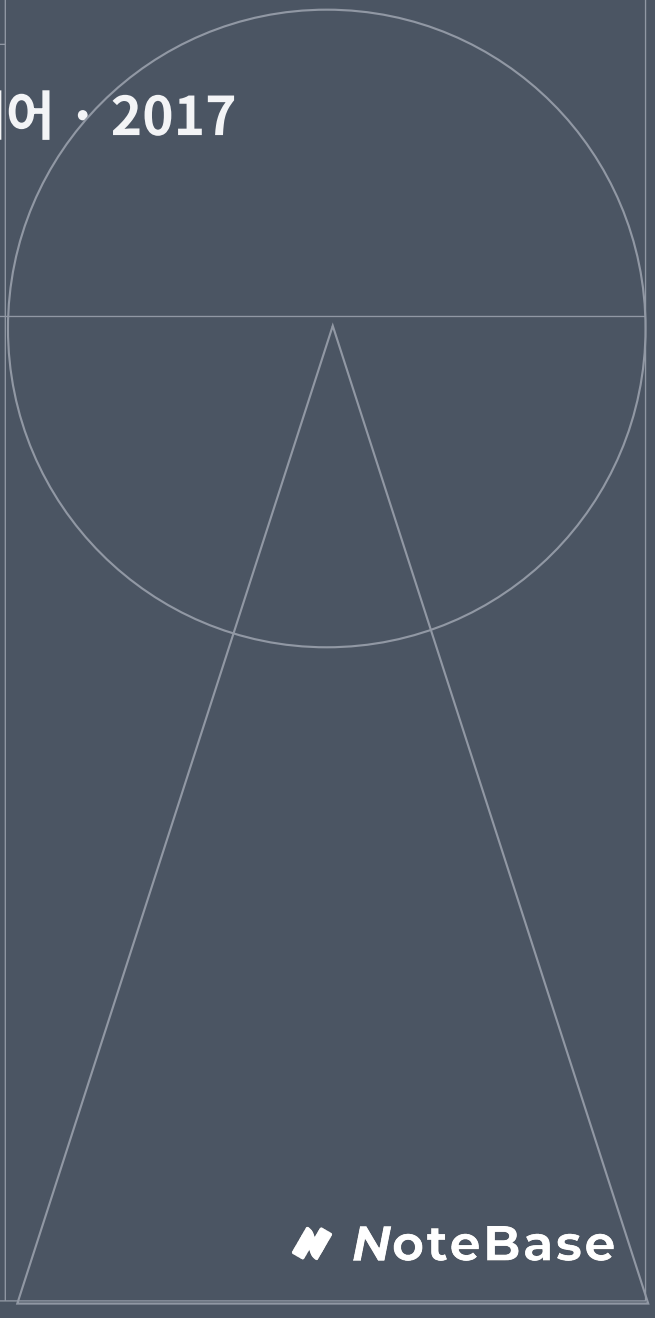
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2017



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2017

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2017

문 1. 다음 함수의 역 라플라스 변환은?

$F(s) = \frac{3s+1}{s^2+9}$

① $3\sin(3t) + 3\cos(3t)$

② $3\sin(3t) + \frac{1}{3}\cos(3t)$

③ $\frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{3}\cos(3t)$

④ $\frac{1}{3}\sin(3t) + 3\cos(3t)$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at)$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin(at)$를 이용해 역 라플라스 변환을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $F(s) = \frac{3s+1}{s^2+9}$이다.
분모 $s^2 + 9$는 $s^2 + 3^2$ 꼴이다.
따라서 $a = 3$인 사인·코사인 기본쌍을 적용하는 문제이다.

사용할 공식

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin(at)$
이 문제는 분모가 $s^2 + 3^2$이므로 $a = 3$인 기본식을 그대로 적용할 수 있다. 다만 분자가 $3s + 1$이므로 코사인 항과 사인 항으로 나누어 계수를 맞춰 주어야 한다.

계산 과정

1. 식을 두 항으로 분리하면 $F(s) = \frac{3s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9}$이다.
2. 첫째 항은 $3\frac{s}{s^2+3^2}$이므로 역변환은 $3\cos(3t)$이다.
3. 둘째 항은 $\frac{1}{3}\frac{3}{s^2+3^2}$로 고쳐 써야 하므로 역변환은 $\frac{1}{3}\sin(3t)$이다.
4. 따라서 $f(t) = 3\cos(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t)$이고, 이는 $\frac{1}{3}\sin(3t) + 3\cos(3t)$와 같은 식이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: $3\cos(3t)$ 항은 맞지만 $3\sin(3t)$ 항이 틀리다. $\frac{1}{s^2+9}$는 $\frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9}$로 보아야 하므로 $\frac{1}{3}\sin(3t)$가 되어야 한다. 틀린 표현은 "$3\sin(3t)$"이고, 올바르게는 "$\frac{1}{3}\sin(3t)$"이다.
② X: 사인과 코사인의 대응을 뒤바꾼 선지이다. $\frac{s}{s^2+a^2}$는 코사인, $\frac{a}{s^2+a^2}$는 사인에 대응하므로 $3s$에서 나온 항은 $3\cos(3t)$가 되어야 한다. 틀린 표현은 "$3\sin(3t)+\frac{1}{3}\cos(3t)$"이고, 올바르게는 "$\frac{1}{3}\sin(3t)+3\cos(3t)$"이다.
③ X: 사인 항 $\frac{1}{3}\sin(3t)$는 맞지만 코사인 항의 계수를 놓쳤다. 분자에 $3s$가 있으므로 $\frac{s}{s^2+9}$의 역변환 $\cos(3t)$에 3이 곱해져야 한다. 틀린 표현은 "$\frac{1}{3}\cos(3t)$"이고, 올바르게는 "$3\cos(3t)$"이다.
④ O: $\frac{3s}{s^2+9}$는 $3\cos(3t)$, $\frac{1}{s^2+9}$는 $\frac{1}{3}\sin(3t)$로 변환되므로 $\frac{1}{3}\sin(3t)+3\cos(3t)$가 맞다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 $\frac{1}{s^2+a^2}$를 바로 $\sin(at)$로 바꾸는 것이다. 실제로는 $\frac{a}{s^2+a^2}$가 $\sin(at)$이므로 분자 계수를 먼저 a에 맞춰야 한다. 또한 $\frac{s}{s^2+a^2}$와 $\frac{a}{s^2+a^2}$의 사인·코사인 대응을 뒤바꾸면 ②처럼 틀리게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

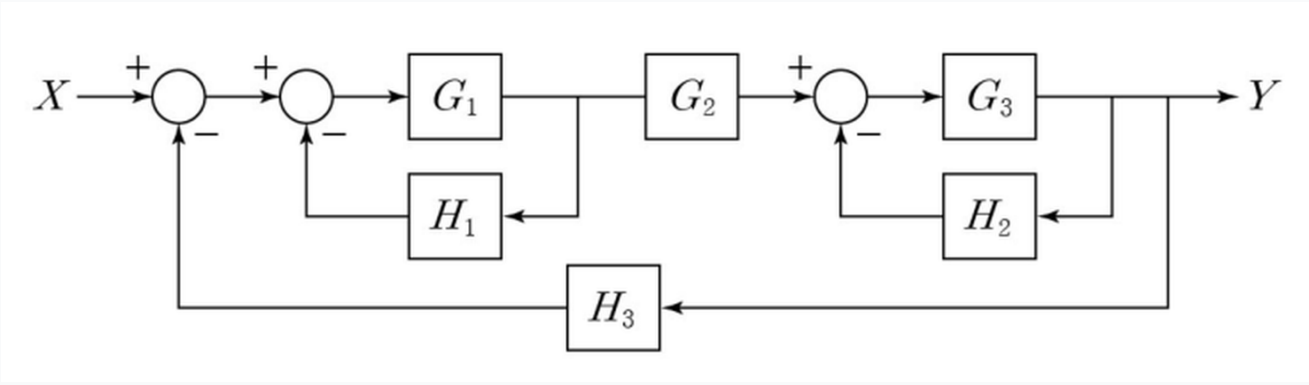
역 라플라스의 사인·코사인 문제는 먼저 분모를 s^2+a^2 꼴로 확인하고, 다음에 분자가 s형인지 상수형인지 나누어 본다. 상수형이면 반드시 a를 맞추기 위해 계수를 조정한 뒤 역변환을 적용하면 된다.

암기 포인트

$\frac{s}{s^2+a^2}$는 코사인, $\frac{a}{s^2+a^2}$는 사인이다. 1이 있으면 a를 맞추기 위해 먼저 $\frac{1}{a}$를 꺼내야 한다.

NoteBase

문 2. 다음 그림과 같은 블록선도의 전달함수 $\frac{Y}{X}$는?



① $\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2G_3H_3}{(1-G_1H_1)(1-G_3H_2)+G_1G_2G_3H_3}$

② $\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2G_3H_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)+G_1G_2G_3H_3}$

③ $\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2G_3}{(1-G_1H_1)(1-G_3H_2)+G_1G_2G_3H_3}$

④ $\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)+G_1G_2G_3H_3}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 블록선도의 국부 음의 되먹임 G_1H_1, G_3H_2과 전체 음의 되먹임 H_3을 순서대로 합성하여 전체 전달함수 $\frac{Y}{X}$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 전진 경로는 $G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3$이다.

국부 되먹임: G_1에는 H_1, G_3에는 H_2가 각각 음의 되먹임으로 걸려 있다.

전체 되먹임: 출력 Y가 H_3를 거쳐 입력 합점으로 음의 되먹임된다.

구해야 할 값: 전체 전달함수 $\frac{Y}{X}$이다.

NoteBase

사용할 공식

음의 되먹임 1개가 걸린 폐루프 전달함수는 $\frac{G}{1+GH}$이다.

따라서 왼쪽 국부 루프는 $\frac{G_1}{1+G_1H_1}$, 오른쪽 국부 루프는 입력 u에서 출력 Y까지 $\frac{G_3}{1+G_3H_2}$가 된다.

이 둘 사이에 G_2가 직렬이므로 전체 전진 등가 전달함수는

$A = \frac{G_1G_2G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)}$

이다.

여기에 다시 H_3의 음의 되먹임이 걸리므로

$\frac{Y}{X} = \frac{A}{1+AH_3}$

를 사용한다.

이 공식을 쓰는 이유는 그림이 국부 폐루프 두 개와 최외곽 폐루프 한 개가 중첩된 구조이기 때문이다.

계산 과정

1. G_1 주위의 음의 되먹임을 먼저 합치면 $\frac{G_1}{1+G_1H_1}$이다.
2. G_3 주위의 음의 되먹임을 합치면 $\frac{G_3}{1+G_3H_2}$이다.
3. 여기에 직렬 블록 G_2를 곱하면 외곽 루프 안쪽의 전진 전달함수는

$A = \frac{G_1G_2G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)}$

이다.

4. 마지막으로 H_3의 음의 되먹임을 적용하면

$\frac{Y}{X} = \frac{A}{1+AH_3} = \frac{\frac{G_1G_2G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)}}{1+\frac{G_1G_2G_3H_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)}} = \frac{G_1G_2G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)+G_1G_2G_3H_3}$

이다.

NoteBase

선지별 해설

① X

- 분자에 H_3가 들어간 점이 틀리다. H_3는 전진 경로가 아니라 전체 되먹임 경로이므로 분자에 곱해지지 않는다.
- 또한 두 국부 루프는 합점에 모두 음의 부호가 있으므로 $(1-G_1H_1)(1-G_3H_2)$가 아니라 $(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)$가 되어야 한다.
- 틀린 표현은 분자 $G_1G_2G_3H_3$, 분모의 $(1-G_1H_1)(1-G_3H_2)$이고, 올바르게는 $\frac{G_1G_2G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)+G_1G_2G_3H_3}$이다.

② X

- 국부 음의 되먹임의 부호를 +로 둔 점은 맞지만, 여전히 H_3를 분자에 넣은 점이 틀리다.
- 전체 음의 되먹임에서는 H_3가 $1+AH_3$ 형태로 최종 분모에 반영된다.
- 틀린 표현은 분자 $G_1G_2G_3H_3$이고, 올바르게는 분자가 $G_1G_2G_3$인 식이다.

③ X

- 분자는 $G_1G_2G_3$로 맞지만, 두 국부 루프를 $(1-G_1H_1)(1-G_3H_2)$로 처리한 점이 틀리다.
- 그림의 두 국부 피드백은 모두 감산점으로 들어가므로 표준 음의 되먹임 폐루프 $1+GH$를 써야 한다.
- 틀린 표현은 분모의 $(1-G_1H_1)(1-G_3H_2)$이고, 올바르게는 $(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)$이다.

④ O

- G_1과 G_3의 국부 음의 되먹임 때문에 각각 $1+G_1H_1$, $1+G_3H_2$가 생긴다.
- 전체 바깥 루프의 H_3는 분자가 아니라 최종 분모에 $+G_1G_2G_3H_3$로 반영된다.
- 따라서 전체 전달함수는 $\frac{G_1G_2G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_2)+G_1G_2G_3H_3}$가 되므로 옳다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 감산점이 보이는데도 국부 피드백 분모를 $1-GH$로 쓰는 경우와, 바깥 피드백 요소 H_3를 전진 경로처럼 분자에 넣는 경우이다. 이 문항은 국부 루프의 부호와 피드백 요소의 위치를 동시에 점검하도록 만든 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

중첩 블록선도는 가장 안쪽 국부 피드백부터 $\frac{G}{1+GH}$로 줄이고, 직렬 블록을 곱한 뒤, 마지막에 가장 바깥 피드백을 $\frac{A}{1+AH}$로 처리하면 된다. 피드백 블록은 전진 분자에 직접 들어가지 않는다는 점을 함께 확인한다.

암기 포인트

감산점 음의 되먹임은 $1+GH$, 바깥 피드백 블록은 최종 분모에 들어간다.

NoteBase

문 3. 개루프 전달함수가 $G(s)H(s)=\frac{K(s-2)(s-3)}{s^3(s+1)(s+2)(s+4)}$일 때 근궤적에서 점근선의 실수축과의 교차점은?

① $-\frac{1}{3}$

② -3

③ $-\frac{1}{4}$

④ -4

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 근궤적 점근선의 실수축 교차점인 중심점을 공식을 이용해 구하는 문제이다.

조건 정리

- 개루프 전달함수는 $G(s)H(s)=\frac{K(s-2)(s-3)}{s^3(s+1)(s+2)(s+4)}$이다.
- 극은 $0, 0, 0, -1, -2, -4$로 총 6개이다.
- 영점은 2,3으로 총 2개이다.
- 구해야 할 값은 점근선의 실수축과의 교차점이다.

사용할 공식

점근선의 실수축 교차점은

_a=Σ 극-Σ 영점n-m

이다.

이 문제는 극의 개수 $n=6$, 영점의 개수 $m=2$이므로 무한대로 가는 가지가 $n-m=4$개인 근궤적 점근선 문제에 해당하므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 극의 합은 $0+0+0-1-2-4=-7$이다.
2. 영점의 합은 $2+3=5$이다.
3. 따라서 점근선의 중심점은

$\sigma_a=\frac{-7-5}{6-2}=\frac{-12}{4}=-3$

이다.

NoteBase

선지별 해설

① X
- $-\frac{1}{3}$은 계산 결과와 다르므로 틀리다.
- 틀린 표현은 교차점을 $-\frac{1}{3}$으로 본 부분이다. 올바르게는 극의 합과 영점의 합의 차를 $n-m=4$로 나누어 -3이 된다.

② O
- 점근선의 실수축 교차점은 -3이므로 옳다.
- 극의 합 -7, 영점의 합 5, 점근선 수 4를 적용하면 바로 -3이 나온다.

③ X
- $-\frac{1}{4}$는 계산 결과와 다르므로 틀리다.
- 틀린 표현은 교차점을 $-\frac{1}{4}$로 본 부분이다. 올바르게는 분자를 -1처럼 잘못 계산한 값이 아니라 -12로 계산해야 하므로 결과는 -3이다.

④ X
- -4는 계산 결과와 다르므로 틀리다.
- 틀린 표현은 교차점을 -4로 본 부분이다. 올바르게는 가장 왼쪽 극의 위치를 답으로 고르는 것이 아니라 중심점 공식을 적용해 -3을 구해야 한다.

오답 포인트

중심점은 극 중 하나의 위치가 아니라 Σ 극-Σ 영점n-m으로 구하는 평균 위치이다. 특히 우반평면 영점 2,3도 부호를 포함해 합에 넣어야 하며, 극 개수 n가 아니라 점근선 수 $n-m$로 나누어야 한다는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

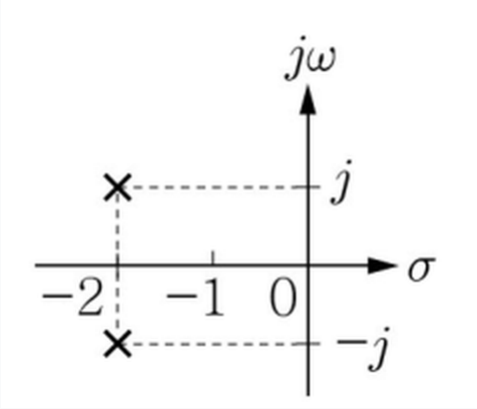
근궤적 점근선 문제는 먼저 극과 영점의 개수를 세어 $n-m$를 구하고, 그다음 극의 합과 영점의 합을 부호까지 포함해 정리한 뒤 중심점 공식을 적용해 판단한다.

암기 포인트

점근선 중심점은 (극의 합-영점의 합)/(극의 개수-영점의 개수)이다.

NoteBase

문 4. 그림과 같이 2차 제어계의 극점이 주어질 때 이 계의 고유주파수와 감쇠율은?



① 고유주파수: $\sqrt{2}$, 감쇠율: $\frac{1}{\sqrt{2}}$
② 고유주파수: $\sqrt{2}$, 감쇠율: $\frac{2}{\sqrt{2}}$
③ 고유주파수: $\sqrt{5}$, 감쇠율: $\frac{1}{\sqrt{5}}$
④ 고유주파수: $\sqrt{5}$, 감쇠율: $\frac{2}{\sqrt{5}}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 극점 $s=-2\pm j$에서 2차 표준형의 고유주파수 ω_n와 감쇠율 ζ를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 극점은 $s=-2\pm j$이다.
구해야 할 값: 고유주파수 ω_n, 감쇠율 ζ이다.
주의할 조건: 2차 제어계의 극점은 $s=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 꼴이므로, 실수부의 절댓값이 $\zeta\omega_n$, 원점에서 극점까지의 거리가 ω_n이다.

사용할 공식

사용 공식은 $\omega_n=\sqrt{\sigma^2+\omega_d^2}$, $\zeta=\frac{\sigma}{\omega_n}$이다. 여기서 극점 $s=-\sigma\pm j\omega_d$이다.
이 공식을 쓰는 이유: 그림의 극점이 직교좌표 $(-2,\ \pm 1)$로 주어졌으므로, 실수부와 허수부를 바로 σ, ω_d에 대응시켜 ω_n과 ζ를 계산할 수 있다.

계산 과정

1. 극점 $s=-2\pm j$이므로 $\sigma=2$, $\omega_d=1$이다.
2. 고유주파수는 원점에서 극점까지의 거리이므로 $\omega_n=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$이다.
3. 감쇠율은 $\zeta=\frac{\sigma}{\omega_n}=\frac{2}{\sqrt{5}}$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 고유주파수를 $\sqrt{2}$로 본 점이 틀리다. $\sqrt{2}$는 좌표가 $(-1,\ \pm 1)$일 때의 거리이고, 실제 극점은 $(-2,\ \pm 1)$이므로 $\omega_n = \sqrt{5}$이다. 감쇠율도 $\frac{1}{\sqrt{2}}$가 아니라 $\frac{2}{\sqrt{5}}$이다. 틀린 표현은 "고유주파수 $\sqrt{2}$, 감쇠율 $\frac{1}{\sqrt{2}}$"이고, 올바르게는 "고유주파수 $\sqrt{5}$, 감쇠율 $\frac{2}{\sqrt{5}}$"이다.
② X: 고유주파수 $\sqrt{2}$가 먼저 틀리고, 감쇠율 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$도 틀리다. 복소켤레 극점이 존재하는 2차 부족감쇠계에서 감쇠율은 $0 < \zeta < 1$이어야 하므로 $\sqrt{2}$는 성립하지 않는다. 틀린 표현은 "고유주파수 $\sqrt{2}$, 감쇠율 $\frac{2}{\sqrt{2}}$"이고, 올바르게는 "고유주파수 $\sqrt{5}$, 감쇠율 $\frac{2}{\sqrt{5}}$"이다.
③ X: 고유주파수 $\sqrt{5}$는 맞지만 감쇠율이 틀리다. $\frac{1}{\sqrt{5}}$는 허수부 1을 분자로 잘못 넣은 값이고, 감쇠율 분자는 실수부의 절댓값 2가 들어가야 한다. 틀린 표현은 "감쇠율 $\frac{1}{\sqrt{5}}$"이고, 올바르게는 "감쇠율 $\frac{2}{\sqrt{5}}$"이다.
④ O: 극점이 $(-2,\ \pm 1)$이므로 $\omega_n = \sqrt{5}$, $\zeta = \frac{2}{\sqrt{5}}$가 맞다. 계산 결과와 정확히 일치하므로 옳다.

오답 포인트

원점에서 극점까지의 거리 ω_n와 실수부의 절댓값 σ를 분리하지 않으면 ①처럼 $\sqrt{2}$를 고르기 쉽다. 또 감쇠율을 $\frac{\omega_d}{\omega_n}$로 착각하면 ③처럼 $\frac{1}{\sqrt{5}}$가 나온다. ②는 감쇠율이 1보다 커지는데도 복소극이라는 점을 점검하지 않은 경우의 오답이다.

다시 나오면 이렇게 판단

극점이 보이면 먼저 좌표를 $s = -\sigma \pm j\omega_d$로 읽고, 다음에 원점까지 거리로 ω_n을 구한 뒤 마지막에 $\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n}$를 계산하면 된다.

암기 포인트

2차 극점도에서는 원점까지 거리 $= \omega_n$, 실수부 절댓값 나누기 거리 $= \zeta$이다.

NoteBase

문 5. 미분방정식 $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = r(t)$로 표시되는 시스템의 고유값은? (단, 상태변수는 $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ 이다.)

① -2, -3

② -1, -2

③ 1, 2

④ 2, 3

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 미분방정식을 상태방정식 또는 특성방정식으로 바꾸어 시스템의 고유값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = r(t)$이다.
상태변수는 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$이다.
구해야 할 값은 시스템 행렬의 고유값이다.

사용할 공식

상태방정식에서 시스템 행렬 A의 고유값은 $\det(\lambda I - A) = 0$의 근으로 구한다.
이 문제는 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$로 두면 선형 상태방정식으로 바로 바뀌므로 이 공식을 적용할 수 있다.

계산 과정

$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + r(t)$이므로
A=bmatrix0&1\\-6&-5bmatrix
이다.
따라서 특성방정식은
(λ I-A)=bmatrixλ&-1\\6&λ+5bmatrix=λ^2+5λ+6=0
이고,
$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$
이므로 고유값은 $-2, -3$이다.

NoteBase

선지 판단

1번 O: 계산 결과 고유값은 -2, -3이므로 맞다.
2번 X: -1, -2는 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$의 근이어서 주어진 특성방정식 $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$과 다르다. 틀린 표현은 고유값이 -1, -2라는 부분이고, 올바르게는 -2, -3이다.
3번 X: 1, 2는 부호를 반대로 본 값이다. 감쇠항과 복원항이 모두 양수이므로 특성방정식의 근은 음수가 되어야 한다. 틀린 표현은 고유값이 1, 2라는 부분이고, 올바르게는 -2, -3이다.
4번 X: 2, 3도 부호를 반대로 본 값이다. $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$이 아니라 $(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$이 되어야 한다. 틀린 표현은 고유값이 2, 3이라는 부분이고, 올바르게는 -2, -3이다.

오답 포인트

상태방정식으로 바꾸지 않고 근만 외워서 찍으면 부호를 반대로 적기 쉽다. 특히 $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$을 인수분해하면서 $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$처럼 처리하는 실수가 자주 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

2차 선형계의 고유값 문제는 먼저 동차식의 특성방정식을 만든 뒤, 계수의 부호를 확인하고 근을 구하는 순서로 판단한다. 상태변수가 주어지면 시스템 행렬 A를 바로 만들고 $\det(\lambda I - A) = 0$로 확인해도 같은 답이 나온다.

암기 포인트

$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$에서 특성방정식은 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$이고, 근이 곧 고유값이다.

NoteBase

문 6. $0 < \xi < 1$인 경우, 다음의 표준형 2차 시스템에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

① 최대 초과값은 $e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})}$이다.

② 정착 시간 T_s는 $\xi\omega_n$이다.

③ 최대 초과가 발생하는 시간은 $\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$이다.

④ 단위 계단 입력을 가할 경우, 감쇠 진동 현상을 보인다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 부족감쇠 표준 2차 시스템의 단위계단 응답에서 최대 초과값, 최대 초과시간, 정착시간, 감쇠진동 여부를 구별하는 문제이다.

조건 정리

전달함수는 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$이고, 조건은 $0 < \xi < 1$이다.
이 조건에서는 극점이 켤레복소수로 나타나는 부족감쇠 2차 시스템이므로 단위계단 응답은 진동하면서 감쇠한다.

사용할 공식

최대 초과값은 $M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$이다.
감쇠 고유주파수는 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$이고, 최대 초과가 발생하는 시간은 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$이다.
정착시간은 허용오차 기준에 따라 근사식이 달라지며, 보통 2% 기준에서는 $T_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n}$, 5% 기준에서는 $T_s \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$로 본다.

선지 판단

① O: 최대 초과값은 $e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$이므로 옳은 설명이다.
② X: 정착 시간 T_s는 $\xi\omega_n$ 자체가 아니다. $\xi\omega_n$은 감쇠율로서 시간의 역수 차원이고, 올바르게는 정착시간이 $\xi\omega_n$에 반비례하여 $T_s \approx 4/(\xi\omega_n)$ 또는 $3/(\xi\omega_n)$처럼 표현된다.
③ O: 최대 초과는 감쇠 고유주파수 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$의 반주기 지점에서 발생하므로 $t_p = \pi/(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})$가 맞다.
④ O: $0 < \xi < 1$이면 부족감쇠 상태이므로 단위계단 응답은 최종값을 중심으로 진동하면서 점차 감쇠한다. 따라서 감쇠 진동 현상을 보인다는 설명은 옳다.

NoteBase

오답 포인트

출제자가 노린 함정은 ②의 정착시간을 감쇠율 $\xi\omega_n$과 혼동하게 하는 점이다. 정착시간은 시간이므로 $\xi\omega_n$처럼 시간의 역수 차원을 가진 값이 될 수 없고, 그 역수에 비례하는 근사식으로 판단한다.

다시 나오면 이렇게 판단

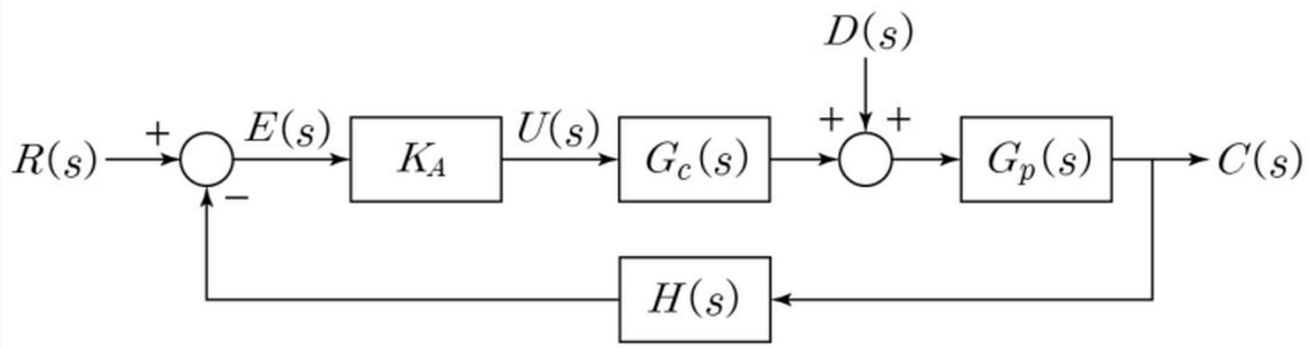
표준 2차 시스템에서 $0 < \xi < 1$이면 먼저 부족감쇠 응답임을 잡고, M_p, t_p, T_s를 각각 초과량, 피크 시간, 정착시간 공식으로 분리하여 판단한다.

암기 포인트

부족감쇠 2차계는 $M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$, $t_p = \pi/(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})$, $T_s \approx 4/(\xi\omega_n)$로 정리된다.

NoteBase

문 7. 다음 폐루프 제어 시스템에서 $K_A = 1000$, $G_c(s) = 1$, $G_p(s) = \frac{1}{s(s+5)}$, $H(s) = 1$이다. 단위계단함수 외란 $D(s)$에 대한 정상상태오차는? (단, $R(s)$는 0으로 가정한다.)



① 0.001

② 0.005

③ 0.05

④ 0.5

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 입력 $R(s) = 0$인 상태에서 단위계단 외란 $D(s)$가 가해질 때의 정상상태오차를 외란-오차 전달관계와 최종값정리로 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $K_A = 1000$, $G_c(s) = 1$, $G_p(s) = \frac{1}{s(s+5)}$, $H(s) = 1$이다.
구해야 할 값은 단위계단 외란에 대한 정상상태오차이다.
주의할 조건은 $R(s) = 0$이므로 $E(s) = R(s) - C(s) = -C(s)$가 된다는 점과, 외란이 플랜트 입력단에 더해진다는 점이다.

사용할 공식

오차는 $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$이고, 여기서는 $H(s) = 1$, $R(s) = 0$이므로 $E(s) = -C(s)$이다.
또한
$C(s) = G_p(s)(K_A G_c(s)E(s) + D(s))$
이다.
이 공식을 쓰는 이유는 문제에서 외란 $D(s)$가 제어기 뒤, 플랜트 앞에서 가산되므로 외란에서 출력으로 가는 폐루프 전달함수를 먼저 만든 뒤 $E(s) = -C(s)$를 적용해야 하기 때문이다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2017

계산 과정

1. $E(s) = -C(s)$, $G_c(s) = 1$을 대입하면
$C(s) = G_p(s)(-1000C(s) + D(s))$
이 된다.
2. 이를 정리하면
$C(s)(1 + 1000G_p(s)) = G_p(s)D(s)$
이므로
$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + 1000G_p(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+5)}}{1 + \frac{1000}{s(s+5)}} = \frac{1}{s(s+5) + 1000}$
이다.
3. 단위계단 외란이므로 $D(s) = \frac{1}{s}$이다. 따라서
$E(s) = -C(s) = -\frac{1}{s(s(s+5) + 1000)}$
이고, 최종값정리로
$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\left(-\frac{1}{s(s+5)+1000}\right) = -\frac{1}{1000}$
이다. 오차의 크기는 0.001이므로 선지값으로는 0.001이 맞다.

선지 판단

1번 O: 정상상태오차의 크기는 $|e_{ss}| = \frac{1}{1000} = 0.001$이다. 부호까지 쓰면 $E(s) = R(s) - C(s)$이므로 음수이지만, 선지에서는 크기 기준으로 0.001이 맞다.
2번 X: 0.005는 $\frac{1}{200}$에 해당하는 값으로, 주어진 $K_A = 1000$과 폐루프 식을 대입한 결과와 맞지 않는다. 틀린 값 0.005 → 올바르게는 0.001이다.
3번 X: 0.05는 $\frac{1}{20}$에 해당하는 값으로, 외란에 대한 폐루프 감쇠 효과를 제대로 반영하지 못한 값이다. 틀린 값 0.05 → 올바르게는 0.001이다.
4번 X: 0.5는 피드백 증폭기 $K_A = 1000$의 큰 이득을 거의 무시한 값이다. 적분요소가 있는 플랜트와 큰 이득 때문에 외란 정상상태오차 크기는 훨씬 작아진다. 틀린 값 0.5 → 올바르게는 0.001이다.

오답 포인트

외란이 기준입력 앞이 아니라 플랜트 입력단에 더해진다는 점을 놓치면 식을 잘못 세우기 쉽다. 또 $R(s) = 0$인데도 일반적인 추종오차 공식만 외우고 적용하면 부호와 전달경로를 함께 틀리기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

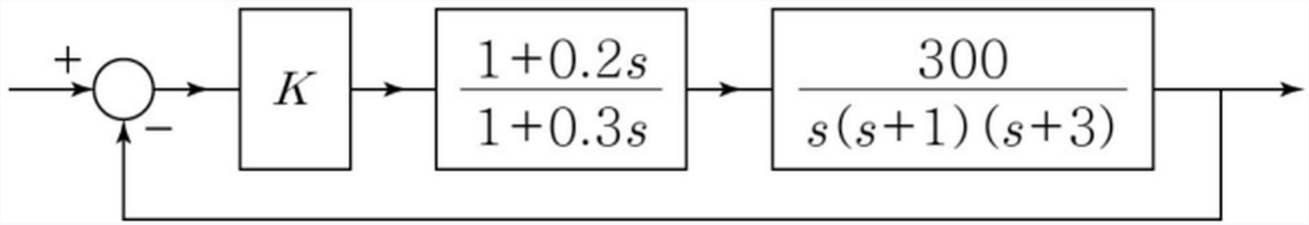
외란응답 문제는 먼저 외란이 어느 위치에서 주입되는지 확인하고, 그 외란에서 출력까지의 폐루프 전달함수를 만든 뒤, 마지막에 $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$와 최종값정리를 적용하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

플랜트 입력단 외란의 정상상태오차는 외란-출력 폐루프를 먼저 만들고, $R = 0$이면 $E = -C$를 붙여서 구한다.

NoteBase

문 8. 그림과 같은 제어계에 단위 램프 입력을 가할 때 정상상태 오차가 0.1이라면 K값은?



① 0.01

② 0.1

③ 1

④ 10

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 제어계에 단위 램프 입력을 가했을 때의 속도오차계수 K_v와 정상상태 오차 관계 $e_{ss} = 1/K_v$를 이용해 K를 구하는 문제이다.

조건 정리

- 입력은 단위 램프 입력이다.
- 계는 단위 피드백 계이다.
- 개루프 전달함수는 $G(s) = K \cdot \frac{1+0.2s}{1+0.3s} \cdot \frac{300}{s(s+1)(s+3)}$이다.
- 정상상태 오차가 0.1로 주어졌다.

사용할 공식

$e_{ss} = \frac{1}{K_v}, \quad K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$

이 공식은 단위 피드백형 1형 계에 단위 램프 입력이 들어올 때의 정상상태 오차를 구하는 공식이기 때문에 사용된다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2017

계산 과정

1. 원점에 극 s가 하나 있으므로 이 계는 1형 계이다.
2. 따라서 단위 램프 입력의 정상상태 오차는 $e_{ss} = 1/K_v$를 따른다.
3. 속도오차계수는 $K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot K \cdot \frac{1+0.2s}{1+0.3s} \cdot \frac{300}{s(s+1)(s+3)}$이다.
4. s를 약분한 뒤 $s \to 0$을 대입하면 $K_v = K \cdot \frac{300}{1 \cdot 3} = 100K$이다.
5. $e_{ss} = 0.1$이므로 $0.1 = 1/(100K)$이다.
6. 따라서 $100K = 10$, $K = 0.1$이다.

선지별 해설

① X

- $K = 0.01$이면 $K_v = 100K = 1$이므로 정상상태 오차는 $e_{ss} = 1$이다.
- 틀린 값 $0.01 \to$ 올바르게는 $K = 0.1$이다.
- 이 값은 $0.1 = 1/K$처럼 100 배수를 빠뜨리면 나오기 쉬운 오답이다.

② O

- $K = 0.1$이면 $K_v = 100 \times 0.1 = 10$이므로 $e_{ss} = 1/10 = 0.1$이 된다.
- 주어진 정상상태 오차와 정확히 일치하므로 옳다.

③ X

- $K = 1$이면 $K_v = 100$이므로 정상상태 오차는 $e_{ss} = 0.01$이다.
- 틀린 값 $1 \to$ 올바르게는 $K = 0.1$이다.
- 이 값은 $e_{ss} = K$ 또는 $K_v = e_{ss}$처럼 오차와 오차계수를 뒤바꾸면 나오기 쉬운 오답이다.

④ X

- $K = 10$이면 $K_v = 1000$이므로 정상상태 오차는 $e_{ss} = 0.001$이다.
- 틀린 값 $10 \to$ 올바르게는 $K = 0.1$이다.
- 이 값은 $0.1 = 1/(10K)$처럼 $(s+1)(s+3)$의 3을 누락해 계산하면 나올 수 있는 오답이다.

오답 포인트

램프 입력에서는 위치오차계수 K_p가 아니라 속도오차계수 K_v를 써야 한다는 점이 핵심 함정이다. 또한 $sG(s)$에서 s를 약분한 뒤 $s \to 0$을 대입해야 하는데, 이때 $(s+1)(s+3)$를 각각 1과 3으로 처리하지 않으면 보기 ④ 같은 큰 오답으로 흐르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

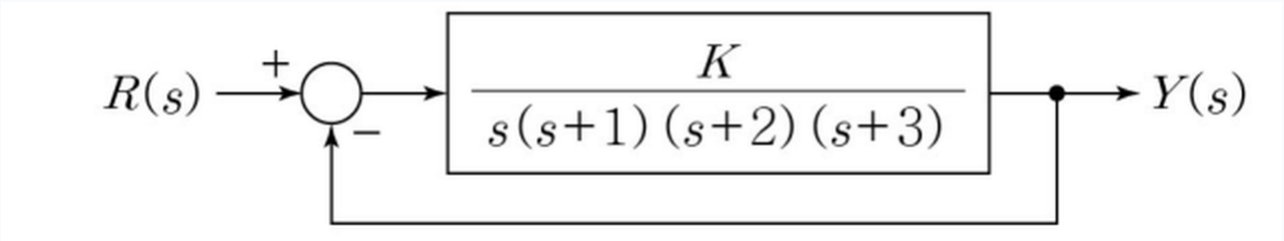
정상상태 오차 문제는 먼저 입력 종류로 K_p, K_v, K_a 중 무엇을 쓸지 정하고, 다음에 $\lim_{s\to 0} sG(s)$ 또는 필요한 오차계수를 구한 뒤, 마지막에 e_{ss}와 역수 관계를 대입해 판단한다.

NoteBase

암기 포인트

단위 램프 입력의 1형 계는 $e_{ss} = 1/K_v$, $K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$이다.

문 9. 다음 시스템의 특성방정식이 안정하기 위한 K의 범위는?



① $0 < K < 100$

② $0 < K < 10$

③ $0 < K$

④ $K < 100$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 단위 음의 되먹임계의 특성방정식에 대해 Routh 배열을 세워 안정조건이 되는 K의 범위를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$이다.
단위 음의 되먹임이므로 특성방정식은 $1 + G(s) = 0$에서 구한다.
구해야 할 값은 모든 근의 실수부가 음수가 되도록 하는 K의 범위이다.

사용할 공식

닫힌루프 특성방정식은
$s(s+1)(s+2)(s+3) + K = 0$
이다.
전개하면
$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = 0$
이다.
이 식의 안정조건은 Routh-Hurwitz 판별법으로 구한다.
이 공식을 쓰는 이유는 4차 특성방정식의 근을 직접 구하지 않고도 계수만으로 안정범위를 판정할 수 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 분모를 전개하면 $s(s+1)(s+2)(s+3) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s$이다.
2. 따라서 특성방정식은 $s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = 0$이다.
3. Routh 배열의 첫 열은
$1,\ 6,\ 10,\ \frac{60-6K}{10},\ K$
가 된다.
4. 안정하려면 첫 열의 값이 모두 양수여야 하므로 $K > 0$, $\frac{60-6K}{10} > 0$을 만족해야 한다.
5. 이를 정리하면 $K > 0$, $60 - 6K > 0$, 즉 $K < 10$이다.
6. 따라서 안정조건은 $0 < K < 10$이다.

선지별 해설

① X: $0 < K < 100$이면 $10 < K < 100$ 구간이 포함되는데, 이 구간에서는 Routh 배열의 첫 열에서 $\frac{60-6K}{10} < 0$가 되어 불안정하다. 틀린 표현은 "100"까지 안정하다고 본 부분이고, 올바르게는 $K < 10$이어야 한다.
② O: Routh 배열의 첫 열이 모두 양수가 되는 범위가 정확히 $0 < K < 10$이므로 옳다.
③ X: $0 < K$만으로는 상한이 없어서 $K = 20$ 같은 값도 포함한다. 이때 $\frac{60-6K}{10} < 0$가 되어 안정조건을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 상한을 빠뜨린 부분이고, 올바르게는 $0 < K < 10$이다.
④ X: $K < 100$에는 음수 K도 포함되는데, 상수항 K가 음수이면 첫 열의 부호조건부터 깨진다. 또 $10 < K < 100$도 포함되어 불안정 구간까지 들어간다. 틀린 표현은 하한과 정확한 상한을 모두 놓친 부분이고, 올바르게는 $0 < K < 10$이다.

오답 포인트

③과 ④처럼 $K > 0$ 조건만 보고 끝내거나, ①처럼 모든 계수가 양수라는 이유만으로 넓은 범위를 고르면 틀리기 쉽다. 이 문제의 함정은 계수의 양수성만으로는 부족하고 Routh 배열의 중간 행 부호까지 확인해야 한다는 점이다.

다시 나오면 이렇게 판단

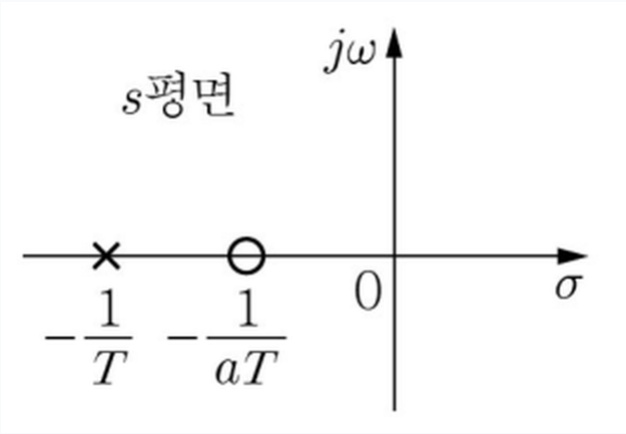
고차 특성방정식의 안정범위를 묻는 문제는 먼저 닫힌루프 특성방정식을 전개한 뒤 Routh 배열 첫 열만 빠르게 정리해 부등식으로 바꾸면 된다. 모든 계수가 양수인지 확인한 다음, 중간 행에서 추가 상한이 생기는지를 반드시 본다.

암기 포인트

안정범위 문제는 특성방정식 전개 후 Routh 첫 열 양수 조건으로 끝난다. 이 문항은
$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K$에서 $0 < K < 10$이다.

NoteBase

문 10. 진상제어기의 영점과 극점이 그림과 같이 주어질 때 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



① 영점 $-\frac{1}{aT}$을 원점을 향해 이동시키면 상승시간과 정착시간이 개선된다.

② 영점 $-\frac{1}{aT}$이 원점에 가깝게 이동할수록 최대오버슈트가 감소하게 된다.

③ 극점 $-\frac{1}{T}$을 영점과 원점에서 멀리 이동시키면 최대오버슈트가 감소한다.

④ T의 값을 너무 작게 하면 상승시간과 정착시간이 증가된다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 진상제어기 $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$, $a > 1$의 영점과 극점이 s평면에서 어디에 놓이느냐에 따라 상승시간, 정착시간, 최대오버슈트가 어떻게 바뀌는지를 묻는 문제이다.

선지별 해설

1번 O: 영점 $-\frac{1}{aT}$을 원점 쪽으로 옮기면 진상작용이 더 이른 주파수대에서 나타나 폐루프 응답이 빨라진다. 그래서 일반적으로 상승시간과 정착시간이 짧아진다.
2번 X: 영점이 원점에 가까워지면 응답 속도는 빨라지지만 영점의 영향이 커져 최대오버슈트는 오히려 증가하기 쉽다. 틀린 표현은 '최대오버슈트가 감소하게 된다'이고, 올바르게는 '최대오버슈트가 증가하기 쉽다'이다.
3번 O: 극점 $-\frac{1}{T}$을 영점보다 더 왼쪽으로 멀리 보내면 그 극점은 빠른 비지배극이 되어 영점이 키우는 오버슈트를 완화한다. 따라서 최대오버슈트는 감소하는 방향으로 바뀐다.
4번 O: T를 너무 작게 하면 영점과 극점이 모두 왼쪽으로 멀어져 보상기가 실제 응답 구간에서 거의 작용하지 못한다. 그러면 진상보상으로 얻던 속도 향상이 약해져 상승시간과 정착시간이 다시 길어진다.

오답 포인트

영점을 원점 쪽으로 옮기면 항상 모든 과도특성이 함께 좋아진다고 묶어서 외우면 2번에서 틀린다. 진상제어기는 속도 향상에는 유리하지만 영점이 너무 원점에 가까우면 최대오버슈트는 커질 수 있다는 점이 함정이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

진상제어기에서는 먼저 영점이 원점에 더 가깝고 극점이 더 왼쪽에 있다는 배치를 확인한다. 그다음 영점의 우측 이동은 응답을 빠르게 하지만 오버슈트를 키우기 쉽고, 극점을 더 왼쪽으로 보내면 그 오버슈트를 억제한다고 판단한다.

암기 포인트

진상제어기는 영점이 속도를 높이고, 극점이 너무 가까우면 오버슈트가 커지며, 극점을 더 왼쪽으로 보내면 그 오버슈트를 줄인다.

NoteBase

문 11. 개루프 전달함수가 $G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$, $K>0$일 때 근궤적에 관한 설명 중 옳지 않은 것은?

① 점근선의 교차점은 -2이다.

② 근궤적의 점근선의 개수는 4이다.

③ 점근선의 각도는 ±45°, ±135°이다.

④ 실수축상의 이탈점은 -0.5, -2이다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 근궤적의 점근선 중심, 점근선 각도, 실수축 근궤적 구간, 이탈점을 공식을 써서 판정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 개루프 전달함수는 $G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$이다.
개루프 극은 $0,\ -1,\ -3,\ -4$이고 영점은 없다.
따라서 점근선 개수는 극 개수 4에서 영점 개수 0을 뺀 값으로 판단한다.

사용할 공식

점근선 개수는 $n-m$, 점근선 교차점은 $\sigma_a=\frac{\sum p-\sum z}{n-m}$, 점근선 각도는 $\theta_k=\frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}$이다.
이탈점은 실수축에서 $K=-s(s+1)(s+3)(s+4)$로 두고 $\frac{dK}{ds}=0$을 풀어 구한다.
이 공식을 쓰는 이유는 보기들이 모두 근궤적의 기본 성질과 이탈점 위치를 묻고 있기 때문이다.

계산 과정

1. 극은 4개, 영점은 0개이므로 점근선 개수는 $4-0=4$이다.
2. 점근선 교차점은 $\sigma_a=\frac{0+(-1)+(-3)+(-4)}{4}=\frac{-8}{4}=-2$이다.
3. 점근선 각도는 $\frac{(2k+1)180^\circ}{4}$이므로 $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$이고, 이를 $\pm45^\circ, \pm135^\circ$로 쓸 수 있다.
4. 실수축 근궤적은 오른쪽에 있는 실수극과 영점의 개수가 홀수인 구간이므로 $(-4,\ -3), (-1, 0)$에만 존재한다.
5. $K=-s(s+1)(s+3)(s+4)$에서 $\frac{dK}{ds}=0$을 풀면 $s=-2,\ -2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$가 나온다. 이 중 $s=-2$는 근궤적이 없는 구간 $(-3,\ -1)$에 있어 이탈점이 아니고, 실제 이탈점은 약 -3.58, 약 -0.42이다.

NoteBase

선지별 해설

① O
- 점근선 교차점은 모든 극의 합을 점근선 개수로 나눈 값이므로 -2가 맞다.
- 이 선지는 근궤적 중심 계산을 정확히 적용한 진술이다.

② O
- 개루프 극이 4개이고 영점이 0개이므로 점근선 개수는 4가 맞다.
- 점근선 개수는 극 개수-영점 개수로 바로 판정한다.

③ O
- 점근선 각도는 $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$이므로 $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$라고 써도 같은 뜻이다.
- 이 선지는 각도 공식을 정확히 적용한 진술이다.

④ X
- -0.5는 실제 이탈점 값과 비슷해 보이지만 정확한 값은 약 -0.42이다.
- -2는 $\frac{dK}{ds} = 0$의 해이기는 하지만 실수축 근궤적이 없는 구간 $(-3, -1)$ 위에 있으므로 이탈점이 아니다.
- 틀린 표현은 "실수축상의 이탈점은 -0.5, -2이다"이고, 올바르게는 "실수축상의 이탈점은 $-2 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ 중 근궤적 구간에 있는 약 -3.58, 약 -0.42이다"이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 $\frac{dK}{ds} = 0$의 해를 그대로 이탈점으로 외워 버리는 데 있다. -2는 미분방정식의 해이지만 실수축 근궤적 구간이 아닌 $(-3, -1)$에 있으므로 버려야 한다. 또 -0.42를 거칠게 읽어 -0.5로 적으면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적 문제는 먼저 실수축 근궤적이 존재하는 구간을 표시한 다음 점근선 개수, 중심, 각도를 계산하고, 마지막에 $\frac{dK}{ds} = 0$의 해 중 그 구간 안에 있는 값만 이탈점으로 채택하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

점근선은 개수=n-m, 중심은 (극의 합-영점의 합)/(n-m), 이탈점은 $\frac{dK}{ds} = 0$의 해 전체가 아니라 실수축 근궤적 구간 안의 해만 인정된다.

NoteBase

문 12. 목표치와 측정치의 차이인 제어 편차가 검출될 때 편차에 변화하는 속도에 비례하여 조작량을 가감함으로써 편차가 커지는 것을 미연에 방지하는 제어동작은?

① on/off 제어 동작
② 미분제어 동작
③ 적분제어 동작
④ 비례제어 동작

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 비례제어, 적분제어, 미분제어, on/off 제어의 기준이 무엇인지 구별하는 문제이다.

핵심 개념

비례제어는 현재 편차의 크기에 비례해 조작량을 바꾸는 동작이다.
적분제어는 편차가 누적된 시간적 합에 비례해 조작량을 바꾸는 동작이다.
미분제어는 편차가 변하는 속도에 비례해 조작량을 바꾸는 동작이다.
on/off 제어는 편차의 존재나 부호에 따라 출력을 두 상태로만 전환하는 동작이다.

선지별 해설

① X: on/off 제어 동작은 조작량이 연속적으로 비례 변하는 방식이 아니라 켜짐과 꺼짐처럼 두 상태로 전환되는 방식이다. 틀린 표현은 편차의 변화속도에 비례하여 조작량을 가감한다는 뜻으로 읽히는 부분이다. 올바르게는 편차의 존재나 설정값 이탈 여부에 따라 출력이 단속적으로 전환되는 동작이다.
② O: 미분제어 동작은 편차의 변화속도에 비례해 조작량을 조정하므로 편차가 급격히 커지려는 경향을 미리 억제하는 데 적합하다. 문제의 "변화하는 속도에 비례"가 미분제어의 핵심 표현이다.
③ X: 적분제어 동작은 편차 자체의 누적값에 비례해 조작량을 변화시키므로 잔류편차를 줄이는 데 유리하다. 틀린 표현은 변화속도에 비례한다는 점이다. 올바르게는 시간에 따라 누적된 편차에 비례하여 조작량을 조정하는 동작이다.
④ X: 비례제어 동작은 현재 편차의 크기에 비례해 조작량을 변화시키는 동작이다. 틀린 표현은 변화속도에 비례한다는 점이다. 올바르게는 현재 편차가 클수록 그 크기에 비례해 조작량이 커지는 동작이다.

오답 포인트

수험생은 문장에 "편차에 비례"라는 표현이 보이면 비례제어를 먼저 떠올리기 쉽다. 그러나 이 문항의 결정어는 "변화하는 속도"이므로 현재 크기인 P가 아니라 변화율인 D를 묻는 문제이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

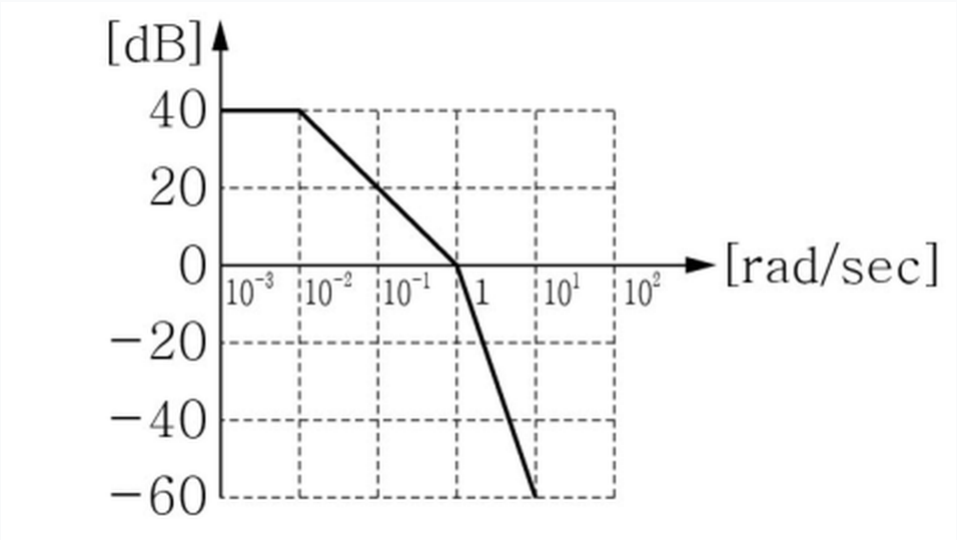
현재 편차의 크기를 묻으면 비례제어, 편차의 누적을 묻으면 적분제어, 편차의 변화율을 묻으면 미분제어, 두 상태 전환이면 on/off 제어로 판단된다.

암기 포인트

P는 현재값, I는 누적값, D는 변화속도이다.

NoteBase

문 13. 다음 그림과 같은 보드 선도에 근접하는 시스템의 전달함수는?



① $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+100)}$

② $G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+100)}$

③ $G(s) = \frac{100}{(s+1)(100s+1)}$

④ $G(s) = \frac{1000}{(s+1)(100s+1)}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 보드 선도의 저주파 이득과 절점 주파수를 읽어 전달함수의 이득 K와 극의 위치를 고르는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 분모의 $(s+100)$은 절점 주파수가 $100rad/s$인 1차 극을 뜻하므로 그림의 첫 절점 $10^{-2}rad/s$와 맞지 않는다. 저주파 이득도 $G(0)=1/(1\cdot 100)=0.01$이어서 $20\log_{10}0.01=-40dB$이므로 시작 레벨 40 dB와도 다르다. 틀린 표현은 분모의 $(s+100)$과 분자 1이다. 올바르게는 $(100s+1)$이 들어가고 이득은 100이어야 한다.
② X: $(s+100)$ 때문에 절점이 $100rad/s$에 생겨 그림의 절점 10^{-2}, $1rad/s$와 맞지 않는다. 또한 $G(0)=10/100=0.1$이므로 $20\log_{10}0.1=-20dB$가 되어 저주파 이득이 부족하다. 틀린 표현은 분모의 $(s+100)$과 분자 10이다. 올바르게는 $(100s+1)$과 분자 100의 조합이어야 한다.
③ O: $(100s+1)$은 절점 주파수 $10^{-2}rad/s$, $(s+1)$은 절점 주파수 $1rad/s$를 만든다. 또 $G(0)=100$이므로 $20\log_{10}100=40dB$가 되어 저주파 평탄부 40 dB와 일치한다. 따라서 $10^{-2}rad/s$ 이후 기울기 $-20dB/dec$, $1rad/s$ 이후 기울기 $-40dB/dec$가 되는 보드 선도에 가장 가깝다.
④ X: 절점 주파수는 $(100s+1)$과 $(s+1)$로 맞지만 분자 1000 때문에 $G(0)=1000$이고 $20\log_{10}1000=60dB$가 된다. 그림의 시작 레벨은 40 dB이므로 이득이 20 dB 더 크다. 틀린 표현은 분자 1000이다. 올바르게는 분자 100이어야 한다.

오답 포인트

많이 틀리는 지점은 $(s+a)$를 보고 절점이 $arad/s$라고만 외우는 경우이다. 실제로는 $s+a=a(1+s/a)$로 바꾸어 절점이 a인지 확인해야 하고, $(100s+1)$처럼 s의 계수가 붙으면 절점이 $10^{-2}rad/s$로 내려간다. 또 저주파 평탄부 40 dB를 보고 분자 이득 K를 바로 확인하지 않으면 ③과 ④를 혼동하기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

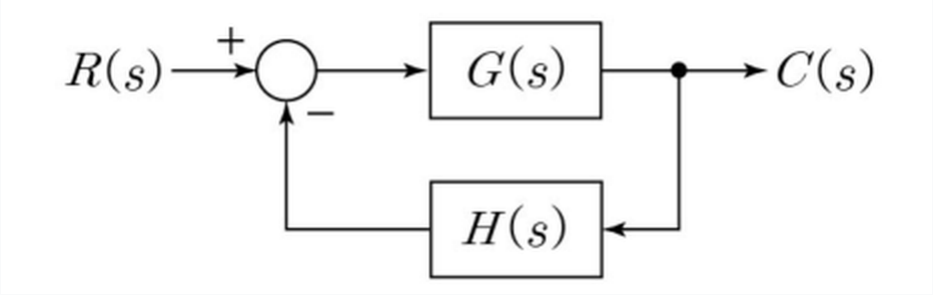
먼저 저주파 평탄부에서 $20\log_{10}K$를 읽어 이득 K를 정한다. 다음으로 기울기가 한 번 꺾이는 주파수마다 1차 극 하나씩 대응시켜 $(1+sT)$ 꼴의 인수를 찾으면 된다. 보드 선도에서 시작 레벨과 절점 두 개가 맞는지를 함께 확인하면 정답을 빠르게 고를 수 있다.

암기 포인트

보드 선도는 시작 dB로 이득을 찾고, 절점 주파수로 $(1+s/\omega_c)$ 또는 $(Ts+1)$ 인수를 찾는 방식으로 읽는다.

NoteBase

문 14. 전달함수 $G(s)=\frac{0.5}{s}$이고, $H(s)=1$인 다음과 같은 시스템에서 대역폭(bandwidth)의 절점(corner) 주파수 ω_c는?



① $\omega_c = 0.5[rad/sec]$

② $\omega_c = 0.707[rad/sec]$

③ $\omega_c = 1[rad/sec]$

④ $\omega_c = 2[rad/sec]$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백이 걸린 시스템의 폐루프 전달함수를 구한 뒤 1차 저역통과계의 절점 주파수 ω_c를 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $G(s)=\frac{0.5}{s}$, $H(s)=1$
구해야 할 값: 대역폭의 절점 주파수 ω_c
주의할 조건: 블록선도는 음의 단위 피드백이므로 먼저 폐루프 전달함수 $T(s)$를 만들어야 한다.

사용할 공식

폐루프 전달함수는 $T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$이다.
1차 저역통과계 $\frac{1}{Ts+1}$의 절점 주파수는 $\omega_c=\frac{1}{T}$이다.
이 공식을 쓰는 이유: 주어진 시스템은 피드백 구조이므로 열린루프 $G(s)$가 아니라 폐루프 전달함수의 주파수응답으로 대역폭을 판단해야 하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 폐루프 전달함수를 구하면
$T(s) = \frac{\frac{0.5}{s}}{1+\frac{0.5}{s}} = \frac{0.5}{s+0.5}$
이다.
2. 이를 표준형으로 쓰면
$T(s) = \frac{1}{2s+1}$
이므로 시정수는 $T = 2$이다.
3. 따라서 절점 주파수는
$\omega_c = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5\text{rad/sec}$
이다.

선지 판단

1번: O
계산 결과 $\omega_c = 0.5\text{rad/sec}$이므로 옳다.
2번: X
0.707은 절점 주파수 값이 아니라 크기가 직류 이득의 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배가 되는 비율과 자주 혼동되는 수치이다. 올바르게는 절점 주파수는 0.5rad/sec이다.
3번: X
1rad/sec는 폐루프 전달함수를 $\frac{1}{s+1}$처럼 잘못 읽을 때 나오는 값이다. 올바르게는 $T(s) = \frac{1}{2s+1}$이므로 절점 주파수는 0.5rad/sec이다.
4번: X
2rad/sec는 시정수 $T = 2$를 그대로 절점 주파수로 착각한 값이다. 올바르게는 1차계에서 $\omega_c = \frac{1}{T}$이므로 0.5rad/sec이다.

오답 포인트

열린루프 전달함수 $G(s)$만 보고 판단하거나, 폐루프 표준형 $\frac{1}{Ts+1}$에서 시정수 T와 절점 주파수 $\omega_c = \frac{1}{T}$를 뒤바꾸면 오답이 된다. 0.707은 절점에서의 크기비이지 절점 주파수 자체가 아니라는 점도 자주 헷갈리는 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

피드백 블록선도가 나오면 먼저 $T(s) = \frac{G}{1+GH}$로 폐루프 전달함수를 만든다. 그다음 1차 표준형 $\frac{1}{Ts+1}$으로 바꾸고 $\omega_c = \frac{1}{T}$를 적용하면 된다.

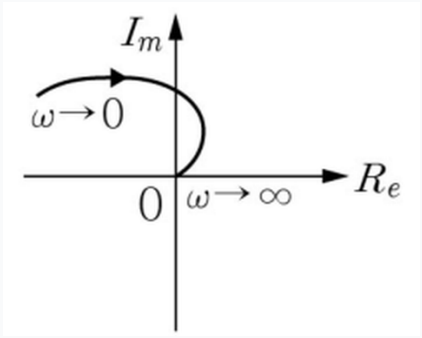
암기 포인트

단위 피드백 1차계는 폐루프를 먼저 만들고, 표준형 $\frac{1}{Ts+1}$에서는 절점 주파수가 $\frac{1}{T}$가 된다.

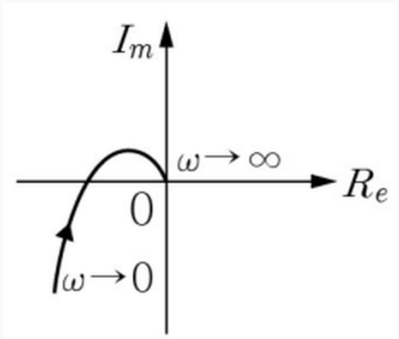
NoteBase

문 15. 전달 함수 $G(s)=\frac{K}{(s+1)(2s+1)(3s+1)}$의 나이퀴스트 선도로 올바르게 나타낸 것은?

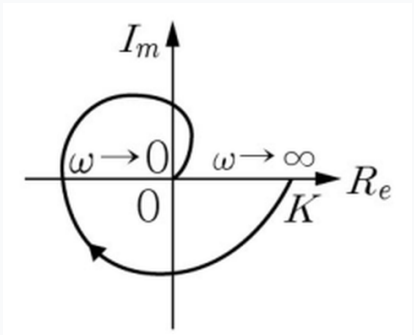
①



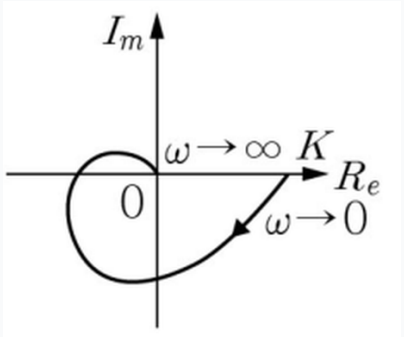
②



③



④



정답 4번

출제 포인트

이 문제는 $G(j\omega)$의 시작점 $G(0)=K$, 실수부·허수부의 부호 변화, $\omega \to \infty$에서의 접근 방향을 이용해 나이퀴스트 선도의 진행 모양을 판별하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

1번: X. 이 그림은 $\omega \to 0$에서 궤적이 상반평면 쪽에 있고 $\omega \to \infty$도 양의 실수축 방향으로 끝나는 모양이다. 실제로는 $0 < \omega < 1$에서 허수부가 음수이므로 처음에는 하반평면으로 내려가야 하고, $\omega \to \infty$에서는 $G(j\omega) \approx \frac{jK}{6\omega^3}$가 되어 원점의 양의 허수축 쪽으로 접근한다.
2번: X. 이 그림은 $\omega \to 0$의 시작점이 양의 실수축의 K가 아니라 음의 허수부 쪽에 놓여 있다. 실제로는 $G(0) = K$이므로 양의 실수축 위 K에서 출발한 뒤 곧바로 4사분면으로 들어간다.
3번: X. 이 그림은 $\omega \to \infty$가 양의 실수축 쪽으로 닫히는 듯한 모양이다. 실제로는 실수부가 $1 - 11\omega^2$에 비례하므로 $\omega = 1/\sqrt{11}$에서 0을 지나 음수로 바뀌고, $\omega = 1$에서 음의 실수축을 지난 뒤 2사분면으로 올라가면서 원점의 양의 허수축 쪽으로 수렴한다.
4번: O. $G(0) = K$이므로 양의 실수축의 K에서 시작한다. 또 분모를 전개하면 $(1 + j\omega)(1 + 2j\omega)(1 + 3j\omega) = (1 - 11\omega^2) + j6\omega(1 - \omega^2)$이므로 $G(j\omega)$의 허수부는 $-6K\omega(1 - \omega^2)$에 비례한다. 따라서 $0 < \omega < 1$에서는 하반평면, $\omega > 1$에서는 상반평면에 놓이고, 고주파에서는 원점의 양의 허수축 쪽으로 접근하므로 4번이 맞다.

오답 포인트

원점으로 수렴한다는 사실만 보고 종점을 양의 실수축 쪽으로 착각하면 틀린다. 이 문항은 시작점 $G(0) = K$, 허수부 부호가 $\omega = 1$에서 바뀐다는 점, 고주파 위상이 $-270\,^\circ$라는 점을 함께 보아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 $G(0)$로 시작점을 찍고, 다음에 실수부와 허수부가 0이 되는 ω를 찾아 사분면 이동을 정리한다. 마지막으로 $\omega \to \infty$에서의 근사식을 써서 원점 접근 방향까지 확인하면 나이퀴스트 도식을 안정적으로 고를 수 있다.

암기 포인트

3개의 1차 지연요소가 직렬이면 저주파에서는 $+K$에서 출발하고, 이 문항의 경우 중간에는 하반평면을 거쳐 고주파에서는 원점의 양의 허수축 쪽으로 끝난다.

NoteBase

문 16. $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(1+2j\omega)(1+3j\omega)}$**의 이득여유가 20[dB]일 때** K**의 값은?**

① 1

② 10

③ 20

④ 100

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 위상교차주파수에서 개루프 전달함수의 크기를 구하고, 이득여유 20 dB 조건으로부터 K를 역산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(1+2j\omega)(1+3j\omega)}$이다.
이득여유는 20 dB이다.
구해야 할 값은 K이다.

사용할 공식

위상교차주파수 ω_{pc}는 $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180\,^\circ$를 만족하는 주파수이다.
이득여유가 20 dB이면
$20\log_{10}\left(\frac{1}{|G(j\omega_{pc})H(j\omega_{pc})|}\right) = 20$
이므로
$|G(j\omega_{pc})H(j\omega_{pc})| = 0.1$
이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이득여유가 위상교차주파수에서의 개루프 크기로 정의되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 위상조건은
$\tan^{-1}(\omega)+\tan^{-1}(2\omega)+\tan^{-1}(3\omega)=180^\circ$
이다.
$\omega=1$이면 $45^\circ+63.4^\circ+71.6^\circ=180^\circ$이므로 $\omega_{pc}=1$이다.
2. 이때 크기는
$|G(j1)H(j1)|=\frac{K}{\sqrt{1+1^2}\sqrt{1+2^2}\sqrt{1+3^2}}=\frac{K}{\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{K}{10}$
이다.
3. 이득여유 20 dB 조건을 대입하면
$20\log_{10}\left(\frac{1}{K/10}\right)=20$
$20\log_{10}\left(\frac{10}{K}\right)=20$
$\frac{10}{K}=10$
이므로 $K=1$이다.

선지별 해설

① O
계산 결과 $K=1$이므로 옳다.

② X
$K=10$이면 $|G(j1)H(j1)|=1$이 되어 이득여유는 0 dB이다. 틀린 표현은 값이 10이라는 점이며, 올바르게는 $K=1$이다.

③ X
$K=20$이면 $|G(j1)H(j1)|=2$가 되어 이득여유는 $20\log_{10}(1/2)\approx -6$ dB이다. 틀린 표현은 값이 20이라는 점이며, 올바르게는 $K=1$이다.

④ X
$K=100$이면 $|G(j1)H(j1)|=10$이 되어 이득여유는 $20\log_{10}(1/10)=-20$ dB이다. 틀린 표현은 값이 100이라는 점이며, 올바르게는 $K=1$이다.

오답 포인트

이득여유 20 dB를 $|G(j\omega)H(j\omega)|=20$처럼 직접 대입하면 오답이 된다. 먼저 위상교차주파수를 찾고, 그 주파수에서의 크기가 이득여유와 역수 관계라는 점을 적용해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

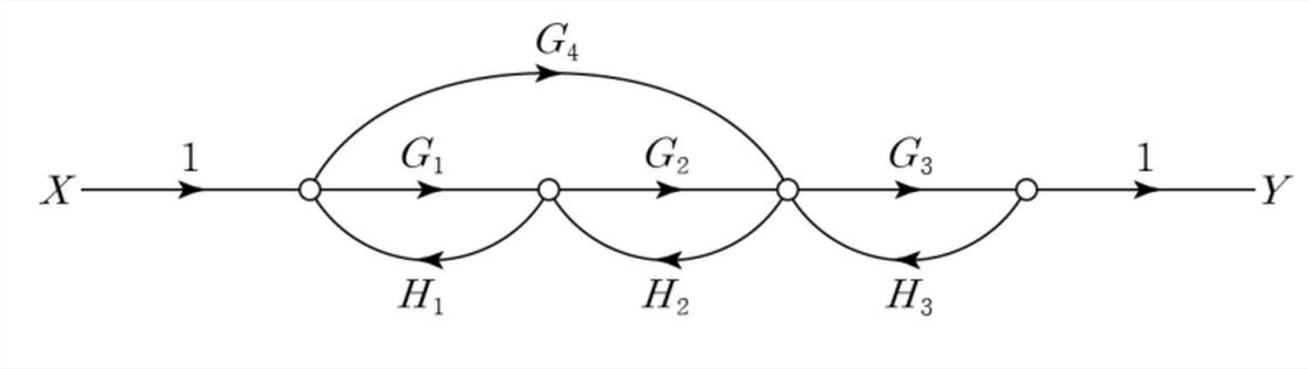
이득여유 문제는 위상교차주파수 계산, 그 주파수에서의 크기 계산, dB 조건을 선형 크기로 환산하는 순서로 판단하면 된다.

암기 포인트

이득여유 20 dB는 위상교차주파수에서 $|GH| = 0.1$이라는 뜻이며, 먼저 $\angle GH = -180^\circ$를 찾는다.

NoteBase

문 17. 다음 신호흐름선도의 전달함수 $\frac{Y}{X}$는?



① $\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2 + G_3}{1 + G_1H_1 + G_2H_2 + G_3H_1H_2}$

② $\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2G_3 + G_3G_4}{1 - G_1H_1 + G_2H_2 + G_3H_3G_4H_1H_2}$

③ $\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2G_3 + G_3G_4}{1 - G_1H_1 - G_2H_2 - G_3H_3 - G_4H_1H_2 + G_1G_3H_1H_3}$

④ $\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2G_3 + G_3G_4}{1 - G_1H_1 - G_2H_2 - G_3H_3 - G_4H_1H_3 - G_1G_3H_1H_3}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 메이슨의 이득공식으로 전진경로, 개별 루프, 서로 접하지 않는 루프를 구분해 전달함수 Y/X를 계산하는 문제이다.

조건 정리

전진경로는 두 개이다: $P_1 = G_1G_2G_3$, $P_2 = G_4G_3$이다.
개별 루프는 네 개이다: $L_1 = G_1H_1$, $L_2 = G_2H_2$, $L_3 = G_3H_3$, $L_4 = G_4H_1H_2$이다.
서로 접하지 않는 루프쌍은 L_1과 L_3뿐이므로 그 곱은 $G_1G_3H_1H_3$이다.
두 전진경로 모두 모든 루프와 접하므로 $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$이다.

사용할 공식

메이슨의 이득공식은 $\frac{Y}{X} = \frac{\sum P_k\Delta_k}{\Delta}$ 이다.
여기서 $\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_iL_j - \cdots$ 이고, 두 번째 합은 서로 접하지 않는 루프쌍에 대해서만 잡는다.
이 문제는 신호흐름선도에서 전달함수를 직접 묻고 있으므로 전진경로와 루프를 분리해 메이슨 공식을 적용하는 것이 가장 직접적이다.

NoteBase

계산 과정

1. 전진경로의 합은 $P_1 + P_2 = G_1G_2G_3 + G_4G_3$이다.
2. 전체 행렬식은 $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_3$ 이므로
$\Delta = 1 - G_1H_1 - G_2H_2 - G_3H_3 - G_4H_1H_2 + G_1G_3H_1H_3$ 이다.
3. 두 전진경로와 접하지 않는 루프가 없으므로 $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$이다.
4. 따라서 $\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2G_3 + G_3G_4}{1 - G_1H_1 - G_2H_2 - G_3H_3 - G_4H_1H_2 + G_1G_3H_1H_3}$ 이다.

선지 판단

1번 X: 분자를 $G_1G_2 + G_3$로 적어 전진경로 $P_1 = G_1G_2G_3$, $P_2 = G_4G_3$를 반영하지 못한다. 올바르게는 분자가 $G_1G_2G_3 + G_3G_4$이어야 한다. 분모도 $1 + G_1H_1 + G_2H_2 + G_3H_1H_2$가 아니라 $1 - \sum L_i + \sum L_iL_j$ 꼴이어야 한다.

2번 X: 분자는 맞지만 분모가 틀리다. $1 - G_1H_1 + G_2H_2 + G_3H_3G_4H_1H_2$처럼 쓰면 L_2의 부호가 잘못되고, L_3와 L_4를 개별 루프로 빼지 않은 채 곱으로 묶은 오류가 된다. 올바르게는 $-G_2H_2 - G_3H_3 - G_4H_1H_2$가 각각 들어가야 한다.

3번 O: 분자 $G_1G_2G_3 + G_3G_4$는 두 전진경로의 합과 일치하고, 분모
$1 - G_1H_1 - G_2H_2 - G_3H_3 - G_4H_1H_2 + G_1G_3H_1H_3$도 메이슨 공식의 Δ와 정확히 일치한다.

4번 X: 큰 루프의 귀환경로는 H_3가 아니라 H_2와 H_1을 거치므로 $-G_4H_1H_3$가 아니라 $-G_4H_1H_2$가 되어야 한다. 또한 서로 접하지 않는 루프곱 $G_1G_3H_1H_3$는 Δ에서 더해져야 하므로 부호도 음수가 아니라 양수이다.

오답 포인트

전진경로의 끝 가지 G_3를 분자에서 빠뜨리거나, 개별 루프와 서로 접하지 않는 루프곱을 구분하지 못하면 오답이 된다. 특히 G_4가 만드는 큰 루프는 H_3와 연결되지 않고 H_2, H_1을 통해 닫힌다는 점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

신호흐름선도 문제는 전진경로를 먼저 모두 적고, 다음에 개별 루프를 적은 뒤, 서로 접하지 않는 루프쌍만 따로 찾아 Δ를 만든다. 마지막에는 각 전진경로와 접하지 않는 루프가 있는지만 확인해 Δ_k를 정하면 된다.

암기 포인트

메이슨 공식의 분모는 1-루프합+비접촉 루프곱이고, 분자는 출력까지 이어지는 모든 전진경로 이득의 합이다.

문 18. 상태방정식 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, 출력방정식 $y(t) = [1\ 1]x(t)$로 주어진 시스템의 설명으로 옳은 것은?

여기서, A = bmatrix 0 & 1 \ -3 & -4 bmatrix, B = bmatrix 1 \ 1 bmatrix

① 제어 가능하며 관측 가능하다.

② 제어 불가능하지만 관측 가능하다.

③ 제어 가능하지만 관측 불가능하다.

④ 제어 불가능하며 관측 불가능하다.

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 상태공간모형에서 제어가능성 행렬과 관측가능성 행렬의 랭크를 계산해 시스템의 제어 가능 여부와 관측 가능 여부를 판별하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
A=bmatrix0&1\\-3&-4bmatrix, B=bmatrix1\\1bmatrix, C=bmatrix1&1bmatrix
구해야 할 값:
시스템의 제어가능성과 관측가능성
주의할 조건:
2차 시스템이므로 제어가능성 행렬과 관측가능성 행렬의 랭크가 각각 2이면 가능하다고 판정한다.

사용할 공식

제어가능성은 $\mathcal{C} = [B\ AB]$, 관측가능성은 O=bmatrixC\bmatrix의 랭크로 판단한다.
이 공식을 쓰는 이유:
문제는 상태방정식과 출력방정식이 주어진 상태공간모형의 제어가능성과 관측가능성을 직접 묻고 있으므로 칼만의 제어가능성·관측가능성 판별식을 적용하면 된다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2017

계산 과정

1. AB를 계산하면
AB=bmatrix0&1\\-3&-4bmatrixbmatrix1\\1bmatrix=bmatrix1\\-7bmatrix
이다.
2. 제어가능성 행렬은
C=[B AB]=bmatrix1&1\\1&-7bmatrix
이고, 행렬식은 $(-7)-1=-8$이므로 랭크는 2이다. 따라서 제어 가능하다.
3. CA를 계산하면
CA=bmatrix1&1bmatrixbmatrix0&1\\-3&-4bmatrix=bmatrix-3&-3bmatrix
이다.
4. 관측가능성 행렬은
O=bmatrix1&1\\-3&-3bmatrix
이고, 두 행이 서로 배수관계이므로 랭크는 1이다. 따라서 관측 불가능하다.

선지별 해설

① X: "관측 가능하다"가 틀린 표현이다. 계산 결과 제어가능성 행렬의 랭크는 2이므로 제어 가능하지만, 관측가능성 행렬의 랭크는 1이므로 올바르게는 "제어 가능하지만 관측 불가능하다"이다.
② X: "제어 불가능"과 "관측 가능"이 모두 틀린 표현이다. 올바르게는 제어가능성 행렬의 랭크가 2이므로 제어 가능하고, 관측가능성 행렬의 랭크가 1이므로 관측 불가능하다.
③ O: 제어가능성 행렬의 랭크가 2이고 관측가능성 행렬의 랭크가 1이므로 "제어 가능하지만 관측 불가능하다"가 맞다.
④ X: "제어 불가능하다"가 틀린 표현이다. 관측은 불가능하지만 제어가능성 행렬의 랭크가 2이므로 올바르게는 "제어 가능하며 관측 불가능하다"이다.

오답 포인트

관측가능성 행렬에서 CA를 계산할 때 행벡터 C와 행렬 A의 곱 순서를 바꾸거나, $\mathcal{O}$의 두 행이 배수관계라는 점을 놓치면 ①로 잘못 고르기 쉽다. 또한 제어가능성과 관측가능성을 한쪽만 계산하고 둘 다 같다고 단정하면 ④로 흔들리기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태공간에서 제어가능성·관측가능성을 묻는 문제는 먼저 AB, CA를 구한 뒤 $\mathcal{C}=[B\ AB]$, O=bmatrixC\bmatrix를 만들고, 시스템 차수와 랭크를 비교해 각각 독립적으로 판정하면 된다.

암기 포인트

2차 시스템은 제어가능성 행렬과 관측가능성 행렬의 랭크가 2이면 가능, 하나라도 2보다 작으면 그 성질은 불가능이다.

NoteBase

문 19. 다음 계통의 상태천이행렬 Φ(t)를 옳게 구한 것은?

bmatrix x_1 \ x_2 bmatrix = bmatrix 0 & -2 \ 1 & -3 bmatrix bmatrix x_1 \ x_2 bmatrix

① bmatrix 2e^t-e^2t & 2e^t-2e^2t \ -e^t+e^2t & -e^t+2e^2t bmatrix

② bmatrix 2e^t-e^2t & -e^t+e^2t \ 2e^t-2e^2t & -e^t+2e^2t bmatrix

③ bmatrix 2e^-t-e^-2t & -2e^-t+2e^-2t \ e^-t-e^-2t & -e^-t+2e^-2t bmatrix

④ bmatrix 2e^-t-e^-2t & e^-t-e^-2t \ -2e^-t+2e^-2t & -e^-t+2e^-2t bmatrix

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식의 계수행렬 A에 대해 상태천이행렬 $\Phi(t) = e^{At}$를 대각화로 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 행렬은 A=bmatrix0&-2\\1&-3bmatrix이다.
구해야 할 값은 $\Phi(t) = e^{At}$이다.
특성방정식은 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$이므로 고유값은 $-1,\ -2$이다.

사용할 공식

고유값이 서로 다르므로 $A = P\Lambda P^{-1}$로 대각화한 뒤 $\Phi(t) = Pe^{\Lambda t}P^{-1}$를 사용한다.
이 공식을 쓰는 이유는 상수계수 선형계의 상태천이행렬이 행렬지수로 주어지고, 서로 다른 고유값이면 지수대각행렬로 바로 계산할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. $\lambda = -1$일 때 고유벡터는 v_1=bmatrix2\\1bmatrix, $\lambda = -2$일 때 고유벡터는 v_2=bmatrix1\\1bmatrix이다.
2. 따라서 P=bmatrix2&1\\1&1bmatrix, P^-1=bmatrix1&-1\\-1&2bmatrix, e^t=bmatrixe^-t&0\\0&e^-2tbmatrix이다.
3. 곱하면 (t)=Pe^ tP^-1=bmatrix2e^-t-e^-2t&-2e^-t+2e^-2t\^-t-e^-2t&-e^-t+2e^-2tbmatrix 이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 지수의 부호가 e^{t}, e^{2t}로 되어 있어 안정한 계의 상태천이행렬 형태와 맞지 않고, $(1,2)$ 원소의 부호도 반대이다. 올바르게는 $2e^{-t}-e^{-2t}$, $-2e^{-t}+2e^{-2t}$, $e^{-t}-e^{-2t}$, $-e^{-t}+2e^{-2t}$가 들어가야 한다.
② X: 지수의 부호가 양수인 점이 먼저 틀렸고, 비대각 원소도 맞지 않는다. $(1,2)$ 원소는 $-2e^{-t}+2e^{-2t}$이어야 하고 $(2,1)$ 원소는 $e^{-t}-e^{-2t}$이어야 한다.
③ O: 계산한 상태천이행렬 bmatrix2e^-t-e^-2t&-2e^-t+2e^-2t\^-t-e^-2t&-e^-t+2e^-2tbmatrix와 정확히 일치한다.
④ X: 대각 원소는 맞지만 비대각 원소가 서로 뒤바뀌어 있다. $(1,2)$ 원소는 $e^{-t}-e^{-2t}$가 아니라 $-2e^{-t}+2e^{-2t}$이어야 하고, $(2,1)$ 원소는 $-2e^{-t}+2e^{-2t}$가 아니라 $e^{-t}-e^{-2t}$이어야 한다.

오답 포인트

고유값이 $-1,\ -2$인데 지수항을 e^{t}, e^{2t}로 적으면 부호를 반대로 쓴 오답이 된다. 또한 비대각 원소는 고유벡터를 세운 뒤 $Pe^{\Lambda t}P^{-1}$를 끝까지 곱하지 않으면 서로 뒤바뀌거나 계수가 2배로 잘못 붙기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

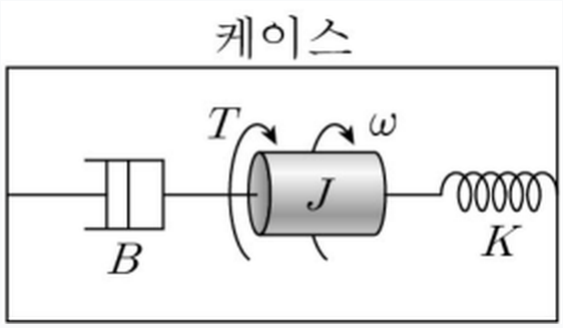
상태천이행렬 문제는 먼저 특성방정식으로 고유값의 부호를 확인하고, 그다음 고유벡터로 P를 만든 뒤 $Pe^{\Lambda t}P^{-1}$를 계산해 각 원소의 위치까지 대조하는 방식으로 판단한다.

암기 포인트

서로 다른 고유값을 가진 상수행렬의 상태천이행렬은 $\Phi(t)=Pe^{\Lambda t}P^{-1}$이고, 안정한 고유값 $-a$는 항상 e^{-at} 꼴로 들어간다.

NoteBase

문 20. 그림과 같은 회전 시스템에서 관성 모멘트 $J = 0.25[kg \cdot m^2]$이고 입력 토크 T가 계단 함수일 때, 출력 ω의 정착시간(settling time)이 0.1초가 되도록 하는 스프링 상수 $K[N \cdot m/rad]$와 점성마찰 계수 $B[N \cdot m/rad/sec]$의 값은? (단, 감쇠비 $\xi = 0.5$이다.)



① $B = 16,\ K = 1024$

② $B = 16,\ K = 2048$

③ $B = 32,\ K = 1024$

④ $B = 32,\ K = 2048$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 회전 2차계의 정착시간식과 감쇠비식을 이용해 K와 B를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $J = 0.25kg \cdot m^2, \zeta = 0.5, t_s = 0.1s$
구해야 할 값: 스프링 상수 K, 점성마찰계수 B
주의할 조건: 보기와 일치하려면 감쇠비 0.5에서의 5% 정착시간 근사식 $t_s \approx \frac{3.2}{\zeta\omega_n}$를 사용해야 한다.

사용할 공식

회전계의 특성방정식은 $Js^2 + Bs + K = 0$이고, 표준 2차계와 비교하면
$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}, \qquad \zeta = \frac{B}{2\sqrt{KJ}} = \frac{B}{2J\omega_n}$
또한 정착시간은
$t_s \approx \frac{3.2}{\zeta\omega_n}$
이다.

이 공식을 쓰는 이유: 입력 토크에 대한 회전계 응답은 감쇠비와 고유진동수로 정착시간이 결정되는 2차계이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 정착시간식에서 고유진동수를 구하면
$0.1 = \frac{3.2}{0.5\omega_n} \Rightarrow \omega_n = 64 rad/s$
2. $K = J\omega_n^2$이므로
$K = 0.25 \times 64^2 = 0.25 \times 4096 = 1024 N \cdot m/rad$
3. $B = 2\zeta J\omega_n$이므로
$B = 2 \times 0.5 \times 0.25 \times 64 = 16 N \cdot m \cdot s/rad$

선지별 해설

① O
계산 결과 $B = 16, K = 1024$이므로 옳다.

② X
$B = 16$은 맞지만 $K = 2048$은 틀리다. 틀린 표현은 $K = 2048$이고, 올바르게는 $K = 1024 N \cdot m/rad$이다.

③ X
$K = 1024$는 맞지만 $B = 32$는 틀리다. 틀린 표현은 $B = 32$이고, 올바르게는 $B = 16 N \cdot m \cdot s/rad$이다.

④ X
$B = 32, K = 2048$는 둘 다 계산 결과와 다르다. 틀린 표현은 $B = 32, K = 2048$이고, 올바르게는
$B = 16 N \cdot m \cdot s/rad, K = 1024 N \cdot m/rad$이다.

오답 포인트

정착시간식의 계수를 4로 두는지 3.2로 두는지 혼동하면 보기와 맞지 않게 된다. 이 문항은 감쇠비가 0.5로 주어졌고 보기 구성이 $\omega_n = 64$를 기준으로 짜여 있으므로 5% 정착시간 근사식을 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

회전 2차계 수치문제는 먼저 $t_s \rightarrow \omega_n$를 구하고, 다음에 $K = J\omega_n^2$, 마지막에 $B = 2\zeta J\omega_n$ 순서로 계산하면 된다.

암기 포인트

2차 회전계는 $\omega_n = \sqrt{K/J}, B = 2\zeta J\omega_n$, 그리고 5% 정착시간은 $t_s \approx 3.2/(\zeta\omega_n)$로 연결된다.

NoteBase