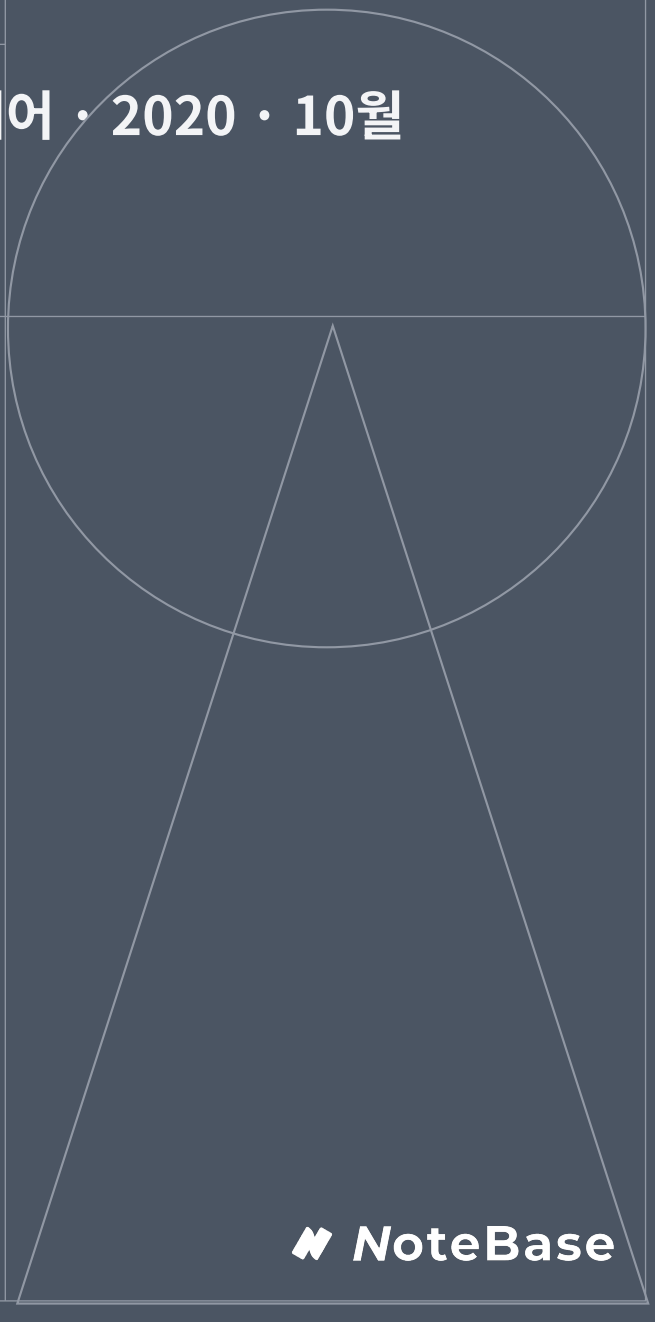
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2020 · 10월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2020 · 10월

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2020 · 10월

문 1. 함수 $F(s)=\frac{3e^{-3s}}{s^2+2s+10}$의 Laplace 역변환식을 바르게 표현한 것은? (단, $u_s(t)$는 단위계단함수이다.)

① $e^{-(t-3)}\sin(3t-9)u_s(t-3)$

② $e^{-(t-3)}\cos(3t-9)u_s(t-3)$

③ $e^{-(t-2)}\sin(2t-4)u_s(t-2)$

④ $e^{-(t-2)}\cos(2t-4)u_s(t-2)$

정답 1번

출제 포인트

지연정리 $e^{-as}G(s)\leftrightarrow g(t-a)u_s(t-a)$와 $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\leftrightarrow e^{-at}\sin bt$를 결합해 역변환을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $F(s)=e^{-3s}\cdot\frac{3}{s^2+2s+10}$이다.
분모는 $s^2+2s+10=(s+1)^2+3^2$로 정리된다.
따라서 지연되기 전 기본형은 $e^{-t}\sin 3t$이다.

사용할 공식

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right\}=e^{-at}\sin bt$
$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}G(s)\}=g(t-a)u_s(t-a)$
이 문제는 분모가 $(s+1)^2+3^2$ 꼴이므로 사인형 기본 역변환을 먼저 찾고, 앞의 e^{-3s}로 시간 지연 3을 적용하는 구조이다.

계산 과정

1. $s^2+2s+10$을 완전제곱하면 $(s+1)^2+9=(s+1)^2+3^2$이다.
2. 따라서 $\frac{3}{s^2+2s+10}=\frac{3}{(s+1)^2+3^2}$의 역변환은 $e^{-t}\sin 3t$이다.
3. 여기에 e^{-3s}가 곱해져 있으므로 지연정리에 따라 $e^{-(t-3)}\sin 3(t-3)u_s(t-3)$가 된다.
4. $\sin 3(t-3)=\sin(3t-9)$이므로 최종식은 $e^{-(t-3)}\sin(3t-9)u_s(t-3)$이다.

NoteBase

선지별 해설

① O: 계산 결과와 정확히 일치한다. e^{-3s}는 $t-3$ 지연과 $u_s(t-3)$를 만들고, 분자가 3이므로 코사인이 아니라 사인형이 된다.
② X: 틀린 표현은 $\cos(3t-9)$이다. 올바르게는 $\sin(3t-9)$이다. $e^{-t}\cos 3t$의 라플라스변환은 분자가 3이 아니라 $s+1$이 포함되어야 하므로 주어진 식과 맞지 않는다.
③ X: 틀린 표현은 $t-2$ 지연과 $\sin(2t-4)$이다. 올바르게는 $t-3$ 지연과 $\sin(3t-9)$이다. 이 선지는 e^{-2s} 지연과 주파수 2인 사인형에 대응하므로 주어진 e^{-3s}, $(s+1)^2+3^2$와 모두 다르다.
④ X: 틀린 표현은 $t-2$ 지연과 $\cos(2t-4)$이다. 올바르게는 $t-3$ 지연과 $\sin(3t-9)$이다. 지연시간도 다르고, 코사인형은 분자 구조가 달라서 주어진 식의 역변환이 될 수 없다.

오답 포인트

앞의 e^{-3s}만 보고 지연시간을 잘못 읽어 $t-2$로 착각하거나, 분모의 $(s+1)^2+3^2$를 보고도 분자가 3이라는 점을 놓쳐 사인형과 코사인형을 뒤바꾸기 쉽다. 이 문항은 지연시간과 분자 형태를 동시에 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

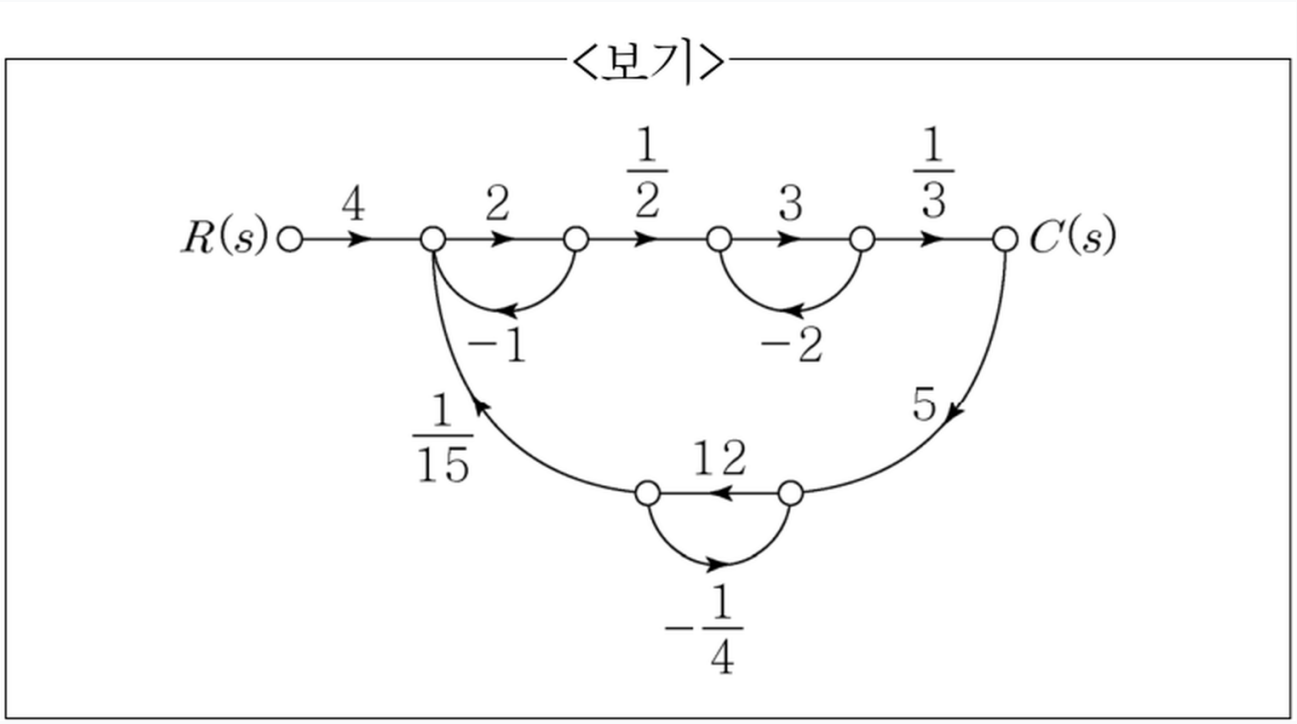
먼저 e^{-as}를 떼어 지연시간 a를 읽고, 남은 식을 $(s+\alpha)^2+\beta^2$ 꼴로 만든다. 그다음 분자가 β이면 사인형, 분자가 $s+\alpha$이면 코사인형으로 판단하면 된다.

암기 포인트

e^{-as}는 시간영역에서 $t-a$로 밀리고 $u_s(t-a)$가 붙는다. $\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ 꼴은 $e^{-\alpha t}\sin\beta t$이다.

문 2. <보기>의 신호흐름선도에서 전달함수 $\frac{C(s)}{R(s)}$로 옳은 것은?

<보기>



① $-\frac{1}{10}$
② $\frac{1}{5}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 신호흐름선도에서 전진경로, 개별 루프, 비접촉 루프를 찾아 메이슨의 이득공식으로 전달함수를 계산하는 문제이다.

조건 정리

전진경로는 1개이다.
$P_1 = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 4$이다.
개별 루프는 $L_1 = -2, L_2 = -6, L_3 = 4, L_4 = -3$이다.
비접촉 루프쌍은 L_1L_2, L_1L_4, L_2L_4이고, 비접촉 3중 루프는 $L_1L_2L_4$이다.

사용할 공식

$T = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}, \Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k$이다.

NoteBase

계산 과정

$\Delta = 1 - (-2 - 6 + 4 - 3) + (12 + 6 + 18) - (-36) = 80$

전진경로와 접촉하지 않는 루프는 $L_4 = -3$뿐이므로 $\Delta_1 = 1 - (-3) = 4$이다.

따라서

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{4 \cdot 4}{80} = \frac{1}{5}$

선지별 해설

1번 X: 계산 결과 전달함수는 $\frac{1}{5}$이므로 $-\frac{1}{10}$은 부호와 크기가 모두 틀리다. 올바르게는 $\frac{1}{5}$이다.

2번 O: 메이슨의 이득공식으로 구한 전달함수는 $\frac{1}{5}$이므로 옳다.

3번 X: $\frac{1}{3}$은 전진경로 일부 이득만 보거나 루프 보정을 빠뜨렸을 때 나오는 오답이다. 올바르게는 $\frac{1}{5}$이다.

4번 X: $\frac{1}{2}$는 Δ와 Δ_1를 반영하지 않은 값이다. 올바르게는 $\frac{1}{5}$이다.

오답 포인트

작은 루프들만 더하고 비접촉 루프쌍과 비접촉 3중 루프를 빼먹으면 값이 크게 달라진다. 이 문항에서는 하부 루프 L_4가 전진경로와 접촉하지 않으므로 Δ_1에 반영된다는 점이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 전진경로 이득 P_k를 구한 뒤, 개별 루프, 비접촉 루프쌍, 비접촉 3중 루프 순서로 Δ를 만든다. 그다음 전진경로와 접촉하지 않는 루프만 남겨 Δ_k를 따로 계산하면 된다.

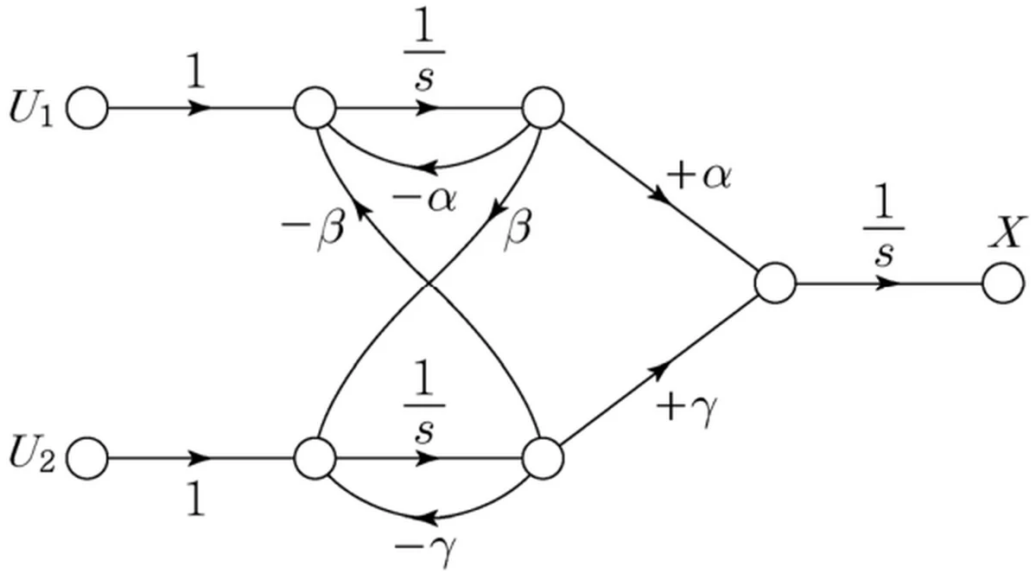
암기 포인트

메이슨 공식은 $T = \frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}$이고, Δ_k에는 해당 전진경로와 비접촉인 루프만 들어간다.

NoteBase

문 3. <보기>와 같은 신호흐름선도의 특성방정식은?

<보기>



① $s^2 + (\alpha + \gamma)s = 0$

② $s^2 + (\alpha + \gamma)s + \beta^2 = 0$

③ $s^2 + (\alpha + \gamma)s + \alpha\gamma = 0$

④ $s^2 + (\alpha + \gamma)s + (\alpha\gamma + \beta^2) = 0$

정답 4번

출제 포인트

두 적분기 상태와 되먹임 계수 $-\alpha$, $-\gamma$, 교차결합 계수 $\pm\beta$를 상태행렬로 읽어 특성방정식을 만드는 문제이다.

조건 정리

윗 적분기 출력 상태를 x_1, 아랫 적분기 출력 상태를 x_2로 둔다.
도식에서 폐루프를 이루는 부분은 두 상태 사이의 되먹임 구조이다.
오른쪽의 $+\alpha$, $+\gamma$ 뒤 $1/s$를 거쳐 X로 가는 가지는 출력 형성 경로일 뿐 폐루프를 만들지 않으므로
특성방정식에는 직접 들어가지 않는다.

NoteBase

사용할 공식

상태행렬 A의 특성방정식은 $\det(sI - A) = 0$이다.
이 문제에서는 도식을 읽으면
A = bmatrix -α & -β \ β & -γ bmatrix
가 된다.

계산 과정

1. 도식에서 두 상태의 관계를 읽으면
$sx_1 = -\alpha x_1 - \beta x_2 + U_1, \qquad sx_2 = \beta x_1 - \gamma x_2 + U_2$
이다.
2. 따라서 상태행렬은
A = bmatrix -α & -β \ β & -γ bmatrix
이다.
3. 특성방정식은
(sI-A)=vmatrix s+α & β \ -β & s+γ vmatrix =(s+α)(s+γ)+β^2
이므로
$s^2 + (\alpha + \gamma)s + (\alpha\gamma + \beta^2) = 0$
이다.

선지별 해설

① X이다. $s^2 + (\alpha + \gamma)s = 0$는 상수항을 모두 빠뜨린 식이다. 올바르게는 두 자기되먹임의 곱 $\alpha\gamma$와 교차결합의 영향 β^2가 함께 들어가 $s^2 + (\alpha + \gamma)s + (\alpha\gamma + \beta^2) = 0$이 된다.
② X이다. $s^2 + (\alpha + \gamma)s + \beta^2 = 0$는 교차결합 β의 영향만 넣고 자기되먹임의 곱 $\alpha\gamma$를 빠뜨린 식이다. 올바르게는 $\alpha\gamma$도 포함되어야 한다.
③ X이다. $s^2 + (\alpha + \gamma)s + \alpha\gamma = 0$는 대각 성분의 곱만 넣고 상호결합에서 생기는 β^2를 빠뜨린 식이다. 올바르게는 $\alpha\gamma + \beta^2$가 상수항이 된다.
④ O이다. 상태행렬의 특성방정식을 전개하면 $(s + \alpha)(s + \gamma) + \beta^2 = 0$이고, 정리하면 $s^2 + (\alpha + \gamma)s + (\alpha\gamma + \beta^2) = 0$이므로 옳다.

오답 포인트

오른쪽 출력 가지의 $1/s$까지 포함해 차수를 하나 더 늘리거나, 교차결합 $-\beta$와 $+\beta$를 보고 $-\beta^2$로 잘못 쓰기 쉽다. 이 문항의 핵심은 폐루프를 이루는 2상태 부분만 보고, 행렬식에서 비대각 곱이 결과적으로 $+\beta^2$로 들어간다는 점을 놓치지 않는 것이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

신호흐름선도에서 먼저 적분기 출력들을 상태변수로 잡고, 그 상태로 되돌아오는 가지의 계수를 상태행렬에 옮긴 뒤 $\det(sI - A) = 0$을 세우면 된다. 출력으로만 나가는 가지는 폐루프가 아니면 특성방정식에서 제외된다.

암기 포인트

2상태 결합계의 특성방정식은 1차항이 대각합, 상수항이 대각곱과 교차결합 항의 합으로 정리된다.

NoteBase

문 4. <보기>와 같은 개루프 전달함수 $G(s)$의 이득여유(gain margin)가 2.0일 때, K의 값으로 가장 옳은 것은?

<보기>

$G(s) = \frac{K}{s(2s+1)(s+2)}$

① 1.5

② 2.0

③ 2.5

④ 3.0

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 위상교차주파수에서의 크기를 이용해 이득여유 GM와 K의 관계를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s) = \frac{K}{s(2s+1)(s+2)}$이다.
구해야 할 값은 이득여유가 2.0일 때의 K이다.
이득여유는 위상이 $-180\,^\circ$가 되는 주파수에서의 크기의 역수로 정의된다.

사용할 공식

$GM = \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$
여기서 ω_{pc}는 $\angle G(j\omega) = -180\,^\circ$를 만족하는 위상교차주파수이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이득여유가 개루프 전달함수의 위상교차점 크기로 정의되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 위상은
$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}(2\omega) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$
이다.
2. 위상교차조건 -180°에서
$\tan^{-1}(2\omega) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 90^\circ$
이므로 $(2\omega)\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$이고, 따라서 $\omega_{pc} = 1$이다.
3. $\omega = 1$에서 크기는
$|G(j1)| = \frac{K}{|j||1+2j||2+j|} = \frac{K}{1 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{K}{5}$
이다.
4. 따라서
$GM = \frac{1}{|G(j1)|} = \frac{5}{K}$
이고, $GM = 2.0$이므로
$\frac{5}{K} = 2 \Rightarrow K = 2.5$
이다.

선지별 해설

① X
- $K = 1.5$이면 $GM = \frac{5}{1.5} \approx 3.33$이므로 2.0보다 크다.
- 틀린 표현은 '이득여유가 2.0일 때의 K'에 해당한다고 본 점이다. 올바르게는 $K = 1.5$는 이득여유가 약 3.33일 때의 값이다.

② X
- $K = 2.0$이면 $GM = \frac{5}{2} = 2.5$이므로 2.0이 아니다.
- 틀린 표현은 이득여유와 K가 같은 방향으로 변한다고 본 점이다. 올바르게는 $GM = \frac{5}{K}$이므로 K가 커질수록 이득여유는 감소한다.

③ O
- $K = 2.5$이면 $GM = \frac{5}{2.5} = 2.0$이므로 조건에 정확히 맞는다.

④ X
- $K = 3.0$이면 $GM = \frac{5}{3} \approx 1.67$이므로 2.0보다 작다.
- 틀린 표현은 가장 큰 K가 정답일 것이라고 본 점이다. 올바르게는 위상교차점에서의 크기의 역수가 2가 되도록 K를 정해야 한다.

오답 포인트

위상교차주파수를 먼저 구하지 않고 수치만 대입하면 식이 흔들리기 쉽다. 또 이득여유를 $|G(j\omega_{pc})|$로 착각하면 역수를 한 번 놓쳐 잘못된 값을 고르기 쉽다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

이득여유 문제는 먼저 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$에서 ω_{pc}를 구하고, 다음에 $GM = \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$를 적용해 K를 정리하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

이득여유는 위상교차점에서의 크기의 역수이므로 $GM = \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$이다.

NoteBase

문 5. 어떤 플랜트의 동특성이 <보기 1>과 같은 상태방정식과 출력방정식으로 주어져 있다. 이 플랜트의 상태변수 $x_2(t)$를 측정할 수 없어, <보기 2>와 같은 전차수 상태관측기(state observer)로부터 x=bmatrixx_1 \ x_2bmatrix를 구하여, 상태피드백제어(state feedback control)를 구현하려고 한다. 상태관측기의 고유값이 $-5 \pm 4j$가 되도록 전차수 상태관측기 L을 가장 바르게 설계한 것은? (단, A는 플랜트의 시스템행렬, b는 입력벡터, c는 출력벡터를 의미한다.)

<보기 1>

cases x_1(t)=x_2(t) \ x_2(t)=-2x_1(t)-x_2(t)+u(t) cases y(t)=x_1(t)

<보기 2>

x(t)=Ax(t)+bu(t)+L(y(t)-cx(t)), L=bmatrix l_1 \ l_2 bmatrix

① L=bmatrix5 \ 10bmatrix

② L=bmatrix7 \ 20bmatrix

③ L=bmatrix9 \ 30bmatrix

④ L=bmatrix10 \ 50bmatrix

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 전치수 상태관측기의 오차동역학 $\dot{e} = (A - Lc)e$의 극을 원하는 위치에 놓도록 관측기 이득 L을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 상태방정식에서 A=bmatrix0&1\\-2&-1bmatrix, 출력식 $y = x_1$이므로 c=bmatrix1&0bmatrix이다.
관측기 이득은 L=bmatrixl_1_2bmatrix이다.
관측기 고유값은 $-5 \pm 4j$가 되도록 맞춰야 한다.

사용할 공식

관측기 오차 $e = x - \hat{x}$는 $\dot{e} = (A - Lc)e$를 따른다.
따라서 $A - Lc$의 특성방정식을 원하는 극의 특성방정식과 계수비교하면 된다.
A-Lc=bmatrix-l_1&1\\-2-l_2&-1bmatrix이다.

NoteBase

계산 과정

먼저 원하는 극 $-5 \pm 4j$의 특성방정식은

$(s+5-4j)(s+5+4j) = (s+5)^2 + 4^2 = s^2 + 10s + 41$

이다.

한편 $A - Lc$의 특성방정식은

≤ft(sI-(A-Lc))=bmatrixs+l_1&-1\\2+l_2&s+1bmatrix=s^2+(l_1+1)s+(l_1+l_2+2)

이다.

계수비교를 하면

$l_1 + 1 = 10 \Rightarrow l_1 = 9$

$l_1 + l_2 + 2 = 41 \Rightarrow 9 + l_2 + 2 = 41 \Rightarrow l_2 = 30$

이므로

L=bmatrix9\\30bmatrix

이다.

선지 판단

① X: L=bmatrix5\\10bmatrix이면 특성방정식이 $s^2 + 6s + 17$이 된다. 목표인 $s^2 + 10s + 41$와 다르므로 틀리다. 올바르게는 L=bmatrix9\\30bmatrix이다.

② X: L=bmatrix7\\20bmatrix이면 특성방정식이 $s^2 + 8s + 29$가 된다. 감쇠와 상수항이 모두 부족하므로 틀리다. 올바르게는 $l_1 = 9,\ \ l_2 = 30$이다.

③ O: L=bmatrix9\\30bmatrix이면 특성방정식이 $s^2 + 10s + 41$가 되어 관측기 고유값이 $-5 \pm 4j$가 된다.

④ X: L=bmatrix10\\50bmatrix이면 특성방정식이 $s^2 + 11s + 62$가 된다. 계수비교 결과를 넘어서므로 틀리다. 올바르게는 L=bmatrix9\\30bmatrix이다.

오답 포인트

관측기 식에서 $A - Lc$를 써야 하는데 부호를 반대로 두거나, 원하는 극 $-5 \pm 4j$에서 상수항을 $25 + 16 = 41$로 만들지 못하면 오답이 된다. 특히 l_1은 s의 계수, l_2는 상수항 보정에 함께 들어간다는 점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

관측기 설계 문제는 먼저 A, c를 읽고 $A - Lc$를 만든 다음, 목표 극으로 원하는 특성방정식을 만든 뒤 계수비교로 L을 구하면 된다.

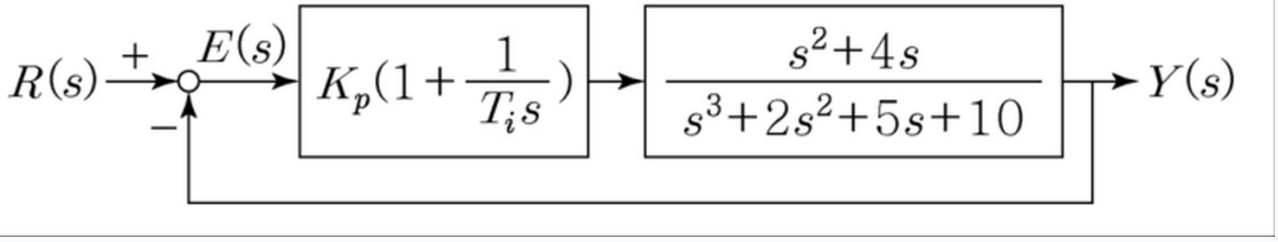
암기 포인트

상태관측기 이득은 $A - Lc$의 특성방정식과 목표 극의 특성방정식을 계수비교해서 구한다.

NoteBase

문 6. PI 제어기를 가진 <보기>와 같은 피드백 제어시스템이 있다. 이 피드백 제어시스템의 단위계단응답(unit step response)에서 정상상태 오차로 가장 옳은 것은?

<보기>



① $\frac{T_i}{T_i+K_p}$
② $\frac{3T_i}{3T_i+2K_p}$
③ $\frac{2T_i}{2T_i+K_p}$
④ $\frac{5T_i}{5T_i+2K_p}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 단위피드백계의 단위계단입력에 대한 정상상태 오차를 위치오차상수로 구하는 문제이다. PI 제어기가 있어도 식물의 원점 영점과 적분기가 상쇄되면 실제 계의 형식은 0형이 된다.

조건 정리

주어진 제어기: $K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$
주어진 플랜트: $\frac{s^2+4s}{s^3+2s^2+5s+10}$
구해야 할 값: 단위계단응답의 정상상태 오차 e_{ss}
주의할 조건: PI 제어기만 보고 무조건 정상상태 오차가 0이라고 보면 안 된다. 식물 분자에 있는 원점 영점 s와 제어기의 적분기 $1/s$가 상쇄되는지를 먼저 확인해야 한다.

사용할 공식

개루프 전달함수를 $L(s)$라 하면 단위계단입력의 정상상태 오차는 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_{pos}}$, $K_{pos}=\lim_{s\to 0}L(s)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 상쇄 후 이 계가 0형 시스템이므로 속도오차상수나 가속도오차상수가 아니라 위치오차상수로 판단해야 하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 개루프 전달함수는
$L(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\frac{s^2 + 4s}{s^3 + 2s^2 + 5s + 10}$
이다.

2. $s^2 + 4s = s(s + 4)$이므로
$L(s) = K_p\frac{T_i s + 1}{T_i s}\frac{s(s + 4)}{s^3 + 2s^2 + 5s + 10} = K_p\frac{(T_i s + 1)(s + 4)}{T_i(s^3 + 2s^2 + 5s + 10)}$
가 된다. 제어기의 적분기 $1/s$와 식물의 원점 영점 s가 상쇄되므로 이 계는 1형이 아니라 0형이다.

3. 따라서 위치오차상수는
$K_{pos} = \lim_{s\to 0} L(s) = K_p\frac{(1)(4)}{T_i(10)} = \frac{2K_p}{5T_i}$
이다.

4. 단위계단입력의 정상상태 오차는
$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_{pos}} = \frac{1}{1 + \frac{2K_p}{5T_i}} = \frac{5T_i}{5T_i + 2K_p}$
이다.

선지별 해설

① X
$\frac{T_i}{T_i + K_p}$는 $K_{pos} = \frac{K_p}{T_i}$로 본 값이다. 이 문제에서는 식물의 직류이득이 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$이므로 $K_{pos} = \frac{2K_p}{5T_i}$가 되어야 한다. 틀린 표현 → 올바르게는 $\frac{5T_i}{5T_i + 2K_p}$이다.

② X
$\frac{3T_i}{3T_i + 2K_p}$는 마치 상수항 비율이 $\frac{2}{3}$인 것처럼 계산한 값이다. 실제로는 $s \to 0$에서 $s + 4 \to 4$, 분모 다항식은 10이므로 비율은 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$이다. 틀린 표현 → 올바르게는 $\frac{5T_i}{5T_i + 2K_p}$이다.

③ X
$\frac{2T_i}{2T_i + K_p}$는 $K_{pos} = \frac{K_p}{2T_i}$로 잘못 본 값이다. 이 계의 위치오차상수는 상쇄 후 남는 저주파 이득까지 반영한 $\frac{2K_p}{5T_i}$이다. 틀린 표현 → 올바르게는 $\frac{5T_i}{5T_i + 2K_p}$이다.

④ O
계산 결과 $e_{ss} = \frac{5T_i}{5T_i + 2K_p}$이므로 옳은 식이다. PI 제어기가 있어도 원점 영점 상쇄 때문에 정상상태 오차가 0이 되지 않는다는 점까지 함께 확인해야 한다.

오답 포인트

가장 흔한 함정은 PI 제어기가 있으므로 단위계단 정상상태 오차가 무조건 0이라고 단정하는 것이다. 이 문제는 식물 분자에 원점 영점 s가 있어 제어기의 적분기 $1/s$가 상쇄된다. 따라서 먼저 상쇄 후 실제 형식을 판단해야 하며, 그다음 $s \to 0$에서 남는 직류이득 $\frac{2}{5}$를 정확히 넣어야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 문제는 제어기만 보지 말고 개루프 전달함수 전체를 만든 뒤 원점의 극과 영점이 상쇄되는지를 먼저 본다. 그다음 실제 형식을 정하고, 단위계단이면 0형은 $e_{ss} = \frac{1}{1+K_{pos}}$, 1형이면 $e_{ss} = 0$의 순서로 판단하면 된다.

암기 포인트

PI가 있어도 식물의 원점 영점이 적분기와 상쇄되면 0형이 되어 계단 정상상태 오차가 남는다.

NoteBase

문 7. <보기>에서 극점과 영점이 시스템에 미치는 영향에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>
ㄱ. 모든 극점이 복소평면 좌반면에 존재하면 시스템의 출력은 수렴한다.
ㄴ. 극점의 허수부가 실수축으로부터 멀수록 진동 주파수는 낮아진다.
ㄷ. 극점의 실수부의 절댓값 크기가 클수록 출력 신호의 수렴 또는 발산 속도가 빨라진다.
ㄹ. 영점의 부호와 크기는 시스템 출력에 영향을 미치지 않는다.
ㅁ. 복소평면 좌반면에 허수축과 가까운 영점이 있으면 상향초과(over shoot)를 발생시킨다.

① ㄱ, ㄴ, ㄷ
② ㄱ, ㄷ, ㅁ
③ ㄴ, ㅁ
④ ㄴ, ㄹ

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 극점의 실수부와 허수부가 안정도·응답 속도·진동 주파수에 어떻게 작용하는지, 그리고 영점이 과도응답에 어떤 영향을 주는지를 구별하는 문제이다.

핵심 개념

- 극점은 전달함수의 분모를 0으로 만드는 값으로, 위치가 시스템의 안정도와 응답 속도, 진동 성질을 결정한다.
- 영점은 전달함수의 분자를 0으로 만드는 값으로, 위치가 과도응답의 형태와 오버슈트 발생 정도에 영향을 준다.
- 극점이 $s = \sigma \pm j\omega$일 때 실수부 σ는 감쇠·발산 속도를, 허수부의 크기 $|\omega|$는 진동 주파수를 정한다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2020 · 10월

선지별 해설

① X
- 이 조합에는 ㄴ이 포함되어 있어 틀리다. ㄴ의 "허수부가 실수축으로부터 멀수록 진동 주파수는 낮아진다"는 표현이 틀렸고, 실제로는 허수부의 절댓값이 클수록 진동 주파수는 높아진다.
- ㄱ은 옳다. 모든 극점이 복소평면 좌반면에 있으면 자연응답의 각 항이 감쇠하여 출력이 수렴한다.
- ㄷ도 옳다. 극점 실수부의 절댓값이 클수록 $e^{\sigma t}$의 감쇠 또는 발산이 더 빠르게 진행된다.
- 올바른 조합은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

② O
- ㄱ은 옳다. 모든 극점이 좌반면에 있으면 시스템은 안정하며 출력이 수렴한다.
- ㄷ은 옳다. 극점의 실수부 절댓값이 커질수록 수렴 속도 또는 발산 속도가 빨라진다.
- ㅁ은 옳다. 좌반면의 영점이 허수축에 가까우면 과도응답이 더 날카로워져 상향초과가 나타나기 쉽다.
- 따라서 옳은 설명만 묶은 선택지는 ②이다.

③ X
- 이 조합에는 ㄴ이 포함되어 있어 틀리다. ㄴ의 "주파수는 낮아진다"가 틀린 표현이고, 올바르게는 허수부의 절댓값이 클수록 진동 주파수는 높아진다.
- ㅁ 자체는 옳지만, ㄱ과 ㄷ이 빠져 있어 완전한 정답 조합이 아니다.
- 올바른 조합은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

④ X
- 이 조합은 ㄴ과 ㄹ이 모두 틀려서 성립하지 않는다. ㄴ은 허수부가 커질수록 주파수가 낮아진다고 했지만 실제로는 높아진다.
- ㄹ의 "영점의 부호와 크기는 시스템 출력에 영향을 미치지 않는다"도 틀렸다. 올바르게는 영점의 위치는 응답 파형과 오버슈트, 주파수응답에 영향을 미친다.
- 올바른 조합은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

오답 포인트

극점의 허수부는 진동의 존재 여부만 정한다고 보고 주파수 크기와 연결하지 못하면 ㄴ을 옳게 보기 쉽다. 또 영점은 안정도를 직접 결정하는 주체가 아니라는 이유만으로 출력 전체에 영향이 없다고 확대 해석하면 ㄹ을 옳게 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 극점은 실수부와 허수부로 나누어 본다. 실수부는 안정과 속도, 허수부는 진동 주파수로 판단한다. 그다음 영점은 응답 형상과 오버슈트에 영향을 준다고 정리하면 ㄱ, ㄷ, ㅁ만 남는다.

NoteBase

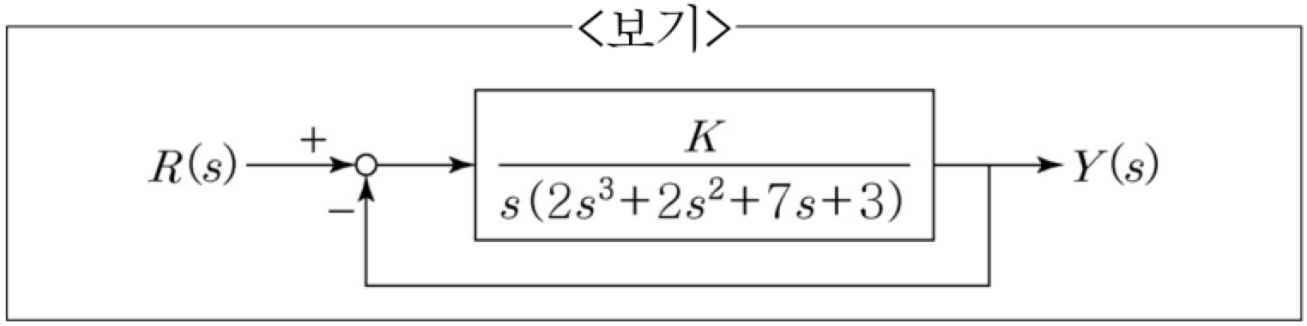
암기 포인트

극점 실수부는 안정과 속도, 극점 허수부는 진동 주파수, 영점은 파형과 오버슈트이다.

NoteBase

문 8. <보기>와 같은 피드백 시스템이 허수축에 근을 갖도록 K값을 정할 경우, 이 때의 허수근과 관련된 주파수는? (단, $K > 0$이다.)

<보기>



① $\sqrt{\frac{1}{2}}$
② 1
③ $\sqrt{\frac{3}{2}}$
④ $\sqrt{2}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 폐루프 특성방정식에 $s = j\omega$를 대입하여 허수축 근 발생 조건과 관련 주파수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 개루프 전달함수는 $G(s) = \frac{K}{s(2s^3 + 2s^2 + 7s + 3)}$이다.
폐루프는 단위 음의 피드백 구조이다.
구해야 할 값은 허수축 근 $\pm j\omega$와 관련된 주파수 ω이다.
조건은 $K > 0$이다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식은 $1 + G(s) = 0$이다.
허수축 근은 특성방정식에 $s = j\omega$ $(\omega > 0)$를 대입한 뒤 실수부와 허수부를 각각 0으로 두어 구한다.
이 공식을 쓰는 이유는 문제에서 허수축에 근을 갖도록 하는 경우의 관련 주파수를 직접 묻기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 폐루프 특성방정식을 만들면
$1 + \frac{K}{s(2s^3 + 2s^2 + 7s + 3)} = 0$
이므로
$2s^4 + 2s^3 + 7s^2 + 3s + K = 0$
이다.
2. $s = j\omega$를 대입하면
$2\omega^4 - 7\omega^2 + K + j(-2\omega^3 + 3\omega) = 0$
이다.
3. 허수부를 0으로 두면
$-2\omega^3 + 3\omega = \omega(-2\omega^2 + 3) = 0$
이다. 허수축 근의 주파수는 $\omega > 0$이므로 $\omega^2 = \frac{3}{2}$이다.
4. 따라서 관련 주파수는
$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}$
이다.
5. 실수부에 대입하면 $2\omega^4 - 7\omega^2 + K = 0$에서 $K = 6$이 되어 $K > 0$ 조건도 만족한다.

선지별 해설

① X
$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}}$이면 허수부 조건 $\omega(-2\omega^2 + 3) = 0$를 만족하지 못한다. 실제로 $-2\omega^2 + 3 = 2$이므로 0이 아니다.
틀린 표현은 관련 주파수를 $\sqrt{\frac{1}{2}}$로 본 점이다. 올바르게는 $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}$이다.

② X
$\omega = 1$이면 허수부 조건에서 $-2\omega^2 + 3 = 1$이므로 역시 0이 아니다.
틀린 표현은 관련 주파수를 1로 본 점이다. 올바르게는 $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}$이다.

③ O
허수부 조건 $\omega(-2\omega^2 + 3) = 0$에서 $\omega > 0$이므로 $\omega^2 = \frac{3}{2}$가 나온다. 따라서 $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}$가 맞다.
실수부에 대입하면 $K = 6$이 되어 문제의 $K > 0$ 조건도 충족한다.

④ X
$\omega = \sqrt{2}$이면 허수부 조건에서 $-2\omega^2 + 3 = -1$이므로 0이 아니다.
틀린 표현은 관련 주파수를 $\sqrt{2}$로 본 점이다. 올바르게는 $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}$이다.

NoteBase

오답 포인트

허수축 근 문제에서 $s = j\omega$를 대입한 뒤 실수부와 허수부를 분리하지 않으면 오답으로 흐르기 쉽다. 특히 허수부 식 $-2\omega^3 + 3\omega = 0$에서 계수 2를 빠뜨리거나 ω를 공통인수로 묶지 않으면 1이나 $\sqrt{2}$ 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

허수축 근을 묻는 폐루프 문제는 먼저 $1 + G(s) = 0$으로 특성방정식을 만든다. 그다음 $s = j\omega$를 대입해 허수부를 0으로 두고 ω를 구한 뒤, 실수부를 0으로 두어 K 조건까지 검산하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

허수축 근 판정의 핵심 순서는 $1 + G(s) = 0 \rightarrow s = j\omega \rightarrow$ 허수부 0에서 ω 결정 $\rightarrow$ 실수부 0에서 매개변수 검산이다.

NoteBase

문 9. 특성 방정식 $s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$의 안정성에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

① 안정하다.

② 임계안정하다.

③ 불안정하다.

④ 불안정하고 우반 평면에 2개의 극점을 갖는다.

정답 3번

출제 포인트

연속시간 계의 안정도 판정에서 허수축 극점이 단근인지 중근인지까지 구분할 수 있는지를 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 특성방정식은 $s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$이다.
판정 대상은 극점의 위치와 중복도이다.
안정은 모든 극점이 좌반평면에 있을 때이고, 임계안정은 허수축 극점이 있어도 단근일 때만 가능하다.

사용할 공식

특성방정식을 인수분해해 극점을 직접 확인한다.
$s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = (s + 1)(s^4 + 2s^2 + 1) = (s + 1)(s^2 + 1)^2$
이 식을 쓰는 이유는 안정도는 극점의 실수부와 중복도로 결정되기 때문이다.

계산 과정

1. $s + 1$로 묶어 $(s + 1)(s^2 + 1)^2$로 인수분해한다.
2. 극점은 $s = -1, s = \pm j, s = \pm j$이다.
3. $\pm j$가 허수축 위의 중근이므로 응답에 $t\sin t$, $t\cos t$ 형태가 생겨 진폭이 억제되지 않는다.
4. 따라서 이 계는 임계안정이 아니라 불안정이다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2020 · 10월

선지별 해설

① X
안정하려면 모든 극점의 실수부가 음수여야 한다. 이 식에는 허수축 위의 중근 $\pm j$가 있으므로 안정하지 않다.
틀린 표현은 "안정하다"이고, 올바르게는 "불안정하다"이다.

② X
임계안정은 허수축 극점이 있더라도 단근일 때만 성립한다. 이 문제는 $(s^2+1)^2$이므로 허수축 극점이 중근이다.
틀린 표현은 "임계안정하다"이고, 올바르게는 "허수축 중근이 있어 불안정하다"이다.

③ O
허수축 위에 중복극점이 있으면 좌반평면 극점이 함께 있더라도 계는 불안정이다. 따라서 ③이 맞다.

④ X
불안정하다는 판단 자체는 맞지만, 우반평면에 2개의 극점이 있다는 부분이 틀리다. 실제 극점은 -1 하나가 좌반평면에 있고, 나머지 네 극점은 허수축 위에 있다.
틀린 표현은 "우반 평면에 2개의 극점"이고, 올바르게는 "우반평면 극점은 없고 허수축 중근 때문에 불안정하다"이다.

오답 포인트

허수축에 극점이 보인다는 이유만으로 바로 임계안정으로 처리하는 실수가 잦다. 이 문항의 함정은 $(s^2+1)^2$처럼 허수축 극점이 중근이라는 점이며, 중근이면 우반평면 극점이 없어도 불안정으로 바뀐다.

다시 나오면 이렇게 판단

연속시간 특성방정식은 먼저 인수분해하거나 Routh 배열로 극점 위치를 본다. 그다음 허수축 극점이 나오면 단근인지 중근인지를 추가로 확인하고, 중근이면 즉시 불안정으로 판정한다.

암기 포인트

허수축 단근은 임계안정, 허수축 중근은 불안정이다.

NoteBase

문 10. <보기>와 같이 전달함수 $G(s)$를 가지는 표준형 2차 시스템에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, $0 < \zeta < 1$이다.)

<보기>

$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

① 단위 계단 입력에 대한 출력은 감쇠하면서 진동한다.

② $t = 0$에서 첫 번째 최대 초과(maximum overshoot)까지 도달하는 시간인 최대 첨두시간 t_p는 ζ가 1에 가까울수록 작아진다.

③ 정착시간 t_s는 $\zeta\omega_n$에 반비례한다.

④ 최대 초과(maximum overshoot)는 $e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$이다.

정답 2번

출제 포인트

표준형 2차 언더댐프드 시스템의 최대 첨두시간, 정착시간, 최대 초과 관계식을 알고 각 선지의 증감 방향을 판정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 시스템은 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$인 표준형 2차 시스템이다.
조건은 $0 < \zeta < 1$이므로 언더댐프드 상태이다.
따라서 감쇠진동, 최대 초과, 첨두시간 공식을 그대로 적용할 수 있다.

사용할 공식

최대 첨두시간은 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$이다.
정착시간은 보통 2% 기준으로 $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$이다.
최대 초과는 $M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 각 선지가 모두 언더댐프드 2차 시스템의 시간응답 특성값과 그 변화 방향을 묻고 있기 때문이다.

NoteBase

선지별 해설

① O
단위 계단 입력에 대한 언더댐프드 2차 시스템의 출력은 감쇠지수항을 가지는 진동응답이므로 감쇠하면서 진동한다.

② X
최대 첨두시간은 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$이다. ζ가 1에 가까워질수록 $\sqrt{1-\zeta^2}$가 0에 가까워져 분모가 작아지므로 t_p는 작아지는 것이 아니라 커진다.
틀린 표현은 "ζ가 1에 가까울수록 작아진다"이다. 올바르게는 "ζ가 1에 가까울수록 최대 첨두시간 t_p는 커진다"이다.

③ O
정착시간은 $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$이므로 $\zeta\omega_n$에 반비례한다. 선지의 진술은 맞다.

④ O
최대 초과는 언더댐프드 2차 시스템에서 $M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$로 주어진다. 선지의 식이 정확하다.

오답 포인트

②는 t_p 식에서 $\sqrt{1-\zeta^2}$가 분모에 있다는 점을 놓치면 반대로 판단하기 쉽다. ζ가 커질수록 감쇠는 커지지만 첨두시간은 짧아지는 것이 아니라 오히려 길어진다.

다시 나오면 이렇게 판단

언더댐프드 2차 시스템 문제는 먼저 $0 < \zeta < 1$인지 확인한 뒤 t_p, t_s, M_p의 대표 공식을 적어 놓고 분자와 분모에서 ζ와 ω_n가 어디에 들어가는지를 보면 증감 방향을 바로 판정할 수 있다.

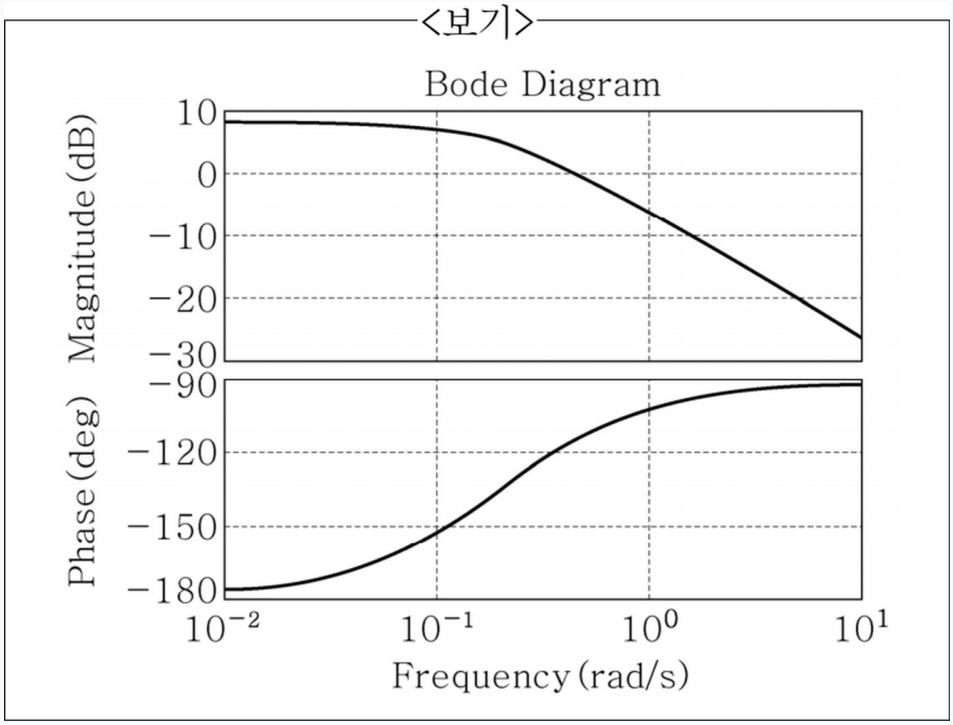
암기 포인트

t_p는 $\sqrt{1-\zeta^2}$가 분모에 있으므로 ζ ↑이면 t_p ↑, t_s는 $\zeta\omega_n$에 반비례, M_p는 $e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$이다.

NoteBase

문 11. <보기>의 보드선도(bode plot)가 나타내는 시스템의 전달함수로 가장 적당한 것은?

<보기>



① $\frac{5}{10s+2}$

② $\frac{10}{10s+2}$

③ $\frac{5}{10s-2}$

④ $\frac{10}{10s-2}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 보드선도의 저주파 이득, 절점 주파수, 위상 시작점과 끝점을 읽어 전달함수의 부호와 극 위치를 판별하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

1번 X: $\frac{5}{10s+2} = \frac{2.5}{5s+1}$ 이므로 저주파 이득은 약 $+8dB$로 맞지만, 위상은 0°에서 시작해 -90°로 내려간다. 그림처럼 -180°에서 시작하지 않으므로 틀리다. 틀린 표현은 분모의 부호이고, 올바르게는 음의 DC 이득이 나오도록 $10s-2$ 꼴이어야 한다.
2번 X: $\frac{10}{10s+2} = \frac{5}{5s+1}$ 이므로 저주파 이득이 5, 즉 약 $+14dB$이다. 그림의 시작 크기인 약 $+8dB$와 맞지 않고 위상도 $0^\circ \rightarrow -90^\circ$ 형태라서 틀리다. 올바르게는 분자의 크기가 5여야 하고 분모 부호도 $10s-2$이어야 한다.
3번 O: $G(s) = \frac{5}{10s-2}$ 이면 $G(j\omega) = \frac{5}{-2+j10\omega}$ 이다. $\omega \rightarrow 0$에서 값은 -2.5이므로 크기는 약 $+8dB$, 위상은 -180°이다. $\omega \rightarrow \infty$에서는 $j10\omega$ 항이 지배적이어서 위상은 -90°로 가고, 절점 주파수도 $\omega = 0.2rad/s$ 부근이라 그림과 가장 잘 맞는다.
4번 X: $\frac{10}{10s-2}$ 는 분모가 같아서 위상 변화 형태는 비슷하지만 저주파 이득이 $|10/(-2)| = 5$ 이므로 시작 크기가 약 $+14dB$가 된다. 그림의 시작 크기보다 너무 크므로 틀리다. 틀린 표현은 분자 10이고, 올바르게는 분자가 5여야 한다.

오답 포인트

1번은 저주파 이득과 기울기만 보면 그럴듯해 보여 가장 많이 헷갈리는 선지이다. 이 문제의 핵심 함정은 크기선도만 보고 고르지 말고, 위상이 -180°에서 시작하는지를 함께 확인해야 한다는 점이다.

다시 나오면 이렇게 판단

보드선도 문제는 먼저 저주파 이득으로 분자 크기를 정하고, 다음으로 위상 시작점이 0°인지 -180°인지로 DC 부호를 구분한 뒤, 마지막으로 기울기와 절점 주파수로 극의 개수와 위치를 맞춰 판단한다.

암기 포인트

저주파 위상이 -180°이면 음의 DC 이득이 있고, 1차 극점 하나이면 위상은 최종적으로 -90°에 접근한다.

NoteBase

문 12. 감쇠비 ζ가 $0<\zeta<1$의 값을 가질 때 폐루프 전달함수 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$의 임펄스 응답은?

① $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cdot\sin\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}t\right)$
② $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$
③ $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$
④ $1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cdot\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 감쇠비가 $0<\zeta<1$인 2차 표준형 폐루프 전달함수의 임펄스 응답을 표준형으로 정리할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$이다.
입력이 임펄스이므로 출력의 라플라스 변환은 그대로 $G(s)$이다.
감쇠비가 $0<\zeta<1$이므로 부족감쇠 계이며 감쇠 고유진동수는 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 이다.

사용할 공식

분모를 완전제곱으로 정리하면
$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)=(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2$
이고,
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right\}=e^{-at}\sin bt$
를 사용한다.
이 공식을 쓰는 이유는 부족감쇠 2차계의 임펄스 응답이 지수감쇠와 사인항이 곱해진 표준형으로 바로 변환되기 때문이다.

계산 과정

1. $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 로 둔다.
2. 전달함수를 $G(s)=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$로 쓴다.
3. 역라플라스 형태에 맞추기 위해 분자를 ω_d로 맞추면
$G(s)=\frac{\omega_n^2}{\omega_d}\cdot\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$
이다.
4. 따라서 임펄스 응답은
$g(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$
이므로 2번과 일치한다.

NoteBase

선지 판단

① X: 앞의 계수 $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$는 맞지만 사인 내부가 $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}t$로 되어 있어 감쇠 고유진동수를 거꾸로 썼다. 틀린 표현은 $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}t$이고, 올바르게는 $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t$이다.
② O: $g(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$와 정확히 일치하므로 옳다.
③ X: 지수감쇠 항까지는 같지만 cos가 나오려면 분자가 $s+\zeta\omega_n$ 형태여야 한다. 이 문제의 분자는 상수 ω_n^2이므로 사인 응답이 맞다. 틀린 표현은 cos이고, 올바르게는 sin이다.
④ X: 앞의 1 −가 붙은 형태는 임펄스 응답이 아니라 2차계의 단위계단응답 계열 형태이다. 틀린 표현은 상수항 1 −이며, 올바르게는 상수항 없이 지수감쇠 사인항만 남는 임펄스 응답이다.

오답 포인트

부족감쇠 2차계에서 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$를 $\omega_n/\sqrt{1-\zeta^2}$로 뒤집거나, 임펄스 응답과 계단응답을 혼동하면 오답이 된다. 또한 분자가 상수인지 $s+a$형인지에 따라 sin, cos가 갈린다는 점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

2차계 응답 문제는 먼저 입력이 임펄스인지 계단인지 구분하고, 다음으로 분모를 $(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2$ 꼴로 정리한 뒤 분자 형태가 상수이면 sin, $s+a$형이면 cos에 대응시켜 판단한다.

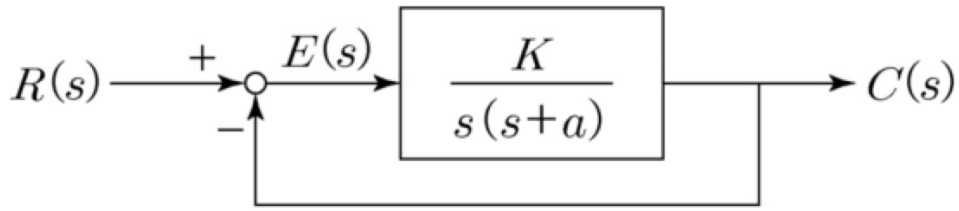
암기 포인트

부족감쇠 2차계의 임펄스 응답은 $e^{-\zeta\omega_n t}$에 $\sin(\omega_d t)$가 곱해지고, $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 이다.

NoteBase

문 13. <보기>에서 파라미터 a의 변화에 대한 폐루프 전달함수의 감도(sensitivity)는?

<보기>



① $\frac{-as}{s^2+as+K}$
② $\frac{-as}{(s^2+as+K)^2}$
③ $\frac{-Ks}{(s^2+as+K)^2}$
④ $\frac{-aK}{s^2+as+K}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 폐루프 전달함수 $T(s)$를 구한 뒤, 파라미터 a에 대한 감도 S_T^a를 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 전진 경로 전달함수는 $G(s)=\frac{K}{s(s+a)}$이고 피드백은 단위 음의 피드백이다.
구해야 할 값: 폐루프 전달함수 $T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$의 파라미터 a에 대한 감도이다.
주의할 조건: 감도는 단순 미분이 아니라 상대변화비이므로 $S_T^a=\frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial a}$를 써야 한다.

사용할 공식

폐루프 전달함수는 $T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$이다.
감도는 $S_T^a=\frac{\partial T/T}{\partial a/a}=\frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial a}$이다.
이 공식을 쓰는 이유: 문제는 파라미터 a의 변화가 폐루프 전달함수에 미치는 상대적 영향을 묻고 있으므로, 먼저 폐루프 전달함수를 만든 다음 감도 정의식을 적용해야 한다.

NoteBase

계산 과정

1. 전진 경로가 $G(s)=\frac{K}{s(s+a)}$, 단위 피드백이므로
$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{K}{s(s+a)}}{1+\frac{K}{s(s+a)}}=\frac{K}{s^2+as+K}$
이다.

2. a에 대해 미분하면
$\frac{\partial T}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{K}{s^2+as+K}\right)=-\frac{Ks}{(s^2+as+K)^2}$
이다.

3. 감도 정의식을 적용하면
$S_T^a=\frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial a}=\frac{a}{\frac{K}{s^2+as+K}}\left(-\frac{Ks}{(s^2+as+K)^2}\right)=-\frac{as}{s^2+as+K}$
이므로 정답은 ①이다.

선지별 해설

① O: 계산 결과가 $S_T^a=-\frac{as}{s^2+as+K}$이므로 맞다.
② X: 분모가 $(s^2+as+K)^2$인 식은 감도 정의식에서 $\frac{a}{T}$를 반영하지 못한 형태이다. 감도는 미분 후 T로 한 번 더 나누므로 분모 차수가 1차로 줄어야 한다. 틀린 표현은 분모 제곱이며, 올바르게는 $-\frac{as}{s^2+as+K}$이다.
③ X: $-\frac{Ks}{(s^2+as+K)^2}$는 감도 자체가 아니라 $\frac{\partial T}{\partial a}$이다. 틀린 표현은 감도를 단순 미분값으로 본 점이며, 올바르게는 $\frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial a}$를 곱한 $-\frac{as}{s^2+as+K}$이다.
④ X: a에 대한 미분에서는 분자의 K가 아니라 분모의 as항에서 s가 남아야 한다. 틀린 표현은 분자 aK이며, 올바르게는 분자 as가 들어가 $-\frac{as}{s^2+as+K}$가 된다.

오답 포인트

감도를 미분값과 혼동하거나, $\frac{a}{T}$를 빠뜨려 분모 제곱을 그대로 두는 실수가 잦다. 또 a에 대한 미분인데 as를 미분해 s가 남는다는 점을 놓치면 ④ 같은 오답으로 흐른다.

다시 나오면 이렇게 판단

폐루프 계의 파라미터 감도를 묻으면 $G(s)$에서 바로 미분하지 않고 먼저 $T(s)=\frac{G}{1+G}$를 만든다. 그다음 $S=\frac{p}{T}\frac{\partial T}{\partial p}$를 적용해 미분값인지 감도인지 구분하면 된다.

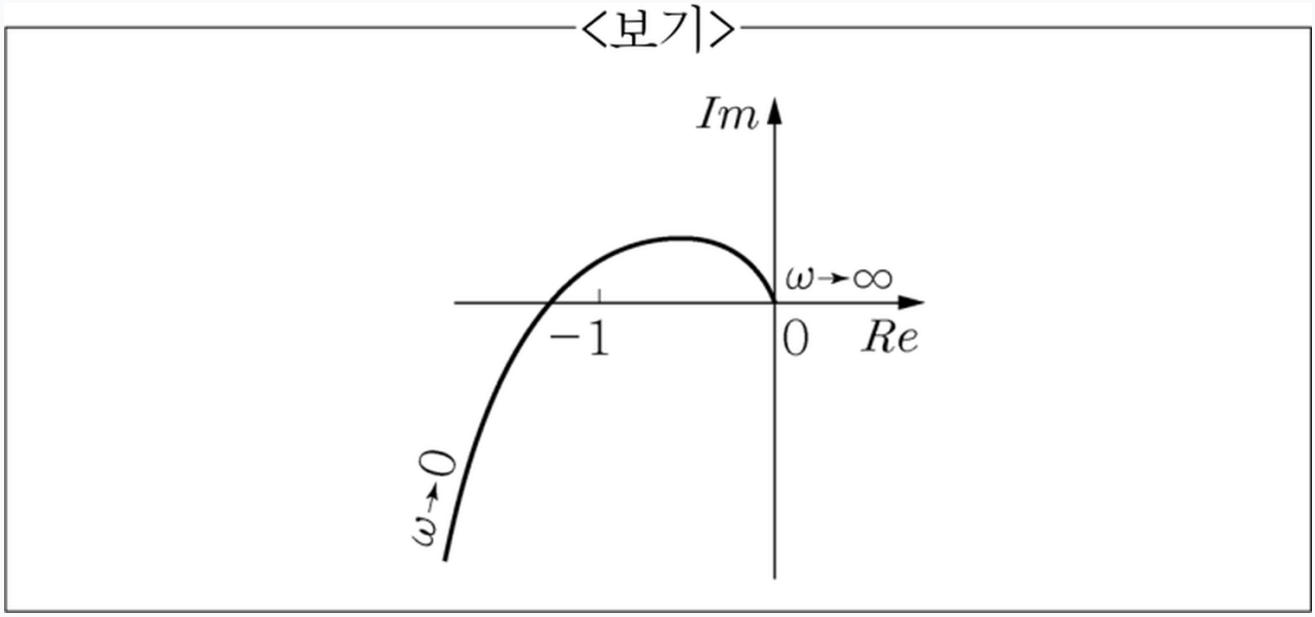
암기 포인트

감도는 미분값이 아니라 상대변화비이므로 $S=\frac{p}{T}\frac{\partial T}{\partial p}$ 형태로 정리된다.

NoteBase

문 14. 양수 a, b, c에 대해 <보기>의 Nyquist 선도를 주는 전달함수의 형태로 가장 적절한 것은? (단, $K > 0$ 이다.)

<보기>



① $\frac{K}{s(as+1)}$

② $\frac{K}{(as+1)(bs+1)}$

③ $\frac{K}{(as+1)(bs+1)(cs+1)}$

④ $\frac{K}{s(as+1)(bs+1)}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 Nyquist 선도에서 $\omega \to 0$과 $\omega \to \infty$의 시작점과 종점 방향을 보고 적분기 유무와 극의 개수를 판별하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: $\frac{K}{s(as+1)}$는 적분기 1개가 있어 $\omega \to 0$에서 음의 허수축 방향으로 발산하는 점은 맞다. 그러나 $\omega \to \infty$에서 $G(j\omega) \approx -\frac{K}{a\omega^2}$이므로 원점에 음의 실수축 방향으로 접근한다. 그림처럼 원점을 상반평면 쪽에서 향하지 못한다. 틀린 표현은 적분기와 1차 지연극 1개만 둔 2차계라는 점이고, 올바르게는 적분기와 1차 지연극 2개를 가진 3차계여야 한다.
② X: $\frac{K}{(as+1)(bs+1)}$는 $\omega = 0$에서 값이 K인 양의 실수축 위에서 시작한다. 그림처럼 $\omega \to 0$에서 아래쪽 무한대로 내려가지 않는다. 틀린 표현은 적분기 없이 두 개의 실극만 둔 점이고, 올바르게는 적분기 1개가 추가되어야 한다.
③ X: $\frac{K}{(as+1)(bs+1)(cs+1)}$는 $\omega \to \infty$에서 원점에 접근하는 방향이 상반평면 쪽일 수 있지만, $\omega = 0$에서는 역시 K인 양의 실수축 위에서 시작한다. 따라서 그림의 저주파 특성을 설명하지 못한다. 틀린 표현은 적분기 없는 3차 지연계라는 점이고, 올바르게는 적분기 1개를 포함한 형태여야 한다.
④ O: $\frac{K}{s(as+1)(bs+1)}$는 적분기 1개 때문에 $\omega \to 0$에서 $-j\infty$ 방향에서 시작한다. 또 $\omega \to \infty$에서 $G(j\omega) \approx \frac{K}{(j\omega)(ja\omega)(jb\omega)} = \frac{jK}{ab\omega^3}$이므로 원점에 양의 허수축 방향으로 접근한다. 그림의 시작점과 종점 방향이 모두 일치하므로 가장 적절하다.

오답 포인트

저주파에서 아래쪽 무한대로 내려가는 모양만 보고 ①과 ④를 함께 떠올리기 쉽다. 그러나 고주파에서 원점에 접근하는 방향이 ①은 음의 실수축이고 ④는 양의 허수축이라는 차이가 결정적이다.

다시 나오면 이렇게 판단

Nyquist 선도는 먼저 $\omega \to 0$의 시작점으로 적분기 유무를 본다. 그다음 $\omega \to \infty$에서 원점으로 접근하는 방향으로 전체 극의 개수와 위상 지연의 총합을 판별하면 된다.

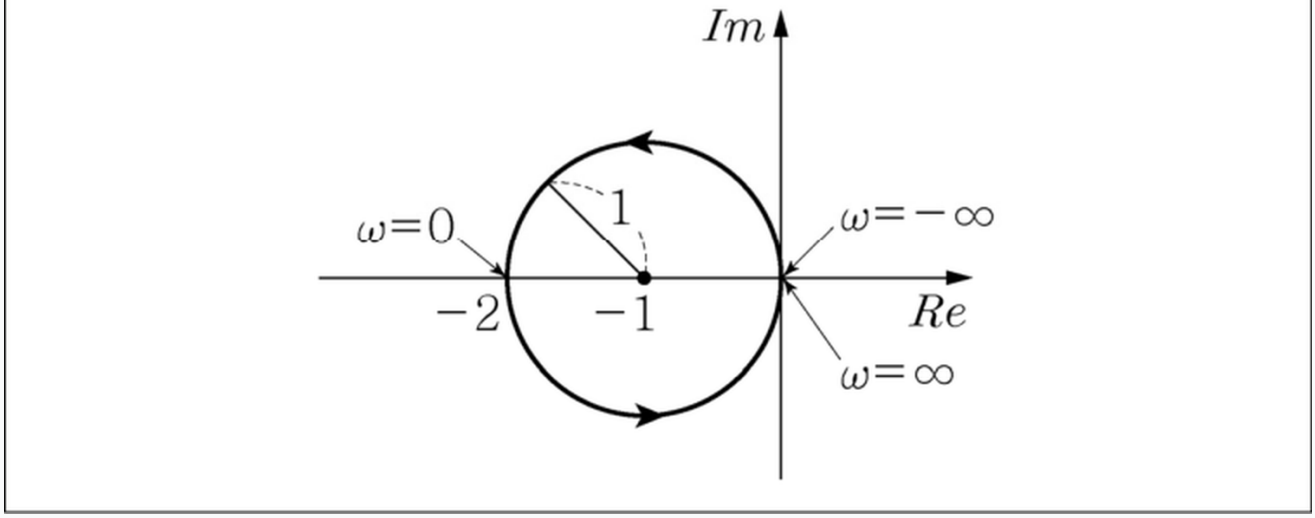
암기 포인트

적분기 1개면 시작은 $-j\infty$이고, 적분기와 1차 지연극 2개면 끝은 원점의 양의 허수축 쪽이다.

NoteBase

문 15. <보기>는 $G(s)=\frac{b}{s+a}$에 대한 Nyquist 선도이다. 적절한 a와 b 값의 조합으로 가장 옳은 것은?

<보기>



① a: -1, b: 2

② a: -1, b: 4

③ a: 1, b: -2

④ a: 1, b: -4

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 Nyquist 선도의 실축 교점, 원의 중심·반지름, ω 진행 방향을 읽어 a와 b의 부호와 비를 판단하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① O

$G(j\omega) = \frac{b}{j\omega + a} = \frac{ab}{a^2 + \omega^2} - j\frac{b\omega}{a^2 + \omega^2}$ 이므로 Nyquist 선도는 실축의 0과 b/a를 지름으로 하는 원이 된다. 그림은 실축 교점이 0과 -2, 중심이 -1, 반지름이 1이므로 $b/a = -2$이다. 또 $\omega = \infty$가 원점 아래쪽에 있으므로 허수부가 음수여야 해서 $b > 0$이다. 따라서 $a < 0$, $b = 2$가 된다.

② X

$a = -1, b = 4$이면 $b/a = -4$이므로 실축 교점이 0과 -4, 중심이 -2, 반지름이 2인 원이 되어 그림과 맞지 않는다. 틀린 표현은 $b = 4$이며, 올바르게는 $b = 2$이다.

③ X

$a = 1, b = -2$는 $b/a = -2$라서 원의 크기와 위치만 보면 맞아 보이지만, $b < 0$이면 $\omega > 0$에서 허수부 $-\frac{b\omega}{a^2 + \omega^2}$가 양수가 되어 궤적이 상반평면으로 지나간다. 그림은 $\omega = \infty$가 하반평면 쪽이므로 부호가 반대이다. 올바르게는 $a = -1, b = 2$이다.

④ X

$a = 1, b = -4$이면 $b/a = -4$라서 원의 위치부터 다르고, $b < 0$이어서 진행 방향도 그림과 맞지 않는다. 틀린 표현은 $a = 1, b = -4$ 전체이며, 올바르게는 $a = -1, b = 2$이다.

오답 포인트

이 문항은 원의 위치만 보고 $b/a = -2$까지만 맞춘 뒤 ①과 ③을 혼동하기 쉽다. 마지막 구분은 $\omega = \infty$가 원점의 위인지 아래인지, 즉 b의 부호가 만드는 허수부 부호로 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 $\omega = 0$에서의 점으로 b/a를 읽고, 이어서 원점 접근 방향으로 b의 부호를 정하면 a의 부호는 비례식에서 바로 정해진다.

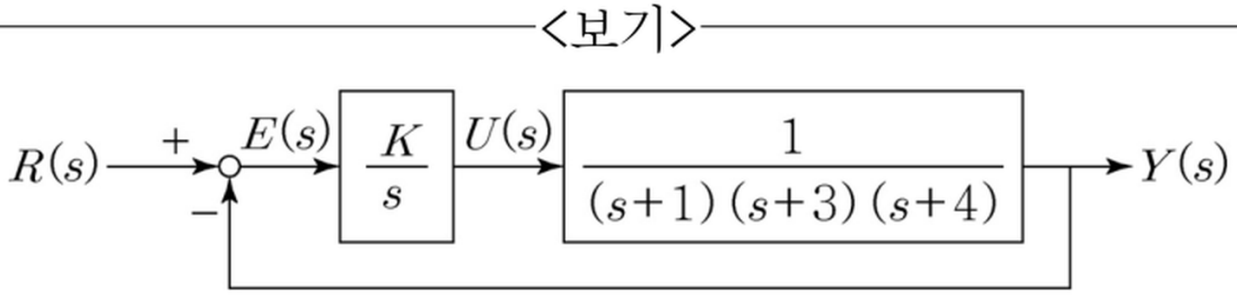
암기 포인트

$\omega = 0$은 b/a, 원점 접근의 위아래는 b의 부호를 보여 준다.

NoteBase

문 16. <보기>의 단위 피드백 시스템에 대한 근궤적 설명으로 가장 옳지 않은 것은? (단, $K>0$이다.)

<보기>



① $K=\infty$일 때 근궤적은 모두 무한대로 발산한다.

② 점근선의 개수는 4개이며, 점근선은 실수축과 각각 45°, 135°, 225°, 그리고 315°로 만난다.

③ 극점 $s=-3$과 $s=0$에서의 출발 각도는 180°이다.

④ 임계 안정도를 가지는 K값은 17.5이며, 이 값보다 커지면 이 시스템은 불안정해진다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 시스템의 개루프 전달함수 $G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$에 대해 근궤적의 점근선, 실축 구간, 임계안정 조건을 판별하는 문제이다.

선지별 해설

1번 O: 개루프 극이 $0,\ -1,\ -3,\ -4$의 4개이고 영점이 없으므로 근궤적 가지 4개가 모두 $K\to\infty$일 때 무한대로 향한다.

2번 O: 점근선 수는 $n-m=4$개이고 각도는 $\theta_k=\frac{(2k+1)180^\circ}{4}$이므로 45°, 135°, 225°, 315°이다.

3번 O: 실축 근궤적은 오른쪽의 실극·실영점 개수가 홀수인 구간인 $(-4,\ -3)$, $(-1,\ 0)$에 존재한다. 따라서 $s=-3$과 $s=0$에서는 둘 다 실축의 왼쪽으로 출발하므로 출발각은 180°이다.

4번 X: 특성방정식은 $s^4+8s^3+19s^2+12s+K=0$이다. Routh 표의 첫 열이 양수가 되는 조건은 $1,\ 8,\ 17.5,\ 12-\frac{16}{35}K,\ K>0$이므로 임계안정은 $12-\frac{16}{35}K=0$에서 $K=26.25$일 때이다. '임계 안정도를 가지는 K값은 17.5이다'가 틀린 표현이며, 올바르게는 '임계 안정도를 가지는 K값은 26.25이며, 이 값보다 커지면 이 시스템은 불안정해진다'이다.

오답 포인트

17.5는 Routh 표의 s^2행 첫 항일 뿐 임계이득이 아니다. 첫 열을 0으로 만드는 s^1행 조건까지 끝까지 계산하지 않으면 4번처럼 중간값을 임계안정 이득으로 오인하게 된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 $n - m$으로 점근선 개수와 각도를 정하고, 실축 구간은 오른쪽 실극·실영점 개수의 홀수 규칙으로 판정한다. 안정도는 특성방정식을 만든 뒤 Routh 표 첫 열의 부호 조건으로 최종 확인한다.

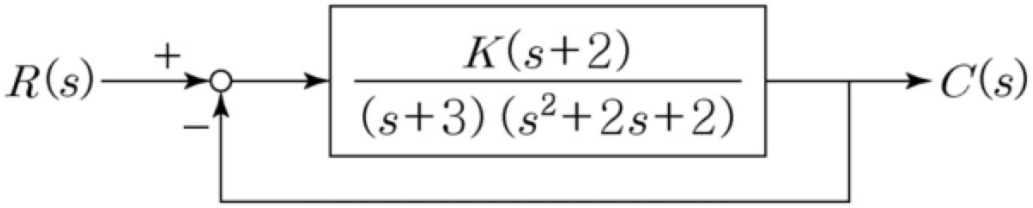
암기 포인트

$n - m$은 점근선 개수, 실축 근궤적은 홀수 규칙, 임계이득은 Routh 표 첫 열이 0이 되는 지점이다.

NoteBase

문 17. <보기>의 폐루프 제어 시스템에서 복소극점 $-1+j1$에서의 근궤적의 출발각은? (단, $\tan^{-1}(0.5) \cong 27^\circ$이다.)

<보기>



① 108°

② 127°

③ 153°

④ -243°

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 복소극점에서의 근궤적 출발각을 각도조건으로 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

개루프 전달함수는 $G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$이다.
극점은 $-3,\ -1+j1,\ -1-j1$이고 영점은 -2이다.
구해야 할 값은 복소극점 $-1+j1$에서의 출발각이다.

사용할 공식

복소극점 p_k에서의 출발각은
$\phi_d = 180^\circ + \sum \angle(p_k - z_i) - \sum \angle(p_k - p_j)$
이다. 여기서 두 번째 합은 자신을 제외한 다른 극점에 대한 각도 합이다.
이 공식을 쓰는 이유는 근궤적이 각도조건 $\sum \angle(s - z_i) - \sum \angle(s - p_i) = (2m+1)180^\circ$를 만족해야 하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

출발점 $p_k = -1 + j1$에서 각도를 계산한다.
1. 영점 -2가 만드는 각도는 $\angle[(-1+j1)-(-2)] = \angle(1+j1) = 45^\circ$이다.
2. 다른 극점 -3가 만드는 각도는 $\angle[(-1+j1)-(-3)] = \angle(2+j1) = \tan^{-1}(0.5) \approx 27^\circ$이다.
3. 공액극점 $-1-j1$가 만드는 각도는 $\angle[(-1+j1)-(-1-j1)] = \angle(2j) = 90^\circ$이다.
4. 따라서
$\phi_d = 180^\circ + 45^\circ - (27^\circ + 90^\circ) = 108^\circ$
이므로 출발각은 108°이다.

선지별 해설

① O: 계산 결과가 108°이므로 옳다.
② X: 127°는 영점 각 45°를 더한 뒤 다른 극점 각 27° 또는 90°를 일부만 빼는 식으로 각도조건을 불완전하게 적용했을 때 생기는 오답이다. 틀린 표현은 '출발각이 127°이다'이고, 올바르게는 '출발각은 108°이다'이다.
③ X: 153°는 $180^\circ - 27^\circ$처럼 -3 극점의 각도만 반영하고 영점 45°와 공액극점 90°의 영향을 누락했을 때 생기는 값이다. 틀린 표현은 '출발각이 153°이다'이고, 올바르게는 '출발각은 영점과 다른 모든 극점의 각도를 함께 반영한 108°이다'이다.
④ X: -243°는 108°와 동치인 각도가 아니고, $108^\circ - 360^\circ = -252^\circ$이므로 수치 자체가 맞지 않는다. 틀린 표현은 '출발각이 -243°이다'이고, 올바르게는 '주값으로는 108°이고 동치각으로 쓰면 -252°이다'이다.

오답 포인트

복소극점의 출발각은 자신의 극점을 제외한 나머지 극점과 영점이 만드는 각도를 모두 반영해야 한다.
공액극점이 만드는 90°를 빠뜨리거나 360° 동치각을 잘못 바꾸면 쉽게 틀린다.

다시 나오면 이렇게 판단

복소극점 출발각 문제는 구하려는 극점 하나를 정한 뒤 그 점에서 영점으로 향하는 각도 합과 다른 극점으로 향하는 각도 합을 각각 구해 180^ + 영점 각도 합 - 다른 극점 각도 합으로 정리하면 된다.

암기 포인트

출발각은 180^ + 영점 각도 합 - 다른 극점 각도 합이다.

NoteBase

문 18. <보기>의 비선형 상태방정식을 $x_1 = 1,\ x_2 = 1$ 부근에서 바르게 선형화 한 것은?

<보기>
$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2, \frac{dx_2}{dt} = x_2^2 - 3x_2$

① $\frac{dx_1}{dt}$: $2x_1 + 2x_2$, $\frac{dx_2}{dt}$: $2x_2 - 3$
② $\frac{dx_1}{dt}$: $2x_1 + 5x_2$, $\frac{dx_2}{dt}$: $2x_2$
③ $\frac{dx_1}{dt}$: $4x_1 + 8x_2 - 6$, $\frac{dx_2}{dt}$: $-x_2 - 1$
④ $\frac{dx_1}{dt}$: $4x_1 + 8x_2$, $\frac{dx_2}{dt}$: $2x_2 - 3$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 비선형 상태방정식을 기준점 $(x_1, x_2) = (1, 1)$에서 1차 테일러 전개하여 선형화하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2, \dot{x}_2 = x_2^2 - 3x_2$이다.
기준점은 $(x_1, x_2) = (1, 1)$이다.
구해야 할 것은 기준점 부근의 1차 선형근사식이다.
주의할 점은 편차변수형이 아니라 원래 변수 x_1, x_2로 적은 선지를 고르는 문제라는 점이다.

사용할 공식

선형화 공식은 $f(x) \approx f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0}(x - x_0)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 기준점 x_0 부근에서는 비선형항을 1차항까지 남긴 테일러 전개로 근사할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 기준점에서 함수값을 구하면 $f_1(1, 1) = 1 + 2 + 3 = 6, f_2(1, 1) = 1 - 3 = -2$이다.
2. 야코비안은 A(x)=bmatrix2x_1+2x_2 & 2x_1+6x_2\ 0 & 2x_2-3bmatrix이고, (1, 1)에서 A(1,1)=bmatrix4 & 8\ 0 & -1bmatrix이다.
3. 따라서 $\dot{x}_1 \approx 6 + 4(x_1 - 1) + 8(x_2 - 1) = 4x_1 + 8x_2 - 6\ \dot{x}_2 \approx\ -2 - (x_2 - 1) = -x_2 - 1$이 된다.

NoteBase

선지별 해설

① X

$\dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2$는 f_1의 올바른 선형화 결과가 아니고, $\dot{x}_2 = 2x_2 - 3$도 f_2 자체가 아니라 도함수만 적은 값이다.

틀린 표현은 $2x_1 + 2x_2$와 $2x_2 - 3$이다. 옳게는 $\dot{x}_1 = 4x_1 + 8x_2 - 6, \dot{x}_2 = -x_2 - 1$이다.

② X

$\dot{x}_1 = 2x_1 + 5x_2$는 야코비안 첫째 행 $[4, 8]$과 맞지 않고, $\dot{x}_2 = 2x_2$도 상수항과 부호를 모두 놓친 식이다.

틀린 표현은 $2x_1 + 5x_2$와 $2x_2$이다. 옳게는 $\dot{x}_1 = 4x_1 + 8x_2 - 6, \dot{x}_2 = -x_2 - 1$이다.

③ O

기준점 함수값 $f(1, 1) = (6, -2)$와 야코비안 A(1,1)=bmatrix4&8\ 0&-1bmatrix를 대입하면

$\dot{x}_1 = 4x_1 + 8x_2 - 6, \dot{x}_2 = -x_2 - 1$이 된다.

④ X

$\dot{x}_1 = 4x_1 + 8x_2$는 상수항 -6을 빠뜨린 식이고, $\dot{x}_2 = 2x_2 - 3$는 원식을 선형화한 결과가 아니라 도함수를 잘못 옮긴 식이다.

틀린 표현은 상수항이 빠진 $4x_1 + 8x_2$와 $2x_2 - 3$이다. 옳게는 $\dot{x}_1 = 4x_1 + 8x_2 - 6, \dot{x}_2 = -x_2 - 1$이다.

오답 포인트

선형화는 기울기만 구하는 절차가 아니라 $f(x_0)$와 $A(x - x_0)$를 함께 써야 한다. ④처럼 상수항을 빼먹거나 ①처럼 도함수를 원식처럼 적으면 쉽게 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

선형화 문제는 먼저 기준점에서 함수값 $f(x_0)$을 구하고, 다음에 야코비안 A를 구한 뒤, 마지막에 $f(x_0) + A(x - x_0)$ 형태로 정리하면 된다. 편차변수형인지 원래 좌표형인지도 함께 확인하면 된다.

암기 포인트

원래 좌표형 선형화는 $f(x_0) + A(x - x_0)$이고, 편차형 선형화는 $\delta\dot{x} = A\delta x$이다.

NoteBase

문 19. <보기>의 (가)와 (나)의 가제어성과 가관측성에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

<보기>
(가) x=pmatrix-2 & 1 \ 0 & -1pmatrixx+pmatrix1 \ 0pmatrixu, y=pmatrix1 & 0pmatrixx
(나) x=pmatrix-2 & 0 \ 0 & -1pmatrixx+pmatrix3 \ 1pmatrixu, y=pmatrix1 & 0pmatrixx

① (가)는 가제어 하지 않으며 (나)는 가관측 하지 않는다.
② (가)는 가제어 하며 (나)는 가관측 하지 않는다.
③ (가)는 가제어 하지 않으며 (나)는 가관측 한다.
④ (가)는 가제어 하며 (나)는 가관측 한다.

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식에서 가제어성은 가제어행렬의 랭크로, 가관측성은 가관측행렬의 랭크로 판정할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

(가) $A=[[-2,1],[0,\ -1]],\ B=[1,0]^T,\ C=[1,0]$이다.
(나) $A=[[-2,0],[0,\ -1]],\ B=[3,1]^T,\ C=[1,0]$이다.
2차 시스템이므로 가제어성과 가관측성은 각각 해당 행렬의 랭크가 2인지로 판정한다.

사용할 공식

가제어행렬은 $C_c=[B,AB]$, 가관측행렬은 $C_o=[C;CA]$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 2차 선형시스템의 모든 상태를 입력으로 도달시킬 수 있는지, 출력으로 복원할 수 있는지가 각각 이 두 행렬의 랭크 조건으로 결정되기 때문이다.

계산 과정

(가)에서 $AB=[-2,\ 0]^T$이므로 C_c,(가)=[[1,-2],[0,0]]이다. 랭크가 1이므로 (가)는 가제어하지 않다.
(나)에서 $CA=[-2,\ 0]$이므로 C_o,(나)=[[1,0],[-2,0]]이다. 랭크가 1이므로 (나)는 가관측하지 않다.
참고로 (나)의 가제어행렬은 $AB=[-6,\ -1]^T$, C_c,(나)=[[3,-6],[1,-1]]이고 행렬식이 3이므로 가제어한다.

NoteBase

선지별 해설

① O: (가)는 가제어행렬의 랭크가 1이어서 가제어하지 않고, (나)는 가관측행렬의 랭크가 1이어서 가관측하지 않는다.
② X: 틀린 표현은 '(가)는 가제어 하며'이다. 올바르게는 '(가)는 가제어하지 않으며'이다. (나)는 가관측하지 않는다는 부분만 맞다.
③ X: 틀린 표현은 '(나)는 가관측 하다'이다. 올바르게는 '(나)는 가관측하지 않다'이다. (가)는 가제어하지 않는다는 부분만 맞다.
④ X: '(가)는 가제어 하며'와 '(나)는 가관측 하다'가 모두 틀렸다. 올바르게는 '(가)는 가제어하지 않으며, (나)는 가관측하지 않다'이다.

오답 포인트

(가)에서 AB의 두 번째 성분이 0이라 두 열이 독립이 아니고, (나)에서 CA가 C의 상수배라는 점을 놓치면 둘 다 랭크 2처럼 착각하기 쉽다. 가제어성과 가관측성을 같은 행렬로 판단하는 혼동도 자주 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태방정식 문제가 나오면 먼저 무엇을 묻는지 확인한 뒤, 가제어성이면 $C_c = [B, AB, \dots]$, 가관측성이면 $C_o = [C; CA; \dots]$를 만들고 차수와 같은 랭크가 나오는지만 본다.

암기 포인트

가제어성은 열공간, 가관측성은 행공간의 독립성으로 본다. 2차 시스템은 랭크가 2이면 성립하고 1이면 성립하지 않는다.

NoteBase

문 20. <보기>와 같이 상태방정식과 계수행렬 A가 주어질 때, 대각표준형으로 변환된 계수행렬 $\overline{A}$로 가장 옳은 것은?

<보기>

x=Ax+Bu, A=bmatrix0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 1 \ 6 & -1 & -4bmatrix

① A=bmatrix0 & 0 & 6 \ 1 & 0 & -1 \ 0 & 1 & -4bmatrix

② A=bmatrix1 & 0 & 0 \ 0 & -2 & 0 \ 0 & 0 & -3bmatrix

③ A=bmatrix-6 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 4bmatrix

④ A=bmatrix-1 & 1 & 0 \ 0 & 2 & 0 \ 0 & 0 & 3bmatrix

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식의 계수행렬에서 특성방정식을 구하고, 그 근인 고유값으로 대각표준형을 만드는지를 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 행렬은 A=bmatrix0&1&0\\0&0&1\\6&-1&-4bmatrix이다.
구해야 할 값은 A와 닮음인 대각행렬 $\bar{A}$이다.
대각표준형에서는 주대각선 성분이 A의 고유값이 되고, 주대각선 밖의 성분은 모두 0이 된다.

사용할 공식

특성방정식은 $\det(\lambda I - A) = 0$으로 구한다.
이 공식을 쓰는 이유는 대각표준형의 대각성분이 원행렬의 고유값이기 때문이다.

계산 과정

A의 특성다항식은 $\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6$이다.
이를 인수분해하면 $(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$ 이므로 고유값은 $1,\ -2,\ -3$이다.
따라서 대각표준형으로 변환된 행렬은 $\bar{A} = \mathrm{diag}(1,\ -2,\ -3)$가 된다.

NoteBase

선지별 해설

① X: bmatrix0&0&6\\1&0&-1\\0&1&-4bmatrix는 주대각선 밖의 성분이 남아 있어 대각행렬이 아니다. 틀린 표현은 "대각표준형"에 이 행렬을 대응시킨 점이며, 올바르게는 $\bar{A} = \mathrm{diag}(1,\ -2,\ -3)$가 되어야 한다.
② O: 특성방정식의 근이 $1,\ -2,\ -3$이므로 대각표준형의 대각성분은 이 세 고유값이 된다. bmatrix1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3bmatrix는 주대각선 밖이 모두 0이어서 대각표준형에 맞다.
③ X: 대각행렬이기는 하지만 대각성분 $-6, 1, 4$는 A의 고유값이 아니다. 틀린 표현은 대각성분을 고유값 대신 계수나 부호를 임의로 옮긴 점이며, 올바르게는 $1,\ -2,\ -3$이 들어가야 한다.
④ X: 첫째 행 둘째 열의 1 때문에 애초에 대각행렬이 아니고, 대각성분 $-1, 2, 3$도 A의 고유값이 아니다. 틀린 표현은 고유값의 부호를 반대로 읽고 비대각 성분까지 남긴 점이며, 올바르게는 $\mathrm{diag}(1,\ -2,\ -3)$이다.

오답 포인트

특성방정식의 근을 구한 뒤에도 대각행렬의 모양 자체를 확인하지 않으면 ①, ④처럼 비대각 성분이 남은 선지에 흔들리기 쉽다. 또한 마지막 행의 계수만 보고 $-6, 1, 4$처럼 고유값을 잘못 적으면 ③으로 빠지기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태행렬의 대각표준형 문제는 특성방정식 계산 -> 근 인수분해 -> 그 근이 주대각선에만 있는지 확인하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

대각표준형의 대각성분은 원행렬의 고유값이고, 주대각선 밖 성분은 모두 0이다.

NoteBase