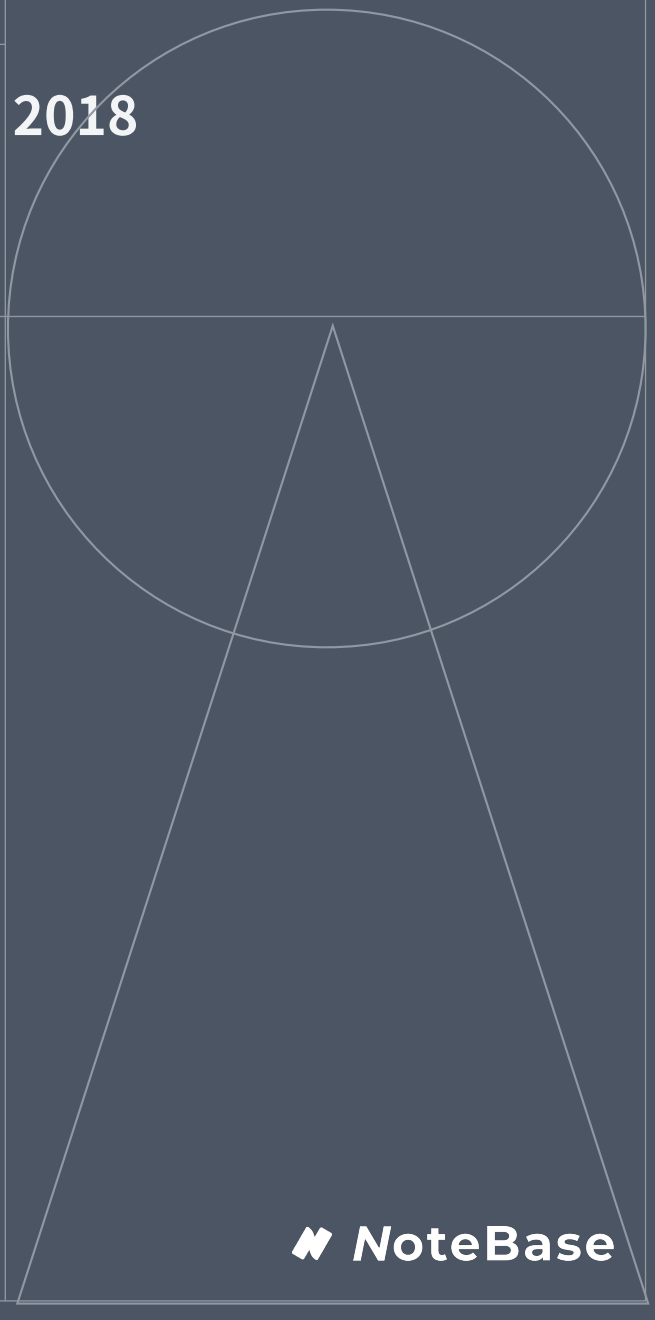
기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2018



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2018

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2018

문 1. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{20}$**의 값은? (단,** $i=\sqrt{-1}$**)**

① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 2번

간단한 해설

주어진 복소수를 z라 하면 $z^3=1$이므로 거듭제곱은 **3을 주기로 반복**된다. 따라서 주어진 합은 $z^{10}+z^{20}=z+z^2=-1$이다.

계산 과정

주어진 복소수를 $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$로 놓으면 구할 값은 $z^{10}+z^{20}$이다. $i^2=-1$을 이용하면 $z^2=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}$, 즉 $z^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$이다.

두 수를 더하면 $z+z^2=-1$이므로 $z^2+z+1=0$이다. 양변에 $z-1$을 곱하면 $z^3-1=0$을 얻는다. 따라서 $z^3=1$이어서 **지수에서 3의 배수를 제거**해도 값이 같다.

$10=3\cdot3+1, 20=3\cdot6+2$이므로 $z^{10}=(z^3)^3z=z$, $z^{20}=(z^3)^6z^2=z^2$이다.

따라서 $z^{10}+z^{20}=z+z^2=-1$이고, 이는 ②의 -1과 같다.

NoteBase

문 2. 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 3이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 6이다. 다항식 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(3)$의 값은?

① 3

② 6

③ 9

④ 12

정답 3번

간단한 해설

나머지 $R(x)$는 **차수가 2보다 낮은 다항식**이며, $R(1)=3, R(2)=6$을 만족한다. 이 조건에서 $R(x)=3x$이므로 $R(3)=9$이다.

계산 과정

나머지의 형태: 나누는 다항식 $(x-1)(x-2)$의 차수는 2이므로, 나머지의 차수는 **2보다 낮아야 한다**. 따라서 상수 a, b를 사용하여 $R(x)=ax+b$로 놓는다.

나머지 조건의 적용: 나머지정리에 따라 $P(1)=3, P(2)=6$이다. 한편 $x=1, x=2$에서는 $(x-1)(x-2)$가 0이 되므로, 나누는 다항식과 몫의 곱도 0이 된다. 따라서 이 두 값에서는 **원래 다항식과 나머지의 값이 같다**. 즉, $R(1)=3, R(2)=6$이다.

계수 결정: $R(x)=ax+b$에 두 조건을 대입하면 $a+b=3, 2a+b=6$이다. 두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 $a=3$이고, 이를 $a+b=3$에 대입하면 $b=0$이다. 따라서 나머지는 $R(x)=3x$이다.

값 계산: $R(3)=3\cdot 3=9$이므로 구하는 값은 9이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A^c \cup B^c = \{1, 2, 3, 4\}$, $A^c \cap B^c = \{3, 4\}$일 때, 집합 $(A - B) \cup (B - A)$의 모든 원소의 합은?

① 3

② 5

③ 7

④ 9

정답 1번

간단한 해설

$(A - B) \cup (B - A)$는 두 집합 중 **어느 한쪽에만 속하는 원소**의 집합이다. 주어진 여집합 조건에서 이러한 원소는 1과 2이므로 합은 3이다.

계산 과정

교집합 구하기: $A^c \cup B^c$는 A와 B 중 적어도 하나에 속하지 않는 원소의 집합이다. 따라서 그 여집합은 **A와 B에 모두 속하는 원소**의 집합이다. 드모르간 법칙에 따라 $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$이므로, 전체집합 U에서 1, 2, 3, 4를 제외하면 $A \cap B = \{5, 6, 7\}$이다.

합집합 구하기: $A^c \cap B^c = \{3, 4\}$는 **A와 B 어느 쪽에도 속하지 않는 원소**가 3과 4라는 뜻이다. 그 여집합이 A 또는 B에 속하는 원소의 집합이므로 $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$이다. 전체집합 U에서 3과 4를 제외하면 $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$이다.

구하는 집합과 원소의 합: $A - B$는 A에만 속하는 원소, $B - A$는 B에만 속하는 원소의 집합이다. 따라서 $(A - B) \cup (B - A)$는 **합집합에서 교집합을 제외한 집합**이다. $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$에서 $A \cap B = \{5, 6, 7\}$의 원소를 빼면 $\{1, 2\}$가 남는다. 원소의 합은 1 + 2 = 3이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. 함수 $f(x)=ax^2+3x+b$가 $f(-1)=3, f'(-1)=-1$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a와 b는 상수이다)

① 15

② 16

③ 17

④ 18

정답 4번

간단한 해설

도함수 조건에서 $a=2$를 구하고, 함수값 조건에 대입하면 $b=4$이다. 따라서 $f(x)=2x^2+3x+4$이므로 $f(2)=18$이다.

계산 과정

1. 도함수 조건으로 a 구하기: a와 b는 상수이므로 $f(x)=ax^2+3x+b$를 미분하면 $f'(x)=2ax+3$이다. **상수항을 미분하면 0**이 되어 b가 사라지므로, 먼저 a를 구할 수 있다. $f'(-1)=-1$을 대입하면 $-2a+3=-1$이므로 $a=2$이다.

2. 함수값 조건으로 b 구하기: $f(-1)=3$이므로 $a-3+b=3$이다. 여기에 $a=2$를 대입하면 $2-3+b=3$이므로 $b=4$이다.

3. $f(2)$ 계산하기: 두 상수를 대입하면 $f(x)=2x^2+3x+4$이다. 따라서 $f(2)=2\cdot 2^2+3\cdot 2+4=18$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. 원 $x^2+y^2-4x+2y=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$라 할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다)

① 5

② 7

③ 9

④ 11

정답 4번

간단한 해설

평행이동하면 **중심의 좌표만 이동하고 반지름은 변하지 않는다**. 중심은 $(2,\ -1)$에서 $(5, 1)$로 옮겨지고 반지름의 제곱은 5로 유지되므로, $a+b+c=5+1+5=11$이다.

계산 과정

주어진 식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x^2-4x)+(y^2+2y)=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$를 얻는다. 원의 표준형 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$에서 (a, b)는 중심이고, c는 **반지름의 제곱**이다. 따라서 원래 원의 중심은 $(2,\ -1)$이고 반지름의 제곱은 5이다.

이 원을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 중심의 각 좌표에 각각 3과 2를 더한다. 이동한 중심은 $(2+3,\ -1+2)=(5, 1)$이다. 평행이동은 원의 크기를 바꾸지 않으므로 **반지름의 제곱은 그대로 5**이고, 이동한 원의 방정식은 $(x-5)^2+(y-1)^2=5$이다.

따라서 $a=5, b=1, c=5$이므로 $a+b+c=5+1+5=11$이다. 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. $\log 20$을 $\log 20 = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)로 표현할 때, $2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{1}{\alpha}}$의 값은?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

정답 2번

간단한 해설

$\log 20 = 1 + \log 2$이므로 $n = 1$, $\alpha = \log 2$이다. **로그의 정의**에 따라 $10^{\alpha} = 2$이므로 $2^{\frac{1}{\alpha}} = 10$이며, 구하는 값은 $2 + 10 = 12$이다.

계산 과정

밑이 생략된 log는 밑이 10인 상용로그이다. $10 < 20 < 100$이므로 $1 < \log 20 < 2$이다. n은 정수이고 $0 \le \alpha < 1$이므로 **정수 부분**은 $n = 1$이다.

로그의 곱셈 법칙을 적용하면 $\log 20 = \log(10 \cdot 2) = 1 + \log 2$이다. 따라서 소수 부분은 $\alpha = \log 20 - 1 = \log 2$이다. $1 < 2 < 10$이므로 $0 < \alpha < 1$이며, α의 역수를 구할 수 있다.

$\alpha = \log 2$를 **지수 관계로 바꾸면** $10^{\alpha} = 2$이다. 양변을 $\frac{1}{\alpha}$제곱하면 $2^{\frac{1}{\alpha}} = (10^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} = 10$이 된다.

$n = 1$이므로 $2^{\frac{1}{n}} = 2$이다. 두 항을 더하면 $2 + 10 = 12$로, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 각각 $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n = 3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2+1} = 2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n}$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

간단한 해설

주어진 조건에서 na_n은 $\frac{3}{2}$로, $\frac{b_n}{n^2}$은 2로 수렴한다. 구하려는 식은 **이 두 수열의 곱**이므로 극한값은 $\frac{3}{2}\cdot 2 = 3$이다.

계산 과정

1. na_n의 극한: 첫 번째 조건의 식에 $\frac{n}{2n+1}$을 곱하면 $na_n = (2n+1)a_n \cdot \frac{n}{2n+1}$이다. 여기서 $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+1/n}$은 $\frac{1}{2}$로 수렴한다. 두 인수가 모두 유한한 값으로 수렴하므로 **곱의 극한은 각 극한값의 곱**이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} na_n = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$이다.

2. $\frac{b_n}{n^2}$의 극한: 두 번째 조건의 분모를 n^2으로 바꾸기 위해 $\frac{n^2+1}{n^2}$을 곱한다. 그러면 $\frac{b_n}{n^2} = \frac{b_n}{n^2+1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$이다. 괄호 안의 값은 1로 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2} = 2\cdot 1 = 2$이다.

3. 구하려는 극한: $\frac{a_n b_n}{n} = (na_n)\cdot\frac{b_n}{n^2}$로 나타내면 앞에서 구한 두 극한을 바로 이용할 수 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n} = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3$이다. 구하는 극한값은 3으로, ③의 값과 같다.

NoteBase

문 8. 확률변수 X의 확률분포가 다음과 같다.
$\mathrm{E}(X)=5$일 때, $b-a$의 값은? (단, a와 b는 상수이다)

X	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{3}{8}$	b	1

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$

정답 1번

간단한 해설

기댓값 5는 가운데 값 4보다 1 크고, 양끝 값 2와 6은 4에서 각각 2만큼 떨어져 있다. 따라서 **양끝 확률의 차**는 $2(b-a)=1$을 만족하므로 $b-a=\frac{1}{2}$이다.

계산 과정

확률의 합: 표에서 $X=2,4,6$일 확률은 각각 $a, \frac{3}{8}, b$이다. **모든 확률의 합은 1**이므로 $a+\frac{3}{8}+b=1$, 즉 $a+b=\frac{5}{8}$이다.

기댓값 조건: 이산확률변수의 기댓값은 **각 값에 그 확률을 곱한 뒤 더한 값**이다. 따라서 $2a+4\cdot\frac{3}{8}+6b=5$이고, 가운데 항을 이항하면 $2a+6b=\frac{7}{2}$이다.

확률의 차 계산: $a+b=\frac{5}{8}$의 양변에 4를 곱하면 $4a+4b=\frac{5}{2}$이다. 이를 기댓값에서 얻은 식에서 빼면 $-2a+2b=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=1$이다. 따라서 $b-a=\frac{1}{2}$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = |x - 1| - mx + 4$가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 m의 범위는?

① $m < -1$ 또는 $m > 1$

② $m < 0$ 또는 $m > 1$

③ $-1 < m < 1$

④ $0 < m < 1$

정답 1번

간단한 해설

두 구간의 기울기가 **0이 아니면서 같은 부호**이면 함수가 실수 전체에서 한 방향으로만 변하고 치역도 실수 전체가 된다. 이 조건을 풀면 $m < -1$ 또는 $m > 1$이다.

계산 과정

절댓값 안의 식이 0이 되는 $x = 1$을 기준으로 나눈다. $x < 1$에서는 $|x - 1| = 1 - x$이므로 $f(x) = (-1 - m)x + 5$이고, $x \geq 1$에서는 $|x - 1| = x - 1$이므로 $f(x) = (1 - m)x + 3$이다. 두 직선의 기울기는 각각 $-1 - m$, $1 - m$이다.

일대일 대응이 되려면 서로 다른 입력의 함숫값이 서로 다르고, 치역이 실수 전체여야 한다. 두 직선은 $x = 1$에서 함숫값이 $4 - m$으로 이어지므로, 기울기가 **둘 다 양수이거나 둘 다 음수**이면 전체 함수가 계속 증가하거나 계속 감소한다. 이때 양 끝의 함숫값이 서로 반대 방향으로 무한히 뻗어 치역도 실수 전체가 된다.

계속 증가하는 경우: $-1 - m > 0$에서 $m < -1$이고, $1 - m > 0$에서 $m < 1$이다. 두 조건을 동시에 만족하는 범위는 $m < -1$이다.

계속 감소하는 경우: $-1 - m < 0$에서 $m > -1$이고, $1 - m < 0$에서 $m > 1$이다. 두 조건을 동시에 만족하는 범위는 $m > 1$이다.

제외되는 경우: $-1 < m < 1$이면 왼쪽에서 감소하고 오른쪽에서 증가하므로 최솟값보다 큰 하나의 함숫값에 서로 다른 두 입력이 대응한다. $m = -1$이면 왼쪽 구간이, $m = 1$이면 오른쪽 구간이 상수함수가 된다. 따라서 경계값에서도 **서로 다른 입력이 같은 함숫값**을 가지므로 일대일 대응이 아니다.

따라서 구하는 범위는 $m < -1$ 또는 $m > 1$이며, ①의 범위와 일치한다.

NoteBase

문 10. 자연수 n에 대하여 곡선 $y = \frac{1}{2^n}x - x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$의 값은?

① $\frac{1}{42}$
② $\frac{1}{43}$
③ $\frac{1}{44}$
④ $\frac{1}{45}$

정답 1번

간단한 해설

각 넓이는 $A_n = \frac{1}{6 \cdot 8^n}$이므로, 넓이의 합은 **공비가 1/8인 등비급수**의 합이다. 첫째항이 $\frac{1}{48}$이므로 그 합은 $\frac{1}{42}$이다.

계산 과정

적분 구간: $a = \frac{1}{2^n} > 0$이라 놓으면 곡선은 $y = ax - x^2 = x(a - x)$이다. 곡선과 x축의 교점은 $x = 0, x = a$이고, 이 사이에서는 **함숫값이 0 이상**이다. 따라서 이 구간에서 함수를 정적분하면 둘러싸인 부분의 넓이를 얻는다.

넓이 계산: $A_n = \int_0^a (ax - x^2)dx$이다. 원시함수를 이용하면 $A_n = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$이고, 양 끝값을 대입하면 $A_n = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$이다. 여기에 $a = \frac{1}{2^n}$을 대입하면 $A_n = \frac{1}{6 \cdot 8^n}$을 얻는다.

무한급수의 합: $n = 1$일 때 $A_1 = \frac{1}{48}$이고, n이 1씩 커질 때 넓이는 이전의 1/8배가 된다. 따라서 첫째항은 $\frac{1}{48}$, 공비는 r=1입니다. **공비의 절댓값이 1보다 작으므로** 등비급수의 합 공식 $S = \frac{A_1}{1 - r}$을 적용할 수 있다. 이를 계산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1/48}{1 - 1/8} = \frac{1}{42}$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 두 다항식 A, B에 대하여 $2A+B=8x^2+3xy-5y^2$, $A-B=x^2-7y^2$일 때, $A+B$를 계산하면?

① $5x^2-xy-y^2$

② $5x^2+xy-y^2$

③ $5x^2-2xy-y^2$

④ $5x^2+2xy-y^2$

정답 4번

간단한 해설

두 식을 더해 B**를 소거**하면 A를 구할 수 있다. 이를 이용해 B도 구한 뒤 동류항끼리 더하면 $A+B=5x^2+2xy-y^2$이다.

계산 과정

1. A 구하기: 두 식을 더하면 $(2A+B)+(A-B)=3A$가 되어 B**가 소거된다**. 우변도 동류항끼리 더하면 $3A=9x^2+3xy-12y^2$이므로, 각 항을 3으로 나누어 $A=3x^2+xy-4y^2$을 얻는다.

2. B 구하기: $A-B=x^2-7y^2$에서 $B=A-(x^2-7y^2)$이다. 앞에서 구한 A를 대입하고 **빼는 괄호 안의 모든 항의 부호를 바꾸면** $B=3x^2+xy-4y^2-x^2+7y^2$이므로, $B=2x^2+xy+3y^2$이다.

3. $A+B$ 계산하기: 구한 두 다항식의 동류항끼리 더한다. x^2의 계수는 $3+2=5$, xy의 계수는 $1+1=2$, y^2의 계수는 $-4+3=-1$이다. 따라서 $A+B=5x^2+2xy-y^2$이며, ④의 식과 일치한다.

NoteBase

문 12. 두 함수 $f(x)=-x+2$, $g(x)=2x+4$에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1})(10)$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

간단한 해설

$(g\circ f)^{-1}(10)$은 **합성함수의 출력이 10이 되게 하는 입력**이다. 그 입력은 −1이므로, 여기에 f를 적용한 값은 3이다.

계산 과정

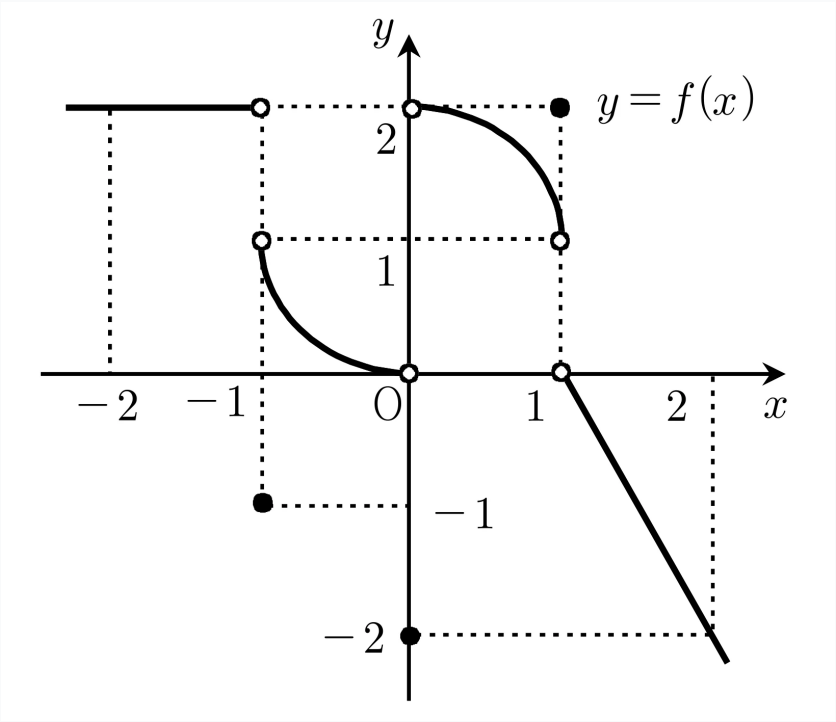
1. 합성함수 구하기: $h=g\circ f$로 놓으면 $h(x)=g(f(x))$이다. **먼저 계산한 함수의 값을 다음 함수의 입력에 넣어** $h(x)=2(-x+2)+4=-2x+8$을 얻는다. 기울기가 0이 아니므로 역함수가 존재한다.

2. 역함숫값 구하기: $t=h^{-1}(10)$이라 하면 역함수의 정의에 따라 $h(t)=10$이다. 즉, t는 합성함수의 출력이 10이 되게 하는 입력이다. $-2t+8=10$을 풀면 $-2t=2$, $t=-1$이므로 $(g\circ f)^{-1}(10)=-1$이다.

3. 바깥 함수 적용하기: 구하는 식은 역함숫값에 **다시 함수를 적용한 값**이다. 따라서 $(f\circ h^{-1})(10)=f(-1)$이고, $f(-1)=-(-1)+2=3$이다. 이 값은 ③의 3과 일치한다.

NoteBase

문 13. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, _x→ -1^+f(x)+_x→ 1^-f(x)의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

극한은 **지정된 방향에서 다가갈 때** 그래프의 높이가 가까워지는 값이다. x가 −1의 오른쪽과 1의 왼쪽에서 다가갈 때 모두 높이 1에 가까워지므로, 두 극한의 합은 2이다.

NoteBase

계산 과정

−1에서의 우극한: $x \to -1^{+}$는 −1보다 큰 쪽에서 −1로 다가간다는 뜻이다. −1과 0 사이의 곡선을 따라 왼쪽으로 이동하면 빈 점 $(-1, 1)$에 가까워지므로 $\lim_{x \to -1^{+}} f(x) = 1$이다. 채워진 점이 나타내는 $f(-1) = -1$과 **주변에서 다가가는 높이**를 구별한다.

1에서의 좌극한: $x \to 1^{-}$는 1보다 작은 쪽에서 1로 다가간다는 뜻이다. 0과 1 사이의 곡선을 따라 오른쪽으로 이동하면 빈 점 $(1, 1)$에 가까워지므로 $\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = 1$이다. 이때는 **1의 왼쪽 곡선**을 읽어야 하며, 채워진 점이 나타내는 $f(1) = 2$를 대입하지 않는다.

두 극한의 합: 각각 구한 극한을 더하면 $1 + 1 = 2$이므로, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. 이차방정식 $x^2 - 2kx + 4 = 0$의 두 실근이 모두 1보다 크도록 하는 실수 k의 범위는?

① $-2 \leq k \leq 2$

② $1 < k \leq 2$

③ $1 < k < \frac{5}{2}$

④ $2 \leq k < \frac{5}{2}$

정답 4번

간단한 해설

두 실근에서 각각 1을 뺀 값이 모두 양수이려면, 두 값의 **합과 곱이 모두 양수**여야 한다. 여기에 실근이 존재하는 조건을 함께 적용하면 $2 \leq k < \frac{5}{2}$이다.

계산 과정

두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 따라 $\alpha + \beta = 2k$, $\alpha\beta = 4$이다. 구하려는 조건은 $\alpha - 1 > 0$, $\beta - 1 > 0$이다.

실근이 존재할 조건: 판별식은 $D = (-2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$, 즉 $D = 4(k^2 - 4)$이다. **중근도 허용**되므로 D≥0에서 $k \leq -2$ 또는 k≥2를 얻는다.

두 근이 모두 1보다 클 조건: 실수인 $\alpha - 1, \beta - 1$의 곱이 양수이면 두 값의 부호가 같고, 합도 양수이면 둘 다 양수이다. 따라서 **1을 뺀 두 값의 합과 곱**을 구한다. 합은 $(\alpha - 1) + (\beta - 1) = 2k - 2$이므로 $2k - 2 > 0$, 즉 $k > 1$이다. 곱은 $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 4 - 2k + 1$이므로 $5 - 2k > 0$, 즉 $k < \frac{5}{2}$이다.

조건의 교집합: 실근 조건에 $1 < k < \frac{5}{2}$를 함께 적용하면 $2 \leq k < \frac{5}{2}$이며, ④의 범위와 일치한다. $k = 2$일 때는 두 근이 모두 2이므로 포함한다. $k = \frac{5}{2}$일 때는 한 근이 1이 되어 **1보다 크다는 조건을 만족하지 못하므로** 제외한다.

NoteBase

문 15. 연립부등식 cases y≥ x^2 \ x+y-2≤ 0 cases 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 최댓값을 α, 최솟값을 β라고 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① $\frac{21}{4}$
② $\frac{23}{4}$
③ $\frac{25}{4}$
④ $\frac{27}{4}$

정답 3번

간단한 해설

$x-y$는 같은 x에서 y**가 작을수록 커지고, 클수록 작아진다**. 두 경계 $y=x^2$, $y=2-x$를 각각 적용하면 α=14, $\beta=-6$이므로 $\alpha-\beta=\frac{25}{4}$이다.

계산 과정

가능한 범위: 주어진 조건을 정리하면 $x^2 \le y \le 2-x$이다. 이러한 y가 존재하려면 $x^2 \le 2-x$이어야 한다. 이를 인수분해하면 (x+2)(x-1)≤0이므로 -2≤ x≤1이다.

최댓값 α: x를 고정하면 y**가 가장 작을 때** $x-y$가 가장 크다. 따라서 아래쪽 경계 $y=x^2$에서 최댓값을 구한다. $x-y \le x-x^2$이고, 완전제곱식으로 바꾸면 x-x^2=14-≤ft(x-12)^2이므로 x-y≤14이다. x=12, y=14은 주어진 조건을 만족하고 이 상한을 실제로 얻으므로 α=14이다.

최솟값 β: x를 고정하면 y**가 가장 클 때** $x-y$가 가장 작다. 따라서 위쪽 경계 $y=2-x$를 적용하면 $x-y \ge x-(2-x)=2x-2$이다. -2≤ x≤1에서 $2x-2$는 x가 커질수록 커지므로, $x=-2$일 때 가장 작은 값 -6을 갖는다. 이때 $y=4$는 두 경계의 값을 모두 만족하므로 $\beta=-6$이다.

두 극값의 차: α-β=14-(-6)=(25)/(4)이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 세 수 a, 3, b가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $\frac{1}{a}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{b}$도 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $|a-b|$의 값은?

① $2\sqrt{5}$
② $2\sqrt{6}$
③ $2\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{2}$

정답 1번

간단한 해설

등차수열에서는 **가운데 항의 두 배가 양 끝 항의 합**이므로 $a+b=6$, $ab=4$를 얻는다. 따라서 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=20$이므로 $|a-b|=2\sqrt{5}$이다.

계산 과정

1. 두 수의 합 구하기: 세 수가 등차수열을 이루면 이웃한 항의 차가 같으므로 $3-a=b-3$이다. 이를 정리하면 $a+b=6$이다.

2. 두 수의 곱 구하기: 역수가 주어졌으므로 a, b는 모두 0이 아니다. 두 번째 등차수열에서도 가운데 항의 두 배가 양 끝 항의 합이므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$이다. 왼쪽을 통분하면 $\frac{a+b}{ab}=\frac{3}{2}$이고, $a+b=6$을 대입하면 $\frac{6}{ab}=\frac{3}{2}$이므로 $ab=4$이다.

3. 차의 절댓값 구하기: **두 수를 각각 구하지 않고 합과 곱을 이용**한다. 항등식 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$에 위의 값을 대입하면 $(a-b)^2=36-16=20$이다. 절댓값은 음수가 아니므로 $|a-b|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족할 때, 정적분 ∫ _-3^3(x-1)f(x)dx의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이다.
(나) ∫ _0^3 f(x)dx=-2

① 0
② 4
③ 8
④ 12

정답 2번

간단한 해설

$f(x)$는 우함수이므로 $xf(x)$는 **기함수**이고, 대칭 구간에서 그 정적분은 0이다. 따라서 구하는 값은 $-2\int_0^3 f(x)dx$이므로 4이다.

계산 과정

(가)에서 $f(-x) = f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다. 여기에 x를 곱하면 $(-x)f(-x) = -xf(x)$이므로 $xf(x)$는 기함수이다. 기함수는 원점의 양쪽에서 함수값의 부호가 반대이므로 **대칭 구간에서 적분값이 상쇄**되어 $\int_{-3}^{3} xf(x)dx = 0$이다.

우함수는 원점의 양쪽에서 함수값이 같으므로 **대칭 구간의 정적분은 한쪽 구간 정적분의 두 배**이다. 따라서 $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 2\int_0^3 f(x)dx$이며, (나)를 대입하면 그 값은 2 × (-2) = -4이다.

구하려는 적분의 피적분함수는 $(x-1)f(x) = xf(x) - f(x)$로 나뉜다. 적분의 선형성에 따라 첫 항의 정적분 0에서 둘째 항의 정적분 -4를 빼면 된다. 따라서 구하는 값은 0 - (-4) = 4로, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 무리함수 $y = 3\sqrt{x-2} + 1$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 만나는 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{5}$
② $2\sqrt{10}$
③ $3\sqrt{5}$
④ $3\sqrt{10}$

정답 4번

간단한 해설

주어진 함수는 증가함수이므로 두 그래프의 교점은 **직선 $y = x$ 위**에 있다. 두 교점의 x좌표 차가 $3\sqrt{5}$이므로 두 점 사이의 거리는 $3\sqrt{10}$이다.

계산 과정

교점 조건: $f(x) = 3\sqrt{x-2} + 1$은 정의역 $x \geq 2$에서 **증가함수**이다. 원함수와 역함수의 공통점 (u, v)에서는 $v = f(u), u = f(v)$가 성립한다. 만약 $u < v$이면 증가성에 의해 $f(u) < f(v)$, 즉 $v < u$가 되어 모순이다. $u > v$인 경우도 마찬가지이므로 교점은 $y = x$ 위에 있다.

x좌표 계산: $y = x$를 원함수에 대입하면 $x = 3\sqrt{x-2} + 1$이다. 이를 $x - 1 = 3\sqrt{x-2}$로 정리하고 양변을 제곱하면 $(x-1)^2 = 9(x-2)$이므로 $x^2 - 11x + 19 = 0$을 얻는다. 근의 공식에 따라 $x = \frac{11 \pm 3\sqrt{5}}{2}$이다.

교점 확인: 구한 두 근은 모두 $x \geq 2$를 만족한다. 이 범위에서는 **제곱하기 전 양변이 모두 음이 아니므로** 두 근 모두 원래 식을 만족한다. 작은 근을 a, 큰 근을 b라 하면 두 교점은 (a, a), (b, b)이고, $b - a = 3\sqrt{5}$이다.

거리 계산: 두 교점의 x좌표 차와 y좌표 차는 모두 $b - a$이다. 두 점 사이의 거리 공식으로 $d = \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2}$이다. 따라서 $d = \sqrt{2}(b-a) = 3\sqrt{10}$이며, ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 19. 세 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수의 합이 12일 때, 세 눈의 수가 모두 같을 확률은?

① $\frac{1}{21}$
② $\frac{1}{23}$
③ $\frac{1}{25}$
④ $\frac{1}{27}$

정답 3번

간단한 해설

합이 12라는 조건이 있으므로 **합이 12인 25가지 결과**만을 기준으로 확률을 구한다. 이 중 세 눈이 모두 같은 경우는 (4, 4, 4) 하나이므로 확률은 $\frac{1}{25}$이다.

계산 과정

세 주사위를 구별하여 나온 눈을 순서 있는 세 수로 나타내면 각 결과가 나올 가능성은 같다. 예를 들어 (1, 5, 6)과 (1, 6, 5)는 서로 다른 결과이다. 이 문제는 합이 12라는 조건 아래의 확률을 묻기 때문에 **합이 12인 결과만을 전체 경우로 삼는다**.

합이 12인 경우의 수: 첫 번째 주사위의 눈이 1, 2, 3, 4, 5, 6일 때, 나머지 두 눈의 합은 각각 11, 10, 9, 8, 7, 6이어야 한다. 각 눈이 1~6이라는 범위에서 이를 만족하는 순서 있는 두 수는 각각 2, 3, 4, 5, 6, 5가지이다. 예를 들어 두 눈의 합이 11이면 (5, 6), (6, 5)의 2가지이다. 따라서 합이 12인 결과는 모두 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 = 25가지이다.

세 눈이 모두 같은 경우의 수: 공통된 눈을 x라 하면 $3x = 12$이므로 $x = 4$이다. 따라서 조건을 만족하면서 세 눈이 모두 같은 결과는 **(4, 4, 4) 한 가지**뿐이다.

조건부확률: 합이 12인 25가지 결과 중 원하는 결과가 1가지이므로 구하는 확률은 $\frac{1}{25}$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 이차방정식 $x^2 + 3nx + 2 = 0$의 두 근을 $\alpha_n,\ \beta_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$의 값은? (단, n은 자연수이다)

① 465

② 470

③ 475

④ 480

정답 3번

간단한 해설

두 근의 **합과 곱**을 이용하면 $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 9n^2 - 4$이다. 이를 $n = 1$부터 5까지 더한 값은 475이다.

계산 과정

1. 두 근의 합과 곱: 이차방정식 $x^2 + 3nx + 2 = 0$에서 **근과 계수의 관계**에 따라 $\alpha_n + \beta_n = -3n$, $\alpha_n\beta_n = 2$이다.

2. 두 근의 제곱의 합: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$이므로 두 근을 각각 구할 필요가 없다. 앞에서 구한 합과 곱을 대입하면 $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = (-3n)^2 - 2\cdot 2$, 즉 $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 9n^2 - 4$이다.

3. 다섯 항의 합: 구하는 합을 S라 하자. $n = 1$부터 5까지의 제곱의 합은 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$이고, **상수항 −4도 다섯 번 더한다**. 따라서 $S = 9\cdot 55 - 4\cdot 5 = 475$이며, 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase