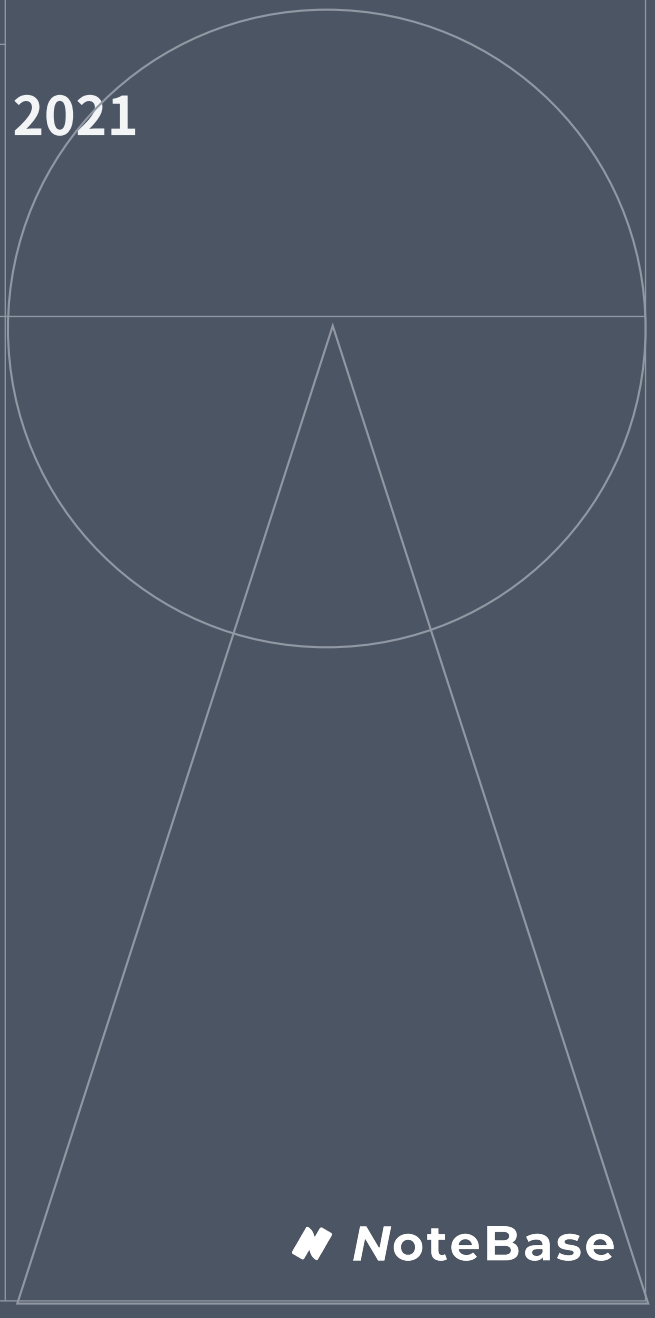
기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2021



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2021

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2021

문 1. 등식 $(2+i)x+(1-i)y=1+2i$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)^4$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① −4

② −2

③ 2

④ 4

정답 1번

간단한 해설

복소수가 같으려면 **실수부와 허수부가 각각 같아야** 하므로 $x=1, y=-1$이다. 따라서 $x+yi=1-i$이고, 이를 제곱하면 $-2i$, 한 번 더 제곱하면 −4가 된다.

계산 과정

주어진 등식의 좌변은 $(2x+y)+(x-y)i$로 정리된다. x, y가 **실수**이므로 실수부는 $2x+y$, 허수부는 $x-y$이다. 양변의 실수부와 허수부를 각각 비교하면 $2x+y=1, x-y=2$를 얻는다.

두 식을 더하면 $3x=3$이므로 $x=1$이다. 이를 $x-y=2$에 대입하면 $1-y=2$이므로 $y=-1$이다. 따라서 네제곱할 복소수는 $x+yi=1-i$이다.

네제곱은 **제곱한 값을 다시 제곱**하여 구한다. $i^2=-1$이므로 $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$이다. 따라서 $(x+yi)^4=(-2i)^2=4i^2=-4$이며, 선택지 ①의 −4와 일치한다.

NoteBase

문 2. $x^2 + x - 1 = 0$**일 때,** $x^3 + 3x^2 + x + 2$**의 값은?**

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 2번

간단한 해설

주어진 관계에서 $x^2 = 1 - x$, $x^3 = 2x - 1$이다. 이를 구하려는 식에 대입하면 **일차항이 소거**되어 값은 4가 된다.

계산 과정

주어진 등식 $x^2 + x - 1 = 0$을 이항하면 $x^2 = 1 - x$이다. 이 관계를 이용하면 **근을 직접 구하지 않고** 높은 차수의 항을 일차식으로 바꿀 수 있다.

양변에 x를 곱하면 $x^3 = x(1 - x) = x - x^2$이다. 여기에 $x^2 = 1 - x$를 다시 대입하면
$x^3 = x - (1 - x) = 2x - 1$이다.

구하려는 식 $x^3 + 3x^2 + x + 2$에 위의 두 관계를 대입하면 $(2x - 1) + 3(1 - x) + x + 2 = 4$이다. 일차항은 $2x - 3x + x = 0$으로 소거되고, 상수항만 남는다.

따라서 구하는 값은 4이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. 실수 x에 대한 두 조건 $p : x^2 - x - 6 \le 0$, $q : x < a$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

간단한 해설

조건 p를 만족하는 x의 최댓값은 3이며, 이 값도 $x < a$를 만족해야 한다. 따라서 **3보다 큰 정수** 중 가장 작은 값인 4가 필요하다.

계산 과정

조건 p의 해: $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$이므로 $(x + 2)(x - 3) \le 0$을 푼다. 두 일차식의 곱은 두 근 사이에서 음수이고 두 근에서 0이므로, 해는 $-2 \le x \le 3$이다. 따라서 p를 만족하는 x에는 **양 끝값도 포함**된다.

충분조건의 적용: p가 q이기 위한 충분조건이라는 것은 **p를 만족하는 모든 값이 q도 만족**한다는 뜻이다. 특히 $x = 3$도 p를 만족하므로 $3 < a$여야 한다. 반대로 $a > 3$이면 p를 만족하는 모든 x에 대해 $x \le 3 < a$이므로 q가 성립한다. 따라서 필요한 조건은 $a > 3$이다.

정수 최솟값: $a = 3$이면 $x = 3$에서 $x < a$가 성립하지 않으므로 제외한다. 3보다 큰 정수는 4, 5, 6, …이므로 a의 최솟값은 4이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. 함수 $y=\frac{-4x-17}{2x+1}$의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1사분면

② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

정답 1번

간단한 해설

$x>0$이면 분자 $-4x-17$은 음수이고 분모 $2x+1$은 양수이므로 y**는 항상 음수**이다. 따라서 두 좌표가 모두 양수인 제1사분면에는 그래프가 놓일 수 없다.

공통 해설

사분면은 **두 좌표의 부호**로 구분한다. 제1·제2·제3·제4사분면에서 (x, y)의 부호는 각각 $(+, +)$, $(-, +)$, $(-, -)$, $(+, -)$이다. 주어진 함수에서는 분자와 분모의 부호가 같으면 $y>0$, 다르면 $y<0$이다. 단, 분모가 0인 x=-12에서는 함수가 정의되지 않는다.

$x>0$이면 $-4x-17<0$, $2x+1>0$이므로 $y<0$이다. 따라서 그래프는 제4사분면을 지나며, 제1사분면은 지나지 않는다.

음수인 x에서는 분자가 0이 되는 $-\frac{17}{4}$와 분모가 0이 되는 -12를 기준으로 부호를 살핀다. $x<-\frac{17}{4}$이면 분자는 양수, 분모는 음수이므로 $y<0$이고 제3사분면을 지난다. -(17)/(4)<x<-12이면 분자와 분모가 모두 음수이므로 $y>0$이고 제2사분면을 지난다. -12<x<0이면 분자는 음수, 분모는 양수이므로 $y<0$이고 제3사분면을 지난다. 경계인 $x=-\frac{17}{4}$에서는 $y=0$이므로 그 점은 사분면에 속하지 않는다.

NoteBase

문 5. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 3kx - k^2 = 0$의 두 실근을 α, β라 하자. 1≤ k≤4에서 $(\alpha + 2)(\beta + 2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M - m$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

간단한 해설

두 근의 합과 곱을 이용하면 $(\alpha + 2)(\beta + 2) = 13 - (k - 3)^2$이다. 주어진 구간에서 **최댓값은 13, 최솟값은 9**이므로 그 차는 4이다.

계산 과정

두 근이 α, β이므로 $x^2 - 3kx - k^2 = (x - \alpha)(x - \beta)$이다. 양변의 계수를 비교하는 **근과 계수의 관계**에 따라 $\alpha + \beta = 3k$, $\alpha\beta = -k^2$이다.

구하려는 식을 전개하면 $(\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4$이다. 여기에 두 근의 합과 곱을 대입하면 $-k^2 + 6k + 4$이고, 완전제곱식으로 바꾸면 $13 - (k - 3)^2$이다.

1≤ k≤4에서 $k = 3$이 가능하므로 $(k - 3)^2$의 최솟값은 0이다. 따라서 원래 식의 최댓값은 $M = 13$이다.
반대로 원래 식은 **제곱항이 가장 클 때 최소**가 된다. 구간 안에서 3으로부터 가장 먼 값은 1이므로, $k = 1$일 때 $(k - 3)^2 = 4$로 가장 크다. 따라서 최솟값은 $m = 13 - 4 = 9$이다.

따라서 $M - m = 13 - 9 = 4$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. $-2 \le x \le 2$**에서 함수** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+a} + b$**의 최댓값이 7, 최솟값이** $\frac{41}{8}$**일 때, 상수** a, b**에 대하여** $a + b$**의 값은?**

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 3번

간단한 해설

함수를 $f(x) = 2^{x-a} + b$로 바꾸면 **증가함수**이므로 구간의 양 끝점에서 최솟값과 최댓값을 갖는다. 두 극값의 차를 이용하면 $a = 1$, 최댓값 조건에 대입하면 $b = 5$이므로 $a + b = 6$이다.

계산 과정

최댓값·최솟값의 위치: 지수법칙에 따라 $f(x) = 2^{x-a} + b$이다. 밑이 2로 1보다 크므로 이 함수는 a, b의 값에 관계없이 **구간 전체에서 증가**한다. 따라서 -2≤ x≤2에서 최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(-2)$이다.

극값 조건의 식: 양 끝점의 값을 대입하면 최댓값 조건은 $2^{2-a} + b = 7$, 최솟값 조건은 $2^{-2-a} + b = \frac{41}{8}$이다.

상수 a 구하기: 두 식을 빼면 **공통으로 더해진 b가 소거**된다. 지수항을 2^{-a}로 묶으면 $\left(4 - \frac{1}{4}\right)2^{-a} = 7 - \frac{41}{8}$이다. 이를 정리하면 $\frac{15}{4} \cdot 2^{-a} = \frac{15}{8}$이므로 $2^{-a} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$이다. 밑이 같은 지수함수의 값이 같으므로 $-a = -1$, 즉 $a = 1$이다.

상수 b와 합 구하기: 최댓값 조건에 $a = 1$을 대입하면 $2^{2-1} + b = 7$이므로 $b = 5$이다. 따라서 $a + b = 1 + 5 = 6$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+1}}$**의 값은?**

① 4

② $4\sqrt{2}$

③ 8

④ $8\sqrt{2}$

정답 2번

간단한 해설

분자와 분모의 근호 차를 **각각 유리화**하면 상수 계수는 4가 되고, 남은 근호 합의 비는 $\sqrt{2}$로 수렴한다. 따라서 구하는 극한값은 $4\sqrt{2}$이다.

계산 과정

1. 근호 차의 유리화: 근호의 차에 두 근호의 합을 곱하면 합차공식에 따라 근호 안의 수의 차가 된다. 분자에서는 $(x+9)-(x+1)=8$, 분모에서는 $(2x+3)-(2x+1)=2$이므로, 분자의 차는 $\frac{8}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}}$, 분모의 차는 $\frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1}}$로 바뀐다.

2. 비의 정리: 분모의 분수로 나누는 것은 그 역수를 곱하는 것과 같으므로, 주어진 식은 $4\cdot\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}}$이다. 여기서 계수 4는 $\frac{8}{2}=4$에서 나온다.

3. 근호 합의 비의 극한: $x\to\infty$에서는 x가 양수이므로, 위 분수의 **분자와 분모를 모두** $\sqrt{x}$로 나눌 수 있다. 분자는 $\sqrt{2+\frac{3}{x}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}}$가 되어 $2\sqrt{2}$로 수렴한다. 분모는 $\sqrt{1+\frac{9}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}$가 되어 2로 수렴한다. 분모의 극한이 0이 아니므로 두 극한값의 비를 구할 수 있다.

4. 극한값: 구하는 값은 $4\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 두 사건 A, B에 대하여 $P(B \mid A) = P(B)$이고 $P(A) - P(B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$일 때, $P(B)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$

정답 2번

간단한 해설

조건 $P(B \mid A) = P(B)$는 두 사건의 **독립**을 뜻하므로, 교집합의 확률은 두 확률의 곱이다. 이 관계와 두 확률의 차를 이용해 이차방정식을 풀고 음의 해를 제외하면 $P(B) = \frac{1}{3}$이다.

계산 과정

독립 관계: $P(A \cap B) = \frac{1}{6} > 0$이므로 $P(A) > 0$이다. 조건부확률의 정의에 따라 $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$이고, 이것이 $P(B)$와 같으므로 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$이다. 즉, **두 사건이 독립**이므로 두 확률의 곱을 이용할 수 있다.

방정식 세우기: $P(B) = x$라 두면 $P(A) - P(B) = \frac{1}{6}$에서 $P(A) = x + \frac{1}{6}$이다. 이를 교집합의 확률에 대입하면 $x\left(x + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$이다. 양변에 6을 곱해 정리하면 $6x^2 + x - 1 = 0$을 얻는다.

확률에 맞는 해 구하기: 인수분해하면 $(3x - 1)(2x + 1) = 0$이므로 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = -\frac{1}{2}$이다. **확률은 0 이상 1 이하**이므로 음의 해는 제외한다. 따라서 $P(B) = \frac{1}{3}$이며, 이때 $P(A) = \frac{1}{2}$로 두 확률의 곱과 차가 모두 주어진 조건을 만족한다.

구한 $P(B) = \frac{1}{3}$은 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 두 함수 $y = x^2 - 12 (x \geq 0)$와 $y = \sqrt{x + 12}$의 그래프는 한 점 (a, b)에서 만난다. $a + b$의 값은?

① 8

② 10

③ 12

④ 14

정답 1번

간단한 해설

교점에서 두 함수의 식을 빼면 $(a - b)(a + b + 1) = 0$이다. 두 좌표가 모두 0 이상이므로 **두 좌표가 같고**, 이를 교점 조건에 대입하면 $a = b = 4$이므로 $a + b = 8$이다.

계산 과정

교점 (a, b)는 두 함수의 식을 모두 만족하므로 $b = a^2 - 12$, $b = \sqrt{a + 12}$이다. 첫 함수의 정의역 조건에서 $a \geq 0$이고, 제곱근의 값은 음수가 아니므로 $b \geq 0$이다. 두 번째 식을 제곱하면 $b^2 = a + 12$이고, 첫 번째 식을 정리하면 $a^2 = b + 12$이다.

두 식을 빼면 $a^2 - b^2 = b - a$이다. 이를 인수분해하여 정리하면 $(a - b)(a + b + 1) = 0$이다. **두 좌표가 모두 0 이상**이어서 $a + b + 1 > 0$이므로, 반드시 $a - b = 0$, 즉 $a = b$이다.

$b = a$를 $b = a^2 - 12$에 대입하면 $a^2 - a - 12 = 0$이므로 $(a - 4)(a + 3) = 0$이다. $a \geq 0$이므로 음수인 -3은 제외되어 $a = 4$이고, $b = 4$이다. 실제로 $4^2 - 12 = 4$, $\sqrt{4 + 12} = 4$이므로 두 함수의 식을 모두 만족한다.

따라서 구하는 값은 $a + b = 4 + 4 = 8$이며, ①의 8과 일치한다.

NoteBase

문 10. 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $r(r \neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_4 - S_2 = a_2^2$이다. $S_4 = \frac{q}{p}$일 때, q의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수)

① 13

② 14

③ 15

④ 16

정답 1번

간단한 해설

부분합의 차 $S_4 - S_2$는 **셋째항과 넷째항의 합**이다. 이를 주어진 조건에 대입하면 공비는 $r = -\frac{2}{3}$이고, $S_4 = \frac{13}{81}$이므로 기약분수의 분자 q는 13이다.

계산 과정

등비수열의 각 항은 첫째항에 공비를 차례로 곱해 구한다. 따라서 $a_2 = \frac{r}{3}$, $a_3 = \frac{r^2}{3}$, $a_4 = \frac{r^3}{3}$이다. S_4에서 S_2를 빼면 첫째항과 둘째항이 없어지므로 $S_4 - S_2 = a_3 + a_4$이다.

조건 $S_4 - S_2 = a_2^2$에 각 항을 대입하면 $\frac{r^2}{3} + \frac{r^3}{3} = \frac{r^2}{9}$이다. **공비가 0이 아니므로** 양변을 r^2으로 나누고 3을 곱할 수 있다. 그러면 $1 + r = \frac{1}{3}$이므로 $r = -\frac{2}{3}$이다.

구한 공비를 차례로 곱하면 첫 네 항은 $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{9}$, $\frac{4}{27}$, $-\frac{8}{81}$이다. 이들을 더하고 분모를 81로 통일하면 $S_4 = \frac{27 - 18 + 12 - 8}{81} = \frac{13}{81}$이다.

13과 81은 서로소이므로 $p = 81$, $q = 13$이다. 따라서 구하는 q의 값은 13이며, ①에 해당한다.

NoteBase

문 11. 빨간 공 3개, 파란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공의 색이 다를 확률은?

① $\frac{2}{7}$
② $\frac{3}{7}$
③ $\frac{4}{7}$
④ $\frac{5}{7}$

정답 3번

간단한 해설

두 공의 색이 다르려면 **빨간 공과 파란 공을 하나씩** 꺼내야 한다. 전체 21가지 중 이에 해당하는 경우가 12가지이므로, 확률은 $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$이다.

계산 과정

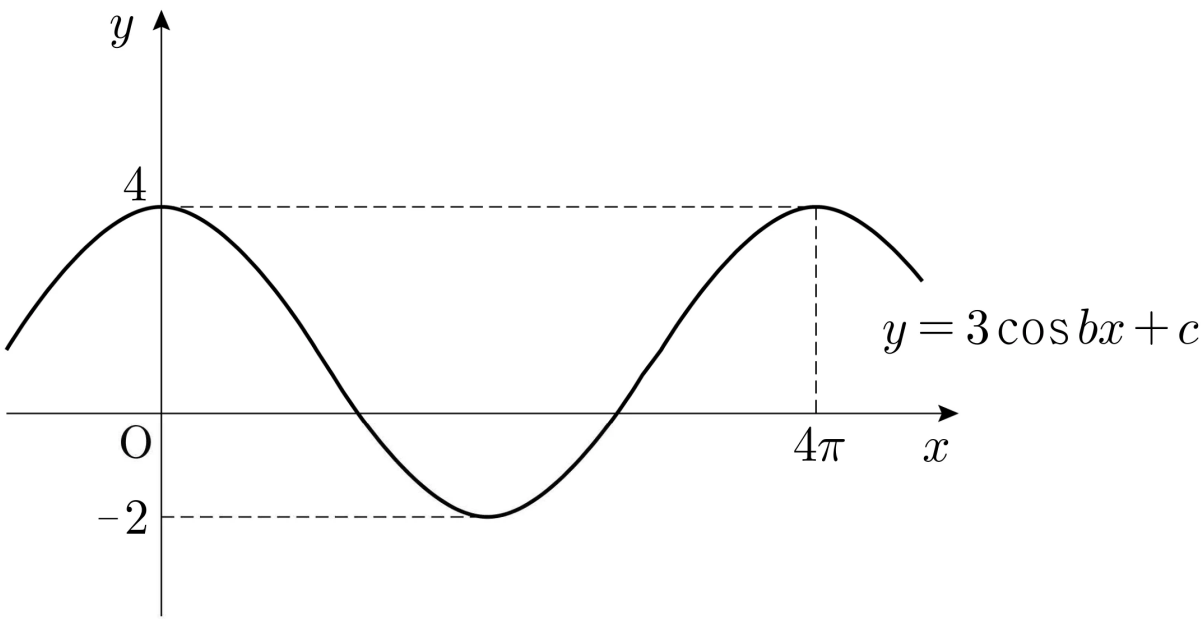
전체 경우의 수: 빨간 공 3개와 파란 공 4개를 합하면 공은 7개이다. 같은 색의 공도 각각 구별하여 세면, 임의로 뽑히는 두 공의 각 쌍은 나올 가능성이 같다. 2개를 동시에 꺼내므로 **뽑는 순서는 구별하지 않는다**. 순서를 구별하여 센 7×6가지에서는 같은 쌍을 두 번씩 세므로, 전체 경우의 수는 $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$가지이다.

색이 다른 경우의 수: 두 공의 색이 다르려면 빨간 공 1개와 파란 공 1개를 골라야 한다. 빨간 공을 고르는 방법은 3가지, 각 경우에 파란 공을 고르는 방법은 4가지이므로 $3 \times 4 = 12$가지이다. 색깔별로 하나씩 고르면 같은 쌍을 중복해서 세지 않으므로 2로 나누지 않는다.

확률 계산: 각 쌍이 나올 가능성이 같으므로, 색이 다른 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈다. 구하는 확률은 $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 함수 $y = 3\cos bx + c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 b, c에 대하여 $b + c$의 값은? (단, $b > 0$)



① 1
② $\frac{3}{2}$
③ 2
④ $\frac{5}{2}$

정답 2번

간단한 해설

그래프의 **최댓값과 최솟값의 중간 높이**가 1이므로 $c = 1$이다. **주기**가 4π이므로 $b = \frac{1}{2}$이며, $b + c = \frac{3}{2}$이다.

NoteBase

계산 과정

상수 c 구하기: $-1 \le \cos bx \le 1$이므로 함수의 최댓값은 $c+3$, 최솟값은 $c-3$이다. 따라서 c는 **최댓값과 최솟값의 중간 높이**이다. 그림에서 최댓값이 4, 최솟값이 −2이므로 $c = \frac{4+(-2)}{2} = 1$이다.

상수 b 구하기: 그림에서 이웃한 두 최댓점의 x좌표는 0과 4π이다. **이웃한 두 최댓점 사이의 x좌표 차가 한 주기**이므로 $T = 4\pi$이다. 코사인함수는 각이 2π만큼 증가할 때 한 번 반복되므로 $b > 0$에서 $bT = 2\pi$이다. 여기에 $T = 4\pi$를 대입하면 $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$이다.

두 상수의 합: $b + c = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$이므로 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 13. 부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < 1 + \log_{\frac{1}{2}}(8-x)$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

정답 3번

간단한 해설

밑이 $\frac{1}{2}$인 로그함수는 **감소함수**이므로 진수를 비교할 때 부등호 방향이 바뀐다. 진수 조건과 함께 정리하면 $2 < x < 8$이므로 이를 만족하는 정수는 5개이다.

계산 과정

1. 진수 조건: 로그가 정의되려면 **두 진수가 모두 양수**여야 한다. 따라서 $2x-1 > 0$, $8-x > 0$이므로 $\frac{1}{2} < x < 8$이다.

2. 우변을 하나의 로그로 정리: $1 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$이고, 같은 밑의 로그를 더하면 진수를 곱한다. 따라서 주어진 부등식은 $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}}\frac{8-x}{2}$이다.

3. 진수 비교: 밑이 0과 1 사이이므로 로그함수는 감소한다. 따라서 **로그값이 작을수록 진수는 크다**. 그러므로 $2x-1 > \frac{8-x}{2}$이고, 양변에 2를 곱하면 $4x-2 > 8-x$이다. 이를 정리하면 $5x > 10$, 즉 $x > 2$이다.

4. 정수의 개수: 진수 조건 $\frac{1}{2} < x < 8$과 $x > 2$를 동시에 만족하는 범위는 $2 < x < 8$이다. 이 범위의 정수는 3, 4, 5, 6, 7로 모두 5개이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$에 대하여 _x→ 1(x^2f(1)-f(x))/(x-1)의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

분자를 나누어 보면 주어진 극한은 $2f(1) - f'(1)$이다. **함숫값과 미분계수**를 대입하면 4 - 3 = 1이다.

계산 과정

먼저 $f(1) = 1 - 2 + 4 - 1 = 2$이다. 이 값은 극한식의 $f(1)$에 들어가는 상수이다.

분자는 $f(1)(x^2 - 1)$에서 $f(x) - f(1)$을 뺀 꼴로 나눌 수 있다. 두 항을 각각 $x - 1$로 나누면 첫째 항은 $f(1)\frac{x^2-1}{x-1} = 2(x + 1)$이다. 극한에서는 $x \neq 1$이므로 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$을 이용해 약분할 수 있고, 이 항의 극한값은 4이다.

둘째 항은 **미분계수의 정의**에 해당한다. 다항함수는 미분 가능하므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이다.
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$이므로 $f'(1) = 3$이다.

원래 식은 첫째 항에서 둘째 항을 빼는 식이므로 극한값은 4 - 3 = 1이다. 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. 원 $C_1 : x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$을 직선 $y = x$에 대하여 대칭 이동한 원을 C_2라 할 때, 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$
② $4\sqrt{2}$
③ $5\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{2}$

정답 4번

간단한 해설

직선 $y = x$에 대한 대칭 이동은 **두 좌표를 서로 바꾸므로**, 원의 중심 $(-2, 4)$는 $(4, -2)$로 옮겨진다. 두 중심 사이의 거리는 $6\sqrt{2}$이다.

계산 과정

원의 중심 구하기: 주어진 식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$이다. 원의 표준형 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$에서 중심은 (a, b)이므로, C_1의 중심을 A라 하면 $A(-2, 4)$이다.

대칭 이동한 중심 구하기: 직선 $y = x$에 대하여 대칭 이동하면 점 (a, b)는 (b, a)로 옮겨진다. 대칭 이동은 거리를 보존하므로 **원의 중심도 같은 대칭 이동을 한다**. 따라서 C_2의 중심을 B라 하면 $B(4, -2)$이다.

두 중심 사이의 거리 구하기: A에서 B로 갈 때 x좌표의 변화는 $4 - (-2) = 6$, y좌표의 변화는 $-2 - 4 = -6$이다. 두 점 사이의 거리는 이 좌표 차이를 두 직각변으로 하는 직각삼각형의 빗변 길이이므로, 피타고라스 정리에 따라 $AB = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$이다. 이 값은 ④의 $6\sqrt{2}$와 일치한다.

NoteBase

문 16. 두 확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $N(10, 3^2)$과 $N(m, 2^2)$을 따른다.
$P\left(10 \le X \le \frac{m+11}{2}\right) = P\left(\frac{m+11}{2} \le Y \le m\right)$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m > 11$)

① 14

② 15

③ 16

④ 17

정답 2번

간단한 해설

두 구간을 표준화하면 정규분포의 대칭성에 의해 **0에서 시작하는 구간의 길이**가 같아야 확률이 같다. 따라서 $\frac{m-9}{6} = \frac{m-11}{4}$이고, m = 15이다.

계산 과정

공통 경계값을 $a = \frac{m+11}{2}$라 두자. 조건 $m > 11$에 의해 $10 < a < m$이므로, X의 구간은 평균 10의 오른쪽에 있고 Y의 구간은 평균 m의 왼쪽에 있다.

X의 평균은 10, 표준편차는 3이므로 $\frac{X-10}{3}$은 표준정규분포를 따른다. 표준정규확률변수를 Z라 하면 $P(10 \le X \le a) = P\left(0 \le Z \le \frac{m-9}{6}\right)$이다. 여기서 $\frac{m-9}{6}$은 경계값 a가 X의 평균에서 표준편차의 몇 배만큼 떨어져 있는지를 나타낸다.

Y의 평균은 m, 표준편차는 2이므로 $\frac{Y-m}{2}$도 표준정규분포를 따른다. 따라서 P(a≤ Y≤ m)=P≤ft((11-m)/(4)≤ Z≤0)이다. 표준정규분포는 **0을 기준으로 좌우 대칭**이므로 이 확률은 $P\left(0 \le Z \le \frac{m-11}{4}\right)$와 같다.

양수 t에 대해 $P(0 \le Z \le t)$는 t가 커질수록 증가한다. 그러므로 두 확률이 같으려면 $\frac{m-9}{6} = \frac{m-11}{4}$이어야 한다. 양변에 12를 곱하면 $2(m-9) = 3(m-11)$이고, $2m - 18 = 3m - 33$에서 m = 15를 얻는다. 이는 조건 $m > 11$을 만족하며, ②의 15에 해당한다.

NoteBase

문 17. 함수 f(x)=casesx+1 & (x<1)\\3ax-b & (1≤ x<3)\+a & (x≥ 3)cases가 모든 실수 x에서 연속일 때, ∫ _-2^3(ax+b) dx의 값은? (단, a, b는 상수)

① 15

② 20

③ 25

④ 30

정답 3번

간단한 해설

구간이 바뀌는 두 점에서 **좌극한·우극한·함숫값이 같아야** 하므로 $a = 2, b = 4$이다. 이를 적분할 식에 대입하면 $\int_{-2}^{3}(2x + 4)dx = 25$이다.

계산 과정

각 구간의 식은 다항식이므로 구간 내부에서는 연속이다. 따라서 모든 실수에서 연속이려면 **식이 바뀌는 두 경계점** $x = 1, x = 3$에서 좌극한·우극한·함숫값이 같아야 한다.

$x = 1$에서의 연속 조건: 왼쪽 식 $x + 1$의 극한은 2이고, 오른쪽 식 $3ax - b$의 극한과 함숫값은 모두 $3a - b$이다. 따라서 $3a - b = 2$이다.

$x = 3$에서의 연속 조건: 왼쪽 식 $3ax - b$의 극한은 $9a - b$이고, 오른쪽 식 $bx + a$의 극한과 함숫값은 모두 $3b + a$이다. 따라서 $9a - b = 3b + a$이며, 정리하면 $b = 2a$이다.

상수 결정: $b = 2a$를 $3a - b = 2$에 대입하면 $3a - 2a = 2$이므로 $a = 2$이다. 이에 따라 $b = 4$이고, 적분할 식은 $ax + b = 2x + 4$가 된다.

정적분 계산: 구하는 것은 **구간별로 정의된 함수 자체의 적분이 아니라** $ax + b$의 적분이다. $2x + 4$의 원시함수는 $x^2 + 4x$이므로 $\int_{-2}^{3}(2x + 4)dx = [x^2 + 4x]_{-2}^{3}$이다. 위끝 3을 대입한 값은 $9 + 12 = 21$이고, 아래끝 -2를 대입한 값은 $4 - 8 = -4$이다. 두 값의 차는 $21 - (-4) = 25$이므로 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 원 $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 20 = 0$과 직선 $2x + y + a = 0$이 만나도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

정답 4번

간단한 해설

원과 직선이 만나려면 **중심에서 직선까지의 거리가 반지름 이하**여야 한다. 이 조건에서 $|a - 2| \le 5$이므로, a의 최댓값은 7이다.

계산 과정

원의 방정식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$이다. 따라서 중심은 $(-3, 4)$, 반지름은 $\sqrt{5}$이다.

중심에서 직선 $2x + y + a = 0$까지의 거리를 d라 하자. 점과 직선 사이의 거리 공식에 중심의 좌표를 대입하면 $d = \frac{|2 \cdot (-3) + 4 + a|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|a - 2|}{\sqrt{5}}$이다.

원과 직선이 만나려면 d가 반지름 이하이어야 한다. 거리가 반지름보다 작으면 두 점에서 만나고, 같으면 한 점에서 접하므로 **접하는 경우도 포함**한다. 따라서 $\frac{|a - 2|}{\sqrt{5}} \le \sqrt{5}$, 즉 $|a - 2| \le 5$이다.

절댓값 부등식을 풀면 $-5 \le a - 2 \le 5$이므로 $-3 \le a \le 7$이다. $a = 7$일 때도 직선이 원에 접하므로 최댓값은 7이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. _x→ 3(1)/(x^2-9) ∫ _3^x(t^2-2t+3)dt의 값은?

① −2

② −1

③ 1

④ 2

정답 3번

간단한 해설

적분값을 $x-3$으로 나눈 극한은 **피적분함수의 $t=3$에서의 값**인 6이다. 분모의 나머지 인자 $x+3$도 6으로 수렴하므로 전체 극한은 1이다.

계산 과정

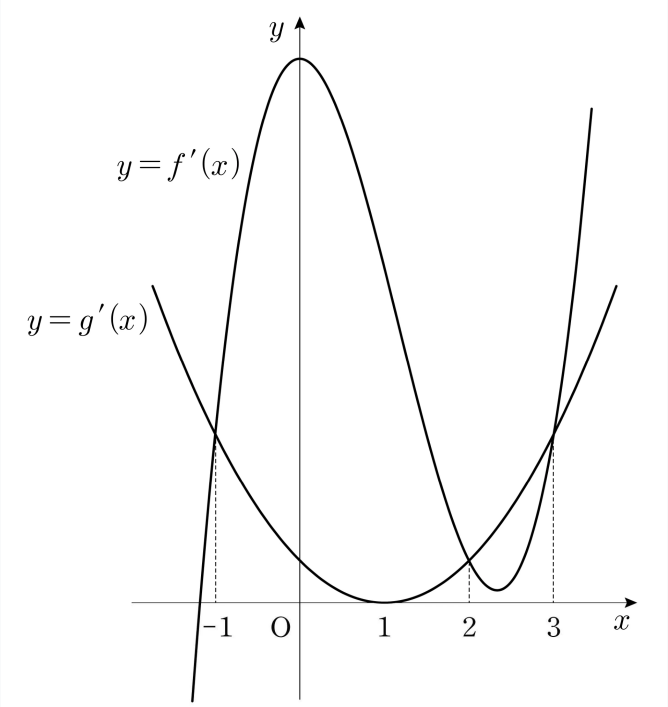
① 적분함수의 미분: $F(x)=\int_3^x (t^2-2t+3)dt$로 놓으면 $F(3)=0$이다. 피적분함수가 다항함수이므로 연속이며, **미적분의 기본정리**에 따라 $F'(x)=x^2-2x+3$이다. 따라서 $F'(3)=9-6+3=6$이다.

② 미분계수 꼴로 변형: 분모는 $x^2-9=(x-3)(x+3)$으로 인수분해된다. $F(3)=0$이므로 주어진 식에서 극한을 취하는 대상은 $\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}$으로 쓸 수 있다. 여기서 첫 번째 인자의 극한은 **3에서의 미분계수** $F'(3)$이다.

③ 극한값 계산: $x\to 3$일 때 첫 번째 인자는 6으로, 두 번째 인자는 $\frac{1}{6}$으로 수렴한다. 따라서 구하는 극한값은 $6\cdot\frac{1}{6}=1$이며, 이는 선택지 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 사차함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $y=f'(x)$와 $y=g'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $h(x)$가 극대가 되는 x의 값은?



① −1

② 1

③ 2

④ 3

정답 3번

간단한 해설

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 두 그래프의 높이 차이로 증가·감소를 판단한다. $x=2$를 지날 때 $h'(x)$가 **양수에서 음수로 바뀌어** $h(x)$가 극대가 된다.

NoteBase

계산 과정

극대 조건: $h(x) = f(x) - g(x)$를 미분하면 $h'(x) = f'(x) - g'(x)$이다. 따라서 같은 x에서 f'의 그래프가 g'의 그래프보다 위에 있으면 $h'(x) > 0$이어서 h가 증가하고, 아래에 있으면 $h'(x) < 0$이어서 감소한다. 극대가 되려면 그 점의 좌우에서 **증가하다가 감소해야 한다**.

극값 후보: 두 그래프의 교점에서는 $f'(x) = g'(x)$이므로 $h'(x) = 0$이다. 그림에서 교점의 x좌표는 $-1, 2, 3$이다. $x = 1$은 $g'(x) = 0$인 점이지만 두 그래프의 교점은 아니므로 $h'(x) = 0$인 점이 아니다.

도함수의 부호: $x < -1$에서는 f'의 그래프가 g'의 그래프보다 아래에 있으므로 $h'(x) < 0$이다. $-1 < x < 2$에서는 위에 있으므로 $h'(x) > 0$, $2 < x < 3$에서는 아래에 있으므로 $h'(x) < 0$, $x > 3$에서는 다시 위에 있으므로 $h'(x) > 0$이다.

극대 위치: $x = -1$과 $x = 3$에서는 $h'(x)$가 음수에서 양수로 바뀌므로 h가 극소가 된다. $x = 2$에서는 양수에서 음수로 바뀌므로 h가 극대가 된다. 따라서 구하는 값은 2이며, ③에 해당한다.

NoteBase