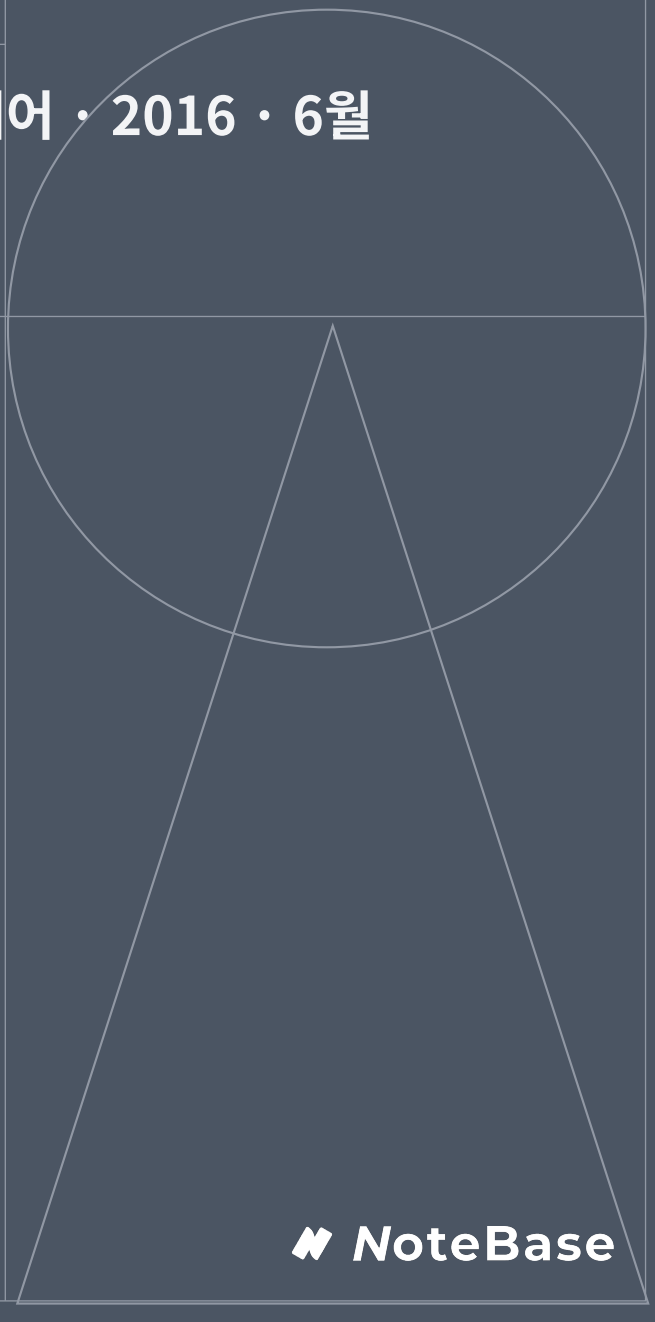
기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2016 · 6월



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2016 · 6월

공무원/서울시/7급 · 자동제어 · 2016 · 6월

문 1. 시간의 함수 $f(t)$의 라플라스 변환이 $F(s)$라 두자. 즉, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$이다. 양의 실수 a에 대하여, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\mathcal{L}\{af(t)\} = aF(s)$

② $\mathcal{L}\{f(at)\} = F(\frac{s}{a})$

③ $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

④ $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 라플라스 변환의 기본 성질인 선형성, 시간축 스케일링, 시간지연, s축 이동을 구별하는지를 묻는 문제이다.

핵심 개념

상수배 성질은 $\mathcal{L}\{af(t)\} = aF(s)$이다.
시간축 스케일링은 $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$로, 우변에 반드시 $1/a$가 붙는다.
시간지연 성질은 제어에서 보통 다루는 인과적 신호를 전제로 $f(t-a)$가 a만큼 뒤로 밀리면 e^{-as}가 곱해지는 형태로 기억한다.
지수함수 곱셈은 $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$로 나타나는 s축 이동이다.

선지별 해설

① O: $\mathcal{L}\{af(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} = aF(s)$이므로 상수 a는 그대로 밖으로 나온다.
② X: 틀린 부분은 우변에 $1/a$가 빠진 점이다. 올바르게는 $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$이다.
③ O: 시간지연 성질에 해당한다. 제어에서 다루는 인과적 시간함수 관점에서는 a만큼 지연되면 변환영역에서 e^{-as}가 곱해진다.
④ O: e^{at}를 곱하면 시간영역의 지수 가중이 되어 라플라스 영역에서는 s가 $s-a$로 치환된다. 따라서 $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$가 맞다.

NoteBase

오답 포인트

시간축 스케일링과 시간지연을 같이 외우다가 ②처럼 $F(s/a)$만 쓰고 $1/a$를 빠뜨리기 쉽다. 스케일링은 함수의 시간축만 바뀌는 것이 아니라 적분변수 치환 때문에 계수까지 함께 바뀐다는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

$f(at)$ 꼴이면 먼저 스케일링 공식을 떠올려 $1/a$ 유무를 본다. $f(t-a)$ 꼴이면 시간지연이므로 e^{-as}를, $e^{at}f(t)$ 꼴이면 지수이동이므로 $s-a$를 확인하면 된다.

암기 포인트

시간 스케일링은 $1/a$, 시간 지연은 e^{-as}, 지수 곱은 $s-a$이다.

NoteBase

문 2. $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$**와 같은 입출력 전달함수에 대해 가제어 정준형(또는 가제어 표준형, Controllable canonical form)으로 표현된 상태방정식의 가제어행렬(Controllability matrix)은?**

① bmatrix0 & 1 \ -3 & -4bmatrix

② bmatrix0 & 1 \ -4 & -3bmatrix

③ bmatrix0 & 1 \ 1 & -4bmatrix

④ bmatrix0 & 1 \ -4 & 1bmatrix

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 전달함수를 가제어 정준형으로 바꾼 뒤 상태행렬 A, 입력행렬 B로부터 가제어행렬을 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$이다.
분모 계수는 $a_1 = 4,\ a_0 = 3$이다.
가제어 정준형에서는 A=bmatrix0&1; -a_0&-a_1bmatrix, B=bmatrix0; 1bmatrix를 쓴다.
구해야 할 값은 가제어행렬 $\mathcal{C} = [B\ AB]$이다.

사용할 공식

가제어 정준형의 2차 계는 A=bmatrix0&1; -a_0&-a_1bmatrix, B=bmatrix0; 1bmatrix, 가제어행렬은 $\mathcal{C} = [B\ AB]$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 문제에서 이미 가제어 표준형으로 표현된 상태방정식의 가제어행렬을 묻고 있기 때문이다.

계산 과정

1. 분모를 전개하면 $s^2 + 4s + 3$이므로 $a_1 = 4,\ a_0 = 3$이다.
2. 따라서 상태행렬과 입력행렬은 A=bmatrix0&1; -3&-4bmatrix, B=bmatrix0; 1bmatrix이다.
3. AB=bmatrix0&1; -3&-4bmatrixbmatrix0; 1bmatrix=bmatrix1; -4bmatrix이다.
4. 따라서 가제어행렬은 C=[B AB]=bmatrix0&1; 1&-4bmatrix이다.

NoteBase

선지별 해설

1번: X. bmatrix0&1; -3&-4bmatrix는 가제어행렬이 아니라 상태행렬 A이다. 가제어행렬은 열벡터 B와 AB를 옆으로 붙인 bmatrix0&1; 1&-4bmatrix이어야 한다.
2번: X. 분모 계수를 $-a_0,\ -a_1$ 순서로 넣어야 하는데 이를 $-4,\ -3$으로 뒤바꾼 오답이다. 올바른 상태행렬은 bmatrix0&1; -3&-4bmatrix이고, 가제어행렬은 bmatrix0&1; 1&-4bmatrix이다.
3번: O. B=bmatrix0; 1bmatrix, AB=bmatrix1; -4bmatrix이므로 [B AB]=bmatrix0&1; 1&-4bmatrix가 된다.
4번: X. 두 번째 열의 -4는 맞지만 첫 번째 열이 B=bmatrix0; 1bmatrix가 아니라 bmatrix0; -4bmatrix처럼 잘못 적힌 형태이다. 첫 번째 열은 반드시 입력행렬 B가 되어야 하므로 올바른 행렬은 bmatrix0&1; 1&-4bmatrix이다.

오답 포인트

가장 흔한 함정은 상태행렬 A 자체를 가제어행렬로 착각하는 점과, 분모 계수 a_1, a_0의 순서를 바꾸는 점이다. 이 문제에서도 1번은 A를 그대로 제시했고, 2번은 계수 순서를 뒤집은 오답이다.

다시 나오면 이렇게 판단

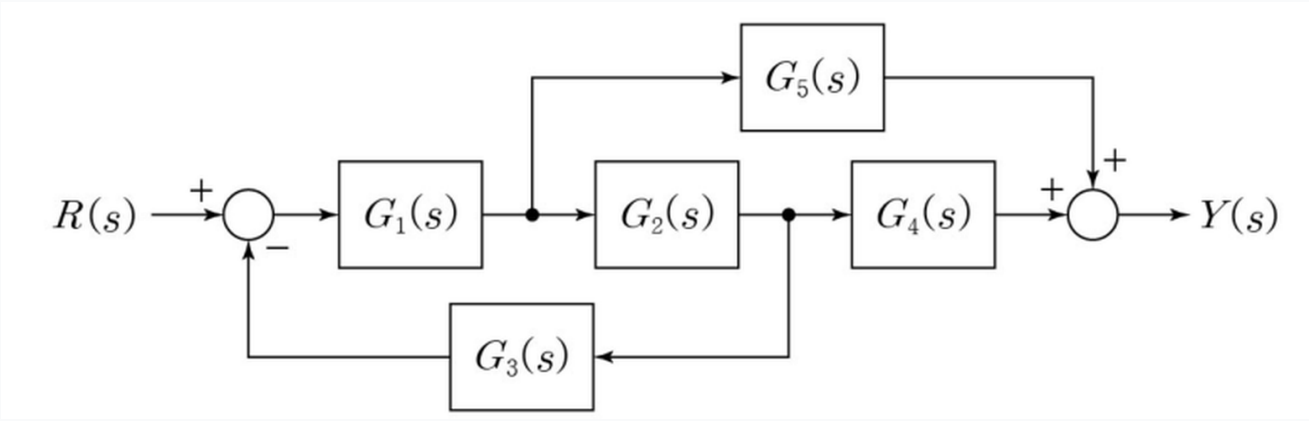
가제어 정준형 문제는 먼저 분모를 $s^2 + a_1 s + a_0$ 꼴로 맞춘 뒤 A와 B를 적고, 마지막에 $[B\ AB]$를 계산하는 순서로 판단하면 된다. 상태행렬과 가제어행렬을 같은 것으로 두지 않으면 바로 정답을 고를 수 있다.

암기 포인트

2차 가제어 정준형은 A=bmatrix0&1; -a_0&-a_1bmatrix, 가제어행렬은 $[B\ AB]$이다.

NoteBase

문 3. 다음 블록선도의 전달함수를 구하면?



① $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 + G_1G_2}{1 + G_1G_2G_3}$
② $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_5}{1 + G_1G_2G_3}$
③ $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_5 + G_1G_2G_4}{1 + G_1G_2G_3}$
④ $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_4}{1 + G_1G_2G_3}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 블록선도의 폐루프 전달함수와 병렬 전진경로를 분리해 전체 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)}$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 구조:
- 입력합점 뒤에 $G_1(s)$, 그 다음에 $G_2(s)$, 그 다음에 $G_4(s)$가 직렬로 있다.
- $G_1(s)$ 출력점에서 $G_5(s)$로 분기되어 출력합점으로 들어간다.
- $G_2(s)$ 출력점에서 $G_3(s)$를 거쳐 입력합점으로 음의 되먹임이 걸린다.

구해야 할 값:
- 전체 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)}$

주의할 조건:
- 되먹임 고리는 $G_1G_2G_3$로 형성되고, 출력 쪽은 G_1G_5 경로와 $G_1G_2G_4$ 경로가 병렬 가산된다.

NoteBase

사용할 공식

음의 되먹임 폐루프는 전진경로1+루프이득 형태로 정리한다.
이 문제에서는 먼저 입력합점에서 $G_2(s)$ 출력점까지의 폐루프를 보면
$e(s) = R(s) - G_3(s)G_2(s)G_1(s)e(s)$
이므로
$\frac{e(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1G_2G_3}$
가 된다.
출력은 같은 폐루프 내부 신호에서 두 경로가 더해지므로
$Y(s) = G_5(s)G_1(s)e(s) + G_4(s)G_2(s)G_1(s)e(s)$
를 사용한다.

계산 과정

1. 입력합점 출력 신호를 $e(s)$라 두면 $G_1(s)$와 $G_2(s)$를 지난 되먹임 신호는 $G_1G_2G_3e(s)$이다.
2. 따라서 음의 되먹임 관계는 $e(s) = R(s) - G_1G_2G_3e(s)$이고, 정리하면 $e(s) = \frac{R(s)}{1 + G_1G_2G_3}$이다.
3. 위쪽 경로의 출력 기여분은 $G_1G_5e(s)$이고, 아래쪽 경로의 출력 기여분은 $G_1G_2G_4e(s)$이다.
4. 두 출력은 같은 부호로 더해지므로
$Y(s) = (G_1G_5 + G_1G_2G_4)e(s)$
이다.
5. 이를 $e(s) = \frac{R(s)}{1 + G_1G_2G_3}$에 대입하면
$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_5 + G_1G_2G_4}{1 + G_1G_2G_3}$
가 된다.

선지별 해설

① X: 분자는 $G_1 + G_1G_2$가 아니라 출력합점으로 실제 도달하는 두 경로 G_1G_5와 $G_1G_2G_4$의 합이어야 한다. 틀린 표현은 분자 $G_1 + G_1G_2$이고, 올바르게는 $G_1G_5 + G_1G_2G_4$이다.
② X: $\frac{G_1G_5}{1 + G_1G_2G_3}$는 위쪽 분기 경로만 반영한 식이다. 아래쪽의 $G_1G_2G_4$ 경로도 같은 출력합점에서 더해지므로 누락되면 안 된다. 틀린 표현은 분자에서 $G_1G_2G_4$가 빠진 점이고, 올바르게는 $G_1G_5 + G_1G_2G_4$이다.
③ O: 되먹임 루프는 $G_1G_2G_3$로 형성되어 분모가 $1 + G_1G_2G_3$가 되고, 출력 전진경로는 G_1G_5와 $G_1G_2G_4$가 병렬로 더해져 분자가 $G_1G_5 + G_1G_2G_4$가 된다.
④ X: $\frac{G_1G_2G_4}{1 + G_1G_2G_3}$는 아래쪽 주경로만 반영한 식이다. 위쪽 분기 G_1G_5도 출력합점에 같은 부호로 들어가므로 반드시 포함되어야 한다. 틀린 표현은 분자에서 G_1G_5가 빠진 점이고, 올바르게는 $G_1G_5 + G_1G_2G_4$이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 분모와 분자를 한 번에 쓰다가 병렬 출력 경로 하나를 빼먹는 점이다. ②는 위쪽 분기만 보고, ④는 아래쪽 주경로만 본 경우에 고르기 쉽다. ①은 출력단의 전달요소 G_4, G_5를 무시하고 단순 직렬합처럼 처리한 오답이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 전달함수 문제는 먼저 되먹임 루프가 어디까지인지 정해 분모를 만들고, 그다음 출력합점으로 들어오는 전진경로를 모두 찾아 분자에서 가산하는 순서로 판단한다. 되먹임과 병렬 가산을 분리하면 식을 놓치지 않는다.

암기 포인트

폐루프 분모는 1+루프이득, 출력 분자는 출력합점에 실제로 도달하는 모든 전진경로의 합이다.

NoteBase

문 4. 전달함수 $G(s)=\frac{s+80}{(s^2+4s+8)(s+10)}$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 유한한 영점은 -80이다.

② 우세극점(dominant pole)은 -10이다.

③ 단위계단응답에서 오버슈트가 발생한다.

④ 단위계단입력에 대한 정상상태오차는 0이다.

정답 2번

출제 포인트

영점과 극점의 위치를 구하고, 우세극점이 무엇인지와 단위계단응답의 오버슈트 및 정상상태오차를 전달함수에서 판정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s)=\frac{s+80}{(s^2+4s+8)(s+10)}$이다.
분자 $s+80=0$에서 영점을 구할 수 있다.
분모 $(s^2+4s+8)(s+10)=0$에서 극점을 구할 수 있다.
단위계단응답의 정상상태값은 $\lim_{s\to 0} G(s)=G(0)$로 확인할 수 있다.

사용할 공식

영점은 분자를 0으로 만드는 s값이다.
극점은 분모를 0으로 만드는 s값이다.
우세극점은 허수축에 가장 가까워 감쇠가 가장 느린 극점이다.
$s^2+4s+8=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$와 비교하면 $\omega_n=\sqrt{8}$, $\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.
$\zeta<1$이면 복소극점에 의한 언더댐프 응답이므로 오버슈트가 발생한다.

계산 과정

1. 영점은 $s+80=0$이므로 $s=-80$이다.
2. 극점은 $s+10=0$에서 -10, $s^2+4s+8=0$에서 $s=-2\pm j2$이다.
3. 우세극점은 실수부가 0에 더 가까운 $-2\pm j2$이다. -10은 더 왼쪽에 있어 더 빨리 감쇠하는 비우세극점이다.
4. 단위계단입력에 대해 $Y(s)=\frac{G(s)}{s}$이고, 최종값정리로 $y(\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0} G(s)=\frac{80}{8\cdot 10}=1$이다. 따라서 정상상태오차는 0이다.
5. 복소극점의 감쇠비가 $\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$이므로 단위계단응답은 언더댐프 형태이며 오버슈트가 발생한다.

NoteBase

선지별 해설

① O: 분자 $s+80=0$에서 유한한 영점은 -80이다.
② X: 우세극점은 허수축에 더 가까운 극점이므로 $-2\pm j2$이다. 틀린 표현은 '-10'이며, 올바르게는 '우세극점은 $-2\pm j2$이다.'이다.
③ O: s^2+4s+8은 감쇠비 $\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 복소극점을 만들므로 단위계단응답에서 오버슈트가 발생한다.
④ O: $G(0)=1$이므로 단위계단응답의 정상상태값은 1이다. 따라서 입력 1에 대한 정상상태오차는 $1-1=0$이다.

오답 포인트

우세극점을 '절댓값이 큰 극점'이나 '실수극점'으로 오해하면 ②를 고르지 못한다. 우세극점은 가장 왼쪽 극점이 아니라 허수축에 가장 가까워 응답을 오래 지배하는 극점이다. 또한 발문이 '옳지 않은 것'이므로 맞는 설명 ①, ③, ④를 지우고 틀린 설명 하나를 찾는 방식이 필요하다.

다시 나오면 이렇게 판단

전달함수 문제는 먼저 분자에서 영점, 분모에서 극점을 구한다. 그다음 실수부가 0에 가장 가까운 극점을 우세극점으로 잡고, 단위계단 정상상태값은 $G(0)$로 확인한다. 복소극점의 감쇠비가 1보다 작으면 오버슈트 가능성을 바로 연결한다.

암기 포인트

우세극점은 허수축에 가장 가까운 극점이고, 단위계단응답의 정상상태값은 안정한 시스템에서 $G(0)$이다.

NoteBase

문 5. 다음 상태방정식을 안정화시키는 상태궤환제어기 $u = -Fx$를 설계하고자 한다. 안정화된 시스템의 극점이 -4에 중근을 가지도록 하는 제어이득이 $F = [f_1 \ f_2]$일 때, $f_1 + f_2$의 값은?

x=bmatrix0&1\\-1&-1bmatrixx+bmatrix0\\1bmatrixu

① 21

② 22

③ 23

④ 24

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태궤환 $u = -Fx$를 적용한 폐루프 행렬의 특성방정식을 구한 뒤, 원하는 극점 $-4, \ -4$와 계수 비교로 f_1, f_2를 결정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 상태방정식은 $\dot{x} = Ax + Bu$이고
A=bmatrix0&1; -1&-1bmatrix, B=bmatrix0; 1bmatrix, F=bmatrixf_1&f_2bmatrix
이다.
상태궤환은 $u = -Fx$이므로 폐루프 행렬은 $A - BF$이다.
안정화된 시스템의 극점이 모두 -4이므로 목표 특성방정식은 $(s + 4)^2$이다.

사용할 공식

폐루프 행렬은
$A_{cl} = A - BF$
이고, 원하는 극점이 주어지면
$\det(sI - A_{cl}) = (s + 4)^2$
로 두고 계수를 비교한다.
이 공식을 쓰는 이유는 상태궤환 이득 F가 폐루프 행렬의 특성다항식을 바꾸며, 극점 배치는 특성다항식의 계수 일치로 구할 수 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

먼저
BF=bmatrix0; 1bmatrixbmatrixf_1&f_2bmatrix=bmatrix0&0_1&f_2bmatrix
이므로
A-BF=bmatrix0&1; -1-f_1&-1-f_2bmatrix
이다.
따라서 특성방정식은
≤ft(sI-(A-BF))=bmatrixs&-1; 1+f_1&s+1+f_2bmatrix=s^2+(1+f_2)s+(1+f_1)
이다.
한편 원하는 극점이 $-4,\ -4$이므로
$(s+4)^2 = s^2 + 8s + 16$
이다.
계수 비교를 하면
$1 + f_2 = 8 \Rightarrow f_2 = 7,$
$1 + f_1 = 16 \Rightarrow f_1 = 15$
이다.
따라서
$f_1 + f_2 = 15 + 7 = 22$
이다.

선지별 해설

① X: 계산 결과 $f_1 + f_2 = 22$이므로 21는 맞지 않는다. 틀린 표현은 "$f_1 + f_2 = 21$"이고, 올바르게는 "$f_1 + f_2 = 22$"이다. 이런 값은 계수 비교에서 상수항 $1 + f_1$ 또는 일차항 계수 $1 + f_2$의 1을 한쪽에서 누락하면 나올 수 있다.
② O: 폐루프 특성방정식 $s^2 + (1 + f_2)s + (1 + f_1)$를 $(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16$과 비교하면 $f_2 = 7, f_1 = 15$이므로 $f_1 + f_2 = 22$가 된다.
③ X: 계산 결과 $f_1 + f_2 = 22$이므로 23은 맞지 않는다. 틀린 표현은 "$f_1 + f_2 = 23$"이고, 올바르게는 "$f_1 + f_2 = 22$"이다. 이런 값은 부호를 잘못 처리해 $A - BF$ 대신 $A + BF$로 놓거나 계수 하나를 1 크게 잡을 때 생길 수 있다.
④ X: 계산 결과 $f_1 + f_2 = 22$이므로 24는 맞지 않는다. 틀린 표현은 "$f_1 + f_2 = 24$"이고, 올바르게는 "$f_1 + f_2 = 22$"이다. 이런 값은 중근 -4를 보고 합만 8로 맞춘 뒤 상수항 16과의 연결을 놓쳐 f_1, f_2를 과대평가할 때 나올 수 있다.

NoteBase

오답 포인트

가장 흔한 실수는 $u = -Fx$인데도 폐루프 행렬을 $A + BF$로 두는 부호 오류와, 특성방정식의 계수가 f_2, f_1 자체가 아니라 각각 $1 + f_2, 1 + f_1$라는 점을 놓치는 것이다. 이 문제는 원래 시스템의 -1 항이 이미 들어 있으므로 그 값을 반드시 함께 비교해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태궤환 극점배치 문제는 먼저 $A - BF$를 정확히 만든 뒤, $\det(sI - (A - BF))$를 전개하고, 마지막에 원하는 극점다항식과 계수 비교로 판단한다. 특히 $u = -Fx$의 부호와 기존 행렬 A에 들어 있는 상수항을 먼저 확인하면 계산 실수를 줄일 수 있다.

암기 포인트

상태궤환 극점배치는 $A - BF$ 작성 후 특성다항식 계수 비교로 정리된다.

NoteBase

문 6. 상태방정식에서 상태천이행렬을 $Ae^{at} + Be^{bt}$와 같이 나타내었을 때, $\det(aA + bB)$는?

x=bmatrix-2 & 0 \ 0 & -6bmatrixx+bmatrix1 \ 3bmatrixu
y=bmatrix4 & 5bmatrixx

① 6
② 8
③ 10
④ 12

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 대각 상태행렬의 상태전이행렬을 지수항으로 분해한 뒤 $aA + bB$의 행렬식을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 상태행렬은 F=bmatrix-2&0; 0&-6bmatrix이다.
상태전이행렬은 $\Phi(t) = e^{Ft}$이다.
문제는 $\Phi(t) = Ae^{at} + Be^{bt}$로 둘 때 $\det(aA + bB)$를 묻는다.

사용할 공식

대각행렬 $F = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$의 상태전이행렬은
$\Phi(t) = e^{Ft} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$
이다.
이 공식을 쓰는 이유는 주어진 상태행렬이 이미 대각형이므로 각 대각원소의 지수함수만 취하면 상태전이행렬이 바로 구해지기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. F=bmatrix-2&0; 0&-6bmatrix 이므로
(t)=e^Ft=bmatrixe^-2t&0; 0&e^-6tbmatrix
이다.
2. 이를 $Ae^{at} + Be^{bt}$와 비교하면 $a = -2$, $b = -6$으로 둘 수 있고,
A=bmatrix1&0; 0&0bmatrix, B=bmatrix0&0; 0&1bmatrix
이다.
3. 따라서
aA+bB=-2bmatrix1&0; 0&0bmatrix-6bmatrix0&0; 0&1bmatrix=bmatrix-2&0; 0&-6bmatrix
이다.
4. 행렬식은
$\det(aA + bB) = (-2)(-6) - 0 = 12$
이다.

선지별 해설

① X
계산 결과는 6이 아니라 12이다. $aA + bB$의 대각원소는 -2와 -6이므로 행렬식은 합이 아니라 곱으로 계산한다. 이 선지는 $\det(aA + bB) = 6$으로 본 값인데, 올바르게는 12이다.

② X
계산 결과는 8이 아니라 12이다. 8은 대각원소의 절댓값 2와 6을 단순히 더한 값에 가깝지만, 행렬식은 $(-2)(-6)$으로 구한다. 올바르게는 12이다.

③ X
계산 결과는 10이 아니라 12이다. 상태전이행렬 분해에서 얻은 $aA + bB$의 행렬식만 계산하면 되므로 다른 계수나 출력행렬 $y = [4\ 5]x$를 섞으면 안 된다. 올바르게는 12이다.

④ O
(t)=bmatrixe^-2t&0; 0&e^-6tbmatrix 이고, 여기서 $a = -2$, $b = -6$, A=bmatrix1&0; 0&0bmatrix, B=bmatrix0&0; 0&1bmatrix 이다. 따라서 $\det(aA + bB) = 12$이므로 맞는 선택지이다.

오답 포인트

상태전이행렬의 지수항 e^{-2t}, e^{-6t}는 바로 읽어 놓고도 마지막에 행렬식을 합처럼 계산하는 실수가 잦다. 또한 출력식 $y = [4\ 5]x$는 이 문항의 계산에 쓰이지 않는데, 숫자가 보인다는 이유로 끌어오면 오답이 된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

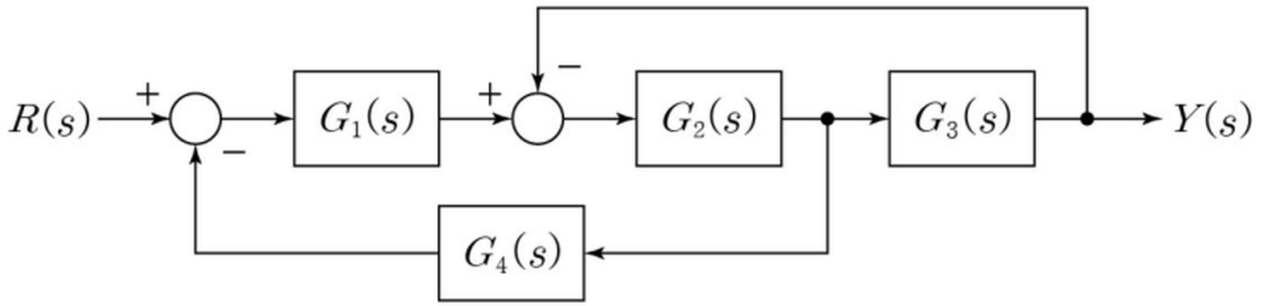
대각 상태행렬이 보이면 먼저 상태전이행렬을 각 대각원소의 지수함수로 쓴다. 그다음 각 지수항의 지수 a, b와 대응하는 계수행렬 A, B를 분리하고, 마지막에는 요구한 값이 합인지 행렬식인지 다시 확인해 계산한다.

암기 포인트

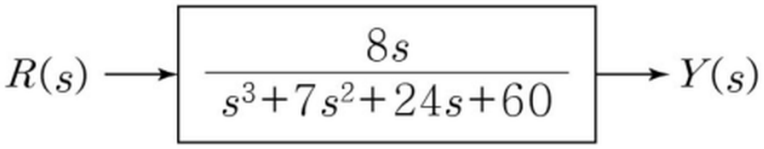
대각행렬의 상태전이행렬은 대각원소마다 $e^{\lambda t}$를 붙이고, 행렬식은 대각원소의 곱으로 계산한다.

NoteBase

문 7. 그림 (a)와 (b)의 전달함수가 등가인 경우 $G_1(s)$의 값은? (단, $G_2(s)=\frac{1}{s+2}$, $G_3(s)=\frac{2}{s+5}$, $G_4(s)=\frac{3}{s}$ 이다.)



(a)



(b)

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 1번

출제 포인트

블록선도에서 안쪽 폐루프를 먼저 정리한 뒤 바깥 피드백을 포함한 전체 전달함수를 구하고, 등가 전달함수와 분자·분모를 맞춰 $G_1(s)$를 찾는 문제이다.

NoteBase

조건 정리

주어진 값:
$G_2(s) = \frac{1}{s+2}, G_3(s) = \frac{2}{s+5}, G_4(s) = \frac{3}{s}$
등가 전달함수:
$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8s}{s^3 + 7s^2 + 24s + 60}$
구해야 할 값:
$G_1(s)$
주의할 조건:
위쪽 피드백은 $Y(s)$가 두 번째 합점으로 음의 되먹임되고, 아래쪽 피드백은 $G_2(s)$ 출력이 $G_4(s)$를 거쳐 첫 번째 합점으로 음의 되먹임된다.

사용할 공식

안쪽 폐루프 $G_2(s), G_3(s)$를 먼저 정리하면
$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}$
이고, 첫 번째 합점에는 $G_2(s)$ 출력이 $G_4(s)$를 거쳐 되먹임되므로 전체 전달함수는
$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_4(s)}$
가 된다.
이 공식을 쓰는 이유는 두 개의 음의 피드백 루프가 직렬로 얽혀 있으므로, 가장 안쪽 루프를 먼저 닫아야 바깥 루프를 정확히 전개할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 주어진 블록을 대입하면
$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{2}{s+5}}{1 + \frac{1}{s+2} \cdot \frac{2}{s+5} + G_1 \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{3}{s}}$
2. 분모를 통분하면
$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2G_1 s}{s(s+2)(s+5) + 2s + 3G_1(s+5)}$
3. $s(s+2)(s+5) = s^3 + 7s^2 + 10s$ 이므로
$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2G_1 s}{s^3 + 7s^2 + (12 + 3G_1)s + 15G_1}$
4. 이를 $\frac{8s}{s^3 + 7s^2 + 24s + 60}$와 비교하면 분자에서 $2G_1 = 8$ 이므로 $G_1 = 4$이다.
5. 분모도 확인하면 $12 + 3G_1 = 12 + 12 = 24, 15G_1 = 60$으로 완전히 일치한다.

NoteBase

선지별 해설

① O: $G_1 = 4$를 대입하면 전체 전달함수는 $\frac{8s}{s^3 + 7s^2 + 24s + 60}$가 되어 그림 (b)와 정확히 일치한다.
② X: $G_1 = 5$를 대입하면 분자는 $10s$, 분모는 $s^3 + 7s^2 + 27s + 75$가 되어 주어진 전달함수와 다르다. 틀린 표현은 '5'이고, 올바르게는 $G_1 = 4$이다.
③ X: $G_1 = 6$를 대입하면 분자는 $12s$, 분모는 $s^3 + 7s^2 + 30s + 90$가 된다. 전달함수의 분자와 분모가 모두 맞지 않으므로 틀리다. 올바르게는 $G_1 = 4$이다.
④ X: $G_1 = 7$를 대입하면 분자는 $14s$, 분모는 $s^3 + 7s^2 + 33s + 105$가 된다. 보기의 값만 키운다고 등가 전달함수가 맞아지지 않는다. 올바르게는 $G_1 = 4$이다.

오답 포인트

안쪽 루프 G_2, G_3를 먼저 정리하지 않으면 피드백 지점을 잘못 잡기 쉽다. 또 아래쪽 피드백이 $Y(s)$가 아니라 $G_2(s)$ 출력에서 취출된다는 점을 놓치면 분모의 $G_1G_2G_4$ 항을 잘못 세운다. 마지막에 분자만 보고 G_1을 정한 뒤 분모 검산을 생략해도 오답이 생긴다.

다시 나오면 이렇게 판단

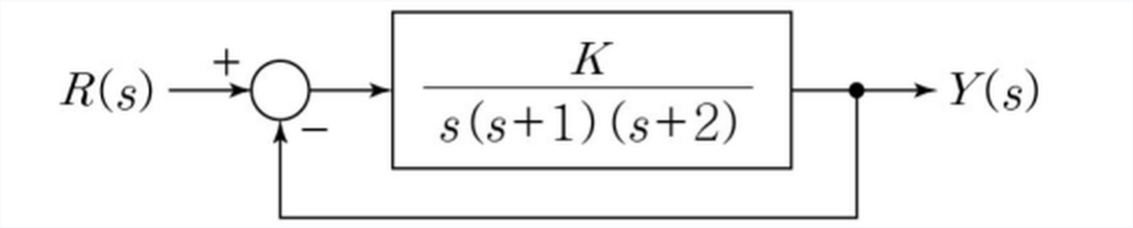
다중 피드백 블록선도는 가장 안쪽 폐루프부터 정리하고, 각 피드백의 취출점과 부호를 확인한 뒤, 전체 전달함수를 전개하여 분자와 분모를 함께 비교하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

블록선도 등가화는 안쪽 루프부터 정리하고, 미지 이득은 분자와 분모를 동시에 맞춰 결정한다.

NoteBase

문 8. 다음과 같은 단위궤환제어시스템의 단위램프입력에 대한 정상상태오차가 2%가 되기 위한 K 값은?



① 1

② 5

③ 50

④ 100

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 단위피드백 1형 시스템에서 속도오차정수 K_v를 이용해 단위램프입력의 정상상태오차를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 개루프 전달함수는 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$이다.
입력은 단위램프입력이다.
구해야 할 값은 정상상태오차가 2%가 되도록 하는 K이다.

사용할 공식

단위피드백계에서 단위램프입력의 정상상태오차는 $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$, $K_V = \lim_{s\to 0} sG(s)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이 시스템이 적분기 $1/s$를 하나 포함한 1형 시스템이므로 단위램프입력에 대한 오차를 속도오차정수로 판단해야 하기 때문이다.

계산 과정

1. $K_V = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{(1)(2)} = \frac{K}{2}$이다.
2. 따라서 $e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{2}{K}$이다.
3. 정상상태오차 2%는 $e_{ss} = 0.02$이므로 $\frac{2}{K} = 0.02$이다.
4. 이를 풀면 $K = 100$이다.

NoteBase

선지 판단

1번 X: $K=1$이면 $e_{ss}=\frac{2}{1}=2$이므로 200%이다. 2% 조건을 전혀 만족하지 못한다. 올바른 값은 $K=100$이다.
2번 X: $K=5$이면 $e_{ss}=\frac{2}{5}=0.4$이므로 40%이다. 2%와 크게 다르다. 올바른 값은 $K=100$이다.
3번 X: $K=50$이면 $e_{ss}=\frac{2}{50}=0.04$이므로 4%이다. 2%로 착각한 값이며, K_v를 한 번 더 두 배로 만들어야 한다. 올바른 값은 $K=100$이다.
4번 O: $K=100$이면 $e_{ss}=\frac{2}{100}=0.02$이므로 정상상태오차가 정확히 2%가 된다.

오답 포인트

단위램프입력인데도 계단입력처럼 위치오차정수 K_p를 쓰거나, $(s+1)(s+2)$에 $s=0$을 대입한 값 2를 빠뜨리면 오답이 된다. 특히 50은 $e_{ss}=\frac{1}{K}$처럼 잘못 두었을 때 나오기 쉬운 값이다.

다시 나오면 이렇게 판단

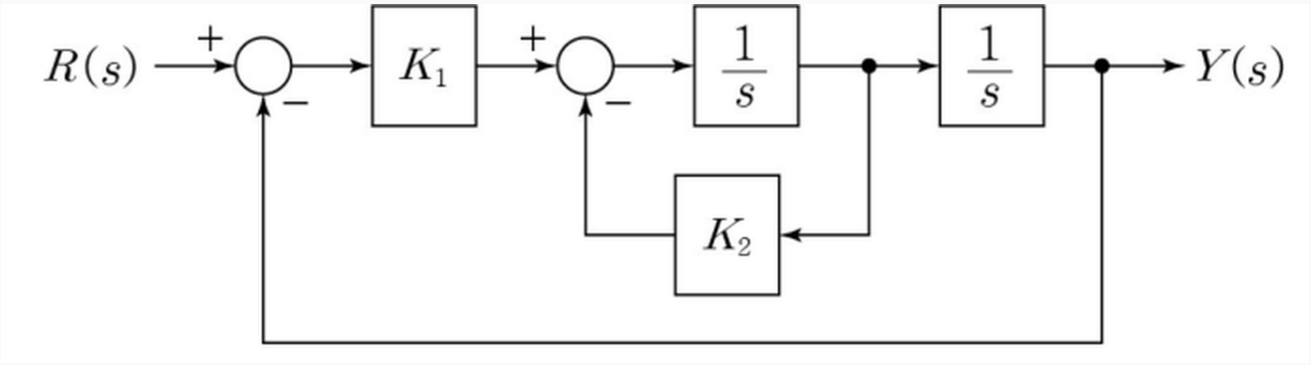
입력 종류를 먼저 보고 계단이면 K_p, 램프면 K_v, 포물선이면 K_a를 선택한다. 그다음 $\lim_{s\to 0}$로 오차정수를 구하고 정상상태오차 식에 대입해 수치를 비교하면 된다.

암기 포인트

단위램프 정상상태오차는 $e_{ss}=1/K_v$, 단위피드백 1형 시스템의 K_v는 $\lim_{s\to 0}sG(s)$이다.

NoteBase

문 9. 다음과 같은 궤환제어시스템에서, 안정하고 오버슈트가 발생하지 않는 제어이득 K_1과 K_2의 값으로 적절한 것은?



① $K_1 = -1,\ K_2 = -2$

② $K_1 = -2,\ K_2 = -1$

③ $K_1 = 1,\ K_2 = 2$

④ $K_1 = 2,\ K_2 = 1$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 블록선도에서 폐루프 특성방정식을 구한 뒤, 안정조건과 무오버슈트 조건을 2차 표준형에 대입할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

외부는 단위 음의 되먹임이고, 내부는 첫 번째 적분기 출력에 K_2가 음의 되먹임으로 걸린 구조이다.
구해야 할 값은 안정하고 오버슈트가 발생하지 않는 K_1, K_2의 조합이다.
오버슈트가 없으려면 2차계 감쇠비가 $\zeta \geq 1$이어야 한다.

NoteBase

사용할 공식

내부 상태를 첫 번째 적분기 출력 x라 두면

$\dot{x} = K_1(r - y) - K_2 x, \quad \dot{y} = x$

이므로

$\ddot{y} + K_2\dot{y} + K_1 y = K_1 r$

이다.

따라서 폐루프 전달함수의 분모는

$s^2 + K_2 s + K_1$

가 된다.

이를 2차 표준형

$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

와 비교하면

$\omega_n^2 = K_1, \quad 2\zeta\omega_n = K_2$

이다.

이 공식을 쓰는 이유는 문제의 시스템이 적분기 두 개를 가진 2차 폐루프계로 정리되기 때문이다.

계산 과정

1. 첫 번째 적분기 출력 x를 두면 $\dot{y} = x$이다.
2. 두 번째 가산점 입력은 $K_1(r - y) - K_2 x$이므로 $\dot{x} = K_1(r - y) - K_2 x$이다.
3. $x = \dot{y}$를 대입하면 $\ddot{y} + K_2\dot{y} + K_1 y = K_1 r$이므로 특성방정식은 $s^2 + K_2 s + K_1 = 0$이다.
4. 안정하려면 $K_1 > 0, K_2 > 0$이어야 한다.
5. 오버슈트가 없으려면 ≥1이어야 하므로 K_2≥2√(K_1), 즉 K_2^2≥4K_1이어야 한다.

선지별 해설

1번: X. $K_1 = -1, K_2 = -2$이면 특성방정식이 $s^2 - 2s - 1 = 0$가 되어 계수 부호부터 안정조건을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 음의 이득값 선택이며, 올바르게는 안정하려면 $K_1 > 0, K_2 > 0$이어야 한다.

2번: X. $K_1 = -2, K_2 = -1$도 특성방정식이 $s^2 - s - 2 = 0$가 되어 불안정하다. 틀린 표현은 두 이득을 모두 음수로 둔 점이며, 올바르게는 두 계수가 모두 양수여야 안정 2차계가 된다.

3번: O. $K_1 = 1, K_2 = 2$이면 특성방정식은 $s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$이다. 중근을 가지는 임계감쇠 상태이므로 안정하고 오버슈트가 발생하지 않는다.

4번: X. $K_1 = 2, K_2 = 1$이면 특성방정식은 $s^2 + s + 2$로 안정하기는 하지만 $K_2^2 = 1 < 4K_1 = 8$이어서 $\zeta < 1$인 부족감쇠 상태이다. 틀린 표현은 오버슈트가 없다고 볼 수 있는 조합이라는 점이며, 올바르게는 이 경우 진동성 응답과 오버슈트가 나타난다.

NoteBase

오답 포인트

안정조건 $K_1 > 0, K_2 > 0$만 보고 4번을 고르기 쉽다. 이 문제는 안정 여부만이 아니라 무오버슈트 조건까지 함께 묻기 때문에 K_2^2≥4K_1를 추가로 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

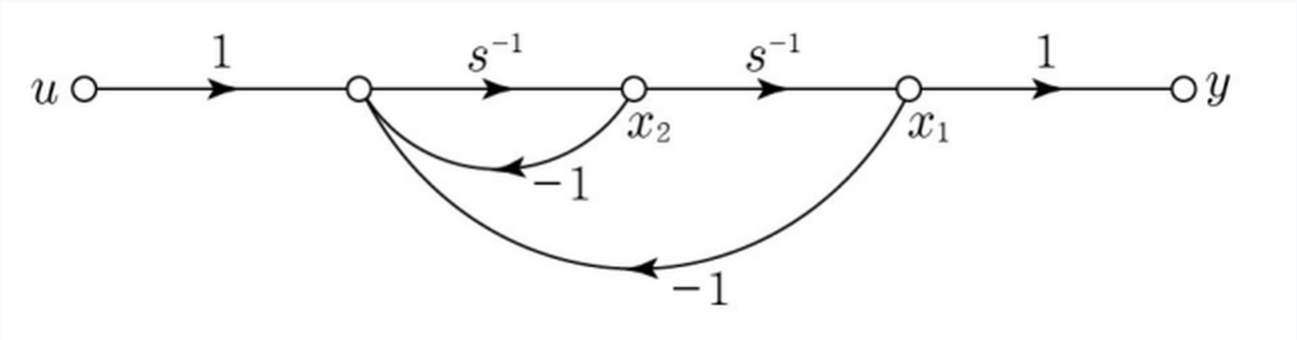
적분기 블록선도 문제는 먼저 상태식이나 미분방정식으로 폐루프 분모를 만든 뒤, 그 분모를 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 비교하여 안정조건과 감쇠조건을 순서대로 판단한다.

암기 포인트

2차계 $s^2 + a_1 s + a_0$는 $a_1 > 0, a_0 > 0$이어야 안정하고, 오버슈트가 없으려면 a_1^2≥4a_0를 만족한다.

NoteBase

문 10. 다음과 같은 신호흐름선도로 표시되는 시스템의 가제어성과 가관측성에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 가제어하고 가관측하다.

② 가제어하고 가관측하지 않다.

③ 가제어하지 않고 가관측하다.

④ 가제어하지 않고 가관측하지 않다.

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 신호흐름선도를 상태방정식으로 바꾼 뒤 가제어성과 가관측성을 판정할 수 있는지를 묻는다.
먼저 두 적분기 s^{-1}의 출력을 상태변수로 잡는다. 오른쪽 적분기의 출력이 x_1, 그 앞 적분기의 출력이 x_2이다. 적분기는 입력을 적분해 출력하므로, 각 적분기의 입력이 곧 그 출력 상태변수의 미분이 된다.
입력 u는 이득 1을 지나 합류점으로 들어가고, 이 합류점에는 x_2에서 온 -1 피드백과 x_1에서 온 -1 피드백이 함께 모인다. 따라서 합류점(즉 왼쪽 적분기의 입력)의 신호는 $u - x_1 - x_2$이다. 왼쪽 적분기의 출력이 x_2이므로 $\dot{x}_2 = u - x_1 - x_2$이고, 오른쪽 적분기의 입력은 x_2, 출력은 x_1이므로 $\dot{x}_1 = x_2$이다. 출력 y는 x_1이 이득 1을 지나 나오므로 $y = x_1$이다.
이를 정리하면 A=bmatrix0 & 1 \ -1 & -1bmatrix, B=bmatrix0 \ 1bmatrix, C=bmatrix1 & 0bmatrix이 된다.

NoteBase

선지별 해설

1번: O. 위에서 세운 A=bmatrix0 & 1 \ -1 & -1bmatrix, B=bmatrix0 \ 1bmatrix, C=bmatrix1 & 0bmatrix로 판정한다. 가제어행렬은 AB=bmatrix1 \ -1bmatrix이므로 [B AB]=bmatrix0 & 1 \ 1 & -1bmatrix이고 rank가 2이므로 가제어하다. 가관측행렬은 CA=bmatrix0 & 1bmatrix이므로 bmatrixC \ CAbmatrix=bmatrix1 & 0 \ 0 & 1bmatrix이고 rank가 2이므로 가관측하다.
2번: X. '가관측하지 않다'는 부분이 틀리다. 출력이 $y = x_1$이고 $\dot{x}_1 = x_2$이므로 y와 그 미분으로 두 상태를 모두 복원할 수 있어 가관측하다. 올바른 문장은 '가제어하고 가관측하다'이다.
3번: X. '가제어하지 않고'가 틀리다. 입력 u가 x_2 방정식에 직접 들어가고 상태 결합으로 x_1까지 도달하므로 가제어행렬의 rank가 2가 된다. 올바른 문장은 '가제어하고 가관측하다'이다.
4번: X. 가제어하지도 않고 가관측하지도 않는다는 판단이 모두 틀리다. 이 시스템은 가제어행렬과 가관측행렬이 모두 full rank이므로 올바른 문장은 '가제어하고 가관측하다'이다.

오답 포인트

적분기 출력에 붙은 상태변수 위치를 거꾸로 읽거나, 피드백 -1 두 개를 놓치면 A행렬을 잘못 세워 가제어성·가관측성 판정을 뒤집기 쉽다. 특히 출력이 x_1 하나뿐이라도 $\dot{x}_1 = x_2$ 관계가 있으면 가관측성이 살아난다는 점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

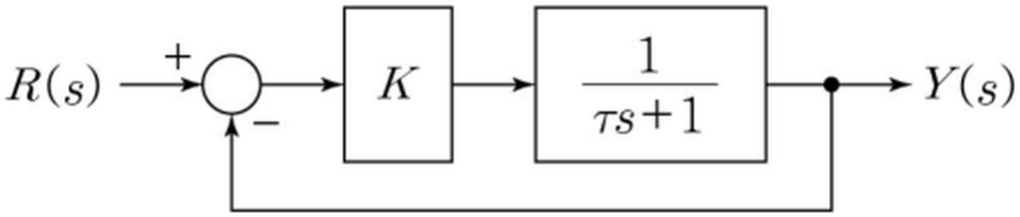
적분기 출력부터 상태변수를 잡고 각 상태의 미분식을 먼저 쓴 뒤 A, B, C를 만든다. 그다음 가제어행렬 $[B\ AB]$와 가관측행렬 bmatrixC \ CAbmatrix의 rank가 상태차수와 같은지만 확인하면 된다.

암기 포인트

신호흐름선도 문제는 상태식 작성이 먼저이고, 2차 시스템은 $[B\ AB]$와 bmatrixC \ CAbmatrix의 rank가 2이면 각각 가제어·가관측이다.

NoteBase

문 11. 다음 표준형 1차 시스템을 고려하자. 단위계단입력이 인가될 때 피드백 시스템의 응답 특성에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, τ는 실수이다.)



① τ가 증가하면 목표값에 더 빨리 접근한다.

② 시스템 변수값에 따라 오버슈트가 발생할 수 있다.

③ 피드백 제어에 의해 개루프 시스템의 극점이 복소평면상에서 우측으로 이동한다.

④ 제어이득값이 증가하면 정상상태오차는 감소한다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 블록선도에서 표준형 1차 시스템의 단위피드백 폐루프 전달함수를 구하고, 닫힌루프 시정수와 정상상태오차가 어떻게 바뀌는지를 판단하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① X

개루프 전달함수는 $G(s)=\frac{K}{\tau s+1}$이고, 단위피드백 폐루프 전달함수는 $\frac{K}{\tau s+1+K}$이다. 이를 표준형으로 쓰면 $\frac{K}{1+K}\cdot\frac{1}{(\frac{\tau}{1+K})s+1}$이므로 닫힌루프 시정수는 $\frac{\tau}{1+K}$이다. 따라서 τ가 증가하면 응답은 더 느려진다. 틀린 표현은 "더 빨리 접근한다"이고, 올바르게는 "τ가 증가하면 목표값에 더 느리게 접근한다"이다.

② X

이 시스템의 폐루프는 1차 시스템이므로 극이 1개뿐이며, 표준적인 양의 이득 K 영역에서는 오버슈트가 발생하지 않는다. 오버슈트는 보통 복소공액극을 갖는 2차 이상 시스템에서 나타나는 특성이다. 틀린 표현은 "오버슈트가 발생할 수 있다"이고, 올바르게는 "표준형 1차 폐루프 시스템에서는 오버슈트가 발생하지 않는다"이다.

③ X

개루프 극은 $s=-\frac{1}{\tau}$이고, 폐루프 극은 $s=-\frac{1+K}{\tau}$이다. K가 증가하면 극은 실수축에서 더 왼쪽으로 이동하여 응답이 빨라지고 안정도 여유도 커지는 방향이 된다. 틀린 표현은 "오른쪽으로 이동한다"이고, 올바르게는 "왼쪽으로 이동한다"이다.

④ O

단위계단입력에 대한 정상상태 출력은 폐루프 DC 이득 $\frac{K}{1+K}$이므로 정상상태오차는 $e_{ss}=1-\frac{K}{1+K}=\frac{1}{1+K}$이다. 따라서 제어이득 K가 증가하면 정상상태오차는 감소한다.

오답 포인트

1차 시스템이라는 조건을 놓치고 2차계처럼 오버슈트나 복소극 이동을 떠올리면 ②, ③에서 흔들리기 쉽다. 또 τ가 커질수록 시정수가 커져 느려진다는 기본 의미를 반대로 기억하면 ①을 잘못 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위피드백 블록선도가 나오면 먼저 폐루프 전달함수 $\frac{G(s)}{1+G(s)}$를 만든다. 그다음 표준형으로 정리하여 닫힌루프 시정수, 극 위치, DC 이득을 순서대로 읽으면 속도응답과 정상상태오차를 바로 판정할 수 있다.

암기 포인트

표준형 1차 단위피드백계는 $T_{cl}=\frac{\tau}{1+K}$, $e_{ss}=\frac{1}{1+K}$, 오버슈트는 없다.

NoteBase

문 12. 다음과 같은 상태방정식이 있다. 시간영역에서 단위계단함수인 입력 u에 대한 시스템의 출력은? (단, 모든 상태변수의 초기값은 0이다.)

bmatrix x_1 \ x_2 bmatrix = bmatrix 0 & 1 \ -3 & -4 bmatrixbmatrix x_1 \ x_2 bmatrix + bmatrix 0 \ 1 bmatrixu, y = bmatrix 0 & 1 bmatrixbmatrix x_1 \ x_2 bmatrix

① $-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}+\frac{1}{3}$
② $-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}$
③ $\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{5}{6}e^{-3t}+\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식에서 전달함수 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$를 구한 뒤, 단위계단 입력 $U(s)=1/s$를 곱해 시간응답 $y(t)$를 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
A=bmatrix0&1; -3&-4bmatrix, B=bmatrix0; 1bmatrix, C=bmatrix0&1bmatrix
구해야 할 값:
단위계단 입력 $u(t)$에 대한 출력 $y(t)$
주의할 조건:
모든 초기값이 0이고, 출력은 $y=[0\ 1]x=x_2$이므로 x_1 응답과 혼동하면 안 된다.

사용할 공식

전달함수는 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$이다.
단위계단 입력이면 $U(s)=1/s$이므로 $Y(s)=G(s)U(s)$이다.
이 공식을 쓰는 이유:
상태방정식이 직접 주어졌고 초기값이 0이므로, 먼저 전달함수로 바꾼 뒤 계단응답을 구하는 것이 가장 빠르기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. sI-A=bmatrixs&-1; 3&s+4bmatrix 이고, 행렬식은 $s^2 + 4s + 3 = (s + 1)(s + 3)$이다.
2. $(sI - A)^{-1}B$를 구하면 출력 전달함수는 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s}{s^2 + 4s + 3}$이다.
3. 단위계단 입력을 곱하면 $Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}$이다.
4. 부분분수 전개를 하면 $Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}$ 이므로, 역라플라스 변환 결과 $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$이다.

선지별 해설

① X

- $-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{3}$는 x_1의 단위계단 응답에 해당하는 식이다. 이 문제의 출력은 $y = x_2$이므로 x_1 응답을 출력으로 쓰면 틀린다. 틀린 표현은 전체 출력식이며, 올바르게는 $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$이다.

② X

- 단위계단 응답이면 $Y(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}$가 되어 부분분수 전개 계수는 $\pm\frac{1}{2}$가 된다. $-\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$는 잔차 계산을 잘못해 계수를 3분의 1로 줄여 쓴 식이다. 틀린 표현은 $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}$의 계수이며, 올바르게는 $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$이다.

③ X

- 이 식은 $+\frac{1}{3}$의 상수항이 있어 $t \to \infty$에서 출력이 $\frac{1}{3}$으로 남는다. 그러나 $G(0) = 0$이므로 단위계단 정상상태 출력은 0이어야 한다. 틀린 표현은 상수항 $+\frac{1}{3}$과 $-\frac{5}{6}e^{-3t}$의 계수이며, 올바르게는 상수항이 없고 $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$이다.

④ O

- $G(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3}$, $Y(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}$이므로 역라플라스 변환 결과는 $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$이다. 계산 결과와 정확히 일치하므로 옳다.

오답 포인트

가장 큰 함정은 출력행렬 $C = [0\ 1]$를 놓쳐 y를 x_1로 착각하는 점이다. 또한 전달함수를 구한 뒤 단위계단 입력의 $1/s$를 한 번 더 곱해야 하는데, 이 과정을 빼먹거나 부분분수 계수를 잘못 계산하면 ②, ③ 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

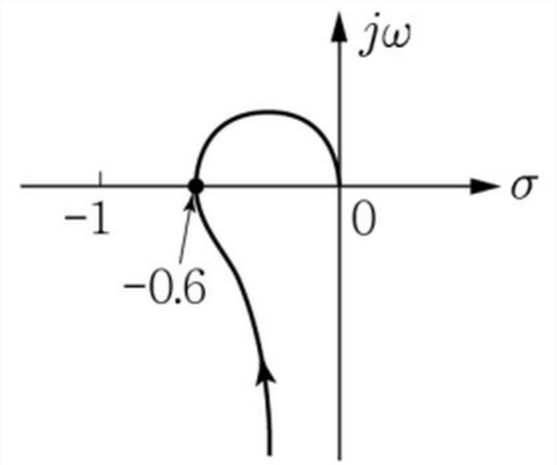
상태방정식 계단응답 문제는 먼저 C행으로 출력변수를 확인하고, 다음에 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$를 구한 뒤, 마지막에 단위계단이면 $1/s$를 곱해 부분분수 전개까지 마치면 된다. 계산 뒤에는 $G(0)$로 정상상태값이 맞는지도 함께 점검할 수 있다.

암기 포인트

상태방정식 응답은 출력변수 확인, 전달함수 계산, 단위계단이면 $\frac{1}{s}$ 추가의 순서로 정리하면 흔들리지 않는다.

NoteBase

문 13. 다음과 같은 나이퀴스트선도(Nyquist plot)를 그리는 제어시스템의 이득여유[dB]는? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$이다.)



① 1.942

② 2.834

③ 3.216

④ 4.438

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 선도에서 위상교차점의 실수축 교점 크기를 읽어 이득여유를 dB로 바꾸는 문제이다.

조건 정리

- 그림에서 음의 실수축과 만나는 점이 -0.6이다.
- 음의 실수축 교점은 위상이 $-180\,^\circ$인 위상교차점이다.
- 구해야 할 값은 이득여유의 dB값이다.

사용할 공식

위상교차점에서 크기가 $|G(j\omega)H(j\omega)| = 0.6$이므로 이득여유는 $GM = 1/0.6$이다.

이득여유를 dB로 바꾸면 $GM_{dB} = 20\log_{10} GM$이다.

이 공식을 쓰는 이유는 나이퀴스트 선도의 음의 실수축 교점이 바로 위상교차점의 크기를 주기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 그림에서 위상교차점의 크기를 읽으면 $|G(j\omega)H(j\omega)| = 0.6$이다.
2. 따라서 이득여유는 $GM = 1/0.6 = 5/3$이다.
3. dB값은 $20\log_{10}(5/3) = 20(\log 5 - \log 3)$이다.
4. $\log 5 = \log(10/2) = 1 - \log 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$이므로
$20(0.6990 - 0.4771) = 20(0.2219) = 4.438$dB
이다.

선지별 해설

① X
- 계산 결과가 4.438 dB이므로 1.942 dB는 맞지 않다. 올바르게는 이득여유는 4.438 dB이다.

② X
- 나이퀴스트 선도의 -0.6을 읽으면 이득여유는 $1/0.6$이 되어야 하므로 2.834 dB는 성립하지 않는다.
올바르게는 이득여유는 4.438 dB이다.

③ X
- 위상교차점의 크기를 dB로 변환하면 3.216 dB가 아니라 4.438 dB가 된다. 올바르게는 이득여유는 4.438 dB이다.

④ O
- 음의 실수축 교점이 -0.6이므로 $GM = 1/0.6 = 5/3$이고, 이를 dB로 바꾸면 4.438 dB가 된다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 음의 실수축 교점 -0.6 자체를 dB로 바꾸는 것이 아니라, 그 역수 $1/0.6$를 먼저 이득여유로 잡아야 한다는 점이다. 나이퀴스트 선도에서 음의 실수축 교점은 위상교차점의 개루프 크기이지 이득여유 자체가 아니다.

다시 나오면 이렇게 판단

나이퀴스트 선도에서 이득여유를 묻는 문제는 먼저 음의 실수축 교점에서 위상교차점의 크기 $|G(j\omega)H(j\omega)|$를 읽고, 그 역수로 GM을 구한 다음, 마지막에만 $20\log_{10}(GM)$으로 dB 변환하면 된다.

암기 포인트

이득여유는 음의 실수축 교점의 역수이고, dB값은 $20\log_{10}(GM)$이다.

NoteBase

문 14. 다음 함수를 라플라스 역변환한 것은?

$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+13}$

① $y(t) = e^{-2t}(\cos 3t + \sin 3t)$

② $y(t) = e^{-2t}(\cos 3t + 3\sin 3t)$

③ $y(t) = e^{-3t}(\cos 2t + \sin 2t)$

④ $y(t) = e^{-3t}(\cos 2t + 3\sin 2t)$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 분모를 완전제곱식으로 바꾼 뒤, 이동정리를 이용해 라플라스 역변환을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $Y(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+13}$이다.
구해야 할 값: 시간영역 함수 $y(t)$이다.
주의할 조건: 분모를 $(s+a)^2 + b^2$ 꼴로 만들고, 분자도 $s+a$와 상수항으로 나누어야 한다.

사용할 공식

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right\} = e^{-at}\cos bt, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right\} = e^{-at}\sin bt$
이 공식을 쓰는 이유: 분모 $s^2+4s+13$은 완전제곱을 하면 $(s+2)^2 + 3^2$가 되어 감쇠지수와 사인, 코사인 형태의 표준식에 바로 대응되기 때문이다.

계산 과정

1. 분모를 완전제곱식으로 정리하면 $s^2+4s+13 = (s+2)^2 + 9 = (s+2)^2 + 3^2$이다.
2. 분자도 표준형에 맞추면 $s+5 = (s+2) + 3$이다.
3. 따라서
$Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{3}{(s+2)^2+3^2}$
이다.
4. 역변환하면
$y(t) = e^{-2t}\cos 3t + e^{-2t}\sin 3t = e^{-2t}(\cos 3t + \sin 3t)$
이다.

NoteBase

선지별 해설

① O: 계산 결과가 $y(t) = e^{-2t}(\cos 3t + \sin 3t)$이므로 옳다.
② X: $e^{-2t}(\cos 3t + 3\sin 3t)$가 되려면 라플라스 영역의 사인항 분자가 9가 되어야 한다. 실제 분자는 3이므로 사인항의 계수는 1이다. 틀린 표현은 \"3sin 3t\"이고, 올바르게는 \"sin 3t\"이다.
③ X: $e^{-3t}(\cos 2t + \sin 2t)$는 분모가 $(s+3)^2 + 2^2 = s^2 + 6s + 13$일 때의 형태이다. 실제 분모는 $s^2 + 4s + 13$이므로 감쇠율과 각주파수를 뒤바꾸었다. 틀린 표현은 \"e^{-3t}와 cos 2t, sin 2t\"이고, 올바르게는 \"e^{-2t}와 cos 3t, sin 3t\"이다.
④ X: ③처럼 이동값을 잘못 읽은 데 더해 사인항 계수까지 3으로 잘못 붙인 형태이다. 실제로는 분자 분해가 $(s+2) + 3$이므로 사인항은 sin 3t만 남는다. 틀린 표현은 \"$e^{-3t}(\cos 2t + 3\sin 2t)$\"이고, 올바르게는 \"$e^{-2t}(\cos 3t + \sin 3t)$\"이다.

오답 포인트

분모의 $s^2 + 4s + 13$을 보고 바로 e^{-3t}, sin 2t처럼 4와 13을 기계적으로 나누면 오답이 된다. 완전제곱으로 $(s+2)^2 + 3^2$를 먼저 만든 뒤, 분자 $s + 5$를 $(s+2) + 3$으로 다시 맞추는 과정이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

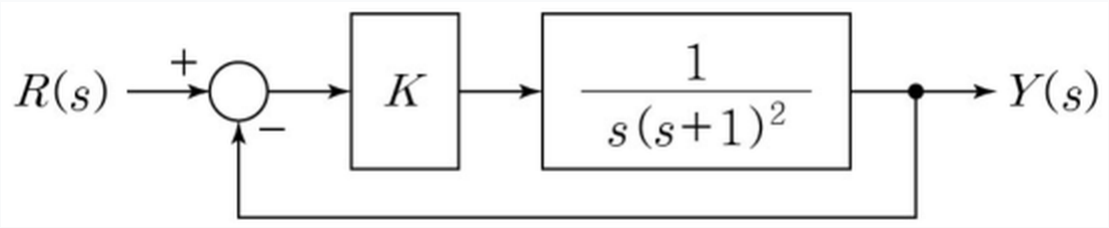
이동정리가 섞인 역라플라스 문제는 분모를 먼저 $(s+a)^2 + b^2$ 꼴로 정리하고, 분자를 $s + a$와 상수항으로 쪼개어 코사인 항과 사인 항에 각각 대응시키면 된다.

암기 포인트

$(s+a)^2 + b^2$가 보이면 $e^{-at}(\cos bt, \sin bt)$를 떠올리고, 분자 b는 사인항 앞계수 1개만 만든다는 점을 함께 기억하면 된다.

NoteBase

문 15. 다음과 같은 시스템을 안정하게 하는 K 값의 범위에 속하는 것은?



① -1.5

② 1.5

③ 2.5

④ 3.5

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 폐루프 특성방정식을 만든 뒤 Routh-Hurwitz 안정조건으로 K의 범위를 판단하는 문제이다.

조건 정리

개루프 전달함수는 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}$이고, 단위 음의 되먹임 구조이다.
안정 판정 대상은 폐루프 특성방정식이다.
보기는 $K = -1.5,\ 1.5,\ 2.5,\ 3.5$ 이다.

사용할 공식

단위 음의 되먹임이므로 폐루프 특성방정식은 $1 + G(s) = 0$이다.
따라서
$1 + \frac{K}{s(s+1)^2} = 0$
$s(s+1)^2 + K = 0$
가 된다.
3차식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$가 안정하려면 $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$를 만족해야 한다.
이 공식을 쓰는 이유는 이 문제가 폐루프 3차 특성방정식의 안정 범위를 직접 묻기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

$(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$

$s(s+1)^2 = s^3 + 2s^2 + s$

따라서 특성방정식은

$s^3 + 2s^2 + s + K = 0$

이다.

여기서 $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = K$ 이므로 안정조건은

$K > 0, \quad 2 \cdot 1 > K$

즉

$0 < K < 2$

이다.

$K = 2$이면 $(s+2)(s^2+1) = 0$가 되어 허수축 근이 생기므로 점근안정이 아니다.

선지 판단

1번 X: $K = -1.5$는 $K > 0$ 조건을 위반하므로 안정하지 않다. 틀린 표현은 "음수 K도 안정 범위에 속한다"이고, 올바르게는 K는 0보다 커야 한다.

2번 O: $K = 1.5$는 $0 < K < 2$를 만족하므로 안정하다.

3번 X: $K = 2.5$는 상한 $K < 2$를 넘으므로 안정하지 않다. 틀린 표현은 "2보다 큰 값도 안정 범위에 속한다"이고, 올바르게는 안정 범위는 2 미만까지만 포함된다.

4번 X: $K = 3.5$도 $K < 2$를 만족하지 못하므로 안정하지 않다. 틀린 표현은 "큰 양수 K이면 더 안정하다"이고, 올바르게는 이 계는 K가 너무 커지면 불안정해진다.

오답 포인트

폐루프 특성방정식을 $1 + G(s) = 0$로 세우지 않고 개루프 전달함수만 보고 판단하면 틀리기 쉽다. 또 3차 안정조건에서 $a_1 a_2 > a_3$를 빠뜨리면 $K > 0$만 보고 3번이나 4번을 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

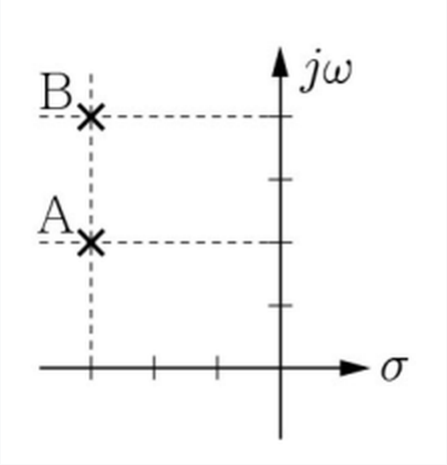
블록선도 안정문제는 먼저 폐루프 특성방정식을 만든 뒤 계수를 정리하고, 마지막에 Routh-Hurwitz 조건으로 범위를 좁혀 본다. 3차식이면 $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$를 바로 대입하면 된다.

암기 포인트

단위 되먹임 3차 안정조건은 "모든 계수 양수 + $a_1 a_2 > a_3$"이다.

NoteBase

문 16. 2차 표준형 폐루프 시스템의 극점 하나가 피드백 제어를 통해 A에서 B로 이동할 때 단위계단응답에서 발생하는 동특성 변화로 가장 옳은 것은?



① 최대 오버슈트가 감소한다.

② 초기 응답이 빨라진다.

③ 2% 정착시간(settling time)이 감소한다.

④ 댐핑비가 증가한다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 $s = -\sigma \pm j\omega_d$ 평면에서 극점의 실수부는 그대로 두고 허수부만 크게 했을 때, 감쇠비와 정착시간은 어떻게 바뀌고 초기 응답 속도는 어떻게 달라지는지를 묻는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① X

- A에서 B로 갈 때 실수부 σ는 같고 ω_d만 커진다. 이때 감쇠비 $\zeta = \sigma/\sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$는 감소하므로 최대 오버슈트는 감소하지 않고 오히려 증가한다.
- 틀린 표현은 "최대 오버슈트가 감소한다"이다. 올바르게는 "최대 오버슈트가 증가한다"이다.

② O

- 실수부가 같아 감쇠 속도는 같지만 허수부가 커져 진동 주파수와 자연진동수가 커진다. 따라서 상승시간이 짧아져 초기 응답은 더 빨라진다.

③ X

- 2% 정착시간은 보통 $T_s \approx 4/\sigma$로 본다. A와 B는 실수부가 같으므로 정착시간은 감소하지 않는다.
- 틀린 표현은 "2% 정착시간이 감소한다"이다. 올바르게는 "2% 정착시간은 거의 변하지 않는다"이다.

④ X

- 감쇠비는 원점으로부터의 거리 대비 실수부 비율이므로, 같은 실수부에서 허수부가 커지면 감소한다.
- 틀린 표현은 "댐핑비가 증가한다"이다. 올바르게는 "댐핑비가 감소한다"이다.

오답 포인트

실수부가 같으면 정착시간은 거의 그대로이고, 허수부가 커지면 응답 속도는 빨라지지만 감쇠비는 작아져 오버슈트는 커진다는 점을 서로 뒤섞기 쉽다. 특히 "위로 이동하면 더 안정적이다"라고 단순화하면 ①과 ④를 잘못 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

복소극점이 수직으로 이동하면 먼저 실수부가 변했는지부터 본다. 실수부가 같으면 정착시간은 거의 그대로이고, 허수부가 커지면 초기 응답은 빨라지며 감쇠비는 감소하고 오버슈트는 증가한다고 판단한다.

암기 포인트

같은 실수부의 수직 이동은 T_s 거의 일정, ω_d 증가, ζ 감소, 오버슈트 증가로 정리된다.

NoteBase

문 17. <보기>의 전달함수 중 단위계단입력에 대하여 오버슈트가 발생하지 않는 것을 모두 고르면?

<보기>
가. $G(s)=\frac{6}{s+6}$
나. $G(s)=\frac{6}{s^2+2s+6}$
다. $G(s)=\frac{6}{s^2+4s+6}$

① 가
② 다
③ 가, 나
④ 나, 다

정답 1번

출제 포인트

표준 2차계의 감쇠비와 1차계 응답 성질을 이용해 단위계단입력에서 오버슈트 발생 여부를 판별하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 가 $G(s)=\frac{6}{s+6}$, 나 $G(s)=\frac{6}{s^2+2s+6}$, 다 $G(s)=\frac{6}{s^2+4s+6}$이다.
구해야 할 것은 단위계단입력에서 오버슈트가 발생하지 않는 전달함수이다.
판단 기준은 1차계는 응답이 단조이므로 오버슈트가 없고, 표준 2차계는 감쇠비 ζ가 $0<\zeta<1$이면 오버슈트가 발생한다는 점이다.

사용할 공식

표준 2차계는 $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$로 쓴다.
오버슈트는 $0<\zeta<1$일 때 발생하고, ≥ 1이면 발생하지 않는다.
이 공식을 쓰는 이유는 나와 다가 표준 2차계와 직접 비교 가능한 형태이고, 가는 1차계라 별도의 감쇠비 계산 없이 단조 응답 성질로 판단할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 가는 $\frac{6}{s+6}$인 1차계이므로 단위계단응답이 단조 증가하여 오버슈트가 없다.
2. 나는 $\omega_n^2=6$, $2\zeta\omega_n=2$이므로 $\omega_n=\sqrt{6}$, $\zeta=\frac{1}{\sqrt{6}}$이다. 따라서 $\zeta<1$이어서 오버슈트가 발생한다.
3. 다는 $\omega_n^2=6$, $2\zeta\omega_n=4$이므로 $\omega_n=\sqrt{6}$, $\zeta=\frac{2}{\sqrt{6}}$이다. 이 경우도 $\zeta<1$이므로 오버슈트가 발생한다.
4. 따라서 오버슈트가 발생하지 않는 것은 가만 해당한다.

NoteBase

선지별 해설

① O

가만 오버슈트가 발생하지 않는다는 진술은 옳다. 가는 1차계라 오버슈트가 없고, 나와 다는 모두 $\zeta < 1$인 2차계라 오버슈트가 발생한다.

② X

다만 오버슈트가 발생하지 않는다는 진술은 틀리다. 틀린 표현은 '다만 해당한다'이다. 올바르게는 '가는 오버슈트가 없고, 다는 $\zeta = \frac{2}{\sqrt{6}} < 1$이므로 오버슈트가 발생한다'이다.

③ X

가와 나가 모두 오버슈트가 없다는 진술은 틀리다. 틀린 표현은 '나는 오버슈트가 없다'이다. 올바르게는 '나는 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{6}} < 1$인 부족감쇠계이므로 오버슈트가 발생한다'이다.

④ X

나와 다가 오버슈트가 없다는 진술은 틀리다. 틀린 표현은 '나, 다는 오버슈트가 없다'이다. 올바르게는 '나와 다는 모두 $\zeta < 1$이므로 둘 다 오버슈트가 발생한다'이다.

오답 포인트

2차계에서 분모의 s 계수가 커졌다고 해서 곧바로 오버슈트가 사라진다고 보면 틀리기 쉽다. 오버슈트 유무는 계수의 크기 자체가 아니라 감쇠비 ζ가 1 이상인지로 판단한다. 이 문항에서는 다의 $4s$를 보고 과대감쇠라고 착각하는 함정이 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

전달함수의 차수를 먼저 본다. 1차계이면 단위계단응답에서 오버슈트가 없다고 판단한다. 2차계이면 표준형과 비교해 ζ를 구한 뒤 $0 < \zeta < 1$이면 오버슈트가 있고, ≥ 1이면 없다고 판단한다.

암기 포인트

1차계는 오버슈트가 없고, 표준 2차계는 $\zeta < 1$이면 오버슈트가 발생한다.

NoteBase

문 18. <보기>의 전달함수 중 단위계단입력에 대한 정상상태오차가 0인 것을 모두 고르면?

<보기>
가. $G(s)=\frac{1}{1-s}$
나. $G(s)=\frac{2}{s^2+2}$
다. $G(s)=\frac{3}{s^2+4s+3}$

① 가
② 다
③ 가, 나
④ 나, 다

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 단위계단입력에 대한 정상상태오차를 판단할 때 $G(0)=1$ 여부와 함께 전달함수의 안정성을 같이 확인하는 문제이다.

조건 정리

입력은 단위계단입력이다.
출력의 정상상태값이 존재해야 정상상태오차를 말할 수 있다.
각 전달함수에 대해 $G(0)$와 극의 위치를 함께 본다.

사용할 공식

단위계단입력 $R(s)=1/s$일 때 출력은 $Y(s)=G(s)R(s)=G(s)/s$이다.
안정한 계이면 최종값정리에 따라 $y(\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0} G(s)=G(0)$이다.
따라서 정상상태오차는 $e_{ss}=1-y(\infty)=1-G(0)$이다.
이 식은 전달함수가 안정하여 최종값이 존재할 때만 사용할 수 있다.

계산 과정

가: $G(s)=\frac{1}{1-s}$이므로 $G(0)=1$이다. 그러나 극이 $s=1$에 있어 우반평면 극을 가지므로 불안정하다.
정상상태값이 존재하지 않아 정상상태오차를 0이라고 할 수 없다.
나: $G(s)=\frac{2}{s^2+2}$이므로 $G(0)=1$이다. 그러나 극이 $s=\pm j\sqrt{2}$로 허수축 위에 있어 지속진동한다. 정상상태값이 수렴하지 않으므로 정상상태오차를 0이라고 할 수 없다.
다: $G(s)=\frac{3}{s^2+4s+3}=\frac{3}{(s+1)(s+3)}$이므로 $G(0)=1$이다. 극이 모두 좌반평면에 있어 안정하므로 $y(\infty)=1$, $e_{ss}=0$이다.

NoteBase

선지 판단

1번 X: 1번은 가만 고른 선지이다. 가는 $G(0) = 1$이지만 불안정하여 출력이 수렴하지 않는다. 틀린 표현은 '가의 정상상태오차가 0이다'이고, 올바르게는 '가는 불안정하여 정상상태오차를 0으로 판단할 수 없다'이다.
2번 O: 2번은 다를 고른 선지이다. 다는 $G(0) = 1$이고 모든 극이 좌반평면에 있어 안정하므로 단위계단입력에 대한 정상상태오차가 0이다.
3번 X: 3번은 가, 나를 고른 선지이다. 가는 불안정하고 나는 지속진동하므로 둘 다 정상상태오차 0으로 볼 수 없다. 올바르게는 '가와 나는 모두 정상상태값이 존재하지 않는다'이다.
4번 X: 4번은 나, 다를 고른 선지이다. 다만 맞고 나는 허수축 극 때문에 정상상태에 수렴하지 않는다. 틀린 표현은 '나의 정상상태오차가 0이다'이고, 올바르게는 '나는 지속진동하여 정상상태오차를 정의할 수 없다'이다.

오답 포인트

세 전달함수 모두 $G(0) = 1$이라서 모두 정상상태오차가 0이라고 착각하기 쉽다. 그러나 정상상태오차 판단은 직류이득만 보는 문제가 아니라 출력이 실제로 수렴하는 안정계인지까지 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위계단입력의 정상상태오차 문제는 먼저 극의 위치로 안정성을 확인하고, 안정한 경우에만 $G(0)$ 또는 최종값정리를 적용해 e_{ss}를 계산하면 된다.

암기 포인트

$G(0) = 1$만으로는 부족하고, 안정해야만 $e_{ss} = 1 - G(0)$를 쓸 수 있다.

NoteBase

문 19. 안정한 전달함수 $G(s)$에 $\sin 2t$를 입력하였더니, 정상상태 출력이 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t-45^\circ)$와 같았다. $G(j2)=a+jb$로 표현하였을 때, $100a+10b$는?

① -55

② -45

③ 45

④ 55

정답 3번

출제 포인트

정현파 정상상태 응답에서 $G(j\omega)$의 크기는 출력 진폭비, 위상은 출력의 위상차로 읽는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 입력은 $\sin 2t$이고 진폭은 1, 각주파수는 $\omega=2$이다.
출력은 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t-45^\circ)$이다.
구해야 할 값: $G(j2)=a+jb$에서 $100a+10b$이다.
주의할 조건: 정상상태 출력의 위상 -45°가 곧 $G(j2)$의 위상이고, 진폭비가 곧 $|G(j2)|$이다.

사용할 공식

$x(t)=A\sin(\omega t)$를 입력하면 안정한 계의 정상상태 출력은 $y_{ss}(t)=A|G(j\omega)|\sin(\omega t+\angle G(j\omega))$이다.
이 공식을 쓰는 이유: 입력이 정현파이고 출력도 같은 각주파수 2의 정현파로 주어졌으므로 주파수응답 $G(j2)$의 크기와 위상을 바로 읽을 수 있다.

계산 과정

1. 입력 진폭이 1이므로 출력 진폭 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 자체가 $|G(j2)|$이다.
2. 출력 위상이 -45°이므로 $\angle G(j2)=-45^\circ$이다.
3. 따라서
$G(j2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(-45^\circ)+j\sin(-45^\circ))=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$
이므로 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$이다.
4. $100a+10b=100\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=50-5=45$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 선지의 값은 -55인데 계산 결과는 45이므로 틀리다. a와 b를 모두 음수로 잘못 두면 나올 수 있는 값이고, 올바르게는 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이다.
② X: 선지의 값은 -45인데 계산 결과는 45이므로 틀리다. 출력 위상 -45°를 읽고도 실수부 a의 부호를 반대로 취하면 생길 수 있는 오답이며, 올바른 값은 45이다.
③ O: $G(j2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$이므로 $100a+10b=45$가 되어 옳다.
④ X: 선지의 값은 55인데 계산 결과는 45이므로 틀리다. 위상 -45°를 $+45^\circ$로 잘못 읽어 b를 양수로 두면 나올 수 있는 값이고, 올바른 값은 45이다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 출력 식의 진폭과 위상을 각각 $|G(j2)|$와 $\angle G(j2)$로 바로 연결하지 못하는 점이다. 특히 -45°에서 허수부 b가 음수라는 점을 놓치면 ④ 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

정현파 입력 문제는 먼저 입력 진폭과 출력 진폭의 비로 $|G(j\omega)|$를 읽고, 그다음 출력의 위상차로 $\angle G(j\omega)$를 읽는다. 마지막에 극형식을 직교형 $a+jb$로 바꾼 뒤 묻는 식에 대입하면 된다.

암기 포인트

$G(j\omega)=|G(j\omega)|(\cos\theta+j\sin\theta)$이고, $\theta=-45^\circ$이면 실수부는 양수, 허수부는 음수이므로 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$ 꼴이 된다.

NoteBase

문 20. 다음 함수 $y(t)$의 최종값(final value)은? (단, $u(t)$는 단위계단함수, $y(0)=-1, y'(0)=2$이다.)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=5u(t)$$

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{5}{2}$
④ 5

정답 3번

출제 포인트

안정한 2차 시스템의 미분방정식에서 단위계단입력에 대한 최종값을 최종값 정리 또는 정상상태 대수식으로 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=5u(t)$이다.
입력 $u(t)$는 단위계단함수이므로 $t\to\infty$에서 값은 1이다.
구해야 할 값은 $\lim_{t\to\infty}y(t)$이다.
특성방정식은 $s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$이므로 극은 $-1,\ -2$이고 안정하다.
초기조건 $y(0)=-1, y'(0)=2$는 과도응답에는 영향을 주지만 안정계의 최종값 자체는 바꾸지 않는다.

사용할 공식

최종값 정리는 $\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to0}sY(s)$이다.
이 문제는 극이 모두 좌반평면에 있어 안정하므로 최종값 정리를 적용할 수 있다.
같은 뜻으로 정상상태에서는 $y'(t)$와 $y''(t)$가 0으로 가므로 미분방정식이 대수식 $2y_\infty=5$로 줄어든다.

NoteBase

계산 과정

1. 단측 라플라스 변환을 취하면
$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{5}{s}$
이고, $y(0) = -1, y'(0) = 2$를 대입하면
$(s^2 + 3s + 2)Y(s) + s + 1 = \frac{5}{s}$
이다.
2. 따라서
$Y(s) = \frac{\frac{5}{s} - s - 1}{s^2 + 3s + 2}$
이다.
3. 최종값 정리를 적용하면
$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{5 - s^2 - s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{2}$
이다.
4. 정상상태 식으로 바로 보면 $y'' = 0, y' = 0, u = 1$이므로 $2y_\infty = 5$, 따라서 $y_\infty = \frac{5}{2}$이다.

선지별 해설

① X
최종값을 $\frac{1}{2}$로 둔 수치 판단이 틀렸다. 정상상태에서는 $2y_\infty = 5$가 되어야 하므로 $y_\infty = \frac{5}{2}$이다. 틀린 값 $\frac{1}{2}$는 우변의 5를 반영하지 않거나 계수를 잘못 축소한 경우에 나오는 오답이다.

② X
최종값을 $\frac{2}{3}$으로 둔 수치 판단이 틀렸다. 최종상태에서는 미분항이 사라져 3이 아니라 $2y_\infty = 5$만 남는다. 올바르게는 $y_\infty = \frac{5}{2}$이다.

③ O
안정계이므로 최종값 정리를 적용할 수 있고, 계산 결과 $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{5}{2}$이다. 따라서 3번이 옳다.

④ X
최종값을 5로 둔 수치 판단이 틀렸다. 이는 정상상태에서 우변의 5를 그대로 출력값으로 본 오답이다. 올바르게는 $2y_\infty = 5$이므로 $y_\infty = \frac{5}{2}$이다.

오답 포인트

초기조건 $y(0), y'(0)$가 주어져 있어 최종값까지 크게 좌우한다고 착각하기 쉽다. 그러나 안정계에서는 초기조건이 과도응답만 바꾸고 최종 정상상태는 입력과 계수로 결정된다. 또 최종값 정리를 쓰기 전에 안정성 확인을 빼먹거나, 정상상태에서 $2y$ 항의 계수 2를 놓치면 5 같은 오답으로 흐르기 쉽다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

최종값 문제는 먼저 특성방정식의 극이 좌반평면에 있는지 확인한 뒤, 안정하면 $t \to \infty$에서 미분항을 0으로 두거나 $\lim_{s \to 0} sY(s)$를 적용해 판단한다. 단위계단입력은 최종적으로 1이 된다는 점까지 함께 반영하면 된다.

암기 포인트

안정계의 최종값은 미분항이 사라진 뒤 남는 대수식으로 정리하면 빠르게 구할 수 있다.

NoteBase