t)=u(t), \quad y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=1$

① $y(t)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{3}{8}e^{-4t}$

② $y(t)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{3}{8}e^{-4t}$

③ $y(t)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{3}{8}e^{-4t}$

④ $y(t)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{3}{8}e^{-4t}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 2차 선형 미분방정식의 단위계단응답을 구하고 초기조건을 대입해 계수를 결정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+8y(t)=u(t)$이다.
단위계단입력이므로 $t \geq 0$에서 $u(t)=1$이다.
초기조건은 $y(0)=0, \dot{y}(0)=1$이다.
구해야 할 값은 위 조건을 만족하는 $y(t)$이다.

사용할 공식

상수입력에 대한 특수해를 먼저 구하고, 동차해를 더해 일반해를 만든다.
$y(t)=y_h(t)+y_p(t), \quad y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-4t}$
특수해는 상수 $y_p=A$로 두면
$8A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{8}$
이 공식을 쓰는 이유는 입력이 상수 1이므로 정상상태해를 상수로 둘 수 있고, 나머지는 특성방정식으로 감쇠지수항 형태가 결정되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 특성방정식은 $r^2 + 6r + 8 = 0$이고, $(r+2)(r+4) = 0$이므로 근은 $-2, -4$이다.
2. 따라서 일반해는 $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + \frac{1}{8}$이다.
3. 초기조건 $y(0) = 0$을 대입하면 $C_1 + C_2 + \frac{1}{8} = 0$이므로 $C_1 + C_2 = -\frac{1}{8}$이다.
4. 미분하면 $\dot{y}(t) = -2C_1 e^{-2t} - 4C_2 e^{-4t}$이고, $\dot{y}(0) = 1$을 대입하면 $-2C_1 - 4C_2 = 1$이다.
5. 두 식을 풀면 $C_2 = -\frac{3}{8}$, $C_1 = \frac{1}{4}$이다.
6. 최종적으로
$y(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-4t}$
이 된다.

선지별 해설

① X: $-\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-4t}$로 두면 $y(0) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{2}$가 되어 초기조건 $y(0) = 0$을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 $-\frac{1}{4}e^{-2t}$의 부호이며, 올바르게는 $+\frac{1}{4}e^{-2t}$이어야 한다.
② X: $+\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t}$로 두면 $y(0) = \frac{3}{4}$가 되어 초기조건부터 어긋난다. 틀린 표현은 $+\frac{3}{8}e^{-4t}$이며, 올바르게는 $-\frac{3}{8}e^{-4t}$이다.
③ O: $y(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-4t}$는 $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$을 모두 만족한다. 계산으로 얻은 응답식과 정확히 일치한다.
④ X: $-\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t}$로 두면 $y(0) = \frac{1}{4}$가 되어 $y(0) = 0$을 만족하지 못한다. 두 지수항의 부호가 모두 잘못되었고, 올바르게는 $+\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-4t}$이다.

오답 포인트

상수 특수해 $\frac{1}{8}$는 맞게 구해도 초기조건을 대입하는 과정에서 지수항 계수의 부호를 뒤집기 쉽다. 특히 $\dot{y}(0) = 1$을 적용할 때 미분계수 $-2, -4$가 함께 들어간다는 점을 놓치면 ②나 ④ 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위계단응답 계산형은 상수 특수해를 먼저 구하고, 특성방정식으로 동차해를 만든 뒤, 마지막에 $y(0)$, $\dot{y}(0)$를 순서대로 대입해 계수를 결정하면 된다. 최종식은 반드시 $t = 0$에서 초기조건을 다시 대입해 검산한다.

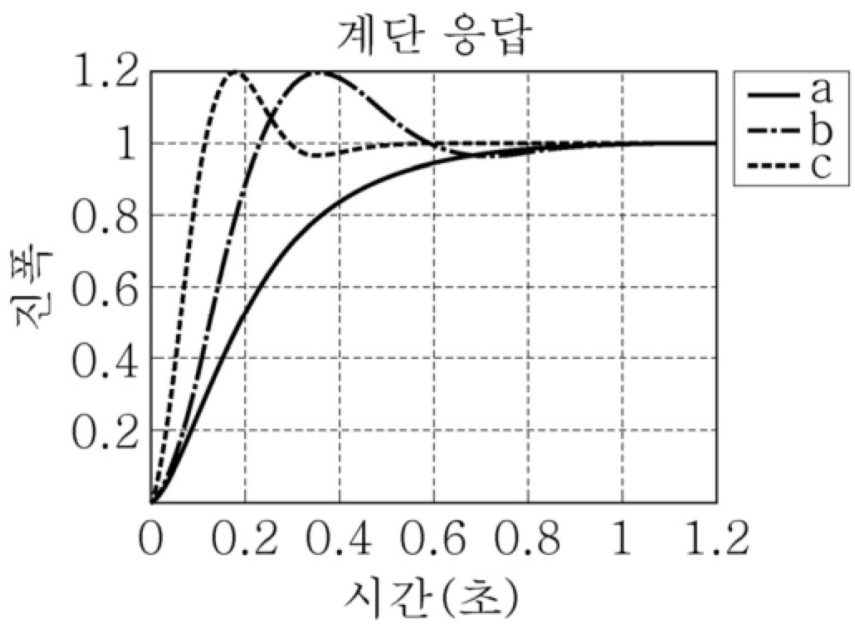
암기 포인트

상수입력 2차계 응답은 정상상태값을 먼저 정하고, 남는 지수항 계수는 초기조건 두 개로 결정한다.

NoteBase

문 14. <보기>에 주어진 서로 다른 감쇠비와 고유주파수를 갖는 2차 시스템의 단위계단응답에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, 각 시스템의 전달함수는 $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 형태이고 감쇠비는 ζ, 고유주파수는 ω_n을 나타낸다. 또한, b와 c의 최대 오버슈트는 같다.)

<보기>



① a의 감쇠비는 b의 감쇠비보다 크다.

② a의 감쇠비는 1보다 작다.

③ c의 고유주파수는 b의 고유주파수보다 크다.

④ b와 c의 감쇠비는 같다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 계단응답 그래프에서 오버슈트와 응답속도를 읽어 감쇠비 ζ와 고유주파수 ω_n의 상대적 크기를 판단하는 문제이다.

자료 읽는 순서

1. 범례를 보고 a, b, c 곡선을 구분한다.
2. 최대 오버슈트의 크기와 발생 여부를 비교해 감쇠비를 판단한다.
3. 같은 오버슈트인 경우 피크 도달 시간과 응답속도를 비교해 고유주파수의 크기를 판단한다.

NoteBase

핵심 근거

2차 표준형의 최대 오버슈트는 $\zeta < 1$일 때 감쇠비 ζ에만 의해 결정된다.
따라서 최대 오버슈트가 같은 b와 c는 같은 감쇠비를 가진다.
또한 같은 감쇠비에서 더 빨리 피크가 나타나는 곡선이 더 큰 고유주파수 ω_n를 가진다.
a는 오버슈트 없이 단조롭게 수렴하므로 감쇠비가 1 이상인 응답으로 본다.

선지별 해설

① O
- a는 오버슈트가 없고 b는 오버슈트가 있으므로 b는 $\zeta_b < 1$이다.
- a는 단조 수렴 응답이므로 $\zeta_a \geq 1$로 볼 수 있어 $\zeta_a > \zeta_b$가 된다.

② X
- "a의 감쇠비는 1보다 작다"가 틀린 표현이다.
- a는 오버슈트 없이 목표값으로 단조 수렴하므로 감쇠비를 1보다 작은 언더댐프드 시스템으로 볼 수 없다.
- 올바르게는 a의 감쇠비는 1 이상으로 본다.

③ O
- b와 c는 최대 오버슈트가 같다고 했으므로 감쇠비는 같다.
- 그래프에서 c가 b보다 더 이른 시점에 첫 번째 피크에 도달하므로 $\omega_{n,c} > \omega_{n,b}$이다.

④ O
- 최대 오버슈트는 감쇠비가 정하면 결정된다.
- b와 c의 최대 오버슈트가 같으므로 두 시스템의 감쇠비도 같다고 판단한다.

오답 포인트

응답이 빠르면 감쇠비가 작다고 단순 연결하면 틀리기 쉽다. 이 문제에서는 먼저 오버슈트의 유무와 크기로 감쇠비를 보고, 같은 오버슈트 안에서 시간축상의 빠르기로 고유주파수를 비교해야 한다. a처럼 오버슈트가 없으면 $\zeta < 1$가 아니라 $\zeta \geq 1$ 쪽으로 판단한다.

다시 나오면 이렇게 판단

2차 계단응답 문제는 먼저 오버슈트 존재 여부를 본다. 오버슈트가 있으면 $\zeta < 1$, 없으면 $\zeta \geq 1$로 본다. 같은 최대 오버슈트면 같은 감쇠비이고, 그 안에서 더 빨리 피크가 나타나거나 더 빠르게 응답하는 곡선이 더 큰 고유주파수를 가진다.

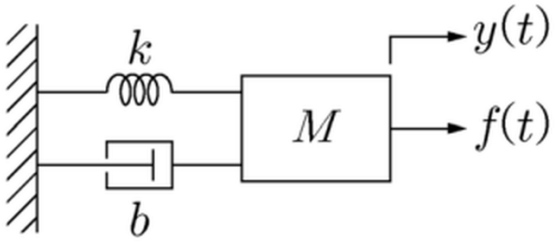
암기 포인트

같은 오버슈트면 같은 ζ이고, 더 빨리 흔들리면 더 큰 ω_n이다.

NoteBase

문 15. 점성마찰(viscous friction)이 있는 탄성시스템에서 외부에서 가한 힘 $f(t)$가 입력이고, 물체의 이동거리 $y(t)$가 출력일 때, 이에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, $t \geq 0$이고, M은 질량, k는 스프링 상수, b는 댐퍼 감쇠계수이다. 또한, M과 k 및 b는 양의 상수이다.)

<보기>



① 운동방정식은 $M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t)$이다.

② 전달함수는 $\frac{1}{Ms^2 + bs + k}$이다.

③ 입력이 단위계단으로 주어질 때, 정상상태오차는 $\frac{1}{k}$이다.

④ 주어진 시스템은 항상 안정하다.

정답 3번

출제 포인트

질량-스프링-댐퍼 시스템의 운동방정식, 전달함수, 정상상태출력과 정상상태오차의 구분을 묻는 문제이다.

조건 정리

입력은 외력 $f(t)$, 출력은 변위 $y(t)$이다.

시스템은 질량 M, 감쇠계수 b, 스프링 상수 k를 갖는 2차 선형계이다.

$M > 0,\ b > 0,\ k > 0$이므로 특성방정식의 계수는 모두 양수이다.

사용할 공식

운동방정식은 $M\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$이다.

영초기조건에서 전달함수는 $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$이다.

단위계단 입력 $F(s) = 1/s$일 때 정상상태출력은 최종값정리로 $y(\infty) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0) = \frac{1}{k}$이다.

NoteBase

계산 과정

1. 힘의 평형으로 질량항, 감쇠항, 스프링항을 합치면 $M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f(t)$가 된다.
2. 이를 라플라스 변환하면 $(Ms^2 + bs + k)Y(s) = F(s)$이므로 $\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$이다.
3. 단위계단 입력에 대한 정상상태출력은 최종값정리로 $y(\infty) = G(0) = \frac{1}{k}$이다.
4. 여기서 $\frac{1}{k}$는 정상상태오차가 아니라 정상상태출력이다. 정상상태오차는 기준입력과 출력의 차이 $e(t) = r(t) - y(t)$로 정의되므로 단위피드백 폐루프 구조를 전제해야 값이 정해진다. 이 문제의 전달함수는 힘 입력에서 변위 출력으로 가는 개루프이므로, 구한 최종값 $\frac{1}{k}$는 오차가 아니라 출력의 정상상태값으로 보아야 한다. 굳이 단위피드백을 가정하면 오차는 $e_{ss} = 1 - \frac{1}{k}$가 되지만, ③의 근본적 오류는 출력과 오차를 뒤바꿔 부른 데 있다.

선지별 해설

① O
운동방정식은 질량의 관성력, 점성감쇠력, 스프링 복원력의 합이 외력과 같다는 식이므로 $M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t)$가 맞다.

② O
①식을 라플라스 변환하면 $(Ms^2 + bs + k)Y(s) = F(s)$가 되므로 전달함수는 $\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$이다.

③ X
단위계단 입력에 대해 최종값정리로 구한 $\frac{1}{k}$는 정상상태출력이다. ③은 이 값을 정상상태오차라고 잘못 적었다. 정상상태오차는 기준입력과 출력의 차이 $e(t) = r(t) - y(t)$로 정의되는 개념이므로 단위피드백 폐루프 구조를 전제해야 값이 정해진다. 이 시스템은 힘 $f(t)$를 입력, 변위 $y(t)$를 출력으로 하는 개루프 전달함수이므로, 구한 최종값 $\frac{1}{k}$는 오차가 아니라 출력의 정상상태값이다.
단위피드백을 가정할 때에만 오차가 $e_{ss} = 1 - \frac{1}{k}$로 계산되며, 어느 경우든 $\frac{1}{k}$ 자체를 정상상태오차로 부르는 것은 틀린다. 따라서 ③이 가장 옳지 않은 설명이다.

④ O
특성방정식은 $Ms^2 + bs + k = 0$이다. 2차계에서 M, b, k가 모두 양수이면 계수들이 모두 양수이므로 극의 실수부가 음수여서 안정하다.

오답 포인트

③은 최종값정리로 얻은 $\frac{1}{k}$를 정상상태출력으로 보아야 하는데 이를 정상상태오차로 바꿔 적어 둔 함정이다. DC 이득에 해당하는 정상상태출력과 정상상태오차는 서로 다른 개념이며, 오차는 기준입력과 출력의 차이로서 단위피드백 구조를 전제할 때에만 정해진다. 두 개념을 같은 값으로 착각하면 틀리기 쉽다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

질량-스프링-댐퍼 문제는 먼저 운동방정식을 세우고, 다음에 전달함수를 구한 뒤, $s \to 0$에서 최종값 $G(0)$을 계산하고, 마지막에 그 값이 출력인지 오차인지를 분리해서 판단하면 된다. 최종값정리로 얻는 값은 출력의 정상상태값이고, 오차는 단위피드백을 전제할 때만 정의된다는 점을 기억하면 된다.

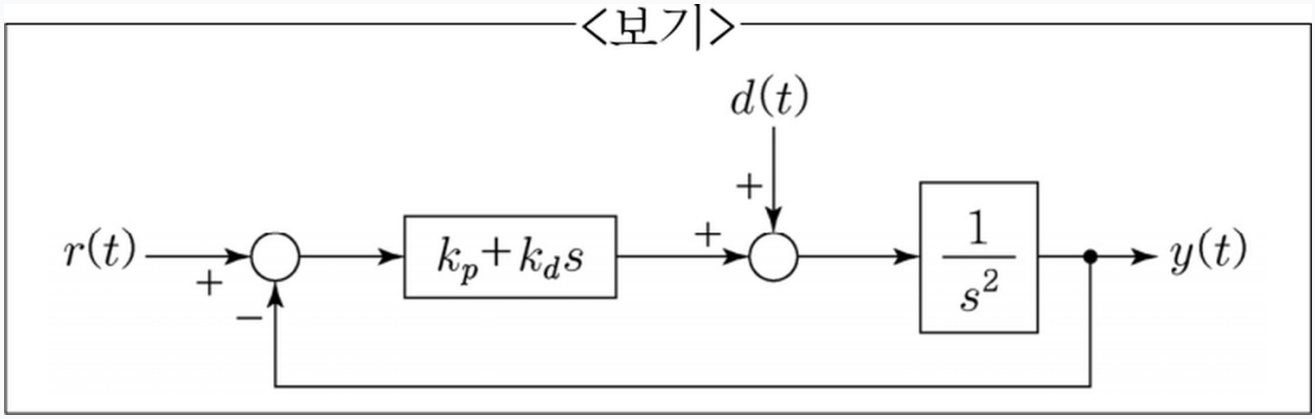
암기 포인트

질량-스프링-댐퍼계는 $M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f$이고, 단위계단 입력의 정상상태출력은 $G(0) = 1/k$이다. $1/k$는 출력이지 오차가 아니며, 정상상태오차는 단위피드백을 전제할 때에만 $1 - 1/k$로 정해진다.

NoteBase

문 16. <보기>의 시스템에 대하여 $k_p > 0$, $k_d > 0$이고 기준 입력신호와 외란이 각각 $r(t) = tu_s(t)$, $d(t) = 0.1u_s(t)$로 주어졌다고 가정할 때, 정상상태오차 $\lim_{t\to\infty}[r(t)-y(t)]$의 값은? (단, $u_s(t)$는 단위계단함수이다.)

<보기>



① 0
② $\frac{0.9}{k_p}$
③ $-\frac{0.1}{k_p}$
④ $\frac{1}{k_d}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 PD 제어기가 붙은 2차 적분계에서 기준입력과 입력외란이 동시에 있을 때 정상상태오차를 최종값정리로 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
- 제어기 $C(s) = k_p + k_d s$, $k_p > 0$, $k_d > 0$
- 플랜트 $P(s) = \frac{1}{s^2}$
- 기준입력 $r(t) = tu_s(t)$ 이므로 $R(s) = \frac{1}{s^2}$
- 외란 $d(t) = 0.1u_s(t)$ 이므로 $D(s) = \frac{0.1}{s}$

구해야 할 값:
- 정상상태오차 $e_{ss} = \lim_{t\to\infty}[r(t)-y(t)]$

주의할 조건:
- 외란은 제어기 뒤, 플랜트 입력단에 가산된다.

NoteBase

사용할 공식

오차는 $e(t) = r(t) - y(t)$ 이고, 라플라스 영역에서

$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} R(s) - \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} D(s)$

이다.

이 공식을 쓰는 이유:

- 기준입력은 폐루프 민감도 $\frac{1}{1+CP}$ 를 거쳐 오차에 반영된다.
- 입력외란은 플랜트 $P(s)$ 를 지난 뒤 같은 분모 $1 + CP$ 로 억제된다.
- 정상상태오차는 최종값정리 $e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$ 로 구할 수 있다.

계산 과정

1. 개루프 전달함수는

$C(s)P(s) = \frac{k_p + k_d s}{s^2}$

이다.

2. 따라서

$\frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{s^2}{s^2 + k_d s + k_p}, \qquad \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{s^2 + k_d s + k_p}$

이다.

3. 이를 오차식에 대입하면

$E(s) = \frac{s^2}{s^2 + k_d s + k_p} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + k_d s + k_p} \cdot \frac{0.1}{s} = \frac{1}{s^2 + k_d s + k_p} - \frac{0.1}{s(s^2 + k_d s + k_p)}$

이다.

4. 공통분모로 정리하면

$E(s) = \frac{s - 0.1}{s(s^2 + k_d s + k_p)}$

이다.

5. 최종값정리를 적용하면

$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s - 0.1}{s^2 + k_d s + k_p} = -\frac{0.1}{k_p}$

이다.

6. 기준입력 $r(t) = t u_s(t)$ 만 놓고 보면 2형 시스템이라 램프 정상상태오차는 0이지만, 계단 외란 $d(t) = 0.1 u_s(t)$ 때문에 최종 오차가 $-\frac{0.1}{k_p}$ 만큼 남는다.

NoteBase

선지별 해설

① X
- 계산 결과는 0이 아니라 $-\frac{0.1}{k_p}$ 이다.
- 0이라는 값은 램프 기준입력만 보고 외란항 $-\frac{P}{1+CP}D$ 를 빠뜨리면 나오는 오답이다.
- 틀린 표현은 "정상상태오차가 0이다"이고, 올바르게는 "기준입력에 대한 오차는 0으로 수렴하지만 외란 때문에 전체 정상상태오차는 $-\frac{0.1}{k_p}$ 이다"이다.

② X
- $\frac{0.9}{k_p}$는 계산 결과와 부호도 크기도 맞지 않는다.
- 이는 $sE(s)$를 구할 때 $s-0.1$에서 $s\to 0$ 극한을 잘못 처리하거나 1과 0.1을 혼동했을 때 생기는 값이다.
- 틀린 표현은 "정상상태오차가 $\frac{0.9}{k_p}$이다"이고, 올바르게는 "정상상태오차는 $-\frac{0.1}{k_p}$이다"이다.

③ O
- 최종값정리로 $e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=-\frac{0.1}{k_p}$ 이므로 정답이다.
- 외란이 양의 방향으로 플랜트 입력에 더해지면 출력이 기준입력보다 더 커질 수 있으므로 $r(t)-y(t)$는 음수가 될 수 있다.

④ X
- 결과식의 분모는 k_d가 아니라 k_p이다.
- k_d는 분모의 s항 계수로 과도응답에 영향을 주지만, $s\to 0$에서 남는 상수항은 k_p이므로 정상상태오차는 k_p가 결정한다.
- 틀린 표현은 "정상상태오차가 $\frac{1}{k_d}$이다"이고, 올바르게는 "정상상태오차는 $-\frac{0.1}{k_p}$이다"이다.

오답 포인트

이 문항의 핵심 함정은 2형 시스템의 램프 추종 성능만 보고 외란 영향을 지워 버리는 데 있다. ①은 외란을 무시한 경우의 오답이고, ④는 미분이득 k_d가 정상상태오차까지 정한다고 착각한 경우의 오답이다. 또한 오차를 $r-y$로 두었으므로 외란이 출력을 밀어 올리면 부호가 음수가 된다는 점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 정상상태오차 문제는 먼저 오차 $E(s)$를 기준입력 항과 외란 항으로 분리한다. 그다음 $\frac{1}{1+CP}$, $\frac{P}{1+CP}$를 각각 만든 뒤 $e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)$를 적용하면 부호와 분모가 정리된다.

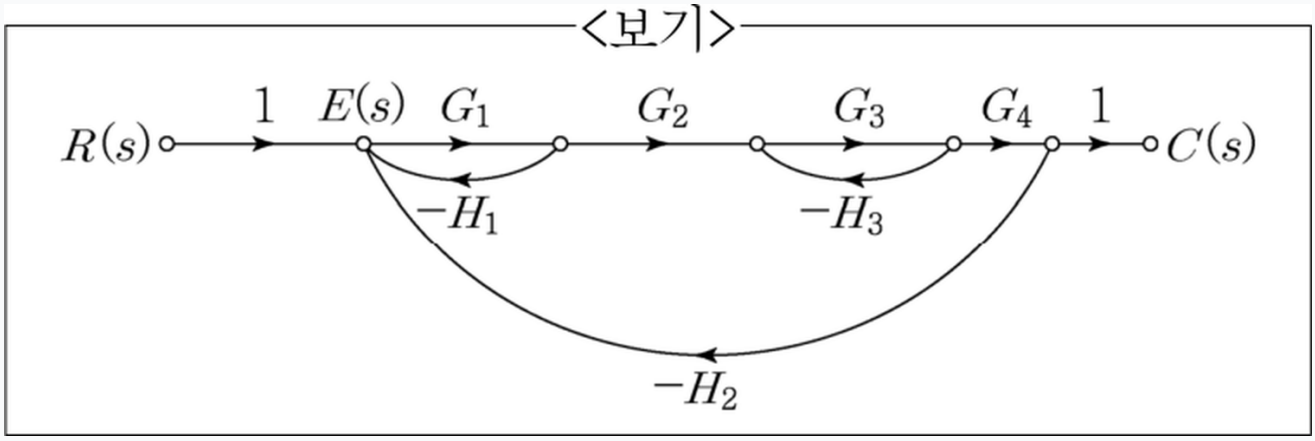
암기 포인트

2형 시스템의 램프 오차가 0이어도 입력계단외란에 대한 정상상태오차는 k_p가 결정한다.

NoteBase

문 17. <보기>와 같은 신호흐름선도(signal flow graph)에서 $\frac{C(s)}{E(s)}$에 대한 전달함수는? (단, $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = H_1 = H_2 = H_3 = 1$이라고 가정한다.)

<보기>



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 신호흐름선도에서 $E(s)$를 기준 입력으로 둘 때, $E(s)$ 이후 구간에만 메이슨 공식 또는 등가 블록 계산을 적용해 $C(s)/E(s)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = H_1 = H_2 = H_3 = 1$이다.
구해야 할 값: $C(s)/E(s)$이다.
주의할 조건: $E(s)$는 이미 앞단 피드백이 반영된 오차신호이므로 $E(s)$로 되돌아오는 $-H_1$, $-H_2$를 $C(s)/E(s)$ 계산에 다시 포함하지 않는다.

NoteBase

사용할 공식

도식에서 $E(s)$ 이후만 떼어 보면 G_3에 $-H_3$가 걸린 국부 피드백 1개가 있는 직렬계이므로
$\frac{C(s)}{E(s)} = G_1G_2 \cdot \frac{G_3}{1+G_3H_3} \cdot G_4$
이다.
이 공식을 쓰는 이유: 문제는 $R(s)$가 아니라 $E(s)$를 기준으로 한 전달함수를 묻기 때문이다. 따라서 $E(s)$ 앞에서 형성된 전체 피드백 효과는 이미 $E(s)$에 반영되어 있고, $E(s)$ 이후 구간의 직렬 전달과 G_3의 국부 피드백만 계산하면 된다.

계산 과정

1. $E(s)$ 이후의 순방향 경로는 G_1, G_2, G_3, G_4의 직렬 연결이다.
2. 이 중 피드백으로 직접 닫혀 있는 부분은 G_3와 $-H_3$뿐이므로 등가 전달함수는 $\frac{G_3}{1+G_3H_3}$이다.
3. 값을 대입하면
$\frac{C(s)}{E(s)} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1 \cdot 1} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
이 된다.

선지별 해설

① O
- $E(s)$ 이후에는 G_3의 국부 피드백만 남으므로 계산값은 1/(1 + 1) = 1/2이다. 따라서 ①은 옳다.

② X
- 틀린 표현은 전달함수를 1/3이라고 본 부분이다. 올바르게는 $E(s)$ 이후 유효 피드백이 1개뿐이므로 $C(s)/E(s) = 1/2$이다.
- 1/3은 $-H_1$이나 $-H_2$까지 다시 세어 분모를 3처럼 처리할 때 나오기 쉬운 오답이다.

③ X
- 틀린 표현은 전달함수를 1/4라고 본 부분이다. 올바르게는 G_1, G_2, G_4는 모두 1인 직렬 이득일 뿐 분모를 4로 만들지 않으므로 $C(s)/E(s) = 1/2$이다.
- 1/4는 블록 수가 4개라는 이유만으로 값을 단순 역수처럼 오해할 때 나오기 쉽다.

④ X
- 틀린 표현은 전달함수를 1/5라고 본 부분이다. 올바르게는 1/5는 전체 그래프에 메이슨 공식을 적용해 얻는 $C(s)/R(s)$에 해당하고, 문제에서 묻는 $C(s)/E(s)$는 아니다.
- $E(s)$로 되돌아가는 $-H_1$, $-H_2$까지 다시 포함하면 기준 입력을 잘못 잡은 계산이 된다.

NoteBase

오답 포인트

이 문항의 함정은 기준 입력을 $R(s)$로 착각하는 데 있다. $E(s)$를 기준으로 물었는데도 전체 피드백 루프 $-H_1$, $-H_2$, $-H_3$를 모두 넣으면 $C(s)/R(s)$를 구하게 되어 ④처럼 빗나간다.

다시 나오면 이렇게 판단

전달함수 문제는 분자와 분모보다 먼저 기준 입력이 어느 노드인지 확인한다. 기준 입력이 내부 노드 $E(s)$이면 그 노드로 되돌아오는 앞단 피드백은 끊고, 그 이후에 실제로 닫힌 국부 루프만 남겨 계산한다.

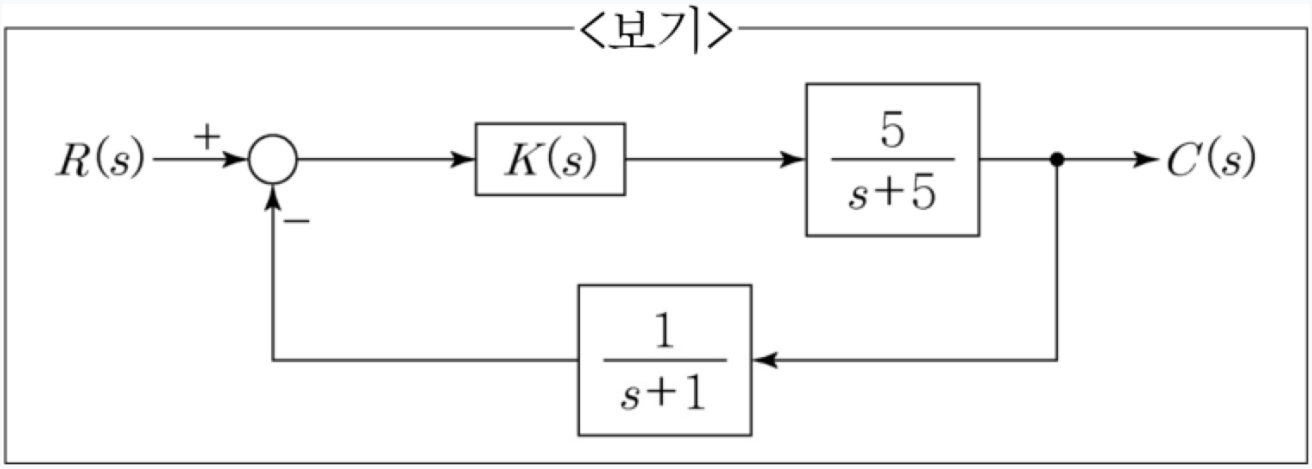
암기 포인트

$C(s)/E(s)$는 $E(s)$ 이후만 본다. 내부 기준노드로 되돌아가는 피드백은 다시 세지 않는다.

NoteBase

문 18. <보기>와 같은 시스템에서 $K(s)=1$일 때 단위계단 입력에 대한 정상상태오차를 $\frac{1}{5}$배로 줄이기 위한 적절한 지상제어기(lag controller) $K(s)$는?

<보기>



① $\frac{s+0.09}{s+0.01}$

② $\frac{s+0.05}{s+0.01}$

③ $\frac{s+0.01}{s+0.05}$

④ $\frac{s+0.01}{s+0.09}$

정답 1번

출제 포인트

비단위 피드백 시스템에서 단위계단 입력의 정상상태오차 e_{ss}와 지상제어기의 직류이득 $K(0)$ 관계를 이용해 필요한 보상기 비율을 구하는 문제이다.

조건 정리

- 전진경로는 $K(s)\cdot\frac{5}{s+5}$이다.
- 피드백 경로는 $H(s)=\frac{1}{s+1}$이다.
- 기존 제어기는 $K(s)=1$이다.
- 단위계단 입력에 대한 정상상태오차를 기존의 $\frac{1}{5}$로 줄여야 한다.

NoteBase

사용할 공식

이 시스템은 $H(s)=\frac{1}{s+1}$인 비단위 피드백이므로, 여기서 다루는 오차는 합산점에서 만들어지는 동작신호 $E(s)=R(s)-C(s)H(s)$이다. 이를 정리하면 $E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$이고, 단위계단 입력에 대해 $e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\frac{1}{1+K_p}$이다. 여기서 위치오차상수는 피드백을 포함한 루프이득으로 $K_p=\lim_{s\to0}G(s)H(s)$로 정의한다.

비단위 피드백이지만 이 형태를 쓸 수 있는 근거: K_p에 $H(s)$를 그대로 포함시켜 계산하기 때문이다. 특히 $H(0)=\frac{1}{0+1}=1$이어서 저주파(직류)에서는 피드백 이득이 1이 되고, 결과적으로 K_p는 제어기와 플랜트의 직류이득 곱으로 정리된다. 그래서 단위 피드백일 때와 같은 형태의 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$를 그대로 적용할 수 있다.

이 공식을 쓰는 이유: 이 문제는 타입 0 폐루프 시스템의 단위계단 정상상태오차를 저주파 루프이득으로 조정하는 지상보상기 설계 문제이기 때문이다.

계산 과정

1. 기존 루프이득은 $K_p=\lim_{s\to0}\left(\frac{5}{s+5}\cdot\frac{1}{s+1}\right)=1$이다.
2. 따라서 기존 정상상태오차는 $e_{ss,0}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$이다.
3. 목표 오차는 $e_{ss,new}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$이다.
4. $\frac{1}{1+K_{p,new}}=\frac{1}{10}$이므로 $K_{p,new}=9$이다.
5. 플랜트와 피드백의 직류이득 곱이 이미 1이므로 지상제어기는 $K(0)=9$를 만족해야 한다.

NoteBase

선지별 해설

① O
- $K(0)=\frac{0.09}{0.01}=9$이므로 새 K_p가 9가 되어 $e_{ss}=\frac{1}{10}$이다.
- 지상제어기 조건도 만족한다. 극은 -0.01, 영점은 -0.09로 극이 영점보다 원점에 더 가깝고($|-0.01|<|-0.09|$), 이때 직류이득 K(0)=영점 크기극 크기=(0.09)/(0.01)=9>1이 되어 저주파 이득을 키운다. 저주파 이득을 키우는 것이 곧 정상상태오차를 줄이는 것이므로, 이 형태가 문제에서 요구한 지상제어기이다.

② X
- $K(0)=\frac{0.05}{0.01}=5$이므로 $e_{ss}=\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$이다. 목표값 $\frac{1}{10}$까지 줄어들지 않는다.
- 틀린 표현은 $\frac{s+0.05}{s+0.01}$로도 충분하다는 점이다. 올바르게는 직류이득이 9가 되는 $\frac{s+0.09}{s+0.01}$이어야 한다.

③ X
- $K(0)=\frac{0.01}{0.05}=0.2$이므로 $e_{ss}=\frac{1}{1+0.2}=\frac{5}{6}$이다. 오차가 오히려 커진다.
- 틀린 표현은 $\frac{s+0.01}{s+0.05}$가 목표를 만족하는 지상제어기라는 점이다. 올바르게는 저주파 이득을 키워야 하므로 분자 상수항이 분모 상수항보다 큰 형태여야 한다.

④ X
- $K(0)=\frac{0.01}{0.09}=\frac{1}{9}$이므로 $e_{ss}=\frac{1}{1+1/9}=\frac{9}{10}$이다. 오차 감소가 아니라 큰 폭의 악화이다.
- 틀린 표현은 $\frac{s+0.01}{s+0.09}$로 목표 오차를 만족할 수 있다는 점이다. 올바르게는 직류이득 9를 만드는 $\frac{s+0.09}{s+0.01}$이어야 한다.

오답 포인트

지상제어기라는 말만 보고 위상 특성만 떠올리면 오답이 된다. 이 문제는 먼저 기존 K_p와 e_{ss}를 구한 뒤, 목표 오차에 맞는 새 K_p를 역산하고 마지막에 보상기 직류이득 $K(0)$를 맞추는 순서가 핵심이다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위계단 정상상태오차를 몇 배 줄인다고 하면 먼저 기존 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$를 구하고, 목표 e_{ss}를 넣어 필요한 새 K_p를 역산한다. 그다음 플랜트와 피드백의 직류이득을 제외한 나머지를 보상기 $K(0)$로 맞추면 된다.

암기 포인트

타입 0 시스템의 단위계단 오차는 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$이고, 지상제어기는 극이 영점보다 원점에 더 가까워 직류이득을 키운다.

NoteBase

문 19. 상태방정식을 올바르게 풀이한 상태천이행렬은?

<보기>

bmatrixx_1 \ x_2bmatrix=bmatrix0 & 1 \ 4 & 0bmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix

① bmatrix(1)/(2)≤ft(e^2t+e^-2t) & ≤ft(e^2t-e^-2t) \ ≤ft(e^2t-e^-2t) & (1)/(2)≤ft(e^2t+e^-2t)bmatrix

② bmatrix(1)/(2)≤ft(e^2t+e^-2t) & ≤ft(e^2t-e^-2t) \ (1)/(4)≤ft(e^2t-e^-2t) & (1)/(2)≤ft(e^2t+e^-2t)bmatrix

③ bmatrix(1)/(2)≤ft(e^2t+e^-2t) & (1)/(4)≤ft(e^2t-e^-2t) \ ≤ft(e^2t-e^-2t) & (1)/(2)≤ft(e^2t+e^-2t)bmatrix

④ bmatrix(1)/(2)≤ft(e^2t+e^-2t) & (1)/(4)≤ft(e^2t-e^-2t) \ (1)/(4)≤ft(e^2t-e^-2t) & (1)/(2)≤ft(e^2t+e^-2t)bmatrix

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식의 상태전이행렬 e^{At}를 구할 때 $A^2 = 4I$ 성질을 이용해 지수행렬을 정리할 수 있는지를 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 행렬은 행렬 A=[[0, 1], [4, 0]]이다.
구해야 할 값은 상태전이행렬 $\Phi(t) = e^{At}$이다.
주의할 조건은 비대각 원소가 서로 같지 않다는 점과 $\sinh(2t) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$라는 점이다.

사용할 공식

$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$
$A^2 = 4I \Rightarrow e^{At} = I\cosh(2t) + \frac{A}{2}\sinh(2t)$
이 공식을 쓰는 이유는 A^2가 스칼라배의 항등행렬이므로 짝수차 항은 I로, 홀수차 항은 A로 묶여 쌍곡선함수 꼴로 바로 정리되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. $A^2 = 4I$이므로 $A^{2k} = 4^k I$, $A^{2k+1} = 4^k A$가 된다.
2. 따라서
$e^{At} = I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^{2k}}{(2k)!} + \frac{A}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = I\cosh(2t) + \frac{A}{2}\sinh(2t)$
3. 이를 대입하면
$e^{At} = [[\cosh(2t), \frac{1}{2}\sinh(2t)], [2\sinh(2t), \cosh(2t)]]$
4. $\cosh(2t) = \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}$, $\sinh(2t) = \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}$이므로
$e^{At} = [[\frac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t}), \frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})], [(e^{2t}-e^{-2t}), \frac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t})]]$
이 된다.

선지별 해설

① X
- 대각 원소는 맞지만 우상단 원소가 $(e^{2t}-e^{-2t})$로 되어 있어 계수가 4배 크다. 실제 우상단은 $\frac{1}{2}\sinh(2t) = \frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})$이다.
- 틀린 표현은 우상단 $(e^{2t}-e^{-2t})$이고, 올바르게는 $\frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})$이다.

② X
- 우상단은 ①과 같은 이유로 틀리고, 좌하단도 $\frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})$로 써서 계수를 지나치게 작게 잡았다. 좌하단은 $2\sinh(2t) = e^{2t}-e^{-2t}$가 되어야 한다.
- 틀린 표현은 우상단 $(e^{2t}-e^{-2t})$, 좌하단 $\frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})$이고, 올바르게는 각각 $\frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})$, $(e^{2t}-e^{-2t})$이다.

③ O
- $A^2 = 4I$를 이용해 정리한 상태전이행렬과 정확히 일치한다. 대각 원소는 $\cosh(2t)$, 우상단은 $\frac{1}{2}\sinh(2t) = \frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})$, 좌하단은 $2\sinh(2t) = e^{2t}-e^{-2t}$이므로 옳다.

④ X
- 우상단은 맞지만 좌하단을 $\frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})$로 써서 A의 $(2,1)$ 원소 4를 반영하지 못했다. 좌하단은 $e^{2t}-e^{-2t}$가 맞다.
- 틀린 표현은 좌하단 $\frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})$이고, 올바르게는 $(e^{2t}-e^{-2t})$이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 비대각 원소를 대칭으로 착각하는 데 있다. 주어진 A의 비대각 성분은 1과 4이므로 상태전이행렬의 우상단과 좌하단 계수도 서로 달라진다. 또한 $\sinh(2t)$를 바로 $(e^{2t}-e^{-2t})$로 적어 $\frac{1}{2}$를 한 번 더 놓치는 실수가 자주 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

행렬 A에 대해 $A^2 = a^2 I$ 꼴이 보이면 먼저 짝수차와 홀수차를 분리해 $e^{At} = I\cosh(at) + \frac{A}{a}\sinh(at)$ 형태로 정리한다. 그다음 sinh, cosh를 지수형으로 바꾸어 각 원소의 계수를 검산하면 된다.

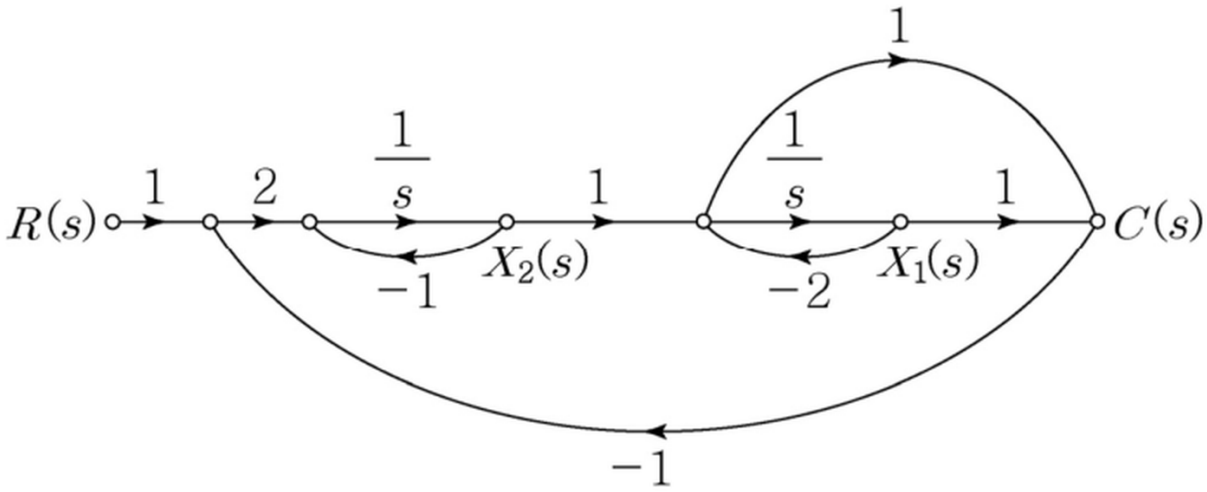
암기 포인트

$A^2 = a^2 I$이면 $e^{At} = I\cosh(at) + \frac{A}{a}\sinh(at)$이고, $\sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$이므로 비대각 원소의 $\frac{1}{2}$를 끝까지 확인한다.

NoteBase

문 20. <보기>의 신호흐름선도의 상태공간방정식을 구할 때, 이에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

<보기>



① 특성방정식은 $s^2 + 5s + 8 = 0$이다.

② 가제어성(controllability) 행렬은 bmatrix0 & 2 \ 2 & -6bmatrix이다.

③ 가관측성(observability) 행렬은 bmatrix1 & 1 \ -4 & -2bmatrix이다.

④ 전달함수 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2(s+2)}{s^2+5s+8}$이다.

정답 2번

출제 포인트

신호흐름선도에서 적분기 출력 $x_1 = X_1, x_2 = X_2$를 상태변수로 잡아 상태공간식 A, B, C, D를 만든 뒤, 특성방정식, 가제어성, 가관측성, 전달함수를 연결해 판단하는 문제이다.

조건 정리

- 상태변수는 두 적분기의 출력 x_1, x_2이다.
- 첫 번째 적분기 입력은 $2(R - C) - x_2$이므로 $\dot{x}_2$가 된다.
- 두 번째 적분기 입력은 $x_2 - 2x_1$이므로 $\dot{x}_1$가 된다.
- 출력 노드 C에는 위 경로와 아래 경로가 함께 들어오므로 $C = (x_2 - 2x_1) + x_1 = x_2 - x_1$이다.

NoteBase

사용할 공식

$\dot{x} = Ax + Br, \quad c = Cx + Dr$

C=[B AB], O=bmatrixCbmatrix, G(s)=C(sI-A)^-1B+D

이 공식을 쓰는 이유는 신호흐름선도에서 적분기 입력이 상태미분, 적분기 출력이 상태변수이므로 상태방정식을 직접 세운 뒤 관련 행렬을 바로 계산할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 출력식은 $c = x_2 - x_1$이고, 첫 합점의 신호는 $r - c = r - x_2 + x_1$이다.
2. 첫 번째 적분기에서 $\dot{x}_2 = 2(r - c) - x_2 = 2r + 2x_1 - 3x_2$가 된다.
3. 두 번째 적분기에서 $\dot{x}_1 = x_2 - 2x_1$가 된다.
4. 따라서 A=[[-2, 1], [2, -3]], B=[0, 2]^T, C=[-1, 1], D=0이다.
5. 특성방정식은 $\det(sI - A) = s^2 + 5s + 4$이므로 $s^2 + 5s + 8$이 아니다.
6. 가제어성 행렬은 $\mathcal{C} = [B\ AB] = [[0, 2], [2, -6]]$이고, 가관측성 행렬은 $\mathcal{O} = [C; CA] = [[-1, 1], [4, -4]]$이다.
7. 전달함수는 $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2(s+1)}{s^2 + 5s + 4}$이다.

선지별 해설

① X

특성방정식을 계산하면 $s^2 + 5s + 4 = 0$이다. 틀린 표현은 "$s^2 + 5s + 8 = 0$"이고, 올바르게는 "$s^2 + 5s + 4 = 0$"이다.

② O

가제어성 행렬은 B=[0, 2]^T, AB=[2, -6]^T이므로 [[0, 2], [2, -6]]가 된다. 제시된 행렬과 정확히 일치한다.

③ X

가관측성 행렬은 C=[-1, 1], CA=[4, -4]이므로 [[-1, 1], [4, -4]]이다. 틀린 표현은 "[[1, 1], [-4, -2]]"이고, 올바르게는 "[[-1, 1], [4, -4]]"이다.

④ X

전달함수는 $\frac{2(s+1)}{s^2 + 5s + 4}$이다. 틀린 표현은 분자와 분모를 모두 잘못 쓴 "$\frac{2(s+2)}{s^2 + 5s + 8}$"이고, 올바르게는 "$\frac{2(s+1)}{s^2 + 5s + 4}$"이다.

오답 포인트

출력 노드 C를 x_1 하나로만 보거나, 피드백 부호 -1, -2를 놓치면 상태방정식이 전부 틀어진다. 특히 $C = (x_2 - 2x_1) + x_1 = x_2 - x_1$를 놓치면 특성방정식과 전달함수의 상수항이 잘못 나온다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

신호흐름선도형 상태방정식 문제는 적분기 출력을 먼저 상태변수로 잡고, 각 합점에서 적분기 입력식을 쓴 뒤, 마지막 출력 노드에 들어오는 신호를 모두 더해 C를 만든 다음 A, B, C, D를 계산하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

적분기 출력은 상태변수이고 적분기 입력은 상태미분이다. 출력 노드에 여러 경로가 모이면 반드시 합산한 뒤 C 행렬과 전달함수를 구한다.

NoteBase