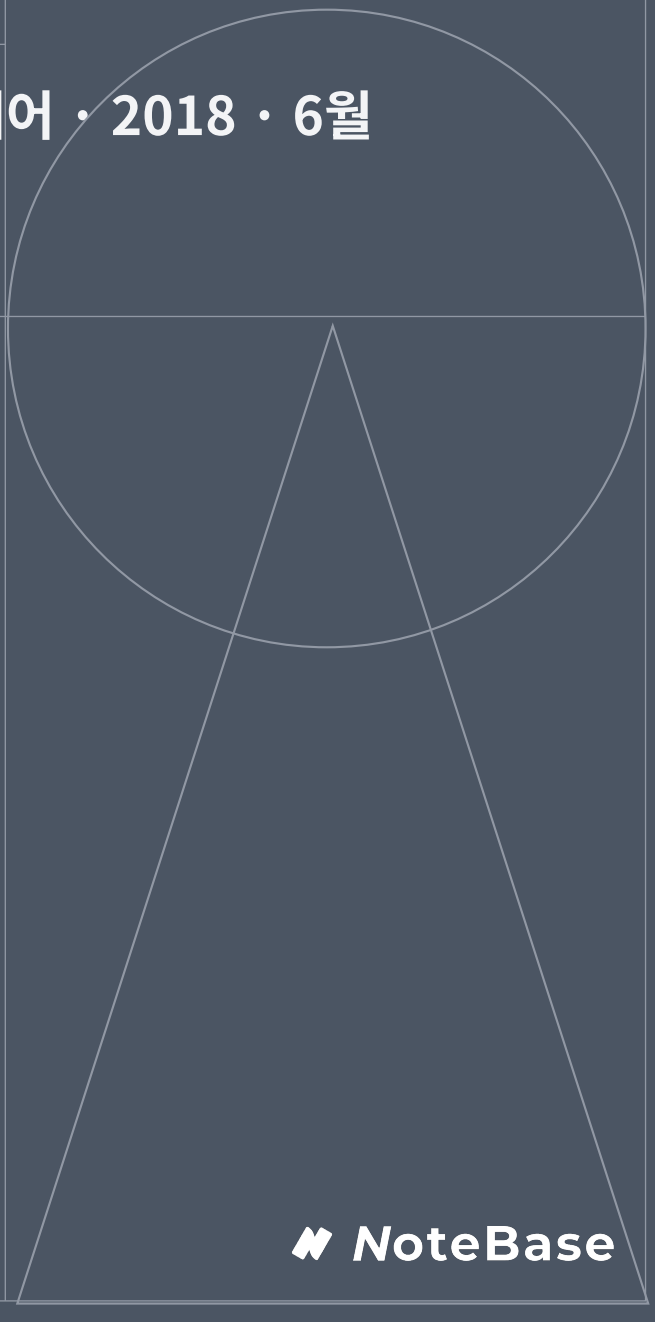
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2018 · 6월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2018 · 6월

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2018 · 6월

문 1. 미분방정식이 $\ddot{y} + 6\dot{y} - 7y = u$인 시스템에 대해 $u = -Ky$인 P제어기를 설계하고자 할 때, 폐루프 시스템이 안정할 K의 범위는?

① $K < -7$

② $-7 < K < 1$

③ $-1 < K < 7$

④ $K > 7$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 상태피드백 $u = -Ky$를 대입한 뒤 폐루프 특성방정식의 계수를 보고 안정조건을 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\ddot{y} + 6\dot{y} - 7y = u$이다.
P제어기는 $u = -Ky$이다.
구해야 할 값은 폐루프 시스템이 안정해지는 K의 범위이다.

사용할 공식

폐루프 식에 $u = -Ky$를 대입하면
$\ddot{y} + 6\dot{y} - 7y = -Ky$
이므로
$\ddot{y} + 6\dot{y} + (K - 7)y = 0$
가 된다.
따라서 특성방정식은
$s^2 + 6s + (K - 7) = 0$
이다.
2차 특성방정식 $s^2 + a_1 s + a_0 = 0$가 안정하려면 $a_1 > 0, a_0 > 0$이어야 하므로 여기서는 $6 > 0, K - 7 > 0$을 만족해야 한다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2018 · 6월

계산 과정

1. 제어입력 $u = -Ky$를 원식에 대입한다.
2. $\ddot{y} + 6\dot{y} + (K-7)y = 0$로 정리한다.
3. 특성방정식 $s^2 + 6s + (K-7) = 0$를 얻는다.
4. 안정조건은 상수항이 양수인 $K - 7 > 0$이므로 $K > 7$이다.

선지별 해설

① X
$K < -7$이면 $K - 7 < 0$이므로 특성방정식의 상수항이 음수이다. 한 근이 양수가 되어 불안정하다. 틀린 표현은 "$K < -7$에서 안정"이고, 올바르게는 "$K > 7$에서 안정"이다.

② X
$-7 < K < 1$이어도 여전히 $K - 7 < 0$이다. 폐루프 극 하나가 우반평면에 놓여 안정하지 않다. 틀린 표현은 "$-7 < K < 1$에서 안정"이고, 올바르게는 "$K > 7$에서만 안정"이다.

③ X
$-1 < K < 7$에서는 끝점 7보다 작으므로 $K - 7 < 0$이다. 따라서 안정조건을 만족하지 못한다. 특히 $K = 7$도 근이 0이 되어 점근안정이 아니다. 틀린 표현은 "$-1 < K < 7$에서 안정"이고, 올바르게는 "$K > 7$에서 안정"이다.

④ O
$K > 7$이면 특성방정식 $s^2 + 6s + (K-7) = 0$의 모든 계수가 양수이다. 2차 시스템 안정조건을 만족하므로 폐루프 시스템은 안정하다.

오답 포인트

원래 시스템의 특성방정식 $s^2 + 6s - 7 = 0$의 근이 1과 -7이라는 점에 끌려 보기의 경계값을 그대로 고르기 쉽다. 그러나 이 문제는 열린루프 근을 묻는 것이 아니라 $u = -Ky$를 대입한 뒤 바뀐 폐루프 특성방정식의 계수를 다시 보고 판단하는 문제이다.

다시 나오면 이렇게 판단

피드백 이득 범위를 묻는 2차 안정도 문제는 제어입력을 먼저 대입해 폐루프 특성방정식을 만든 뒤, $s^2 + a_1 s + a_0$ 꼴에서 계수의 부호를 바로 확인하면 된다.

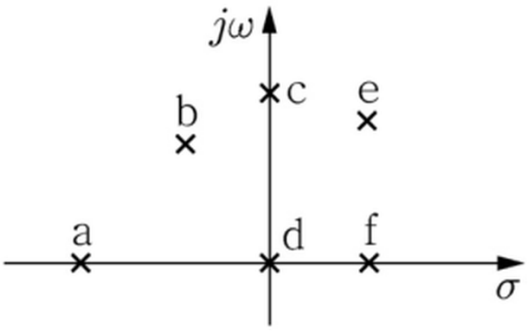
암기 포인트

2차계 안정조건은 $s^2 + a_1 s + a_0$에서 $a_1 > 0$, $a_0 > 0$이다. 이 문항에서는 $a_0 = K - 7$만 보면 정답이 바로 나온다.

NoteBase

문 2. <보기>와 같이 s-평면에 나타난 전달함수 극점의 임펄스 응답과 안정성에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은?

<보기>



① b의 임펄스 응답은 정현 진동하며 지수감쇠한다.

② b, c, d, e의 임펄스 응답은 정현 진동한다.

③ e, f의 임펄스 응답은 발산하며 불안정한 근이다.

④ a, b는 안정한 근이다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 s-평면의 극점 위치를 보고 임펄스 응답이 감쇠하는지, 계속 진동하는지, 발산하는지와 안정 여부를 판단하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① O

b는 좌반평면의 복소극이므로 응답이 $e^{\sigma t}\sin \omega t$ 꼴로 나타나며, $\sigma < 0$이어서 정현 진동하면서 지수감쇠한다.

② X

b, c, e는 허수부가 0이 아니므로 진동 성분이 있다. 그러나 d는 원점의 극 $s = 0$이므로 응답이 일정한 상수 성분으로 남을 뿐 정현 진동하지 않는다. 틀린 표현은 "b, c, d, e의 임펄스 응답은 정현 진동한다"이고, 올바르게는 "b, c, e는 진동 성분이 있고 d는 진동하지 않는다"이다.

③ O

e와 f는 모두 우반평면에 있으므로 응답이 시간이 갈수록 커져 발산한다. e는 발산하는 진동 응답이고, f는 발산하는 비진동 응답이지만 둘 다 불안정한 극이라는 판단은 맞다.

④ O

a와 b는 모두 실수부가 음수인 좌반평면에 있다. 따라서 a는 비진동 감쇠, b는 감쇠진동을 보이며 둘 다 안정한 극이다.

오답 포인트

복소극이면 모두 진동한다고 외우다가 원점의 극까지 같은 부류로 묶기 쉽다. d는 허수부가 없고 실수부도 0이어서 정현 진동이 아니라 상수 성분으로 남는다는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 실수부 부호로 안정성을 본다. 좌반평면이면 감쇠, 우반평면이면 발산, 허수축이면 감쇠하지 않는다. 그다음 허수부가 0이 아니면 진동, 0이면 비진동으로 정리하면 된다.

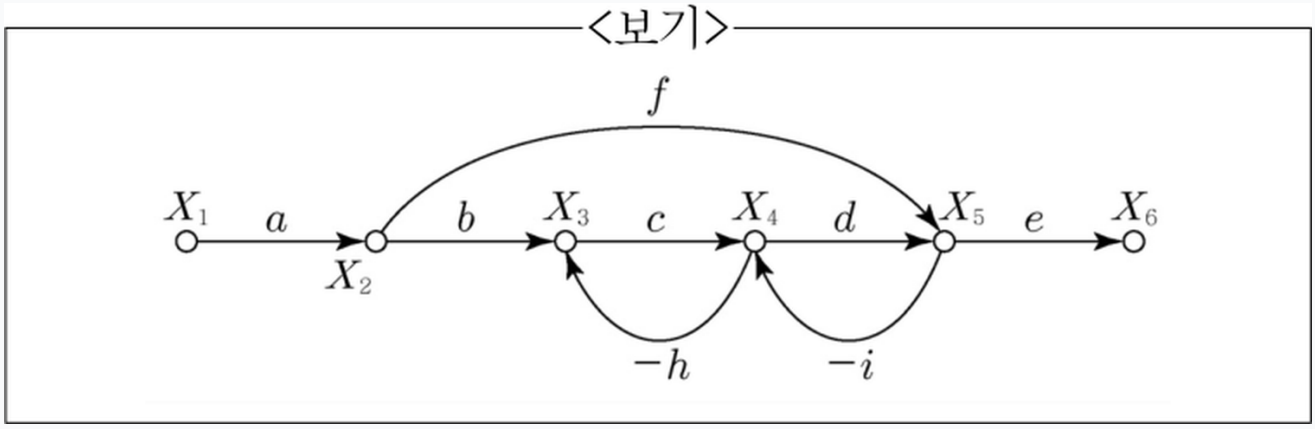
암기 포인트

실수부는 감쇠·발산, 허수부는 진동 유무를 결정하며 원점 극은 진동이 아니라 경계 상태이다.

NoteBase

문 3. <보기>와 같은 신호흐름선도에서 전달함수 X_6/X_1은?

<보기>



① $\frac{abcde + afe + ch + di}{1 + ch + di}$

② $\frac{abcde + afe + acefh}{1 + ch + di}$

③ $\frac{abcde + afe + acefh}{1 + abcde + afe}$

④ $\frac{abcde + afe + ch + di}{1 + abcde + afe + ch + di}$

정답 2번

출제 포인트

메이슨의 신호흐름선도 공식을 적용하여 전진경로 P_k, 루프 이득, 전체 Δ, 각 전진경로의 Δ_k를 구하는 문제이다.

조건 정리

전진경로는 $X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \to X_5 \to X_6$와 $X_1 \to X_2 \to X_5 \to X_6$의 두 개이다.
개별 루프는 $X_3 \to X_4 \to X_3$와 $X_4 \to X_5 \to X_4$의 두 개이다.
두 루프는 X_4를 공통으로 지나므로 비접촉 루프는 없다.

사용할 공식

메이슨 공식은 $T = \frac{X_6}{X_1} = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$ 이다.
여기서 P_k는 전진경로 이득, Δ는 전체 그래프의 여인자, Δ_k는 k번째 전진경로와 접하지 않는 루프만으로 만든 여인자이다.
이 문제는 하나의 입력에서 하나의 출력으로 가는 신호흐름선도이므로 메이슨 공식을 그대로 적용하는 상황이다.

NoteBase

계산 과정

전진경로 이득은 $P_1 = abcde, P_2 = afe$ 이다.
루프 이득은 $L_1 = c(-h) = -ch, L_2 = d(-i) = -di$ 이다.
비접촉 루프가 없으므로 전체 여인자는 $\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - (-ch - di) = 1 + ch + di$ 이다.
P_1은 두 루프와 모두 접하므로 $\Delta_1 = 1$ 이다.
P_2는 루프 $L_1 = -ch$와는 접하지 않고 루프 $L_2 = -di$와는 X_5에서 접하므로
$\Delta_2 = 1 - L_1 = 1 - (-ch) = 1 + ch$ 이다.
따라서 $\frac{X_6}{X_1} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{abcde + afe(1 + ch)}{1 + ch + di} = \frac{abcde + afe + acefh}{1 + ch + di}$ 이다.

선지별 해설

① X
- 분자에 ch와 di를 독립항으로 더한 것이 틀리다. 루프 항은 분자에 단독으로 더해지지 않고, 해당 전진경로의 Δ_k에 반영된다. 올바르게는 $\frac{abcde + afe + acefh}{1 + ch + di}$ 이다.

② O
- $P_1 = abcde, P_2 = afe, \Delta = 1 + ch + di, \Delta_2 = 1 + ch$를 대입하면 $\frac{abcde + afe(1 + ch)}{1 + ch + di} = \frac{abcde + afe + acefh}{1 + ch + di}$ 가 된다. 메이슨 공식과 정확히 일치한다.

③ X
- 분모를 $1 + abcde + afe$로 둔 것이 틀리다. 메이슨 공식의 분모는 전진경로가 아니라 루프 이득으로 만든 Δ 이다. 올바르게는 분모가 $1 + ch + di$ 이고 전체 식은 $\frac{abcde + afe + acefh}{1 + ch + di}$ 이다.

④ X
- 분자와 분모에 전진경로 이득과 루프 이득을 한데 섞어 더한 것이 틀리다. 분자는 $\sum P_k\Delta_k$, 분모는 Δ로 역할이 분리된다. 올바르게는 $\frac{abcde + afe + acefh}{1 + ch + di}$ 이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 루프 이득이 $-ch$, $-di$라는 점을 놓쳐 Δ의 부호를 반대로 쓰는 실수와, Δ_k를 전체 루프가 아니라 해당 전진경로와 접하지 않는 루프만으로 구해야 한다는 점을 놓치는 실수이다. 특히 $P_2 = afe$는 L_1과는 비접촉이지만 L_2와는 X_5에서 접한다는 구분이 핵심이다.

다시 나오면 이렇게 판단

신호흐름선도 계산형은 전진경로 P_k를 먼저 찾고, 개별 루프 이득을 구한 뒤, 비접촉 루프 여부로 Δ를 만든 다음, 각 전진경로마다 접하지 않는 루프만 남겨 Δ_k를 계산하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

메이슨 공식은 $T = \frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}$ 이며, 분자는 전진경로, 분모는 루프라는 역할 분리가 핵심이다.

NoteBase

문 4. 단위 계단 응답의 최종치가 존재하는 전달함수를 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\frac{1}{s^2+2s+3}$

ㄴ. $\frac{1}{s^2+3}$

ㄷ. $\frac{1}{s^2-2s+3}$

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위 계단 입력에 대한 최종값 정리와 극점 위치를 이용해 응답의 최종치 존재 여부를 판정하는 문제이다.

조건 정리

- 입력은 단위 계단이므로 $R(s) = 1/s$이다.
- 출력은 $C(s) = G(s)R(s) = G(s)/s$이다.
- 최종값 정리는 $\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{s\to 0} sC(s) = \lim_{s\to 0} G(s)$로 쓰지만, $G(s)$의 극점이 모두 좌반평면에 있을 때만 최종값이 존재한다.

사용할 공식

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{s\to 0} sC(s)$$

이 공식을 쓰는 이유는 문제에서 단위 계단 응답의 최종치 존재 여부를 묻고 있기 때문이다. 다만 값을 대입하기 전에 전달함수의 극점이 좌반평면에 있는지 먼저 확인해야 한다.

계산 과정

1. ㄱ은 $s^2 + 2s + 3 = 0$의 근이 $s = -1 \pm j\sqrt{2}$이므로 모든 극점이 좌반평면에 있다. 따라서 최종값이 존재하고 $\lim_{s\to 0} G(s) = 1/3$이다.
2. ㄴ은 $s^2 + 3 = 0$의 근이 $s = \pm j\sqrt{3}$이므로 허수축 극점을 가진다. 응답이 지속 진동하므로 최종값이 존재하지 않는다.
3. ㄷ은 $s^2 - 2s + 3 = 0$의 근이 $s = 1 \pm j\sqrt{2}$이므로 우반평면 극점을 가진다. 불안정하므로 최종값이 존재하지 않는다.

NoteBase

선지 판단

1번 O: ㄱ만 고른 선택지이다. ㄱ만 안정극을 가지므로 단위 계단 응답의 최종값이 존재한다.
2번 X: ㄷ만 고른 선택지이다. 틀린 표현은 "ㄷ"이다. ㄷ은 우반평면 극점 $1 \pm j\sqrt{2}$를 가지므로 최종값이 존재하지 않고, 올바르게는 "ㄱ"만 해당한다.
3번 X: ㄱ, ㄴ을 고른 선택지이다. 틀린 표현은 "ㄴ 포함"이다. ㄴ은 허수축 극점 $\pm j\sqrt{3}$ 때문에 응답이 계속 진동하므로 제외되어야 하고, 올바르게는 "ㄱ만"이다.
4번 X: ㄴ, ㄷ을 고른 선택지이다. 틀린 표현은 "ㄴ, ㄷ"이다. ㄴ은 지속 진동, ㄷ은 불안정으로 둘 다 최종값이 존재하지 않으므로, 올바르게는 "ㄱ만"이다.

오답 포인트

세 전달함수 모두 $s = 0$을 대입하면 값이 1/3으로 같아 보여서 모두 최종값이 있는 것처럼 착각하기 쉽다. 최종값 정리는 값 계산보다 먼저 극점 조건을 확인해야 하며, 허수축 극점이나 우반평면 극점이 있으면 그 값은 최종값이 아니다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위 계단 최종값 문제는 먼저 $C(s) = G(s)/s$를 놓고, 다음으로 $G(s)$ 또는 $sC(s)$의 극점이 모두 좌반평면인지 확인한 뒤, 그 조건을 만족하는 경우에만 $s \to 0$ 극한값을 읽는 순서로 판단한다.

암기 포인트

최종값 정리는 대입보다 극점 확인이 먼저이며, 좌반평면이면 존재하고 허수축·우반평면이면 존재하지 않는다.

NoteBase

문 5. 상태방정식 x=bmatrix0 & 1 \ 1 & 2bmatrixx+bmatrix0 \ 1bmatrixu에 대한 상태궤환제어기 $u = -Kx$를 설계하고자 한다. 폐루프 시스템의 극점 $s = -3 \pm j\sqrt{3}$이 되도록 하는 상태궤환이득 K요소의 합은?

① 21

② 22

③ 23

④ 24

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 상태궤환 $u = -Kx$를 적용한 폐루프 행렬의 특성방정식을 목표 극점의 특성방정식과 계수 비교하여 K의 요소 합을 구하는 문제이다.

조건 정리

상태행렬은 A=bmatrix0&1; 1&2bmatrix, 입력행렬은 B=bmatrix0; 1bmatrix이다.
상태궤환은 $u = -Kx, K = [k_1, k_2]$이다.
목표 폐루프 극점은 $s = -3 \pm j\sqrt{3}$이고, 구해야 할 값은 $k_1 + k_2$이다.

사용할 공식

상태궤환 $u = -Kx$를 대입하면 폐루프 행렬은 $A - BK$이다.
목표 극점 $s = -3 \pm j\sqrt{3}$의 특성방정식은
$(s + 3)^2 + 3 = s^2 + 6s + 12$
이다.
폐루프 행렬의 특성방정식과 목표 특성방정식의 계수를 비교한다.

계산 과정

BK=bmatrix0; 1bmatrix[k_1, k_2]=bmatrix0&0; k_1&k_2bmatrix이므로
A-BK=bmatrix0&1; 1-k_1&2-k_2bmatrix
이다.
따라서
$\det(sI - (A - BK)) = s^2 + (k_2 - 2)s + (k_1 - 1)$
이다.
목표식 $s^2 + 6s + 12$와 비교하면 $k_2 - 2 = 6, k_1 - 1 = 12$이다.
따라서 $k_2 = 8, k_1 = 13, k_1 + k_2 = 21$이다.

NoteBase

선지 판단

① 21: O. 계수 비교로 $K = [13, 8]$이므로 요소의 합은 21이다.
② 22: X. 22가 되려면 k_1 또는 k_2 중 하나를 1 크게 잡아야 하지만, 계수 비교에서 $k_1 = 13$, $k_2 = 8$로 고정된다. 올바르게는 22가 아니라 21이다.
③ 23: X. 목표 극점의 상수항은 12이므로 $k_1 - 1 = 12$, $k_1 = 13$이고, s계수에서 $k_2 = 8$이다. 올바르게는 23이 아니라 21이다.
④ 24: X. $u = -Kx$이므로 폐루프 행렬은 $A + BK$가 아니라 $A - BK$이다. 이 부호를 반영하면 합은 24가 아니라 21이다. 올바르게는 24가 아니라 21이다.

오답 포인트

출제자가 노린 함정은 두 가지이다. 첫째, $u = -Kx$의 음수 부호를 놓치면 폐루프 행렬을 잘못 잡는다. 둘째, 목표 극점 $-3 \pm j\sqrt{3}$의 특성방정식에서 상수항을 $3^2 + 3 = 12$로 처리해야 하는데, 이 값을 잘못 계산하면 인접한 오답을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

극점 배치 계산형 문항은 먼저 $u = -Kx$이면 폐루프 행렬이 $A - BK$임을 정한 뒤, $\det(sI - (A - BK))$를 만들고 목표 극점으로 만든 다항식과 계수 비교하여 판단한다.

암기 포인트

상태궤환 $u = -Kx$에서는 폐루프 행렬이 $A - BK$이고, 원하는 극점은 곧 원하는 특성방정식의 계수로 바뀐다.

NoteBase

문 6. 어떤 선형 시불변(Linear time-invariant) 시스템에 단위 계단 입력이 가해졌을 때, 이 시스템의 출력 $Y(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}$이다. 이 시스템의 단위 임펄스(Unit impulse) 응답으로 가장 옳은 것은? (단, $t \geq 0$이다.)

① $e^{-t}(\cos t - \sin t)$

② $e^{-t}(\cos t + \sin t)$

③ $e^{-2t}(\cos t - \sin t)$

④ $e^{-2t}(\cos t + \sin t)$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위 계단응답 $Y(s)$로부터 전달함수 $G(s)$를 구한 뒤, 단위 임펄스응답 $h(t)$를 역라플라스 변환으로 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 단위 계단입력에 대한 출력 $Y(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}$이다.
단위 계단입력의 라플라스 변환은 $R(s)=\frac{1}{s}$이다.
구해야 할 값은 단위 임펄스응답 $h(t)$이다.

사용할 공식

전달함수는 $G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}$이다.
따라서 $G(s)=sY(s)=\frac{s}{s^2+2s+2}$이다.
임펄스응답은 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 같은 LTI 시스템에서 계단입력과 임펄스입력의 출력은 모두 전달함수 $G(s)$로 연결되기 때문이다.

계산 과정

1. $G(s)=sY(s)=\frac{s}{s^2+2s+2}$로 둔다.
2. 분모를 완전제곱으로 정리하면 $s^2+2s+2=(s+1)^2+1$이다.
3. 분자를 $s=(s+1)-1$로 바꾸면
$G(s)=\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+1}=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}$
이다.
4. 역라플라스 변환을 취하면
$h(t)=e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$
이다.

NoteBase

선지별 해설

① O: 계산 결과가 $h(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$이므로 옳다.

② X: $\sin t$ 항의 부호가 틀렸다.

틀린 표현은 $e^{-t}(\cos t + \sin t)$이고, 올바르게는 $e^{-t}(\cos t - \sin t)$이다. 이는 $s = (s+1) - 1$에서 마지막 항의 부호를 잘못 처리하면 나오는 오답이다.

③ X: 지수감쇠 항이 틀렸다.

틀린 표현은 $e^{-2t}(\cos t - \sin t)$이고, 올바르게는 $e^{-t}(\cos t - \sin t)$이다. 분모 $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$에서 평행이동은 1만큼이므로 감쇠는 e^{-t}가 된다.

④ X: 지수감쇠 항과 $\sin t$ 항의 부호가 모두 틀렸다.

틀린 표현은 $e^{-2t}(\cos t + \sin t)$이고, 올바르게는 $e^{-t}(\cos t - \sin t)$이다. 이는 완전제곱 정리와 분자 분해를 둘 다 잘못한 경우의 오답이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 계단응답 $Y(s)$를 곧바로 임펄스응답으로 착각하는 점과, $s^2 + 2s + 2$를 $(s+1)^2 + 1$로 정리하지 않고 감쇠항을 e^{-2t}로 오판하는 점이다. 또 $s = (s+1) - 1$의 부호를 반대로 두면 ②처럼 $\sin t$의 부호가 바뀐다.

다시 나오면 이렇게 판단

계단응답이 주어지면 먼저 $R(s) = 1/s$를 써서 $G(s) = sY(s)$를 만든다. 그다음 분모를 $(s+a)^2 + b^2$ 꼴로 정리해 $e^{-at}\cos bt$, $e^{-at}\sin bt$ 표준형에 맞춰 역라플라스 변환하면 된다.

암기 포인트

계단응답에서 임펄스응답으로 갈 때는 $G(s) = sY(s)$를 먼저 만든다. $(s+1)^2 + 1$이면 감쇠항은 e^{-t}이다.

NoteBase

문 7. 시스템의 전달함수 성질에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보기>
ㄱ. 전달함수는 선형 시불변(Linear time-invariant) 시스템에 대해 정의된다.
ㄴ. 전달함수는 시스템 입력의 크기와 무관하다.
ㄷ. 물리적으로 서로 다른 시스템이 동일한 전달함수를 가질 수 있다.

① ㄱ, ㄴ
② ㄱ, ㄷ
③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 4번

출제 포인트

전달함수가 선형 시불변 시스템의 입력-출력 관계를 나타내는 표현이며, 입력 크기와 무관하고 서로 다른 물리 시스템도 같은 전달함수를 가질 수 있는지를 묻는 문제이다.

핵심 개념

전달함수는 보통 영 초기조건의 선형 시불변 시스템에서 출력의 라플라스 변환을 입력의 라플라스 변환으로 나눈 비이다.
선형성이 성립하면 입력을 몇 배로 키워도 출력도 같은 비율로 변하므로 전달함수 자체는 입력 크기에 좌우되지 않는다.
전달함수는 내부 구조 전체가 아니라 입력-출력 관계를 요약한 표현이므로, 물리적으로 다른 시스템도 같은 전달함수를 가질 수 있다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2018 · 6월

선지별 해설

1번 X
ㄱ은 맞고 ㄴ도 맞다. 전달함수는 선형 시불변 시스템에 대해 정의되고, 선형 범위에서는 입력 크기를 바꾸어도 $Y(s)/U(s)$의 비 자체는 달라지지 않는다.
틀린 부분은 ㄷ을 제외한 점이다. ㄷ도 맞으므로 올바르게는 "ㄱ, ㄴ, ㄷ"이다.

2번 X
ㄱ은 맞고 ㄷ도 맞다. 전달함수는 LTI 시스템의 입력-출력 특성을 나타내며, 서로 다른 물리 시스템도 같은 동특성을 가지면 동일한 전달함수로 표현될 수 있다.
틀린 부분은 ㄴ을 제외한 점이다. ㄴ도 맞으므로 올바르게는 "ㄱ, ㄴ, ㄷ"이다.

3번 X
ㄴ은 맞고 ㄷ도 맞다. 전달함수는 입력의 절대 크기와 무관한 비로 정의되며, 내부 물리 구조가 다르더라도 외부 입력-출력 관계가 같으면 같은 전달함수를 가질 수 있다.
틀린 부분은 ㄱ을 제외한 점이다. 전달함수는 선형 시불변 시스템에 대해 정의되므로 올바르게는 "ㄱ, ㄴ, ㄷ"이다.

4번 O
ㄱ, ㄴ, ㄷ이 모두 맞다. ㄱ은 전달함수가 선형 시불변 시스템의 기본 표현이라는 설명이므로 옳다. ㄴ은 선형성 때문에 입력 진폭이 바뀌어도 입력-출력의 비로 정의되는 전달함수는 그대로라는 뜻이므로 옳다. ㄷ은 전달함수가 내부 구현보다 외부 입력-출력 관계를 나타내므로 서로 다른 물리 시스템이 같은 전달함수를 가질 수 있다는 뜻이어서 옳다.

오답 포인트

ㄴ에서 "입력의 크기와 무관하다"를 모든 실제 비선형 시스템에도 그대로 적용하는 실수를 하기 쉽다. 이 문장은 전달함수를 논하는 전제인 선형 시불변 시스템 안에서만 성립한다. 또 ㄷ에서 물리적으로 다르면 전달함수도 반드시 달라진다고 생각하기 쉬운데, 전달함수는 내부 상태구조가 아니라 입력-출력 관계만 본다는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

전달함수 문제가 나오면 먼저 "LTI 시스템의 영 초기조건 입력-출력 비"를 떠올리면 된다. 그다음 선지가 내부 구조를 묻는지, 외부 입력-출력 관계를 묻는지 구분하면 된다. 외부 관계만 같으면 같은 전달함수가 가능하므로 보기에서 하나라도 빠진 조합은 오답이 된다.

NoteBase

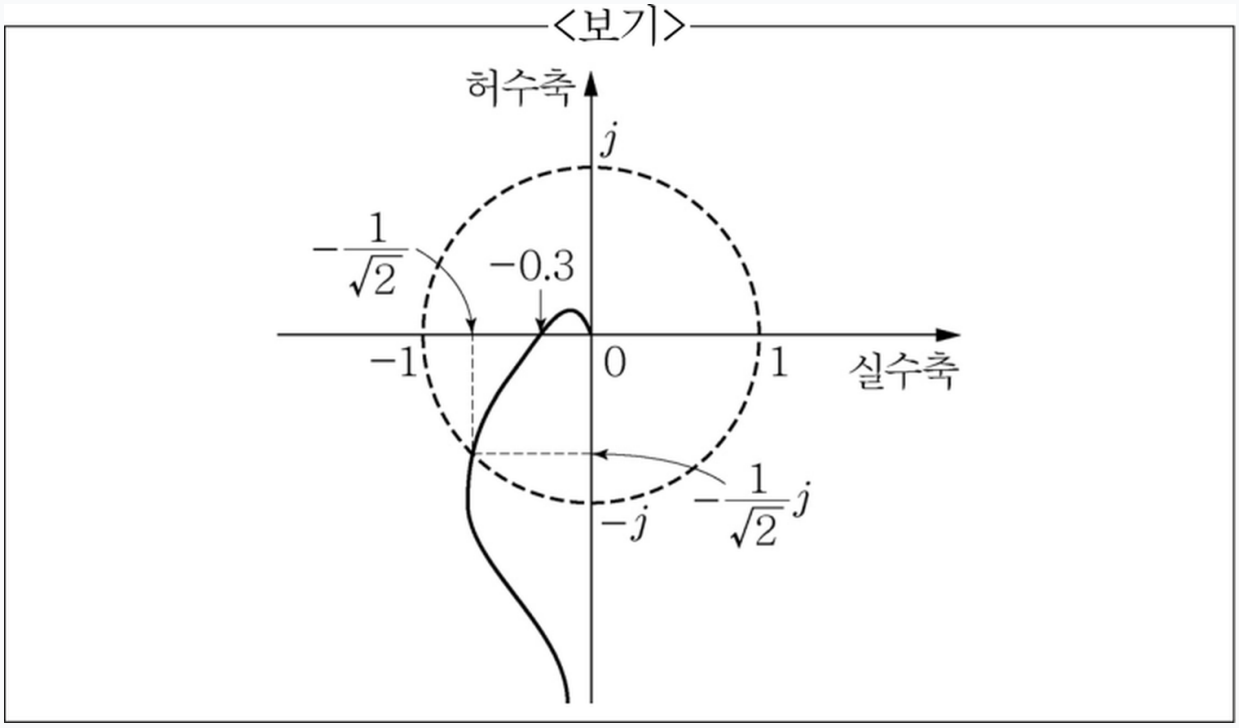
암기 포인트

전달함수는 LTI의 입력-출력 비이며, 입력 크기와 무관하고, 내부 구조가 달라도 외부 동특성이 같으면 동일할 수 있다.

NoteBase

문 8. 어떤 시스템의 나이퀴스트(Nyquist) 선도가 <보기>와 같다. 이 시스템의 이득 여유(Gain margin)가 $20\log_{10}\alpha$ dB, 위상 여유(Phase margin)가 ϕ °일 때, $\alpha\phi$의 값은?

<보기>



① 90

② 120

③ 150

④ 180

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 선도에서 위상교차점과 이득교차점을 읽어 이득여유와 위상여유를 구한 뒤, $\alpha\phi$를 계산하는 문제이다.

NoteBase

조건 정리

주어진 값:
- 위상교차점은 음의 실수축 위의 -0.3이다.
- 이득교차점은 단위원 $|G(j\omega)| = 1$과 만나는 점 $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j$이다.

구해야 할 값:
- $20\log_{10}\alpha = GM$
- $PM = \phi$
- $\alpha\phi$

주의할 조건:
- 이득여유는 위상 $-180\,^\circ$에서의 크기의 역수로 구한다.
- 위상여유는 이득교차점의 위상에 $180\,^\circ$를 더해 구한다.

사용할 공식

$GM = 20\log_{10}\left(\frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}\right) = 20\log_{10}\alpha$

$PM = 180\,^\circ + \angle G(j\omega_{gc})$

이 공식을 쓰는 이유는 문제에서 나이퀴스트 선도로부터 이득여유와 위상여유를 직접 읽어 α와 ϕ를 정하게 되어 있기 때문이다.

계산 과정

1. 위상교차점은 음의 실수축의 -0.3이므로 $|G(j\omega_{pc})| = 0.3$이다. 따라서 $\alpha = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$이다.
2. 이득교차점은 $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j$이므로 위상은 $-135\,^\circ$이다. 따라서 위상여유는 $\phi = 180\,^\circ - 135\,^\circ = 45\,^\circ$이다.
3. 따라서 $\alpha\phi = \frac{10}{3} \times 45 = 150$이다.

선지별 해설

① X: 90은 틀린 값이다. 그림의 -0.3을 잘못 읽어 $\alpha = 2$로 오독하면 $2 \times 45 = 90$이 되지만, 실제 이득여유 계수는 $\alpha = \frac{10}{3}$이다. 올바른 값은 150이다.

② X: 120은 틀린 값이다. 이득교차점의 위상을 $-135\,^\circ$가 아니라 더 작게 잘못 읽으면 나올 수 있는 값이지만, 좌표가 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 위상여유는 정확히 $45\,^\circ$이다. 올바른 값은 150이다.

③ O: $\alpha = \frac{10}{3}$, $\phi = 45\,^\circ$이므로 $\alpha\phi = 150$이다. 따라서 3번이 옳다.

④ X: 180은 틀린 값이다. 위상여유를 과대평가하거나 이득여유를 4로 잘못 잡아야 가까워지는 값인데, 그림에서 읽히는 값은 $\alpha = \frac{10}{3}$, $\phi = 45\,^\circ$이다. 올바른 값은 150이다.

오답 포인트

나이퀴스트 선도에서는 $-180\,^\circ$를 지나는 점과 $|G(j\omega)| = 1$인 점을 서로 바꾸어 읽기 쉽다. 이 문제도 -0.3은 이득교차점이 아니라 위상교차점의 실수축 좌표이고, $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j$는 크기 1인 점이라는 구분이 핵심 함정이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

나이퀴스트 여유 문제는 먼저 -180°에서의 점을 찾아 GM을 읽고, 다음으로 단위원과의 교점을 찾아 PM을 읽는 순서로 판단한다. 실수축 교점인지 단위원 교점인지부터 분리하면 계산이 흔들리지 않는다.

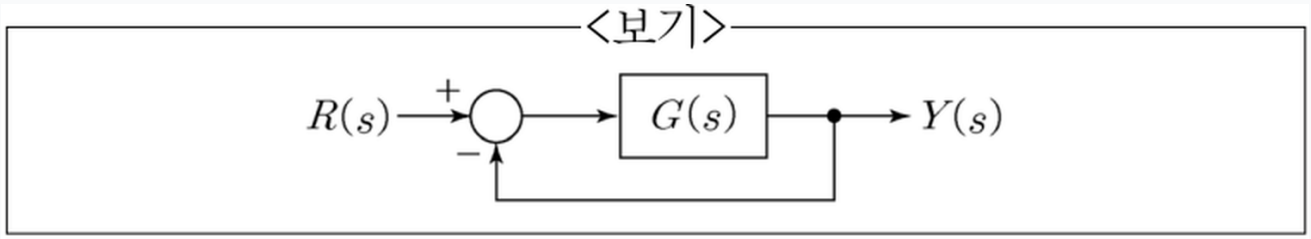
암기 포인트

이득여유는 -180° 점의 역수, 위상여유는 단위원 교점의 각도에서 180°를 보정한 값이다.

NoteBase

문 9. <보기>의 폐루프 제어 시스템에서 $G(s)=\frac{K(s+2)}{s(s-1)}$일 때, 폐루프 시스템이 안정하고 폐루프 근의 감쇠비(Damping ratio)가 $1/\sqrt{2}$이 되는 K의 값은?

<보기>



① $2+2\sqrt{2}$

② $3+2\sqrt{2}$

③ $4+2\sqrt{2}$

④ $5-2\sqrt{2}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 폐루프계의 특성방정식을 표준 2차형으로 맞춘 뒤 감쇠비 ζ 조건으로 K를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s)=\frac{K(s+2)}{s(s-1)}$이다.
단위 음의 피드백이므로 폐루프 특성방정식은 $1+G(s)=0$이다.
폐루프가 안정하려면 특성방정식의 계수가 양수여야 하므로 $K>1$이어야 한다.
구해야 할 값은 감쇠비가 $\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}$가 되는 K이다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2018 · 6월

사용할 공식

폐루프 특성방정식은
$1 + \frac{K(s+2)}{s(s-1)} = 0$
이므로
$s(s-1) + K(s+2) = 0$
$s^2 + (K-1)s + 2K = 0$
가 된다.
표준 2차형 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$와 비교하면
$2\zeta\omega_n = K - 1, \quad \omega_n^2 = 2K$
이다.
이 공식을 쓰는 이유는 폐루프 특성방정식이 2차식이므로 계수 비교만으로 감쇠비를 바로 구할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 특성방정식 $s^2 + (K-1)s + 2K = 0$를 표준형과 비교하면 $\omega_n = \sqrt{2K}$이다.
2. 따라서 감쇠비는
$\zeta = \frac{K-1}{2\sqrt{2K}}$
이다.
3. $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$를 대입하면
$\frac{K-1}{2\sqrt{2K}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$K - 1 = 2\sqrt{K}$
가 된다.
4. $x = \sqrt{K}$로 두면 $x^2 - 2x - 1 = 0$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$이다. 따라서
$K = (1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$
이다.
5. 이 값은 $K > 1$도 만족하므로 안정 조건에도 맞는다.

선지별 해설

1번 X: $2 + 2\sqrt{2}$를 대입하면 $K - 1 = 1 + 2\sqrt{2}$이고 $2\sqrt{K} = 2\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$와 일치하지 않는다. 감쇠비 조건 $K - 1 = 2\sqrt{K}$를 만족하지 못한다. 틀린 표현은 최종 K값이며, 올바르게는 $K = 3 + 2\sqrt{2}$이다.
2번 O: $K = 3 + 2\sqrt{2}$이면 $\sqrt{K} = 1 + \sqrt{2}$이므로 $K - 1 = 2 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{K}$가 된다. 따라서 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$를 만족하고 안정 조건 $K > 1$도 만족한다.
3번 X: $4 + 2\sqrt{2}$를 대입하면 $K - 1 = 3 + 2\sqrt{2}$이고 $2\sqrt{K}$와 같지 않다. $K - 1 = 2\sqrt{K}$ 식에서 제곱 전개를 잘못하면 나올 수 있는 값이다. 올바르게는 $K = 3 + 2\sqrt{2}$이다.
4번 X: $5 - 2\sqrt{2}$를 대입해도 $K - 1 = 2\sqrt{K}$가 성립하지 않는다. $x = \sqrt{K}$에 대한 2차방정식을 푼 뒤 다시 제곱하는 과정을 잘못 처리하면 나올 수 있는 값이다. 올바르게는 $K = 3 + 2\sqrt{2}$이다.

NoteBase

오답 포인트

개루프 전달함수만 보고 바로 감쇠비 공식을 적용하면 틀린다. 먼저 단위 피드백의 폐루프 특성방정식 $s^2 + (K-1)s + 2K = 0$를 만든 뒤 표준 2차형과 비교해야 한다. 또 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$를 넣은 뒤 $K - 1 = 2\sqrt{K}$로 정리하는 과정에서 $\sqrt{2K}$를 잘못 다루기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

피드백 제어계의 감쇠비 문제는 폐루프 특성방정식을 먼저 만든 다음, 이를 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 계수 비교하는 순서로 판단한다. 마지막에는 구한 K가 안정 조건까지 만족하는지 함께 확인한다.

암기 포인트

단위 피드백 2차계는 폐루프 특성방정식을 만든 뒤 $2\zeta\omega_n$, ω_n^2를 계수 비교하면 감쇠비를 바로 읽을 수 있다.

NoteBase

문 10. 한 시스템의 전달함수 $G(s)=\frac{10}{s+2}$이고, 입력 $5\sqrt{2}\sin 2t$에 대한 정상상태 출력이 $A\sin(2t+\phi)$일 때, 출력의 진폭 A와 위상 ϕ°의 합 $A+\phi$의 값은? (단, ϕ°의 범위는 $-90^\circ<\phi^\circ<90^\circ$이다.)

① -10

② -15

③ -20

④ -25

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 주파수응답 $G(j\omega)$를 이용해 정상상태 출력의 진폭 A와 위상 ϕ를 구한 뒤 $A+\phi$를 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s)=\frac{10}{s+2}$이다.
입력은 $5\sqrt{2}\sin 2t$이므로 입력 각주파수는 $\omega=2$이고 입력 진폭은 $5\sqrt{2}$이다.
구해야 할 값은 정상상태 출력의 진폭 A, 위상 ϕ, 그리고 $A+\phi$이다.

사용할 공식

정상상태 사인입력에 대한 출력은 주파수응답으로 구한다.
A= G(jω) × 입력 진폭
$\phi=\angle G(j\omega)$
이 공식을 쓰는 이유는 전달함수에 사인파가 입력되면 정상상태 출력은 같은 주파수의 사인파로 나타나고,
진폭은 크기응답, 위상은 위상응답으로 결정되기 때문이다.

계산 과정

1. $\omega=2$를 대입하면 $G(j2)=\frac{10}{2+j2}$이다.
2. 크기는 $|G(j2)|=\frac{10}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{10}{2\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$이다. 따라서 $A=5\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=25$이다.
3. 위상은 $\phi=\angle G(j2)=-\tan^{-1}\frac{2}{2}=-45^\circ$이다.
4. 따라서 $A+\phi=25+(-45)=-20$이다.

NoteBase

선지 판단

1번 X: 계산 결과는 -20이므로 -10은 틀리다. 틀린 표현은 $A+\phi=-10$으로 본 점이다. 올바르게는 $A=25$, $\phi=-45^\circ$이므로 $A+\phi=-20$이다.
2번 X: 계산 결과는 -20이므로 -15는 틀리다. 틀린 표현은 위상을 정확히 -45°로 반영하지 못한 점이다. 올바르게는 $25-45=-20$이다.
3번 O: $|G(j2)|=\frac{5}{\sqrt{2}}$, $A=25$, $\phi=-45^\circ$이므로 $A+\phi=-20$이 되어 맞다.
4번 X: 계산 결과는 -20이므로 -25는 틀리다. 틀린 표현은 진폭과 위상을 합한 값을 잘못 계산한 점이다. 올바르게는 $25+(-45)=-20$이다.

오답 포인트

진폭 A는 항상 양수 크기로 구하고, 위상 ϕ는 각도로 따로 구해야 한다는 점이 함정이다. 특히 $G(j2)=\frac{10}{2+j2}$에서 크기와 위상을 동시에 처리하지 않으면 오답 선지처럼 중간값을 잘못 더하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

사인 정상상태 응답 문제는 먼저 $s=j\omega$를 대입하고, 다음에 크기 $|G(j\omega)|$로 진폭을 구한 뒤, 마지막에 위상 $\angle G(j\omega)$를 구해 합산하면 된다. 크기와 위상을 섞어서 한 번에 계산하지 않으면 실수를 줄일 수 있다.

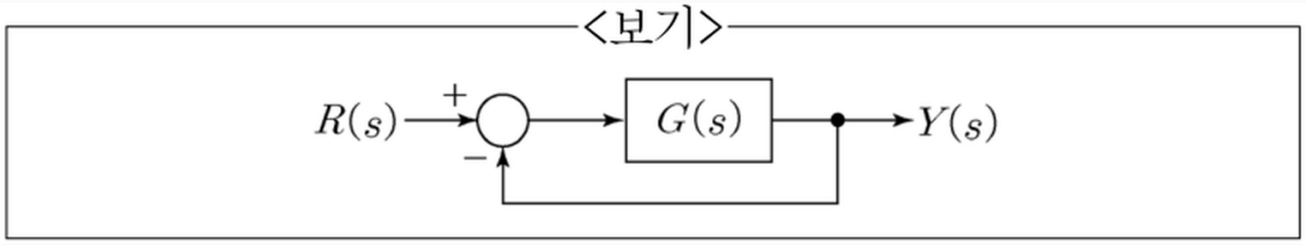
암기 포인트

정상상태 사인응답은 진폭은 $|G(j\omega)|$, 위상은 $\angle G(j\omega)$로 구한다.

NoteBase

문 11. <보기>와 같은 2차 표준형의 개루프 전달함수 $G(s)$가 $G_1(s)=\frac{25}{s(s+3)}$, $G_2(s)=\frac{25}{s(s+6)}$일 때 각 시스템의 단위 계단 응답에서 발생하는 현상에 대한 설명으로 가장 옳지 않은 것은?

<보기>



① 최대 오버슈트는 $G_1(s)$가 $G_2(s)$보다 크다.

② 감쇠비는 $G_2(s)$가 $G_1(s)$보다 크다.

③ 정착시간은 $G_1(s)$가 $G_2(s)$보다 크다.

④ 피크시간은 $G_1(s)$가 $G_2(s)$보다 크다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 폐루프 전달함수를 2차 표준형에 맞춘 뒤 감쇠비, 최대 오버슈트, 정착시간, 피크시간의 변화를 비교하는 문제이다.

조건 정리

주어진 개루프 전달함수는 $G_1(s)=\frac{25}{s(s+3)}$, $G_2(s)=\frac{25}{s(s+6)}$이다.
단위 피드백이므로 폐루프 전달함수는 $T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$이다.
따라서
$T_1(s)=\frac{25}{s^2+3s+25}$, $\quad T_2(s)=\frac{25}{s^2+6s+25}$
가 된다.

사용할 공식

2차 표준형은 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$이다.
이 문제에서는 분모 계수를 표준형과 직접 비교하면 ω_n과 ζ를 바로 구할 수 있다.
비교 결과
$\omega_n=5, \quad 2\zeta_1\omega_n=3\Rightarrow\zeta_1=0.3, \quad 2\zeta_2\omega_n=6\Rightarrow\zeta_2=0.6$
이다.
비교에 쓰는 대표식은 $M_p=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$, $T_s\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}$, $T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$이다.

NoteBase

계산 과정

두 시스템의 자연진동수는 모두 $\omega_n = 5$로 같다.
감쇠비는 $\zeta_1 = 0.3, \zeta_2 = 0.6$이므로 $G_2(s)$가 더 크게 감쇠된다.
최대 오버슈트는 감쇠비가 작을수록 커지므로 $M_{p1} > M_{p2}$이다.
정착시간은 $T_s \approx 4/(\zeta\omega_n)$이므로 $T_{s1} \approx 4/(0.3 \cdot 5) = 2.67$, $T_{s2} \approx 4/(0.6 \cdot 5) = 1.33$이다.
피크시간은 $T_p = \pi/(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$이므로 $T_{p1} \approx \pi/(5\sqrt{0.91}) \approx 0.658$, $T_{p2} = \pi/(5\sqrt{0.64}) = \pi/4 \approx 0.785$이다.
따라서 피크시간은 $G_2(s)$가 더 크다.

선지별 해설

1번: O. 최대 오버슈트는 감쇠비가 작을수록 커진다. $\zeta_1 = 0.3 < \zeta_2 = 0.6$이므로 $G_1(s)$의 최대 오버슈트가 $G_2(s)$보다 크다.
2번: O. 폐루프 2차 표준형 비교 결과 감쇠비는 $G_1(s)$가 0.3, $G_2(s)$가 0.6이므로 $G_2(s)$가 더 크다.
3번: O. 정착시간은 대략 $T_s \approx 4/(\zeta\omega_n)$로 본다. 두 시스템의 ω_n은 같고 $\zeta_1 < \zeta_2$이므로 $G_1(s)$의 정착시간이 더 길다.
4번: X. 피크시간은 $T_p = \pi/(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$이므로 감쇠비가 클수록 커진다. 실제로 $T_{p1} \approx 0.658 < T_{p2} \approx 0.785$이다. 틀린 표현은 '피크시간은 $G_1(s)$가 $G_2(s)$보다 크다'이고, 올바르게는 '피크시간은 $G_2(s)$가 $G_1(s)$보다 크다'이다.

오답 포인트

피크시간을 정착시간과 같은 방향으로 외우면 4번에서 틀리기 쉽다. 이 문제는 두 시스템의 ω_n이 같다는 점이 핵심이므로, 감쇠비가 커지면 오버슈트와 정착시간은 줄지만 피크시간은 오히려 커진다는 점을 구분해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위 피드백 2차계 비교 문제는 먼저 $T(s) = G(s)/(1+G(s))$로 폐루프를 만든다. 그다음 분모를 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 맞춰 ω_n과 ζ를 구한 뒤, M_p, T_s, T_p의 증감 방향을 비교하면 된다.

암기 포인트

같은 ω_n에서 ζ ↑이면 오버슈트 ↓, 정착시간 ↓, 피크시간 ↑이다.

NoteBase

문 12. <보기>의 상태방정식으로 표현되는 시스템의 전달함수로 가장 옳은 것은? (단, $x(t)$는 상태 변수, $u(t)$는 입력, $y(t)$는 출력이다.)

<보기>

x(t)=bmatrix3 & 4 \ 2 & 1bmatrixx(t)+bmatrix1 \ 0bmatrixu(t)

y(t)=bmatrix1 & 1bmatrixx(t)

① $\frac{s-1}{s^2-4s-5}$

② $\frac{s+1}{s^2-4s-5}$

③ $\frac{s-1}{s^2+4s-5}$

④ $\frac{s+1}{s^2+4s-5}$

정답 2번

출제 포인트

상태공간 표현 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), y(t)=Cx(t)$에서 전달함수 $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B$를 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 행렬은 A=bmatrix3 & 4 ; 2 & 1bmatrix, B=bmatrix1 ; 0bmatrix, C=bmatrix1 & 1bmatrix이다.
출력식에 입력의 직접 전달항이 없으므로 $D=0$이다.

사용할 공식

상태공간식의 전달함수는 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$이다.
이 식은 라플라스 변환에서 초기조건을 0으로 두면 $sX(s)=AX(s)+BU(s)$, 즉 $X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$가 되기 때문에 사용된다.

계산 과정

sI-A=bmatrixs-3 & -4 ; -2 & s-1bmatrix이다.
분모는 $\det(sI-A)=(s-3)(s-1)-(-4)(-2)=s^2-4s-5$이다.
(sI-A)^-1=(1)/(s^2-4s-5)bmatrixs-1 & 4 ; 2 & s-3bmatrix이므로 (sI-A)^-1B=(1)/(s^2-4s-5)bmatrixs-1 ; 2bmatrix이다.
따라서 G(s)=bmatrix1 & 1bmatrix(1)/(s^2-4s-5)bmatrixs-1 ; 2bmatrix=(s+1)/(s^2-4s-5)이다.

NoteBase

선지 판단

① X: 분모 s^2-4s-5는 맞지만 분자 $s-1$은 $(sI-A)^{-1}B$의 첫 번째 성분만 본 값이다. 출력행렬 C=bmatrix1 & 1bmatrix을 곱하면 두 성분을 더하므로 틀린 표현 $s-1$은 $s+1$로 고쳐진다.
② O: 계산 결과가 $\frac{s+1}{s^2-4s-5}$와 일치하므로 옳다.
③ X: 분자 $s-1$은 출력행렬로 두 성분을 더하지 않은 값이고, 분모의 s항 부호도 잘못되었다. 틀린 표현 $\frac{s-1}{s^2+4s-5}$은 $\frac{s+1}{s^2-4s-5}$로 고쳐진다.
④ X: 분자 $s+1$은 맞지만 분모가 s^2+4s-5로 되어 있어 s항 부호가 틀리다. 틀린 표현 s^2+4s-5는 s^2-4s-5로 고쳐진다.

오답 포인트

①과 ③은 $(sI-A)^{-1}B$를 구한 뒤 C를 곱하지 않아 분자를 $s-1$로 남기는 함정이다. ③과 ④는 $\det(sI-A)$에서 s항 부호를 반대로 처리하는 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태방정식의 전달함수 문제는 먼저 $sI-A$를 만들고, $\det(sI-A)$로 분모를 구한 뒤, $(sI-A)^{-1}B$에 출력행렬 C를 왼쪽에서 곱해 분자를 구하는 순서로 판단한다.

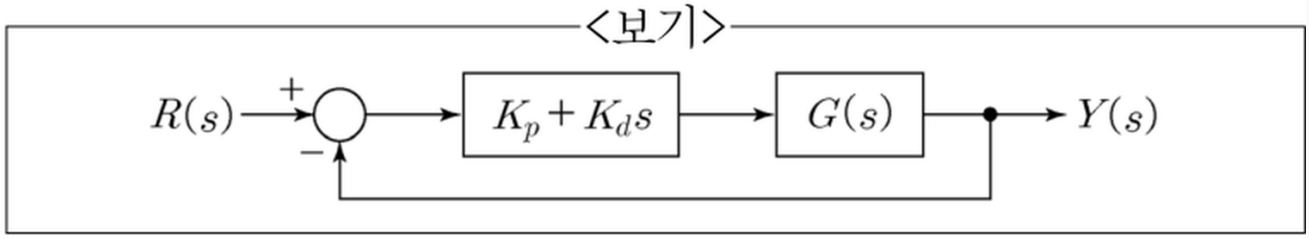
암기 포인트

상태공간 전달함수에서 분모는 $\det(sI-A)$, 분자는 C가 선택하거나 합산한 $(sI-A)^{-1}B$의 성분이다.

NoteBase

문 13. <보기>의 폐루프 제어 시스템에서 $G(s)=\frac{1}{s(s+4)}$일 때, 극점의 값이 $-3\pm j4$이기 위한 제어기의 상수 K_p와 K_d의 합은?

<보기>



① 7

② 13

③ 21

④ 27

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 PD 제어계의 폐루프 특성방정식을 세우고, 원하는 극점에 맞춰 계수를 비교하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $G(s)=\frac{1}{s(s+4)}$, 제어기는 K_p+K_ds, 피드백은 단위 피드백이다.
구해야 할 값은 극점이 $-3\pm j4$가 되도록 하는 K_p와 K_d의 합이다.
주의할 점은 극점을 바로 더하는 것이 아니라 원하는 극점으로부터 특성다항식을 만든 뒤 계수를 맞춰야 한다는 점이다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식은 $1+(K_p+K_ds)G(s)=0$이다.
원하는 극점이 $-3\pm j4$이면 원하는 특성다항식은 $(s+3-j4)(s+3+j4)=s^2+6s+25$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 극점이 주어지면 그 극점을 근으로 갖는 특성다항식을 먼저 만들고, 실제 폐루프 특성다항식과 계수 비교를 해야 K_p, K_d를 정확히 구할 수 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 폐루프 특성방정식은
$1 + \frac{K_p + K_d s}{s(s+4)} = 0$
이다.
2. 분모를 없애면
$s(s+4) + K_p + K_d s = 0$
이다.
3. 정리하면 실제 폐루프 특성다항식은
$s^2 + (4 + K_d)s + K_p = 0$
이다.
4. 원하는 극점 $-3 \pm j4$로부터 원하는 특성다항식은
$s^2 + 6s + 25 = 0$
이다.
5. 계수를 비교하면 $4 + K_d = 6$이므로 $K_d = 2$, $K_p = 25$이다.
6. 따라서 $K_p + K_d = 25 + 2 = 27$이다.

선지 판단

1번 X: 합이 7이면 $K_p + K_d = 7$일 뿐 아니라 실제로는 $4 + K_d = 6$, $K_p = 25$를 동시에 만족하지 못한다. 틀린 값 7 → 올바르게는 $K_p = 25$, $K_d = 2$, 합은 27이다.
2번 X: 13도 계수비교 결과와 맞지 않는다. 틀린 값 13 → 올바르게는 원하는 극점에서 s의 계수는 6, 상수항은 25가 되어 $K_d = 2$, $K_p = 25$, 합은 27이다.
3번 X: 21 역시 $K_p = 25$, $K_d = 2$를 만족하지 못한다. 틀린 값 21 → 올바르게는 합이 27이어야 한다.
4번 O: 계수비교로 $K_d = 2$, $K_p = 25$가 나오므로 $K_p + K_d = 27$이다.

오답 포인트

극점 $-3 \pm j4$를 보고 3과 4를 단순히 더하거나, $K_p + K_d$만 바로 만들려고 하면 틀린다. 이 문제의 핵심은 원하는 극점을 특성다항식 $s^2 + 6s + 25$로 바꾼 뒤 실제 폐루프 특성다항식 $s^2 + (4 + K_d)s + K_p$와 계수를 일대일로 맞추는 데 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

PD 제어기 극점설정 문제는 먼저 폐루프 특성방정식을 전개하고, 다음으로 원하는 극점으로 목표 특성다항식을 만든 뒤, 마지막으로 각 계수를 비교하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

원하는 극점이 $-a \pm jb$이면 목표 특성다항식은 $s^2 + 2as + (a^2 + b^2)$이고, 계수비교로 제어기 상수를 구한다.

NoteBase

문 14. 제어 시스템의 특성방정식이 $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$일 때 시스템의 안정성에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

① 안정하다.

② 불안정하고 우반 s-평면에 두 개의 근이 있다.

③ 임계안정이고 허수축에 공액근이 있다.

④ 불안정하고 허수축에 공액근과 우반 s-평면에 한 개의 근이 있다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 특성방정식에 대한 루스 안정 판별법으로 안정 여부와 우반 s-평면 근의 개수를 판단하는 문제이다.

조건 정리

특성방정식은 $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$이다.
안정하려면 모든 특성근이 좌반 s-평면에 있어야 한다.
루스 배열 첫 열의 부호 변화 수는 우반 s-평면에 있는 근의 개수이다.

사용할 공식

루스 배열은 계수열 1,1,2,2,3으로 만든다.
arrayc|ccc s^4 & 1 & 2 & 3 ; s^3 & 1 & 2 & 0 ; s^2 & ε & 3 & 0 ; s^1 & (2ε-3)/(ε) & 0 & 0 ; s^0 & 3 & 0 & 0 array
s^2행 첫 항은 $(1 \cdot 2 - 1 \cdot 2)/1 = 0$이므로 0 대신 작은 양수 ε을 넣어 판별한다. 이때 행 전체가 0이 아니므로 허수축 공액근을 뜻하는 보조방정식 경우가 아니다.

계산 과정

s^1행 첫 항은 다음과 같다.
$\frac{\varepsilon \cdot 2 - 1 \cdot 3}{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon}$
$\varepsilon \to 0^+$이면 $(2\varepsilon - 3)/\varepsilon < 0$이다.
따라서 첫 열의 부호는 $+, +, +, -, +$가 된다.
부호 변화는 +에서 −로 한 번, −에서 +로 한 번이므로 총 2번이다.
우반 s-평면에 근이 2개 있으므로 시스템은 불안정하다.

NoteBase

선지 판단

① X: 안정하다는 설명은 틀리다. 루스 배열 첫 열에 부호 변화가 2번 있으므로 우반 s-평면 근이 2개이고, 올바르게는 불안정하다고 해야 한다.
② O: 불안정하고 우반 s-평면에 두 개의 근이 있다는 설명은 맞다. 첫 열 부호 변화 수가 2개이므로 우반 s-평면 근의 개수도 2개이다.
③ X: 임계안정이고 허수축에 공액근이 있다는 설명은 틀리다. s^2행 첫 항만 0일 뿐 행 전체가 0인 경우가 아니므로 허수축 공액근으로 판정하지 않는다. 올바르게는 우반 s-평면 근 2개를 가지는 불안정 시스템이다.
④ X: 허수축에 공액근과 우반 s-평면에 한 개의 근이 있다는 설명은 틀리다. 루스 배열의 부호 변화는 2번이고, 허수축 공액근을 나타내는 행 전체 0도 없다. 올바르게는 허수축 근 없이 우반 s-평면에 두 개의 근이 있는 불안정 시스템이다.

오답 포인트

s^2행 첫 항이 0이 되는 상황을 곧바로 허수축 공액근으로 착각하는 것이 함정이다. 루스 배열에서 허수축 공액근을 의심하는 대표적 경우는 행 전체가 0이 되는 경우이고, 이 문제처럼 첫 항만 0이면 ε으로 대체해 첫 열 부호 변화를 계속 계산한다.

다시 나오면 이렇게 판단

특성방정식 안정 문제는 루스 배열을 만들고 첫 열만 따로 본다. 첫 열에 0이 하나만 생기면 작은 양수 ε으로 처리하고, 행 전체가 0일 때만 보조방정식과 허수축 공액근 가능성을 따진다. 마지막에는 첫 열의 부호 변화 수를 우반 s-평면 근의 개수로 판단한다.

암기 포인트

루스 첫 열의 부호 변화 수는 우반 s-평면 근의 개수이다. 한 항만 0이면 ε, 한 행 전체가 0이면 허수축 공액근 가능성으로 구분한다.

NoteBase

문 15. 제어 시스템의 특성방정식이 $s^2 + (K+4)s + 2K + 3 = 0$일 때, $K > 0$에서 근궤적에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보기>
ㄱ. 근궤적은 $s = -1, -3$에서 출발한다.
ㄴ. 근궤적은 실수축에만 존재한다.
ㄷ. 근궤적에 이탈점이 존재한다.

① ㄴ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 특성방정식을 근궤적 표준형으로 바꾸어 개루프 극점과 영점을 찾고, 판별식으로 실근 여부를 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $s^2 + (K+4)s + 2K + 3 = 0$이다.
이를 정리하면 $(s^2 + 4s + 3) + K(s+2) = 0$이므로 $1 + K\frac{s+2}{s^2+4s+3} = 0$ 꼴로 볼 수 있다.
따라서 개루프 극점은 $s = -1, -3$이고 개루프 영점은 $s = -2$이다.

사용할 공식

근궤적의 출발점은 개루프 극점이고, 종착점은 개루프 영점 또는 무한대이다.
또한 이차방정식의 근이 모두 실수인지 여부는 판별식 $D = b^2 - 4ac$로 판단한다.
이 공식을 쓰는 이유는 ㄱ은 근궤적의 출발점, ㄴ은 실수축 존재 여부, ㄷ은 이탈점 존재 여부를 각각 묻고 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. $K=0$에서 특성방정식은 $s^2+4s+3=0$이고, $(s+1)(s+3)=0$이므로 근궤적은 $s=-1,\ -3$에서 출발한다.
2. 일반형의 판별식은 $D=(K+4)^2-4(2K+3)=K^2+4$이다. $K>0$이면 항상 $D>0$이므로 두 근은 항상 서로 다른 실근이다.
3. 따라서 근궤적은 복소평면으로 나가지 않고 실수축 위에만 존재한다.
4. 이탈점은 두 근이 한 점에서 만나 갈라질 때 생기는데, 이 경우에는 $D=0$이 되는 K가 없으므로 이탈점이 존재하지 않는다.

선지별 해설

1번 X: 1번은 ㄴ만 옳다고 본 선택지이다. 그러나 ㄱ도 옳다. 근궤적은 $K=0$의 개루프 극점 $s=-1,\ -3$에서 출발하므로 1번은 틀리다. 틀린 표현은 "ㄴ만 옳다"이고, 올바르게는 "ㄱ, ㄴ이 옳다"이다.
2번 X: ㄷ은 이탈점이 존재한다는 말인데, 판별식이 $K^2+4>0$로 항상 양수이므로 두 근이 합쳐지는 중근이 생기지 않는다. 따라서 이탈점은 없다. 틀린 표현은 "이탈점이 존재한다"이고, 올바르게는 "이탈점은 존재하지 않는다"이다.
3번 O: ㄱ은 근궤적이 $s=-1,\ -3$에서 출발한다는 내용이고, 이는 개루프 극점으로 바로 확인된다. ㄴ은 근궤적이 실수축에만 존재한다는 내용인데, $D=K^2+4>0$이므로 항상 실근만 존재하므로 옳다. 따라서 3번이 정답이다.
4번 X: 4번은 ㄱ은 맞지만 ㄷ을 함께 포함하므로 틀리다. ㄷ의 "이탈점이 존재한다"는 부분이 잘못되었고, 올바르게는 "ㄱ, ㄴ이 옳다"이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 근궤적이라는 말만 보고 실수축에서 반드시 이탈점이 생긴다고 생각하는 점이다. 이탈점은 실수축 위에 극점이 여러 개 있다고 자동으로 생기는 것이 아니라, 중근이 되는 지점이 실제로 있어야 한다. 또 ㄱ은 특성방정식을 $1+KG(s)=0$ 꼴로 바꾸지 않으면 출발점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적 문제는 먼저 $1+KG(s)=0$ 꼴로 바꾸어 극점과 영점을 찾고, 다음으로 판별식이나 중근 조건으로 실근만 존재하는지 확인하면 된다. 판별식이 항상 양수이면 복소근 구간도 없고 이탈점도 없다고 판단할 수 있다.

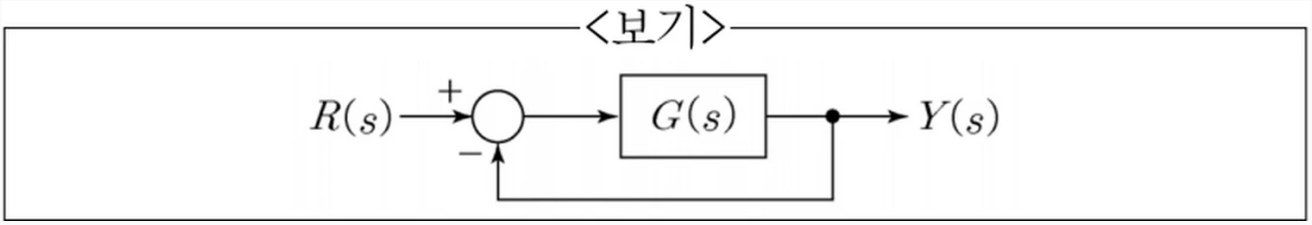
암기 포인트

근궤적은 극점에서 출발하고 영점 또는 무한대로 끝난다. 이차식에서 $D>0$이면 두 근은 항상 실근이므로 실수축 이탈이 없다.

NoteBase

문 16. <보기>의 폐루프 제어 시스템에서 $G(s)=\frac{3}{s^2+4s+K}$일 때, 단위 계단 입력에 대한 정상상태 오차(Steady-state error)가 0.1이 되기 위한 K값은?

<보기>



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 폐루프에서 위치오차상수 K_p를 이용해 단위 계단 입력의 정상상태 오차를 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s)=\frac{3}{s^2+4s+K}$이다.
피드백은 단위 음의 되먹임이다.
구해야 할 값은 단위 계단 입력에 대한 정상상태 오차가 0.1이 되도록 하는 K이다.

사용할 공식

단위 피드백계에서 단위 계단 입력의 정상상태 오차는 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$이다.
여기서 $K_p=\lim_{s\to 0}G(s)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이 계가 적분기를 포함하지 않는 0형 시스템이므로 계단 입력의 정상상태 오차가 위치오차상수로 결정되기 때문이다.

계산 과정

1. 위치오차상수는 $K_p=\lim_{s\to 0}\frac{3}{s^2+4s+K}=\frac{3}{K}$이다.
2. 따라서 정상상태 오차는 $e_{ss}=\frac{1}{1+3/K}=\frac{K}{K+3}$이다.
3. 조건 $e_{ss}=0.1$을 대입하면 $\frac{K}{K+3}=0.1$이다.
4. 정리하면 $10K=K+3, 9K=3$이므로 $K=\frac{1}{3}$이다.

NoteBase

선지 판단

1번 X: $K=\frac{1}{2}$이면 $e_{ss}=\frac{1/2}{1/2+3}=\frac{1}{7}\approx 0.143$이므로 0.1이 아니다. 틀린 값은 $\frac{1}{2}$이고, 올바르게는 $K=\frac{1}{3}$이다.
2번 O: $K=\frac{1}{3}$이면 $e_{ss}=\frac{1/3}{1/3+3}=\frac{1}{10}=0.1$이 된다. 계산 결과와 정확히 일치하므로 정답이다.
3번 X: $K=\frac{1}{4}$이면 $e_{ss}=\frac{1/4}{1/4+3}=\frac{1}{13}\approx 0.0769$이므로 0.1보다 작다. 틀린 값은 $\frac{1}{4}$이고, 올바르게는 $K=\frac{1}{3}$이다.
4번 X: $K=\frac{1}{5}$이면 $e_{ss}=\frac{1/5}{1/5+3}=\frac{1}{16}=0.0625$이므로 0.1이 아니다. 틀린 값은 $\frac{1}{5}$이고, 올바르게는 $K=\frac{1}{3}$이다.

오답 포인트

정상상태 오차 공식을 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$가 아니라 $\frac{K_p}{1+K_p}$로 뒤집어 쓰거나, $K_p=\frac{3}{K}$를 $\frac{K}{3}$로 잘못 잡으면 오답이 나온다. 분모의 K가 원점 이득 계산에서 그대로 남는다는 점이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

폐루프 정상상태 오차 문제는 먼저 입력 종류를 확인하고, 다음에 시스템 형과 오차상수 K_p, K_v, K_a 중 무엇을 써야 하는지 정한 뒤, 마지막으로 $\lim_{s\to 0}G(s)$를 계산해 수치를 대입하면 된다.

암기 포인트

단위 피드백 0형 시스템의 계단 입력 오차는 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$, 위치오차상수는 $K_p=\lim_{s\to 0}G(s)$이다.

NoteBase

문 17. <보기>와 같은 주파수응답을 가지는 안정한 시스템에 입력 $u(t)=\sqrt{2}\cos(10t)$를 인가하였더니, 시스템의 정상상태 출력 $y_{ss}(t)=A\cos(\omega t+\phi^\circ)$이었다. 이때 $A+\omega+\phi^\circ$는?

<보기>

ω	$G(j\omega)$
2	1
5	$0.8-j0.4$
10	$0.5-j0.5$
20	$0.1-j0.3$

① -31

② -32

③ -33

④ -34

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 주파수응답 $G(j\omega)$의 크기와 위상으로 정상상태 출력의 진폭 A, 각주파수 ω, 위상 ϕ를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 입력은 $u(t)=\sqrt{2}\cos(10t)$이다.
입력의 각주파수는 $10rad/s$이고 진폭은 $\sqrt{2}$이다.
표에서 $\omega=10$일 때 $G(j10)=0.5-j0.5$이다.
안정한 시스템의 정상상태 사인파 출력은 입력과 같은 주파수를 가진다.

사용할 공식

입력이 $u(t)=U\cos(\omega t)$이면 정상상태 출력은 $y_{ss}(t)=U|G(j\omega)|\cos(\omega t+\angle G(j\omega))$이다.
이 문제는 특정 주파수 $\omega=10$에서의 주파수응답이 주어졌으므로 크기 $|G(j10)|$로 진폭을, 위상 $\angle G(j10)$으로 위상차를 바로 구할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

1. 입력 각주파수는 10이므로 표에서 $G(j10) = 0.5 - j0.5$를 사용한다.
2. 크기는 $|G(j10)| = \sqrt{0.5^2 + (-0.5)^2} = \sqrt{0.5} = 1/\sqrt{2}$이다.
3. 위상은 $\angle G(j10) = \tan^{-1}(-0.5/0.5) = -45^\circ$이다.
4. 따라서 $A = \sqrt{2} \times 1/\sqrt{2} = 1$, 출력의 각주파수는 입력과 같은 $\omega = 10$, 위상은 $\phi = -45^\circ$이다.
5. 그러므로 $A + \omega + \phi = 1 + 10 - 45 = -34$이다.

선지별 해설

1번 X: 계산 결과는 $A = 1, \omega = 10, \phi = -45^\circ$이므로 합이 -34이다. 합을 -31로 본 부분이 틀렸고, 올바르게는 -34이다.
2번 X: $G(j10)$의 크기와 위상을 적용하면 $1 + 10 - 45 = -34$가 된다. 합을 -32로 본 부분이 틀렸고, 올바르게는 -34이다.
3번 X: 출력 주파수는 입력과 같은 10이고 위상은 -45°이므로 합은 -33이 아니라 -34이다. 틀린 표현은 최종 합이고, 올바르게는 -34이다.
4번 O: $|G(j10)| = 1/\sqrt{2}$, $\angle G(j10) = -45^\circ$이므로 $A = 1, \omega = 10, \phi = -45^\circ$이다. 따라서 $A + \omega + \phi = -34$가 되어 옳다.

오답 포인트

진폭만 보고 끝내거나, 출력의 각주파수도 전달함수 때문에 바뀐다고 착각하면 틀리기 쉽다. 이 문제의 함정은 출력의 주파수는 그대로 10이고, 복소수 $0.5 - j0.5$의 위상은 -45°라는 점을 동시에 반영해야 한다는 데 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

사인파 입력의 주파수응답 문제는 먼저 입력의 각주파수에서 $G(j\omega)$를 찾고, 다음에 크기로 출력 진폭을 구하며, 마지막에 위상각으로 ϕ를 정한다. 출력 주파수는 안정한 LTI 시스템이면 입력 주파수와 같다고 판단한다.

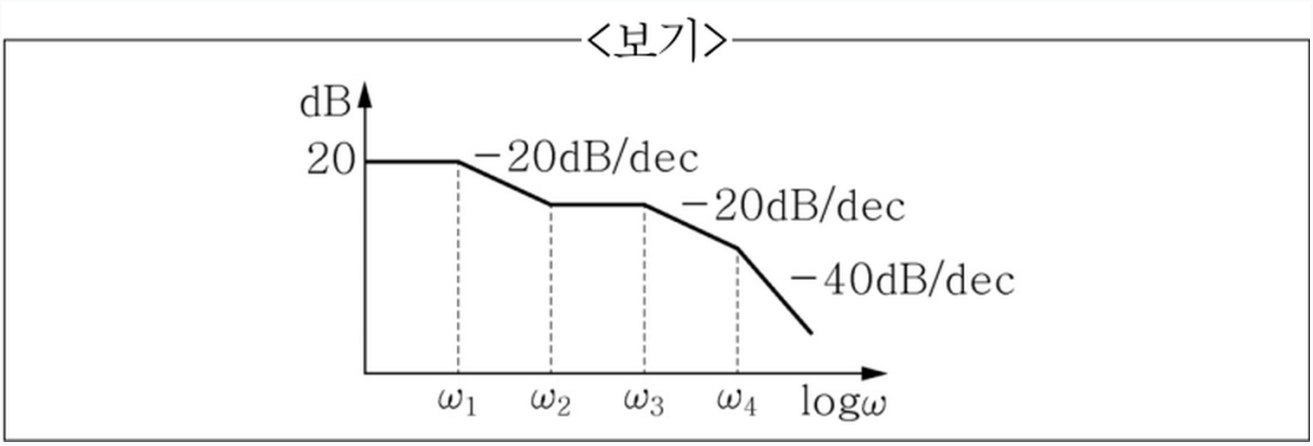
암기 포인트

주파수응답에서 크기는 진폭을 바꾸고, 위상은 각도만 바꾸며, 출력 주파수는 입력 주파수와 같다.

NoteBase

문 18. 보드(Bode) 선도의 크기 특성이 <보기>와 같은 전달함수는?

<보기>



① $\frac{10}{(s+\omega_1)(s+\omega_3)(s+\omega_4)}$
② $\frac{20}{(s+\omega_1)(s+\omega_3)(s+\omega_4)^2}$
③ $\frac{10(s/\omega_2+1)}{(s/\omega_1+1)(s/\omega_3+1)(s/\omega_4+1)}$
④ $\frac{20}{(s/\omega_1+1)(s/\omega_3+1)(s/\omega_4+1)}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 보드선도의 기울기 변화와 저주파 이득을 읽어 극점, 영점, 이득 K를 복원할 수 있는지를 묻는다.

선지별 해설

1번: X. 분모에 $(s+\omega_1)(s+\omega_3)(s+\omega_4)$만 있으면 ω_2에서 기울기를 되돌릴 영점이 없으므로 ω_1 이후 기울기가 계속 내려간다. 그림은 ω_2에서 기울기가 −20dB/dec에서 0으로 올라가므로 1차 영점이 필요하다. 틀린 표현은 분자에 ω_2 영점이 없다는 점이며, 올바르게는 분자에 (s/ω_2+1)가 포함되어야 한다.
2번: X. 이 식은 ω_2 영점이 없고 ω_4에 2차 극점이 있어 도식과 맞지 않는다. 따라서 ω_2와 ω_3 사이의 평탄부를 만들 수 없고, ω_4 이후 기울기도 −40dB/dec보다 더 가파르게 된다. 틀린 표현은 분모의 $(s+\omega_4)^2$와 분자에 영점이 없다는 점이며, 올바르게는 ω_4는 1차 극점이고 ω_2에는 1차 영점이 있어야 한다.
3번: O. 저주파에서 분모 항들은 거의 1이므로 이득은 10이고, 이는 20 dB와 일치한다. 또 ω_1에서 1차 극점으로 기울기가 −20dB/dec 감소하고, ω_2에서 1차 영점으로 20만큼 회복되어 평탄해지며, ω_3와 ω_4에서 다시 각각 1차 극점이 추가되어 최종 기울기가 −40dB/dec가 된다.
4번: X. 이 식은 1번과 마찬가지로 ω_2 영점이 없어 중간 평탄부를 만들지 못한다. 또한 저주파 이득이 20이므로 크기 특성은 약 26 dB에서 시작해야 하는데, 그림은 20 dB에서 시작한다. 틀린 표현은 분자 상수 20과 ω_2 영점의 부재이며, 올바르게는 분자 상수는 10이고 (s/ω_2+1)가 추가되어야 한다.

NoteBase

오답 포인트

기울기 변화량만 보지 않고 단순히 극점 개수만 세면 ω_2에서의 +20 변화가 빠져 1번이나 4번으로 흐르기 쉽다. 또한 20 dB를 상수 20으로 착각하면 저주파 이득을 잘못 읽게 되는데, 20 dB는 $|K| = 10$에 해당한다.

다시 나오면 이렇게 판단

저주파 평탄부에서 먼저 $|K|$를 읽고, 각 절점에서 기울기가 얼마나 변하는지를 순서대로 본다. 기울기 변화가 -20이면 1차 극점 1개, +20이면 1차 영점 1개, -40이면 극점이 두 개 누적되었거나 2차 극점이 추가된 것으로 판단한다.

암기 포인트

보드 크기선도는 20 dB면 이득 10, 기울기 -20은 극점 1개, +20은 영점 1개로 대응된다.

NoteBase

문 19. <보기>에서 선형(Linear) 시스템에 해당하는 식의 개수는? (단, x는 입력, y는 출력, t는 시간 변수이다.)

ㄱ. $y(t) = x(t-2) + x(t+1)$
ㄴ. $y(t) = x(t) + 2$
ㄷ. $y(t) = x(\sin t)$
ㄹ. $y(t) = 2tx(t)$

① 1개
② 2개
③ 3개
④ 4개

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 시스템의 선형성 판단 기준인 가법성과 동차성을 식별할 수 있는지를 묻는다.

핵심 개념

선형 시스템은 입력의 선형결합에 대해 출력도 같은 선형결합으로 나타나는 시스템이다.
$T[ax_1 + bx_2] = aT[x_1] + bT[x_2]$를 만족해야 하며, 특히 영입력 $x(t) = 0$일 때 출력도 0이어야 한다.
ㄱ $y(t) = x(t-2) + x(t+1)$는 지연과 선행된 입력의 합이므로 선형이다.
ㄴ $y(t) = x(t) + 2$는 상수 2가 더해져 영입력에서 출력이 0이 아니므로 비선형이다.
ㄷ $y(t) = x(\sin t)$는 시간축이 바뀌더라도 입력값을 그대로 취하는 연산이므로 선형이다.
ㄹ $y(t) = 2tx(t)$는 시간에 따라 계수가 달라질 뿐 입력에 대한 곱셈이므로 선형이다.

선지별 해설

1번: X. 선형인 식이 1개라는 판단은 ㄱ, ㄷ, ㄹ을 놓친 것이다. 올바르게는 선형인 식은 3개이다.
2번: X. 선형인 식이 2개라면 ㄱ, ㄷ, ㄹ 중 하나를 비선형으로 잘못 본 것이다. 올바르게는 ㄴ만 비선형이고 나머지 3개는 선형이다.
3번: O. ㄱ, ㄷ, ㄹ이 선형이고 ㄴ만 비선형이므로 선형 시스템에 해당하는 식은 3개이다.
4번: X. 4개 모두 선형이라면 ㄴ $y(t) = x(t) + 2$도 선형이어야 하는데, 상수항 때문에 영입력에서 0이 나오지 않는다. 올바르게는 ㄴ은 비선형이다.

NoteBase

오답 포인트

ㄷ과 ㄹ을 비선형으로 오해하기 쉽다. $x(\sin t)$는 시간불변은 아니지만 선형성은 유지되고, $2tx(t)$도 시간가변일 뿐 입력에 대한 선형성은 유지된다. 반대로 ㄴ은 단순해 보여도 상수항 2 때문에 선형성이 깨진다.

다시 나오면 이렇게 판단

선형성 문제는 먼저 상수항이 따로 더해졌는지 확인하고, 없으면 입력이 이동되거나 시간함수와 곱해져도 입력에 대한 가법성·동차성이 유지되는지를 본다. 시간가변 여부와 선형 여부는 분리해서 판단한다.

암기 포인트

상수항이 붙으면 비선형, 입력의 이동과 시간함수 배는 선형일 수 있다.

NoteBase

문 20. <보기>의 상태방정식에서 시스템의 가제어성과 가관측성에 대한 설명으로 가장 옳은 것은?

<보기>

$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$

A = bmatrix 0 & 1 \ -1 & -3 bmatrix, B = bmatrix 1 \ 2 bmatrix, C = bmatrix 1 & 1 bmatrix

① 가제어하고 가관측하다.

② 가제어하고 가관측하지 않다.

③ 가제어하지 않고 가관측하다.

④ 가제어하지 않고 가관측하지 않다.

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 상태공간 모델에서 가제어성 행렬과 가관측성 행렬의 랭크를 이용해 두 성질을 판정하는 문제이다.

조건 정리

상태방정식은 $\dot{x} = Ax + Bu$, 출력방정식은 $y = Cx$이다.
A=bmatrix0&1; -1&-3bmatrix, B=bmatrix1; 2bmatrix, C=bmatrix1&1bmatrix이다.
상태 차수는 2이므로 각 판정 행렬의 랭크가 2인지 확인한다.

사용할 공식

2차 시스템의 가제어성 행렬은 $\mathcal{C} = [B, AB]$이고, 가관측성 행렬은 O=bmatrixCbmatrix이다.
이 공식을 쓰는 이유는 입력 u가 상태 전체에 영향을 줄 수 있는지와 출력 y로 상태 전체를 구별할 수 있는지를 각각 랭크로 판정하기 때문이다.

계산 과정

가제어성 계산: AB=bmatrix2; -7bmatrix이므로 C=bmatrix1&2; 2&-7bmatrix이다.
$\det \mathcal{C} = 1 \cdot (-7) - 2 \cdot 2 = -11$로 0이 아니므로 $\operatorname{rank} \mathcal{C} = 2$이다.
가관측성 계산: CA=bmatrix-1&-2bmatrix이므로 O=bmatrix1&1; -1&-2bmatrix이다.
$\det \mathcal{O} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = -1$로 0이 아니므로 $\operatorname{rank} \mathcal{O} = 2$이다.
따라서 시스템은 가제어하고 가관측한다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2018 · 6월

선지 판단

1번 O: 가제어성 행렬과 가관측성 행렬이 모두 랭크 2이므로 시스템은 가제어하고 가관측한다.
2번 X: 가제어성은 맞지만 $\det \mathcal{O} = -1$로 0이 아니므로 '가관측하지 않다'가 틀렸다. 올바르게는 '가제어하고 가관측한다'이다.
3번 X: 가관측성은 맞지만 $\det \mathcal{C} = -11$로 0이 아니므로 '가제어하지 않고'가 틀렸다. 올바르게는 '가제어하고 가관측한다'이다.
4번 X: 두 판정 행렬의 랭크가 모두 2이므로 '가제어하지 않고 가관측하지 않다'가 모두 틀렸다. 올바르게는 '가제어하고 가관측한다'이다.

오답 포인트

보기는 가제어성과 가관측성의 네 가지 조합을 모두 제시하므로 두 판정을 모두 끝낸 뒤 선택해야 한다. AB만 계산하고 멈추면 2번과 헷갈리고, CA만 계산하고 멈추면 3번과 헷갈린다.

다시 나오면 이렇게 판단

2차 단일입력 단일출력 상태공간 문제는 $[B, AB]$와 bmatrixCbmatrix를 만든 뒤 각각의 행렬식이 0인지 확인한다. 두 행렬식이 모두 0이 아니면 가제어·가관측이고, 어느 하나가 0이면 해당 성질의 랭크가 부족하다.

암기 포인트

제어는 B, AB를 열로 붙이고, 관측은 C, CA를 행으로 쌓는다. 랭크가 상태 차수와 같으면 해당 성질이 성립한다.

NoteBase