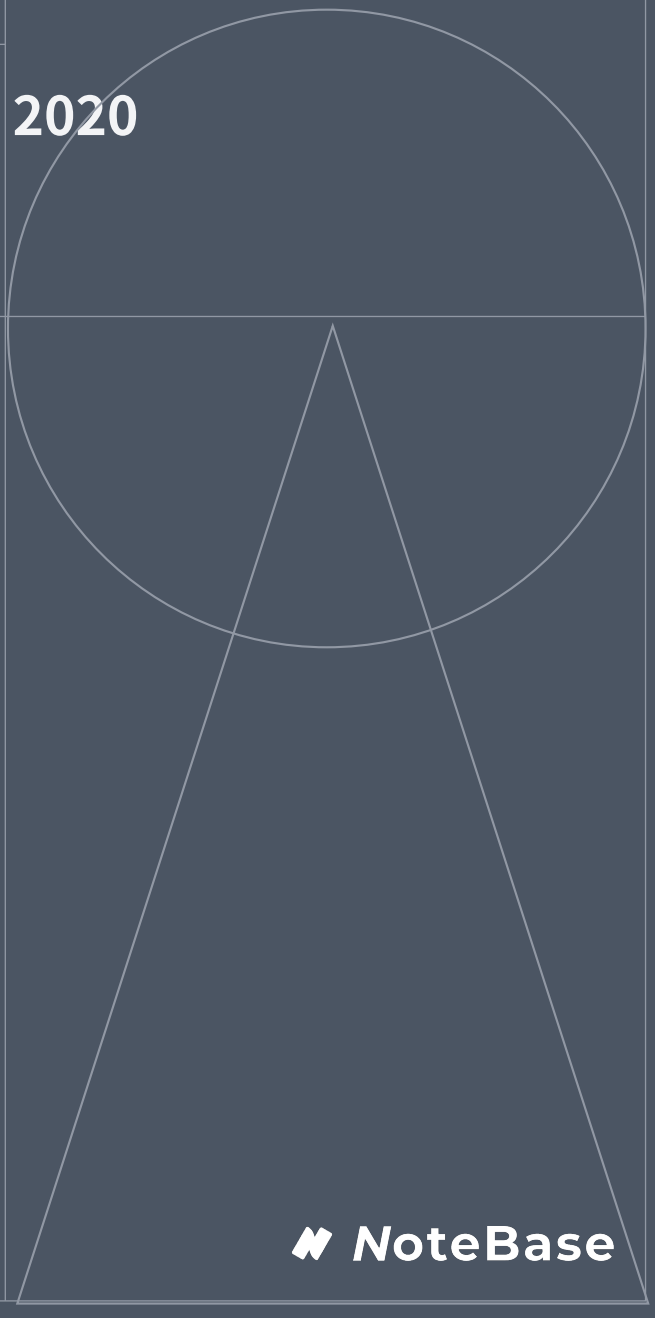
# 기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2020



NoteBase

# 기출OX 해설집

## 공무원/국가직/9급 · 수학 · 2020

### 공무원/국가직/9급 · 수학 · 2020

**문 1. 실수 $a, b$에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$의 한 근이 $1 + i$일 때, $a + b$의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)**

① 1

② 2

③ 3

④ 4

**정답 2번**

**간단한 해설**

주어진 근을 대입하면 **실수부와 허수부가 각각 0**이어야 한다. 이 조건에서 $b = 6, a = -4$를 얻으므로 $a + b = 2$이다.

**계산 과정**

$i^2 = -1$이므로 $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$이고, $(1 + i)^3 = 2i(1 + i) = -2 + 2i$이다.

$1 + i$가 방정식의 근이므로 원래 식에 대입한 값은 0이다. 위 계산을 이용해 실수항과 허수항을 모으면 $(b - 6) + (2 + 2a + b)i = 0$을 얻는다. $a, b$가 실수이므로 **실수부와 허수부가 모두 0**이어야 하며, 따라서 $b - 6 = 0, 2 + 2a + b = 0$이다.

첫 번째 식에서 $b = 6$이다. 이를 두 번째 식에 대입하면 $2 + 2a + 6 = 0$이므로 $a = -4$이다. 따라서 구하는 값은 $a + b = -4 + 6 = 2$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 2. 집합 $A, B$에 대하여 $n(A) = 39, n(B) = 27, n(A \cup B) = 54$일 때, $n((A - B) \cup (B - A))$는? (단, $n(X)$는 집합 $X$의 원소의 개수)**

① 42

② 44

③ 46

④ 48

**정답 1번**

**간단한 해설**

구하는 집합은 두 집합 중 **한쪽에만 속하는 원소**를 모은 것이므로, 합집합에서 교집합을 제외하면 된다. 교집합의 원소 수는 12개이므로 구하는 값은 54 − 12 = 42이다.

**계산 과정**

먼저 두 집합에 공통으로 속하는 원소 수를 구한다. $n(A) + n(B)$에서는 **교집합의 원소를 두 번 세므로**, 합집합의 원소 수를 빼면 교집합의 원소 수가 남는다. 따라서 $n(A \cap B) = 39 + 27 - 54 = 12$이다.

$A - B$는 A에만 속하는 원소의 집합이고, $B - A$는 B에만 속하는 원소의 집합이다. 각 집합에서 공통 원소 12개를 빼면 $n(A - B) = 39 - 12 = 27$, $n(B - A) = 27 - 12 = 15$이다.

두 차집합은 **서로 겹치는 원소가 없으므로** 원소 수를 그대로 더한다. 따라서
$n((A - B) \cup (B - A)) = 27 + 15 = 42$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 7$, $a_3 + a_4 = 31$이 성립할 때, 공차는?**

① 5

② 6

③ 7

④ 8

**정답 2번**

**간단한 해설**

두 항이 각각 두 자리씩 뒤로 이동하면 합은 공차의 4배만큼 증가한다. 두 합의 차가 24이므로 **공차는 6**이다.

**계산 과정**

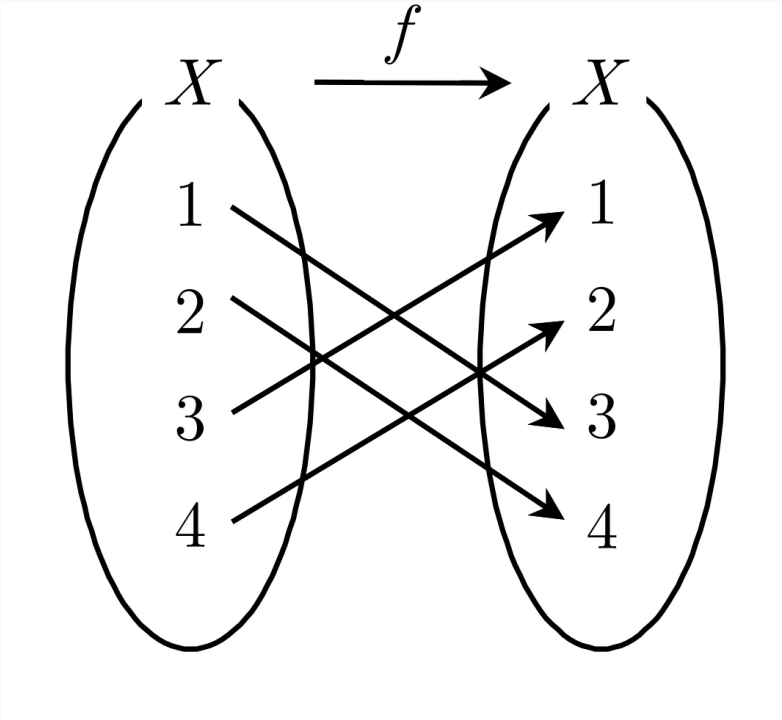
공차를 $d$라 하면, 등차수열에서는 한 항 뒤로 갈 때마다 $d$씩 증가한다. 따라서 **두 항 뒤로 가면** $2d$가 증가하므로 $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_2 + 2d$이다.

두 합을 비교하면 각 항에서 $2d$씩 증가하므로, 합의 증가량은 $2d + 2d = 4d$이다. 주어진 두 합의 차는 $31 - 7 = 24$이므로 $4d = 24$이다. 이를 풀면 $d = \frac{24}{4} = 6$이다.

따라서 공차는 6이며, 선택지 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 4. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(2) + f^{-1}(1)$의 값은?**




① 3

② 4

③ 5

④ 6

**정답 3번**

**간단한 해설**

합성함수는 **함수를 두 번 연속 적용**하므로 $2 \to 4 \to 2$에서 $(f \circ f)(2) = 2$이다. 역함수는 **대응을 거꾸로** 읽으므로 $f^{-1}(1) = 3$이며, 두 값의 합은 $2 + 3 = 5$이다.

NoteBase

**계산 과정**

합성함수의 값: $(f \circ f)(2) = f(f(2))$는 2에 함수를 적용한 뒤, **그 결과에 다시 함수를 적용**한 값이다. 그림에서 2의 화살표는 4로, 4의 화살표는 2로 향하므로 $f(2) = 4$, $f(4) = 2$이다. 따라서 $(f \circ f)(2) = f(4) = 2$이다.

역함수의 값: 그림에서 왼쪽의 각 원소는 오른쪽의 서로 다른 원소에 대응하고, 오른쪽의 모든 원소가 한 번씩 대응되므로 역함수가 존재한다. $f^{-1}(1)$은 **함숫값이 1이 되는 원래 원소**이다. 3에서 1로 향하는 화살표가 있으므로 $f(3) = 1$이고, 이를 거꾸로 읽으면 $f^{-1}(1) = 3$이다.

두 값의 합: $2 + 3 = 5$이므로 구하는 값은 ③의 5이다.

NoteBase

**문 5.** $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$**에서** $3 - 5\cos^2\theta + \frac{4}{1+5\sin^2\theta}$**가** $\theta = \alpha$**일 때 최솟값을 가진다. 이때** $\sin\alpha$**의 값은?**

① $\frac{1}{\sqrt{3}}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{\sqrt{5}}$
④ $\frac{1}{\sqrt{6}}$

**정답 3번**

**간단한 해설**

$t = 1 + 5\sin^2\theta$로 놓으면 주어진 식은 $t + \frac{4}{t} - 3$이 된다. **산술평균과 기하평균의 관계**에 따라 t = 2일 때 최솟값을 가지므로, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$이다.

**계산 과정**

1. 치환과 범위: $t = 1 + 5\sin^2\theta$로 놓는다. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < \sin^2\theta < 1$이고, 따라서 $1 < t < 6$이다.

2. 식 정리: $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$이므로 $3 - 5\cos^2\theta = -2 + 5\sin^2\theta = t - 3$이다. 분모도 t이므로 주어진 식은 $t + \frac{4}{t} - 3$으로 바뀐다.

3. 최솟값 조건: t가 양수이므로 **두 양수의 합에 산술평균과 기하평균의 관계**를 적용할 수 있다. $t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 4$이므로 주어진 식은 1 이상이다. 등호는 $t = \frac{4}{t}$, 즉 t = 2일 때 성립한다. 이 값은 $1 < t < 6$에 속하므로 실제 최솟값은 1이다.

4. 구하는 값: $\theta = \alpha$일 때 $1 + 5\sin^2\alpha = 2$이므로 $\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$이다. **제1사분면에서 사인값은 양수**이므로 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 6. 방정식 $\log_3 x = 3\log_x 3 + 2$의 두 근을 $\alpha, \beta$라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}$의 값은? (단, $\alpha > \beta$)**

① 30

② 31

③ 32

④ 33

**정답 1번**

**간단한 해설**

밑과 진수를 맞바꾼 두 로그는 **서로 역수**이므로, $t = \log_3 x$로 치환하면 이차방정식으로 바꿀 수 있다. 두 근은 $\alpha = 27, \beta = \frac{1}{3}$이므로 $\alpha + \frac{1}{\beta} = 30$이다.

**계산 과정**

로그의 진수와 밑의 조건에 따라 $x > 0, x \neq 1$이어야 한다. 밑변환 공식을 쓰면 $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$이다. $t = \log_3 x$로 놓으면 $t \neq 0$이고, 주어진 방정식은 $t = \frac{3}{t} + 2$가 된다.

**0이 아닌** $t$를 양변에 곱하면 $t^2 = 3 + 2t$이다. 이를 정리하여 인수분해하면 $t^2 - 2t - 3 = 0$, $(t-3)(t+1) = 0$이므로 $t = 3$ 또는 $t = -1$이다. 이 값들은 원래 미지수 $x$가 아니라 로그값 $\log_3 x$이다.

$t = 3$이면 $\log_3 x = 3$에서 $x = 3^3 = 27$이고, $t = -1$이면 $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$이다. 두 값 모두 로그의 조건을 만족한다. **큰 근이** $\alpha$이므로 $\alpha = 27, \beta = \frac{1}{3}$이다.

따라서 $\alpha + \frac{1}{\beta} = 27 + 3 = 30$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 7. 연립부등식 cases≤ft((1)/(4))^x ≤ 8^2-x\ _√(3)(7-x) ≤ _3(2x+1)cases 을 만족시키는 모든 정수 $x$의 합은?**

① 12

② 13

③ 14

④ 15

**정답 4번**

**간단한 해설**

두 부등식과 **로그의 진수 조건**을 함께 적용하면 공통 범위는 $4 \le x \le 6$이다. 이 범위의 정수는 4, 5, 6이므로 합은 15이다.

**계산 과정**

진수 조건: 로그가 정의되려면 **진수가 모두 양수**여야 한다. 따라서 $7-x>0$, $2x+1>0$에서 $-\frac{1}{2} < x < 7$이다.

첫 번째 부등식: 양변의 밑을 2로 통일하면 $2^{-2x} \le 2^{6-3x}$이다. 밑 2가 1보다 크므로 지수의 대소관계가 그대로 유지되어 $-2x \le 6-3x$, 즉 $x \le 6$을 얻는다.

두 번째 부등식의 밑 변환: $\log_{\sqrt{3}}(7-x) = 2\log_3(7-x)$이므로 주어진 부등식은 $\log_3((7-x)^2) \le \log_3(2x+1)$로 바뀐다. 진수 조건을 만족하고 밑 3이 1보다 크므로 $(7-x)^2 \le 2x+1$과 같다.

두 번째 부등식의 해: 전개하여 정리하면 $x^2-16x+48 \le 0$, 즉 $(x-4)(x-12) \le 0$이다. 따라서 $4 \le x \le 12$이고, 여기에 **진수 조건을 다시 적용**하면 $4 \le x < 7$이다.

공통 범위와 정수의 합: $x \le 6$과 $4 \le x < 7$을 동시에 만족하는 범위는 $4 \le x \le 6$이다. 해당 정수는 4, 5, 6이므로 합은 $4+5+6=15$이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 8. A, B, C, D 네 명이 선물을 하나씩 준비하여 임의로 하나씩 갖기로 할 때, 네 명 모두 다른 사람이 준비한 선물을 선택할 확률은?**

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{3}{8}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$

**정답 2번**

**간단한 해설**

전체 배분 24가지 중 **자기 선물을 받는 사람이 한 명도 없는 경우**는 9가지이므로, 구하는 확률은 $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$이다.

**계산 과정**

전체 경우의 수: 선물은 준비한 사람에 따라 구별한다. A, B, C, D가 서로 다른 선물을 하나씩 받는 방법은 $4! = 24$가지이며, 임의로 나누므로 각 배분이 일어날 가능성은 같다.

A가 받는 선물: A는 B, C, D의 선물 중 하나를 받아야 하므로 3가지이다. 세 경우는 사람의 이름만 바꾸면 같은 구조이므로, 먼저 A가 B의 선물을 받는 경우를 센다.

B가 A의 선물을 받는 경우: A와 B가 서로의 선물을 받았으므로 C와 D에게는 C, D의 선물이 남는다. 두 사람도 자기 선물을 피하려면 **서로의 선물을 받아야 하므로** 1가지이다.

B가 A의 선물을 받지 않는 경우: B는 C 또는 D의 선물을 받을 수 있다. B가 C의 선물을 받으면 C는 D의 선물, D는 A의 선물을 받아야 한다. B가 D의 선물을 받으면 C가 자기 선물을 피하도록 C에게 A의 선물, D에게 C의 선물을 주어야 한다. 따라서 이 경우는 2가지이다.

확률: A가 B의 선물을 받을 때 조건을 만족하는 배분은 $1 + 2 = 3$가지이다. A가 C 또는 D의 선물을 받는 경우도 각각 3가지이므로, 네 명 모두 다른 사람의 선물을 받는 배분은 $3 \times 3 = 9$가지이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 9. 이차방정식 $ax^2-(a-3)x+a-2=0$의 두 근을 $\alpha, \beta$라고 하자. $\alpha, \beta$가 모두 자연수일 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, $a$는 정수)**

① 2

② 3

③ 4

④ 5

**정답 3번**

**간단한 해설**

두 근이 자연수이므로 **근의 합과 곱이 모두 자연수**여야 한다. 근과 계수의 관계에 이 조건을 적용하면 $a=-1$이고, $\alpha+\beta=4$이다.

**계산 과정**

이차방정식이므로 $a\neq 0$이다. 근과 계수의 관계에 따라 두 근의 합은 $\alpha+\beta=\frac{a-3}{a}=1-\frac{3}{a}$, 곱은 $\alpha\beta=\frac{a-2}{a}=1-\frac{2}{a}$이다.

두 근이 자연수이므로 $\alpha+\beta\geq 2$이다. $a>0$이면 $1-\frac{3}{a}<1$이므로 이 조건을 만족하지 못한다. 따라서 $a<0$이다. 또한 근의 합이 정수이므로 $\frac{3}{a}$도 정수여야 한다. 주어진 $a$가 정수이므로 **3의 음의 약수**인 $a=-1$ 또는 $a=-3$만 가능하다.

$a=-3$이면 $\alpha\beta=1-\frac{2}{-3}=\frac{5}{3}$이다. 이는 **자연수인 두 근의 곱이 정수**라는 조건에 어긋나므로 제외한다.

남은 $a=-1$을 대입하면 $-x^2+4x-3=0$이다. 양변에 $-1$을 곱해 인수분해하면 $(x-1)(x-3)=0$이므로 두 근은 1과 3으로, 모두 자연수이다. 따라서 $\alpha+\beta=4$이며, 선택지 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 10. 삼차방정식 $x^3-(k+1)x^2+2kx-k=0$이 5보다 작은 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 $k$의 합은?**

① 5

② 7

③ 9

④ 11

**정답 4번**

**간단한 해설**

삼차식을 인수분해하면 한 근은 1이며, 나머지 두 근에 **서로 다르고 5보다 작다는 조건**을 적용하면 $4<k<\frac{25}{4}$이다. 가능한 자연수는 5와 6이므로 합은 11이다.

**계산 과정**

1. 주어진 삼차식을 인수분해하면 $(x-1)(x^2-kx+k)=0$이다. 따라서 한 근은 1이고, 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-kx+k=0$의 근이다. 이 이차식에 1을 대입한 값은 1이므로, 이차방정식의 근이 1과 겹치는 경우는 없다.

2. 세 근이 모두 서로 다른 실근이 되려면 **이차방정식의 판별식이 양수**여야 한다. 판별식은 $D=k^2-4k=k(k-4)$이다. 자연수 $k$는 양수이므로 $D>0$에서 $k>4$를 얻는다.

3. 고정된 근 1은 이미 5보다 작다. 따라서 나머지 두 근 중 **큰 근이 5보다 작으면** 세 근이 모두 5보다 작다. 근의 공식에 따라 큰 근을 $r=\frac{k+\sqrt{k^2-4k}}{2}$라 하면, $r<5$는 $\sqrt{k^2-4k}<10-k$와 같다.

4. 위 부등식이 성립하려면 우변이 양수여야 하므로 $k<10$이다. 이 조건에서 양변을 제곱하면 $k^2-4k<(10-k)^2$이고, 정리하면 $16k<100$, 즉 $k<\frac{25}{4}$이다. 이 범위에서는 $k<10$도 자동으로 만족하므로, 판별식 조건까지 합친 범위는 $4<k<\frac{25}{4}$이다.

5. 이 범위에 속하는 자연수는 5와 6이다. 그 합은 5 + 6 = 11로, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 11.** $0 < x < 2\pi$**에서 방정식** $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$**의 모든 근의 합은?**

① $\frac{\pi}{2}$

② $\pi$

③ $\frac{3}{2}\pi$

④ $2\pi$

**정답 2번**

**간단한 해설**

주어진 방정식은 **사인값의 범위**를 고려하면 $\sin x = \frac{1}{2}$로 좁혀진다. 주어진 구간에서 두 근은 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$이므로 합은 $\pi$이다.

**계산 과정**

삼각함수의 기본 관계식 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$를 이용해 **사인만의 식으로 통일**한다. 주어진 방정식은 $2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x = 0$이고, 이를 정리하면 $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$이다.

인수분해하면 $(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = -2$이다. 그런데 **사인값은 −1 이상 1 이하**이므로 $\sin x = -2$는 불가능하다.

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$이고, 사인값은 제1사분면과 제2사분면에서 양수이다. 따라서 $0 < x < 2\pi$에서 가능한 근은 $x = \frac{\pi}{6}$과 $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ 두 개이다.

모든 근의 합은 $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 12. 서로 다른 크기의 주사위 2개를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 합이 6 또는 10일 확률은?**

① $\frac{1}{9}$
② $\frac{2}{9}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$

**정답 2번**

**간단한 해설**

두 주사위의 눈을 구별하면 전체 36가지 중 **합이 6인 경우는 5가지, 합이 10인 경우는 3가지**이다. 두 경우는 겹치지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{5+3}{36} = \frac{2}{9}$이다.

**계산 과정**

두 주사위의 눈을 (작은 주사위의 눈, 큰 주사위의 눈)으로 나타낸다. 각 주사위에서 1부터 6까지의 눈이 나올 수 있으므로 전체 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$가지이며, 각 결과가 나올 확률은 같다. **크기가 달라 두 주사위를 구별하므로** (1, 5)와 (5, 1)은 서로 다른 결과이다.

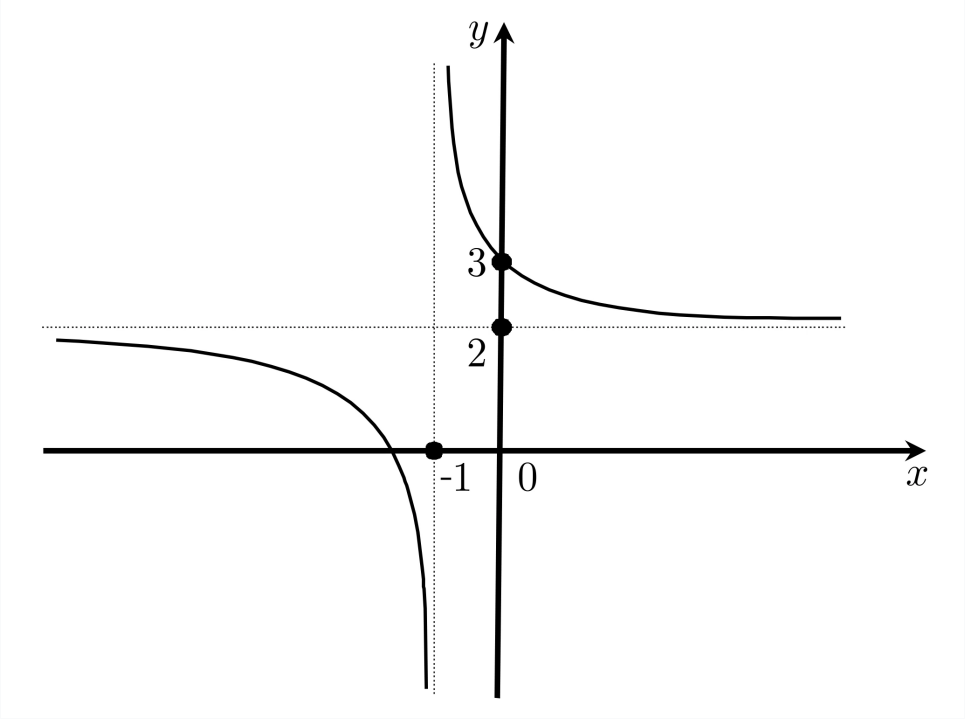
합이 6인 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지이다.

합이 10인 경우는 (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지이다.

한 번 던져 나온 눈의 합이 **6이면서 동시에 10일 수는 없으므로** 두 경우의 수를 더한다. 조건에 맞는 결과는 $5 + 3 = 8$가지이며, 이를 전체 경우의 수로 나누면 확률은 $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$이다. 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 13. 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\frac{bx+c}{x+a}$의 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=2$이고, 그 그래프는 점 $(0,3)$을 지난다. 이때 $a+b+c$의 값은? (단, $a, b, c$는 상수)**




① 5

② 6

③ 7

④ 8

**정답 2번**

**간단한 해설**

점근선 $x=-1, y=2$에서 각각 $a=1, b=2$를 얻는다. **점 (0, 3)을 지난다는 조건**을 대입하면 $c=3$이므로 구하는 합은 6이다.

NoteBase

**계산 과정**

수직점근선으로 a 구하기: 수직점근선에서는 **분모가 0**이 되어야 한다. $x + a = 0$에서 $x = -a$이고, 주어진 수직점근선이 $x = -1$이므로 $a = 1$이다.

수평점근선으로 b 구하기: 주어진 함수는 $f(x) = b + \frac{c - ab}{x + a}$로 나타낼 수 있다. x의 절댓값이 커지면 분수 부분이 0에 가까워지므로 **수평점근선**은 $y = b$이다. 따라서 $b = 2$이다.

지나는 점으로 c 구하기: 점 $(0, 3)$을 지나므로 $f(0) = 3$이다. 원래 함수에 $x = 0$과 $a = 1$을 대입하면 $f(0) = \frac{c}{a} = \frac{c}{1} = 3$이므로 $c = 3$이다.

세 상수의 합: $a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$이므로 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 14. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(x) = 2f(x) + \frac{1}{3}x^3$일 때, $f(1)$의 값은?**

① 11

② 12

③ 13

④ 14

**정답 3번**

**간단한 해설**

부정적분의 양변을 미분하면 $f(x) = 2f\prime(x) + x^2$이다. **다항식의 계수 비교**로 $f(x) = x^2 + 4x + 8$을 얻으므로 $f(1) = 13$이다.

**계산 과정**

1. 부정적분 관계를 미분한다. $F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로 $F\prime(x) = f(x)$이다. 주어진 식의 양변을 미분하면 $f(x) = 2f\prime(x) + x^2$을 얻는다.

2. 다항함수의 차수를 정한다. 위 식을 정리하면 $f(x) - 2f\prime(x) = x^2$이다. 상수함수로는 이 식을 만족시킬 수 없으며, 상수가 아닌 다항함수는 미분하면 차수가 한 단계 낮아진다. 따라서 좌변의 **최고차항은 미분항에 의해 없어지지 않으므로** $f(x)$는 이차다항함수이다.

3. 계수를 비교한다. $f(x) = ax^2 + bx + c$로 놓으면 $f\prime(x) = 2ax + b$이다. 이를 미분하여 얻은 관계식에 대입하면 $ax^2 + bx + c = x^2 + 4ax + 2b$이다. 이 등식이 모든 실수 $x$에서 성립하므로 같은 차수의 계수가 같아야 한다. 이차항에서 $a = 1$, 일차항에서 $b = 4a = 4$, 상수항에서 $c = 2b = 8$을 얻는다.

4. 함수값을 구한다. 따라서 $f(x) = x^2 + 4x + 8$이고, $f(1) = 1 + 4 + 8 = 13$이다. 이 값은 ③의 13과 일치한다.

NoteBase

**문 15. 함수 $f(x) = 4x^3 + 1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, ∫ _1^33g(x) dx의 값은?**

① 44

② 46

③ 48

④ 50

**정답 3번**

**간단한 해설**

역함수 관계를 이용해 $x = f(t)$로 **치환적분**하면, 구하려는 적분은 $\int_0^2 12t^3 dt$로 바뀐다. 이 정적분의 값은 48이다.

**계산 과정**

$f(x) = 4x^3 + 1$은 실수 전체에서 증가하므로 역함수를 갖는다. **역함수 관계**에 따라 $t = g(x)$로 놓으면 $x = f(t) = 4t^3 + 1$이다.

$f(0) = 1, f(2) = 33$이므로, $x$의 적분 구간 1부터 33은 $t$의 구간 0부터 2로 바뀐다. 또한 $x = 4t^3 + 1$을 미분하면 $dx = 12t^2 dt$이다. 치환할 때는 **적분 구간과 미분요소도 함께 바꾼다**.

$g(x) = t$를 대입하여 치환적분하면 다음과 같다.
$\int_1^{33} g(x)dx = \int_0^2 12t^3 dt$
$12t^3$의 한 부정적분은 $3t^4$이므로, 위 적분은 $[3t^4]_0^2 = 48$이다.

구하는 정적분의 값은 48이며, 선택지 ③에 해당한다.

NoteBase

**문 16. 함수 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 10$이 $x = a$에서 극솟값 $b$를 가질 때, $a + b$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수)**

① 3

② 5

③ 7

④ 9

**정답 1번**

**간단한 해설**

도함수의 부호가 **음수에서 양수로 바뀌는** 지점은 $x = 1$이므로 $a = 1$이다. 이때 극솟값은 $b = f(1) = 2$이므로 $a + b = 3$이다.

**계산 과정**

극값의 후보 구하기: 다항함수는 모든 실수에서 미분 가능하므로 극값을 갖는 점에서는 도함수가 0이다. 주어진 함수를 미분하면 $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$이고, 인수분해하면 $f'(x) = 3(x + 5)(x - 1)$이다. 따라서 $f'(x) = 0$의 해는 $x = -5$, $x = 1$이다.

극솟값을 갖는 지점 판별하기: $x < -5$에서는 두 인수가 모두 음수이므로 $f'(x) > 0$, $-5 < x < 1$에서는 두 인수의 부호가 달라 $f'(x) < 0$, $x > 1$에서는 두 인수가 모두 양수이므로 $f'(x) > 0$이다. 따라서 $x = -5$에서는 증가하다 감소하여 극댓값을 갖고, $x = 1$에서는 **감소하다 증가하여 극솟값**을 갖는다. 그러므로 $a = 1$이다.

극솟값과 합 구하기: $b$는 극솟값을 갖는 지점의 함수값이므로 $b = f(1) = 1 + 6 - 15 + 10 = 2$이다. 따라서 $a + b = 1 + 2 = 3$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 17. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = 4$와 직선 $ax + by + 5 = 0$이 두 점 $A$, $B$에서 만난다. 선분 $AB$를 한 변으로 하는 정삼각형이 원 $x^2 + y^2 = 4$에 내접하도록 하는 정수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$의 개수는?**

① 4

② 8

③ 12

④ 16

**정답 3번**

**간단한 해설**

원에 내접한 정삼각형은 **외심에서 한 변까지의 거리가 반지름의 절반**이므로, 원점과 직선 사이의 거리는 1이다. 따라서 $a^2 + b^2 = 25$를 만족하는 정수 순서쌍을 세면 12개이다.

**계산 과정**

원의 중심을 $O(0, 0)$, 선분 $AB$의 중점을 $M$이라 하면 반지름은 2이고 $OM$은 직선 $AB$에 수직이다.
정삼각형에서는 외심과 무게중심이 일치하며, 무게중심은 높이를 꼭짓점에서 2:1로 나눈다. 따라서 **외심에서 변까지의 거리는 외접원의 반지름의 절반**이므로 $OM = 1$이다. 반대로 중심에서 거리가 1인 현은 길이가 $2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$이므로, 반지름이 2인 이 원에 내접한 정삼각형의 한 변이 될 수 있다.

원점에서 직선 $ax + by + 5 = 0$까지의 거리에 점과 직선 사이의 거리 공식을 적용하면 $\frac{5}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$이다. 이를 정리하면 $a^2 + b^2 = 25$를 얻는다. 이 조건에서는 원점과 직선 사이의 거리가 반지름 2보다 작으므로 서로 다른 두 교점도 존재한다.

정수 $a$, $b$는 각각 절댓값이 5 이하이다. 제곱의 합이 25가 되는 절댓값의 순서쌍은 $(0, 5)$, $(5, 0)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$ 뿐이다. $(0, \pm 5)$와 $(\pm 5, 0)$은 각각 2개이고, $(\pm 3, \pm 4)$와 $(\pm 4, \pm 3)$은 각각 두 부호를 독립적으로 정할 수 있어 4개이다. **순서쌍이므로 두 좌표를 바꾼 경우도 따로 센다**.

전체 개수는 $2 + 2 + 4 + 4 = 12$개이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 18. 다항함수 $f(x)$가 _x→∞(f(x)-x^4)/(3x^2-7x-8)=-1, _x→2(f(x))/(x^2-4)=_x→-2(f(x))/(x^2-4)=k를 만족시킬 때, 상수 $k$의 값은?**

① -1

② 1

③ 3

④ 5

**정답 4번**

**간단한 해설**

두 극한이 유한하므로 $f(2) = f(-2) = 0$이고, $f(x)$는 $x^2 - 4$**를 인수로 갖는다**. 무한대에서의 극한 조건까지 적용하면 $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 1)$이므로 공통 극한값은 k = 5이다.

**계산 과정**

1. 무한대에서의 극한 조건: 분모 $3x^2 - 7x - 8$은 이차식이고 극한값이 0이 아닌 -1이므로, 다항식 $f(x) - x^4$도 **이차식**이어야 한다. 이차항의 계수를 c라 하면 최고차항의 계수비가 $\frac{c}{3} = -1$이므로 c = -3이다. 따라서 상수 a, b에 대하여 $f(x) = x^4 - 3x^2 + ax + b$로 놓는다.

2. 유한한 극한 조건: $x \to 2$, $x \to -2$일 때 분모 $x^2 - 4$가 0으로 가므로, 극한값이 유한하려면 **분자도 각각 0으로 가야 한다**. 다항함수는 연속이므로 $f(2) = f(-2) = 0$이다. 이를 대입하면 $4 + 2a + b = 0$, $4 - 2a + b = 0$을 얻는다. 두 식을 빼면 $4a = 0$이므로 a = 0이고, 다시 대입하면 b = -4이다.

3. 공통 극한값 계산: 따라서 $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$이며, 인수분해하면 $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 1)$이다. 극한에서는 $x \neq \pm 2$인 주변의 값을 살피므로 공통인수를 약분하여 $\frac{f(x)}{x^2 - 4} = x^2 + 1$로 계산할 수 있다. $x \to 2$와 $x \to -2$에서 모두 $x^2 + 1$은 5로 가므로 k = 5이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 19. 확률변수 $X$의 확률분포표가 다음과 같을 때, 확률 $P(X^2 - 3X + 2 \le 0)$의 값은? (단, $a$는 상수)**

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $a$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

① $\frac{1}{6}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$

**정답 4번**

**간단한 해설**

부등식을 만족하는 값은 **1과 2**이므로 두 값의 확률을 더한다. 확률의 총합이 1이라는 조건에서 $a = \frac{1}{3}$을 얻으므로, 구하는 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

**계산 과정**

확률분포표에서 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다. **각 값에 대응하는 확률의 합은 1**이므로 $\frac{1}{6} + a + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$이다. 따라서 $a = \frac{1}{3}$이며, 이는 $P(X = 1)$의 값이다.

부등식의 좌변을 인수분해하면 $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$이다. 두 일차식의 곱이 0 이하인 범위는 $1 \le X \le 2$이다. 양 끝값에서도 곱이 0이므로 **1과 2를 모두 포함**한다. 표에서 이 범위에 속하는 값은 1과 2뿐이다.

$X = 1$인 사건과 $X = 2$인 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 두 확률을 더한다. 따라서 $P(X^2 - 3X + 2 \le 0)$은 $P(X = 1) + P(X = 2)$와 같고, 그 값은 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$이다. 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

**문 20. 상수 $a$, $b$에 대하여 _x→3(√(x^2+x-3)+ax)/(x-3)=b가 성립할 때, $a+b$의 값은?**

① $-\frac{5}{6}$
② $-\frac{1}{6}$
③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{5}{6}$

**정답 1번**

**간단한 해설**

분모가 0으로 갈 때 극한이 유한하려면 **분자도 0으로 가야 하므로** $a=-1$이다. 이를 대입해 유리화하면 $b=\frac{1}{6}$이므로 $a+b=-\frac{5}{6}$이다.

**계산 과정**

1. 상수 a 구하기: $x\to 3$일 때 분모 $x-3$은 0으로 간다. 주어진 극한이 상수 b로 수렴하므로 **분자의 극한도 0이어야 한다**. 따라서 $\sqrt{9+3-3}+3a=3+3a=0$이므로 $a=-1$이다.

2. 상수 b 구하기: $a=-1$을 대입하면 분자는 $\sqrt{x^2+x-3}-x$가 된다. **근호가 있는 차를 유리화**하기 위해 분자·분모에 $\sqrt{x^2+x-3}+x$를 곱한다. 이때 분자는 $(x^2+x-3)-x^2=x-3$이므로, $x\neq 3$에서 공통인수 $x-3$을 약분할 수 있다. 따라서 $\frac{\sqrt{x^2+x-3}-x}{x-3}=\frac{1}{\sqrt{x^2+x-3}+x}$이다. 오른쪽 분모는 $x\to 3$일 때 6으로 가므로 $b=\frac{1}{6}$이다.

3. 합 구하기: $a+b=-1+\frac{1}{6}=-\frac{5}{6}$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase