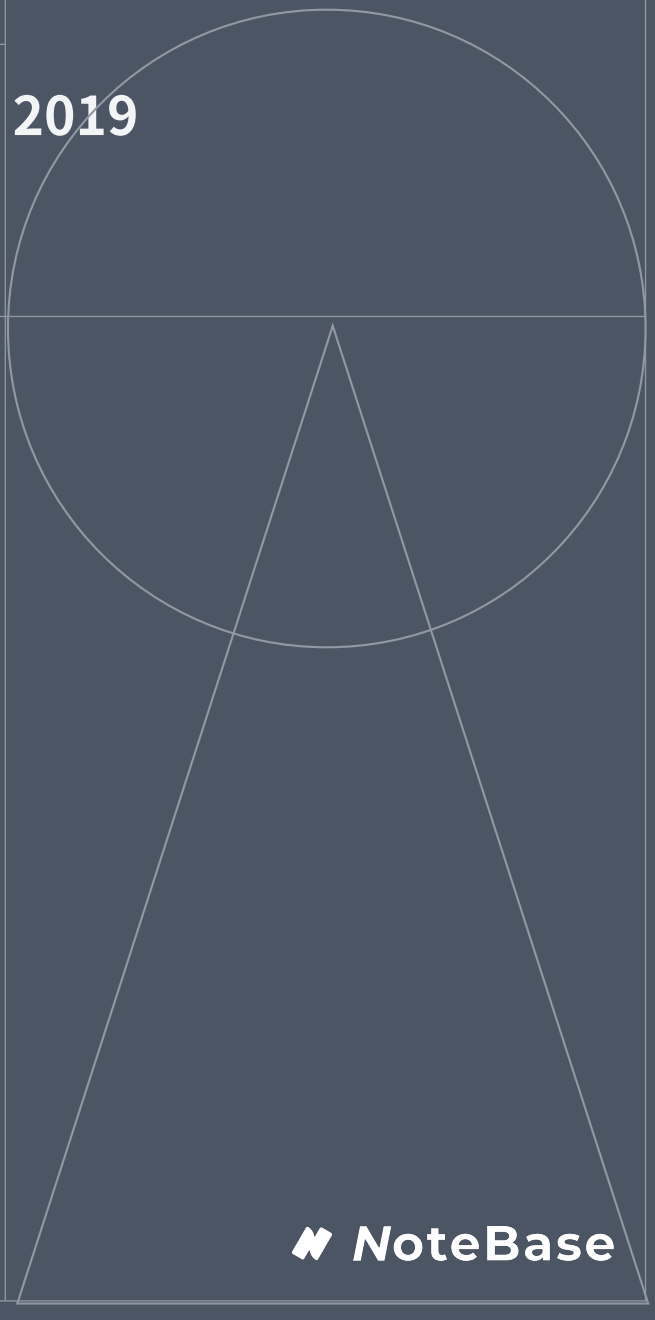
기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2019



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2019

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2019

문 1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = 2n^2 - n$일 때, a_{10}의 값은?

① 34

② 35

③ 36

④ 37

정답 4번

간단한 해설

제10항은 **처음 10개 항의 합과 처음 9개 항의 합의 차**이므로, $a_{10} = S_{10} - S_9 = 37$이다.

계산 과정

S_{10}은 첫째항부터 제10항까지의 합이고, S_9는 첫째항부터 제9항까지의 합이다. 두 합을 빼면 **공통으로 포함된 첫째항부터 제9항까지가 소거**되어 제10항만 남으므로, $a_{10} = S_{10} - S_9$이다.

주어진 $S_n = 2n^2 - n$에 각각 10과 9를 대입하면 $S_{10} = 2 \cdot 10^2 - 10 = 190$, $S_9 = 2 \cdot 9^2 - 9 = 153$이다.

따라서 $a_{10} = 190 - 153 = 37$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. 좌표평면 위의 점 (4, 2)를 지나고 직선 $y = \frac{1}{2}x + 5$와 수직인 직선의 방정식은?

① $y = \frac{1}{2}x$

② $y = -2x + 10$

③ $y = 2x - 6$

④ $y = -2x$

정답 2번

간단한 해설

수직인 두 직선은 **기울기의 곱이 −1**이므로, 구하는 직선의 기울기는 −2이다. 점 (4, 2)를 지나도록 절편을 정하면 $y = -2x + 10$이 된다.

계산 과정

기울기 구하기: 주어진 직선 $y = \frac{1}{2}x + 5$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다. 두 직선의 기울기가 모두 정의될 때, **서로 수직이면 기울기의 곱이 −1**이다. 구하는 직선의 기울기를 m이라 두면 $\frac{1}{2} \cdot m = -1$이므로 $m = -2$이다.

절편 구하기: 기울기가 −2이므로 구하는 직선을 $y = -2x + b$로 놓는다. 여기서 b는 y절편이다. 이 직선이 **점 (4, 2)를 지난다**는 것은 $x = 4, y = 2$를 대입했을 때 식이 성립한다는 뜻이다. 따라서 $2 = -2 \cdot 4 + b$에서 $b = 10$을 얻는다.

직선의 방정식: 기울기 −2와 y절편 10을 대입하면 $y = -2x + 10$이다. 이는 ②의 식과 일치한다.

NoteBase

문 3. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{8}$일 때, $P(A)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$
② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$

정답 2번

간단한 해설

독립인 두 사건은 **교집합의 확률이 각 사건의 확률의 곱**이다. 이를 합집합 확률의 덧셈정리에 적용하면 $P(A)=\frac{1}{4}$이다.

계산 과정

구하려는 확률을 $P(A)=x$라 하자. 두 사건이 **독립**이므로 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{x}{2}$이다.

합집합의 확률은 두 사건의 확률을 더한 뒤, **중복해서 더한 교집합의 확률을 한 번 빼서** 구한다. 따라서 $P(A\cup B)=x+\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$이고, 주어진 값에 따라 $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$이다.

양변에서 $\frac{1}{2}$을 빼면 $\frac{x}{2}=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$이다. 양변에 2를 곱하면 $x=\frac{1}{4}$이므로, 구하는 $P(A)$의 값은 ②의 $\frac{1}{4}$이다.

NoteBase

문 4. 다음 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 때, $f(2)$의 값은?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x<1) \\ 6x+b & (x\geq 1) \end{cases}$$

① 9

② 11

③ 13

④ 15

정답 2번

간단한 해설

$x=1$에서 미분가능하려면 **연속이고 좌우 미분계수가 같아야 한다**. 이 조건으로 $a=4$, $b=-1$을 얻으며, $x=2$에는 $6x+b$를 적용하므로 $f(2)=11$이다.

계산 과정

연속 조건: a, b는 두 식을 연결하는 상수이다. $x=1$에서 미분가능하면 그 점에서 **반드시 연속**이다. 왼쪽 식 x^2+ax의 극한은 $1+a$이고, $x=1$은 오른쪽 구간에 포함되므로 $f(1)=6+b$이다. 따라서 연속 조건은 $1+a=6+b$이다.

미분계수 일치: 연속 조건을 만족할 때, 두 식을 각각 미분하여 구한 경계점의 좌우 미분계수가 같아야 한다. 왼쪽 식의 도함수는 $2x+a$이므로 좌미분계수는 $2+a$이고, 오른쪽 식의 도함수는 6이므로 우미분계수는 6이다. 따라서 $2+a=6$에서 $a=4$이다.

상수 결정: 연속 조건 $1+a=6+b$에 $a=4$를 대입하면 $5=6+b$이므로 $b=-1$이다. 미분계수만 맞추는 것으로는 충분하지 않고, **함숫값도 끊어지지 않게 연결**되어야 한다.

함숫값 계산: $2\geq 1$이므로 $f(2)$는 오른쪽 식 $6x+b$로 계산한다. $b=-1$을 대입하면 $f(2)=6\cdot 2-1=11$이다. 이는 ②의 값 11과 일치한다.

NoteBase

문 5. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$일 때, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$의 값은?

① 50

② 51

③ 52

④ 53

정답 3번

간단한 해설

$xy = 1$이므로 두 수는 **서로 역수**이다. 따라서 구하는 값은 $x^3 + y^3$과 같고, $x + y = 4$와 세제곱의 합 공식을 이용하면 52이다.

계산 과정

먼저 두 수의 합과 곱을 구한다. $x + y = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$이고, 합차공식을 이용하면 $xy = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$이다.

$xy = 1$이므로 두 수는 0이 아니며, **각 수의 역수는 다른 한 수**이다. 즉, $\frac{1}{x} = y$, $\frac{1}{y} = x$이므로 구하는 식은 $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = y^3 + x^3$으로 바뀐다.

세제곱의 합을 두 수의 합과 곱으로 나타내면 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$이다. 앞에서 구한 값을 대입하면 $x^3 + y^3 = 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 52$이다.

따라서 구하는 값은 52로, ③에 해당한다.

NoteBase

문 6. 집합 A={-1, 0, 1}에 대하여 A에서 A로의 함수 f(x) 중 항등함수인 것은?

① f(x)=-x

② $f(x)=x^2$

③ $f(x)=x^3$

④ f(x)=|x|

정답 3번

간단한 해설

집합 $A=\{-1,0,1\}$의 각 원소는 세제곱해도 값이 그대로이다. 따라서 $f(x)=x^3$은 **모든 원소를 자기 자신으로 보내는** 항등함수이다.

공통 해설

항등함수는 **정의역의 모든 원소에서 입력값과 함수값이 같은** 함수이다. 이 문제에서는 $A=\{-1,0,1\}$이므로 $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$을 모두 만족해야 한다. 집합 A 밖의 값에서는 이 조건을 확인할 필요가 없다.

$f(x)=x^3$에 세 원소를 대입하면 $f(-1)=(-1)^3=-1$, $f(0)=0^3=0$, $f(1)=1^3=1$이다. 세 원소 모두 입력값과 함수값이 같으므로 A에서 A로의 항등함수이다.

같은 기준으로 나머지 후보를 보면, $f(x)=-x$는 $f(1)=-1$이므로 1을 자기 자신으로 보내지 않는다. $f(x)=x^2$과 $f(x)=|x|$는 모두 $f(-1)=1$이므로 -1을 자기 자신으로 보내지 않는다. 이처럼 **한 원소에서라도 입력값과 함수값이 다르면** 항등함수가 아니다.

NoteBase

문 7. $(2^{\frac{1}{6}})^3 \times 3^{-\frac{3}{2}} \times \sqrt{2^7 \times 3^5}$ **의 값은?**

① 36

② 48

③ 54

④ 60

정답 2번

간단한 해설

근호를 분수 지수로 바꾸고 **밑이 같은 항끼리 지수를 더하면**, 2의 지수는 4, 3의 지수는 1이 된다. 따라서 식의 값은 48이다.

계산 과정

밑이 양수이므로 거듭제곱과 근호에 지수법칙을 적용할 수 있다. **거듭제곱을 다시 거듭제곱할 때는 지수를 곱하므로**, 첫 인수는 $(2^{\frac{1}{6}})^3 = 2^{\frac{1}{2}}$이다.

양수의 제곱근은 지수가 1/2인 거듭제곱이다. 따라서 근호 안의 각 인수에 이를 적용하면 $\sqrt{2^7 \cdot 3^5} = 2^{\frac{7}{2}} \cdot 3^{\frac{5}{2}}$이다.

이제 **밑이 같은 거듭제곱의 곱은 지수를 더해** 정리한다. 밑이 2인 항은 $2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{2}} = 2^4$이고, 밑이 3인 항은 $3^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} = 3^1$이다.

따라서 주어진 식의 값은 $2^4 \cdot 3^1 = 16 \cdot 3 = 48$이며, 선택지 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 8. 다음 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속일 때, $a+4b$의 값은? (단, a, b는 상수이다)
f(x)=cases(√(x^2+x+2)+ax)/(x-1),&x≠1\,&x=1cases

① −6

② −7

③ −8

④ −9

정답 2번

간단한 해설

$x=1$에서 유한한 극한을 가지려면 **분자도 0으로 수렴**해야 하므로 $a=-2$이다. 이 값을 대입해 구한 극한이 함수값 b와 같아야 하므로 b=-54이고, $a+4b=-7$이다.

계산 과정

근호 안은 x^2+x+2=(x+12)^2+74>0이므로 모든 실수에서 제곱근이 정의된다. 따라서 x"22601에서는 주어진 함수가 연속이며, $x=1$에서 **극한값과 함수값이 같아야 한다**. 즉, $\lim_{x\to1} f(x)=b$를 만족하도록 상수 a, b를 구한다.

1. 상수 a 구하기: $x\to1$일 때 분모 $x-1$은 0으로 수렴한다. 극한이 유한하려면 분자도 0으로 수렴해야 하므로 $\sqrt{1+1+2}+a=0$이다. 따라서 $2+a=0$에서 $a=-2$를 얻는다.

2. 상수 b 구하기: $a=-2$를 대입한 분자를 $\sqrt{x^2+x+2}-2x$로 놓고, 이를 $(\sqrt{x^2+x+2}-2)-2(x-1)$로 나눈다. 그러면 x"22601에서 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}-2$이다. 첫 번째 분수의 **분자를 유리화**하면 $(x^2+x+2)-4=x^2+x-2$이고, $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$이므로 $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2}-2$로 정리된다. 이 식에 $x=1$을 대입해 극한을 구하면 b=34-2=-54이다.

3. 요구한 값 구하기: a+4b=-2+4·(-54)=-7이므로 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 함수 $f(x)$에 대하여 ∫ _6^9 f(x)dx=7, ∫ _1^3 f(x)dx=4, ∫ _1^6 f(x)dx=9일 때, 정적분 ∫ _3^9 f(x)dx의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

정답 4번

간단한 해설

정적분은 **구간을 나누어 더할 수 있으므로**, 3부터 6까지의 적분값 5에 6부터 9까지의 적분값 7을 더하면 12이다.

계산 과정

먼저 3부터 6까지의 적분값을 구한다. 정적분의 구간에 대한 가법성에 따라, 1부터 6까지의 적분값에서 **1부터 3까지의 적분값을 빼면** 된다. 따라서 $\int_3^6 f(x)dx = 9 - 4 = 5$이다.

구하려는 3부터 9까지의 구간은 **3부터 6까지와 6부터 9까지**로 나뉜다. 두 구간의 적분값을 더하면 $\int_3^9 f(x)dx = 5 + 7 = 12$이다. 이 값은 ④의 12와 일치한다.

NoteBase

문 10. 좌표평면 위의 두 집합 A와 B의 교집합 $A \cap B$가 나타내는 영역의 넓이는?

$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
$B = \{(x, y) \mid y \geq -|x|\}$

① $\frac{\pi}{4}$
② $\frac{\pi}{2}$
③ $\frac{3\pi}{4}$
④ π

정답 3번

간단한 해설

원 내부에서 $y < -|x|$인 부분은 **중심각이 90°인 부채꼴**이다. 따라서 반지름이 1인 원의 넓이에서 그 넓이의 1/4을 빼면, 교집합의 넓이는 $\frac{3\pi}{4}$이다.

계산 과정

A의 영역: $x^2 + y^2 \leq 1$은 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원의 내부와 경계를 나타낸다. 원 전체의 넓이는 $\pi \cdot 1^2 = \pi$이다.

B의 조건: 경계 $y = -|x|$는 $x \geq 0$에서 $y = -x$, $x \leq 0$에서 $y = x$인 두 반직선으로 이루어진다. 두 반직선은 각각 양의 x축, 음의 x축에서 아래쪽으로 45°씩 기울어져 있다. B는 이 경계와 그 위쪽이므로, 원에서 제외되는 부분은 **두 반직선 사이의 아래쪽 부채꼴**이다. 그 중심각은 $180° - 45° - 45° = 90°$이다.

교집합의 넓이: 같은 원에서 부채꼴의 넓이는 중심각에 비례하므로, 제외되는 부채꼴의 넓이는 $\frac{90}{360} \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$이다. 따라서 두 조건을 모두 만족하는 영역의 넓이는 $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$이며, 이는 ③의 값과 같다.

NoteBase

문 11. 계수가 실수인 이차방정식 $x^2 - 4x + a - 7 = 0$이 실근을 가질 때, 이차방정식 $x^2 + 2x + 3a - 5 = 0$이 허근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 4번

간단한 해설

실근을 가질 조건은 판별식이 0 이상이고, 허근을 가질 조건은 판별식이 0 미만인 것이다. 두 조건을 **동시에 만족하는 범위**는 $2 < a \leq 11$이므로 가능한 정수는 3부터 11까지 9개이다.

계산 과정

계수가 실수인 이차방정식 $x^2 + bx + c = 0$의 판별식은 $D = b^2 - 4c$이다. 근의 공식에서 제곱근 안의 값이므로, **중근을 포함하여 실근을 가지려면** $D \geq 0$, 허근을 가지려면 $D < 0$이어야 한다.

첫째 방정식의 실근 조건: $x^2 - 4x + a - 7 = 0$의 판별식은 $D_1 = (-4)^2 - 4(a - 7) = 44 - 4a$이다. 따라서 $44 - 4a \geq 0$을 풀면 $a \leq 11$이다. $a = 11$일 때는 중근을 가지므로 이 경계값도 포함한다.

둘째 방정식의 허근 조건: $x^2 + 2x + 3a - 5 = 0$의 판별식은 $D_2 = 2^2 - 4(3a - 5) = 24 - 12a$이다. 따라서 $24 - 12a < 0$을 풀면 $a > 2$이다. $a = 2$일 때는 중근을 가지므로 **허근 조건에서 제외한다**.

정수의 개수: 두 부등식의 공통 범위는 $2 < a \leq 11$이다. 이 범위에 있는 정수 a는 3, 4, ⋯, 11이므로 개수는 $11 - 3 + 1 = 9$개이다. 이는 ④의 9에 해당한다.

NoteBase

문 12. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 일곱 개의 숫자 중 서로 다른 세 개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는?

① 120

② 180

③ 210

④ 240

정답 3번

간단한 해설

각 자리에 **서로 다른 숫자**를 써야 하므로 백의 자리부터 선택할 수 있는 숫자는 차례로 7개, 6개, 5개이다. 곱의 법칙에 따라 만들 수 있는 자연수는 $7 \times 6 \times 5 = 210$개이다.

계산 과정

1부터 7까지의 숫자에서 서로 다른 세 개를 골라 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 배치한다. 같은 세 숫자라도 123과 132처럼 **자리 배치가 다르면 다른 수**이므로 순서를 구별하여 센다.

백의 자리: 주어진 숫자에 0이 없으므로 일곱 숫자 모두 올 수 있다. 따라서 선택 방법은 7가지이다.

십의 자리: 백의 자리에 쓴 숫자는 다시 사용할 수 없으므로 남은 6개 중 하나를 고른다. 백의 자리의 각 선택마다 6가지가 가능하므로 앞의 두 자리를 정하는 방법은 $7 \times 6 = 42$가지이다.

일의 자리: 앞의 두 자리에 쓴 숫자를 제외한 5개 중 하나를 고른다. 앞의 두 자리를 정한 42가지 각각에 대해 5가지가 가능하다.

전체 개수: 각 자리의 선택을 차례로 이어서 하나의 수를 만들므로 곱의 법칙을 적용한다. 전체 개수는 $7 \times 6 \times 5 = 210$개이며, 선택지 ③의 210에 해당한다.

NoteBase

문 13. 0이 아닌 실수 k에 대하여 함수 $y=\sqrt{kx}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프가 점 $(2,4)$를 지날 때, k의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 1번

간단한 해설

점 $(2,4)$를 **평행이동 전으로 되돌리면** $(-2,2)$이므로 $2=\sqrt{-2k}$이다. 양변을 제곱하면 $-2k=4$이므로 $k=-2$이다.

계산 과정

평행이동한 그래프의 식: 그래프를 오른쪽으로 4만큼 옮기면 원래 식의 x를 $x-4$로 바꾸고, 위로 2만큼 옮기면 함숫값에 2를 더한다. 따라서 이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{k(x-4)}+2$이다. 이때 **가로 이동은 근호 안의 변수에 반영**하고, 세로 이동은 근호 밖에 더한다.

지나는 점 대입: 이동한 그래프가 점 $(2,4)$를 지나므로 $4=\sqrt{k(2-4)}+2$이다. 양변에서 2를 빼면 $2=\sqrt{-2k}$를 얻는다.

상수 계산과 확인: 양변이 모두 0 이상이므로 제곱하여 $4=-2k$를 얻고, 이를 풀면 $k=-2$이다. 이 값은 0이 아닌 실수이고, 대입하면 근호 안은 4, 함숫값은 4가 되어 주어진 조건을 만족한다.

따라서 구하는 값은 $k=-2$이며, 선택지 ①에 해당한다.

NoteBase

문 14. 두 양의 실수 x, y에 대하여 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$일 때, $x+y$의 최솟값은?

① $6-2\sqrt{5}$
② $6+2\sqrt{5}$
③ $5-2\sqrt{6}$
④ $5+2\sqrt{6}$

정답 4번

간단한 해설

조건식을 바꾸면 $(x-2)(y-3)=6$이고 두 인수는 모두 양수이다. **산술평균·기하평균 부등식**에 따라 두 인수의 합은 $2\sqrt{6}$ 이상이며, 두 인수가 같을 때 $x+y$는 최솟값 $5+2\sqrt{6}$을 갖는다.

계산 과정

조건식 변형: x, y가 양수이므로 $\frac{2}{x}$와 $\frac{3}{y}$는 각각 0보다 크고 1보다 작다. 따라서 $x>2, y>3$이다. 주어진 식의 양변에 양수 xy를 곱하면 $xy=2y+3x$이고, 이를 정리하면 $(x-2)(y-3)=6$이다.

하한 계산: **두 양수의 합은 곱의 제곱근의 2배 이상**이라는 산술평균·기하평균 부등식을 $x-2$와 $y-3$에 적용한다. 두 수의 곱이 6이므로 $(x-2)+(y-3)\geq 2\sqrt{6}$이다. 따라서 $x+y\geq 5+2\sqrt{6}$이다.

등호 성립: 이 부등식의 등호는 **두 양수가 같을 때** 성립한다. $x-2=y-3=\sqrt{6}$으로 두면 $x=2+\sqrt{6}$, $y=3+\sqrt{6}$이며, 두 값은 양수이고 원래 조건도 만족한다. 따라서 $x+y$의 최솟값은 $5+2\sqrt{6}$으로, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 15. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=2$일 때, _n→∞(a_n+3^n+2-2^n)/(3^n+1-2^n-1)의 값은?

① 3

② $\frac{10}{3}$

③ $\frac{11}{3}$

④ 4

정답 1번

간단한 해설

급수가 **수렴하면 일반항은 0으로 수렴**하므로 $\frac{a_n}{3^n}\to 0$이다. 구하려는 식의 분자와 분모를 3^n으로 나누면 각각 9와 3으로 수렴하므로 극한값은 3이다.

계산 과정

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$의 합이 2이므로 이 급수는 수렴한다. **수렴하는 급수의 일반항은 0으로 수렴**하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=0$이다. 이는 부분합이 2로 수렴할 때 연속한 두 부분합의 차인 일반항이 0으로 수렴하기 때문이다.

분자와 분모를 3^n으로 나누어 급수의 일반항이 나타나도록 정리한다. $\frac{3^{n+2}}{3^n}=9$, $\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$,
(2^n-1)/(3^n)=12≤ft(23)^n이므로 구하려는 극한은 다음 식의 극한과 같다.
((a_n)/(3^n)+9-≤ft(23)^n)/(3-12≤ft(23)^n)

0<23<1이므로 ≤ft(23)^n→0이다. 따라서 분자는 9로, 분모는 **0이 아닌 3으로 수렴**하여 극한의 나눗셈 법칙을 적용할 수 있다. 극한값은 $\frac{0+9-0}{3-0}=3$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. $y=mx$**의 그래프가** $y=\frac{1-|x|}{1+x}$**의 그래프와 세 점에서 만나도록 하는** m**의 범위가** $a<m<b$**일 때,** $a+b$**의 값은?**

① $-3-\sqrt{2}$

② $-3+\sqrt{2}$

③ $-3-2\sqrt{2}$

④ $-3+2\sqrt{2}$

정답 4번

간단한 해설

세 교점이 생기려면 **음의 구간에서 한 점, 양의 구간에서 서로 다른 두 점**이 만나야 한다. 이 조건을 만족하는 범위는 $-3+2\sqrt{2}<m<0$이므로, 양 끝값의 합은 $-3+2\sqrt{2}$이다.

계산 과정

1. 절댓값에 따라 구간을 나눈다. $x<0$에서는 $|x|=-x$이므로 $y=\frac{1+x}{1+x}=1$이다. 단, 원래 식의 분모가 0이 되는 $x=-1$**은 제외**한다. $x\geq 0$에서는 $y=\frac{1-x}{1+x}$이다. $x=0$에서 이 함수의 값은 1이고 직선의 값은 0이므로, 교점의 x좌표는 0이 될 수 없다.

2. 음의 구간의 교점 수를 확인한다. 수평선 $y=1$과 직선 $y=mx$의 교점은 최대 한 점이다. $mx=1$에서 $x=\frac{1}{m}$이므로, 음의 구간에 교점이 있으려면 $m<0$이고 $m\neq -1$이어야 한다. 양의 구간에서는 아래의 이차방정식에 의해 교점이 최대 두 점이므로, 전체가 세 점이 되려면 **양의 구간에서 반드시 서로 다른 두 교점**이 생겨야 한다.

3. 양의 구간의 교점을 방정식으로 나타낸다. $x>0$에서는 $1+x>0$이므로, $mx=\frac{1-x}{1+x}$의 양변에 $1+x$를 곱하면 $mx^2+(m+1)x-1=0$이다. 이 방정식이 **서로 다른 두 양의 근**을 가져야 한다. 두 근을 α, β라 하면, 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha\beta=-\frac{1}{m}>0$, $\alpha+\beta=-\frac{m+1}{m}>0$이어야 한다. 앞에서 얻은 $m<0$을 적용하면 합이 양수인 조건은 $m>-1$이므로, 우선 $-1<m<0$을 얻는다.

4. 판별식으로 서로 다른 두 실근 조건을 적용한다. 판별식은 $D=(m+1)^2+4m$, 즉 $D=m^2+6m+1$이다. 따라서 $D>0$을 풀면 $m<-3-2\sqrt{2}$ 또는 $m>-3+2\sqrt{2}$이다. 이를 $-1<m<0$과 동시에 만족시키는 범위는 $-3+2\sqrt{2}<m<0$이다. 이 범위에서는 두 실근의 곱과 합이 모두 양수이므로 두 근이 모두 양수이며, 음의 구간의 교점도 한 점 존재한다. 아래쪽 경계에서는 두 양의 근이 겹치고, 위쪽 경계인 $m=0$에서는 직선 $y=0$이 주어진 그래프와 한 점에서만 만나므로 두 경계는 포함하지 않는다.

5. 범위의 양 끝값은 $a=-3+2\sqrt{2}$, $b=0$이다. 따라서 $a+b=-3+2\sqrt{2}$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 등식 $x^3+x^2+x+1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

정답 1번

간단한 해설

$x+1=1$이 되도록 $x=0$**을 대입**하면 우변이 $a+b+c+d$가 된다. 이때 좌변의 값이 1이므로 구하는 합도 1이다.

계산 과정

항등식은 x의 모든 값에서 성립하는 등식이다. 우변을 구하려는 합 $a+b+c+d$로 만들려면 $x+1$**의 값을 1로** 두면 된다. 따라서 $x+1=1$, 즉 $x=0$을 대입한다.

$x=0$일 때 좌변은 $0^3+0^2+0+1=1$이다. 우변에서는 $x+1$과 그 거듭제곱이 모두 1이므로 $a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d$, 즉 $a+b+c+d$가 된다.

양변의 값이 같으므로 $a+b+c+d=1$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. $10^a = 16$, $5^b = 256$**일 때,** $\frac{4}{a} - \frac{8}{b}$**의 값은?**

① $\log_{10} 5$

② $\log_5 2$

③ 1

④ 2

정답 3번

간단한 해설

두 항을 **밑이 2인 로그**로 나타내면 $\frac{4}{a} = \log_2 10$, $\frac{8}{b} = \log_2 5$이다. 두 로그의 차는 $\log_2 \frac{10}{5} = 1$이다.

계산 과정

a에 관한 식: $16 = 2^4$이므로 $10^a = 2^4$이다. **양변에 밑이 2인 로그**를 취하면 지수는 로그 앞의 계수로 나와 $a\log_2 10 = 4$가 된다. 따라서 $\frac{4}{a} = \log_2 10$이다.

b에 관한 식: $256 = 2^8$이므로 $5^b = 2^8$이다. 같은 방법으로 로그를 취하면 $b\log_2 5 = 8$이므로 $\frac{8}{b} = \log_2 5$이다.

두 항의 차: 진수가 양수이고 **밑이 같은 로그의 차**는 진수의 몫에 대한 로그로 합칠 수 있다. 따라서 $\frac{4}{a} - \frac{8}{b} = \log_2 10 - \log_2 5$이고, 오른쪽은 $\log_2 \frac{10}{5} = \log_2 2 = 1$이다. 구하는 값은 1로, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 집합 A=\x 2019≤ 2x+9≤ 2219, (x)/(5)는 정수\의 원소의 개수는?

① 20

② 21

③ 22

④ 23

정답 2번

간단한 해설

부등식을 풀면 $1005 \le x \le 1105$이고, $\frac{x}{5}$가 정수이므로 이 범위의 **5의 배수**를 센다. 양 끝값을 모두 포함하므로 원소는 21개이다.

계산 과정

먼저 $2019 \le 2x + 9 \le 2219$의 각 변에서 9를 빼면 $2010 \le 2x \le 2210$이다. 각 변을 양수 2로 나누면 부등호 방향이 유지되어 $1005 \le x \le 1105$를 얻는다.

$\frac{x}{5}$가 정수라는 것은 x가 **5의 배수**라는 뜻이다. 따라서 집합 A의 원소는 1005, 1010, 1015, ⋯, 1105로, 5씩 증가한다.

처음 값 1005에서 마지막 값 1105까지 5씩 증가하는 횟수는 $\frac{1105-1005}{5} = 20$이다. 원소의 개수는 **증가 횟수에 첫 원소 1개를 더한 값**이므로 20 + 1 = 21개이며, ②의 21에 해당한다.

NoteBase

문 20. 다항식 $x^{10}-2x+4$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는?

① $5x+8$

② $5x-8$

③ $8x+5$

④ $8x-5$

정답 4번

간단한 해설

$(x-1)^2$으로 나눈 나머지는 $x=1$**에서 함수값과 미분계수가 모두** 원래 다항식과 같아야 한다. 이 두 조건으로 일차항의 계수는 8, 상수항은 −5가 되어 나머지는 $8x-5$이다.

계산 과정

나머지 설정: $f(x)=x^{10}-2x+4$라 하자. 나누는 식 $(x-1)^2$이 이차식이므로 **나머지의 차수는 2보다 작다**. 따라서 나머지를 $ax+b$, 몫을 $Q(x)$라 두면 $f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$이다.

함수값 조건: 위 식에 $x=1$을 대입하면 몫이 포함된 항이 0이 되어 $a+b=f(1)$이다. $f(1)=1-2+4=3$이므로 $a+b=3$을 얻는다.

미분계수 조건: $(x-1)^2Q(x)$를 미분한 식에도 **인수** $x-1$**이 남으므로** $x=1$에서 그 값은 0이다. 따라서 양변을 미분한 뒤 $x=1$을 대입하면 $a=f'(1)$이다. $f'(x)=10x^9-2$이므로 $a=10-2=8$이다.

나머지 결정: $a+b=3$에 $a=8$을 대입하면 $b=3-8=-5$이다. 따라서 나머지는 $8x-5$이며, ④의 식과 일치한다.

NoteBase