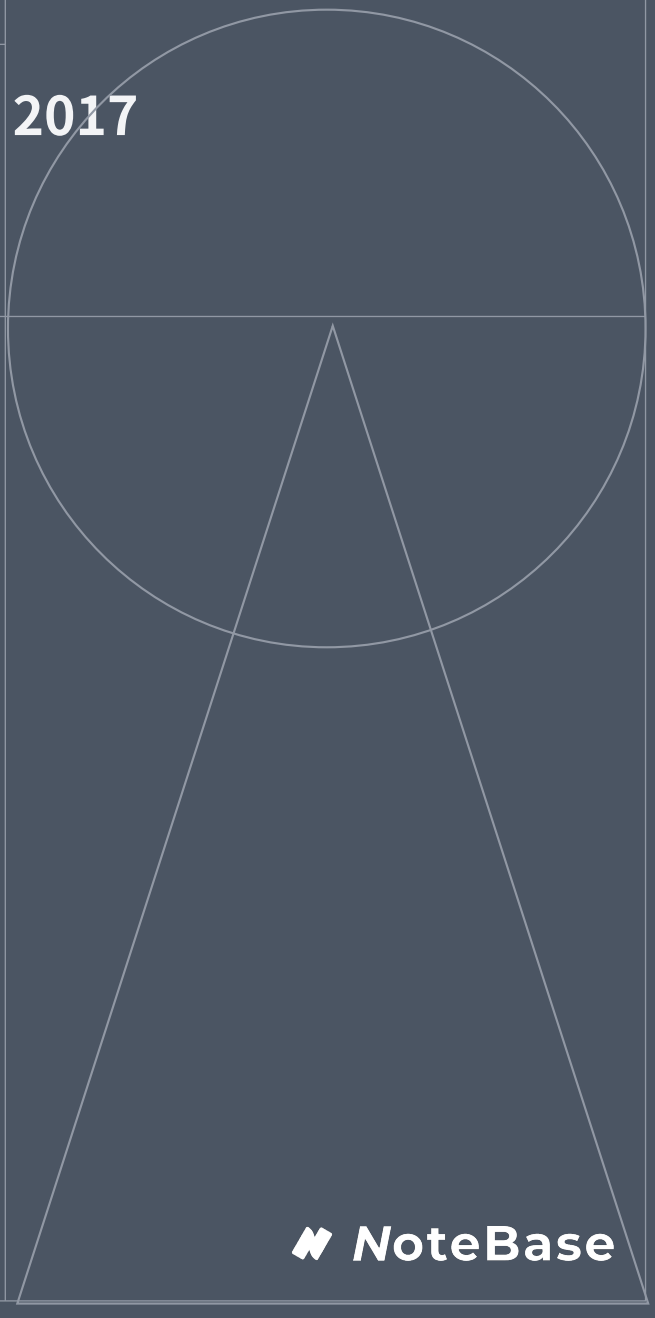
기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2017



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2017

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2017

문 1. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2017}=a+bi$**일 때,** $a+b$**의 값은? (단,** a**,** b**는 실수)**

① -2

② -1

③ 0

④ 1

정답 2번

간단한 해설

밑이 $-i$이므로 **네 항씩 더하면 0**이 된다. $2017=4\times504+1$이므로 전체 합은 $-i$만 남으며, $a+b=-1$이다.

계산 과정

밑 계산: $z=\frac{1-i}{1+i}$로 놓는다. 허수단위 i는 $i^2=-1$을 만족한다. 분모를 실수로 만들기 위해 분자와 분모에 $1-i$를 곱하면 $z=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}$이다. 분자는 $1-2i+i^2=-2i$, 분모는 $1-i^2=2$이므로 $z=\frac{-2i}{2}=-i$이다.

거듭제곱의 반복: z, z^2, z^3, z^4는 차례로 $-i,\ -1, i, 1$이다. $z^4=1$이므로 이후에도 **같은 네 값이 반복**된다. 한 묶음의 합은 $-i-1+i+1=0$이다.

전체 합: $2017=4\times504+1$이므로 **처음 2016항은 네 항씩 504묶음**으로 나뉘어 합이 0이 된다. 남은 마지막 항은 $z^{2017}=(z^4)^{504}z=-i$이므로 주어진 식의 전체 합은 $-i$이다.

실수부와 허수부 비교: $a+bi=-i=0+(-1)i$이고 a, b가 실수이므로 $a=0, b=-1$이다. 따라서 $a+b=-1$이며, 이는 ②의 값이다.

NoteBase

문 2. 다항식 $x^5 + x^4$을 $x^2 - 4$로 나누었을 때의 나머지는?

① $16x - 32$

② $16x - 16$

③ $16x + 16$

④ $16x + 32$

정답 3번

간단한 해설

나머지를 $ax + b$로 놓고 **제수가 0이 되는 두 값** $x = 2,\ -2$를 대입하면 두 계수를 구할 수 있다. 이때 $a = 16$, $b = 16$이므로 나머지는 $16x + 16$이다.

계산 과정

나머지 설정: 이차식 $x^2 - 4$로 나누므로 **나머지의 차수는 2보다 작아야 한다**. 따라서 나머지를 $ax + b$, 몫을 $Q(x)$로 놓으면 $x^5 + x^4 = (x^2 - 4)Q(x) + ax + b$이다. 여기서 a, b는 구해야 할 상수이다.

두 조건 구하기: $x = 2$ 또는 $x = -2$를 대입하면 **몫이 곱해진 항이 0**이 되어 나머지의 값만 남는다. $x = 2$일 때 $2^5 + 2^4 = 48$이므로 $2a + b = 48$이다. $x = -2$일 때 $(-2)^5 + (-2)^4 = -16$이므로 $-2a + b = -16$이다.

계수 계산: 두 식을 더하면 a가 소거되어 $2b = 32$, 즉 $b = 16$을 얻는다. 이를 $2a + b = 48$에 대입하면 $2a + 16 = 48$이므로 $a = 16$이다.

따라서 나머지는 $16x + 16$이며, ③의 식과 일치한다.

NoteBase

문 3. 두 집합 $X=\{x \mid -1 \le x \le 4\}$, $Y=\{y \mid -5 \le y \le 5\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 $f(x)=ax+b(a<0)$이다. 이 함수 f가 일대일 대응이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

기울기가 음수이므로 일대일 대응이 되려면 **정의역의 왼쪽 끝점은 공역의 최댓값에, 오른쪽 끝점은 최솟값에 대응**해야 한다. 따라서 $f(-1)=5$, $f(4)=-5$를 이용하면 $a=-2$, $b=3$이므로 $a+b=1$이다.

계산 과정

일대일 대응은 서로 다른 입력의 함숫값이 서로 다르고, 치역이 공역 전체와 일치하는 함수이다. $a<0$인 일차함수는 감소하므로 서로 다른 입력의 함숫값이 서로 다르다. 정의역에서 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $f(4)$이며 그 사이의 모든 값을 갖는다. 따라서 치역이 공역 Y와 같으려면 **최댓값은 5, 최솟값은 −5**여야 한다. 이를 식으로 나타내면 $-a+b=5$, $4a+b=-5$이다.

두 식에서 **같은 상수항을 소거**하기 위해 두 번째 식에서 첫 번째 식을 뺀다. 그러면 $(4a+b)-(-a+b)=-5-5$이므로 $5a=-10$, $a=-2$이다. 이를 $-a+b=5$에 대입하면 $2+b=5$이므로 $b=3$이다. 구한 기울기는 $a<0$ 조건도 만족한다.

따라서 구하는 값은 $a+b=-2+3=1$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. 다음 함수의 그래프 중에서 x축의 방향 또는 y축의 방향으로 평행이동하여 서로 겹칠 수 없는 것은?

① $y=\frac{x-2}{x-1}$
② $y=\frac{2x+3}{x+2}$
③ $y=\frac{2x+1}{x}$
④ $y=\frac{-2x+5}{x-3}$

정답 3번

간단한 해설

유리함수를 $y=\frac{a}{x-p}+q$ 꼴로 나타내면, **평행이동으로는 분자의 상수 a가 바뀌지 않는다**. ③은 $a=1$이어서 $a=-1$인 나머지 그래프와 겹칠 수 없다.

선지별 해설

유리함수 $y=\frac{a}{x-p}+q$에서 $a\neq 0$이고 $x\neq p$이다. 이 그래프는 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 가로로 p, 세로로 q만큼 평행이동한 것이며, 점근선은 $x=p, y=q$이다. 따라서 평행이동은 점근선의 위치를 바꾸지만 **상수 a는 바꾸지 않는다**. 각 식을 이 꼴로 고쳐 a가 같은지 비교한다.

①: 분자를 $x-2=(x-1)-1$로 쓰면 $y=1-\frac{1}{x-1}$이므로 $a=-1$이다.

②: 분자를 $2x+3=2(x+2)-1$로 쓰면 $y=2-\frac{1}{x+2}$이므로 $a=-1$이다.

③: 분자의 각 항을 x로 나누면 $y=2+\frac{1}{x}$이므로 $a=1$이다. 다른 세 함수와 달리 **분수항의 분자가 양수**이다.

④: 분자를 $-2x+5=-2(x-3)-1$로 쓰면 $y=-2-\frac{1}{x-3}$이므로 $a=-1$이다.

①·②·④는 모두 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로 서로 겹칠 수 있다. 반면 ③은 a의 부호가 다르므로 평행이동만으로 나머지 그래프와 겹칠 수 없다.

NoteBase

문 5. $x^2+x+1=0, y^4-y^2+1=0$**일 때,** x^6-y^6**의 값은?**

① 0

② 1

③ 2

④ 3

정답 3번

간단한 해설

인수분해 공식으로 $x^3=1, y^6=-1$을 얻는다. 따라서 $x^6-y^6=1-(-1)=2$이다.

계산 과정

1. x^6 구하기: x^2+x+1은 **세제곱의 차를 인수분해할 때 나오는 인수**이다. 주어진 식의 양변에 $x-1$을 곱하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이다. 왼쪽을 전개하면 $x^3-1=0$이므로 $x^3=1$이다. 이를 제곱하면 $x^6=(x^3)^2=1$을 얻는다.

2. y^6 구하기: y^4-y^2+1은 y^2을 하나의 문자로 볼 때 **세제곱의 합을 인수분해할 때 나오는 인수**이다. 주어진 식의 양변에 y^2+1을 곱하면 $(y^2+1)(y^4-y^2+1)=0$이다. 왼쪽을 전개하면 $y^6+1=0$이므로 $y^6=-1$이다.

3. 차 구하기: 두 값을 대입하면 $x^6-y^6=1-(-1)=2$이다. 이는 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 6. 이차함수 $y = x^2 - 3x$의 그래프와 직선 $y = x + k$가 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k \leq -8$

② $-8 \leq k \leq -6$

③ $-6 \leq k \leq -4$

④ $k \geq -4$

정답 4번

간단한 해설

두 그래프가 만나려면 교점의 x좌표를 구하는 방정식 $(x-2)^2 = k + 4$가 실근을 가져야 한다. **실수의 제곱은 0 이상**이므로 $k \geq -4$이며, 경계값에서는 두 그래프가 한 점에서 만난다.

계산 과정

교점에서는 두 식의 y값이 같으므로 $x^2 - 3x = x + k$이다. 이를 정리한 $x^2 - 4x - k = 0$의 실근이 교점의 x좌표가 된다. 따라서 '적어도 한 점에서 만난다'는 **실근이 적어도 하나 존재한다**는 뜻이다.

완전제곱식으로 바꾸면 $(x-2)^2 = k + 4$이다. 왼쪽은 실수 x에 대하여 0 이상의 모든 값을 가질 수 있으므로, 이 방정식이 실근을 가질 조건은 $k + 4 \geq 0$이다. 이를 풀면 $k \geq -4$이다.

$k = -4$일 때는 $(x-2)^2 = 0$이므로 $x = 2$에서 한 점으로 만난다. $k > -4$일 때는 서로 다른 두 실근이 있어 두 점에서 만나므로, **경계값도 포함**한다.

따라서 구하는 범위는 $k \geq -4$이며, ④의 범위와 일치한다.

NoteBase

문 7. $x > 0$**일 때, 함수** $y = (x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x}) - 6$**의 최솟값은?**

① −6

② −7

③ −8

④ −9

정답 1번

간단한 해설

x+(1)/(x)≥2이므로 $(x + \frac{1}{x} - 1)^2$의 최솟값은 1이다. 따라서 주어진 함수의 **최솟값은 −6**이며, $x = 1$일 때 얻어진다.

계산 과정

치환과 범위: 반복되는 식을 $t = x + \frac{1}{x}$로 놓는다. $x > 0$이므로 t-2=((x-1)^2)/(x)≥0이다. 따라서 **치환한 변수도 범위의 제한을 받아** t≥2이며, $x = 1$일 때 $t = 2$가 된다.

최솟값 계산: 주어진 함수를 완전제곱식으로 정리하면 $y = t^2 - 2t - 6 = (t - 1)^2 - 7$이다. 이 식의 꼭짓점은 $t = 1$에 있지만, **허용 범위에 포함되지 않는다**. t≥2에서는 t-1≥1이므로 (t-1)^2≥1이고, 이에 따라 y≥1-7=-6이다.

최솟값의 성립: $x = 1$을 대입하면 $t = 2$이고 $y = 2^2 - 2 \cdot 2 - 6 = -6$이다. 즉, −6은 실제로 얻어지는 최솟값이며 ①에 해당한다.

NoteBase

문 8. 직선 $3x-4y+1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x-k)^2+(y-2)^2=16$의 넓이를 이등분할 때, 상수 k의 값은?

① -2

② -3

③ -4

④ -5

정답 2번

간단한 해설

원을 넓이가 같은 두 부분으로 나누는 직선은 **원의 중심을 지난다**. 대칭이동한 직선 $3x+4y+1=0$에 중심 $(k, 2)$를 대입하면 $k=-3$이다.

계산 과정

대칭이동한 직선: x축에 대한 대칭이동은 x**좌표를 유지하고** y**좌표의 부호를 바꾸는** 변환이다. 원래 직선의 식에서 y 대신 $-y$를 대입하면 $3x-4(-y)+1=0$이므로, 대칭이동한 직선은 $3x+4y+1=0$이다.

원의 중심과 이등분 조건: 원 $(x-k)^2+(y-2)^2=16$의 중심은 $(k, 2)$, 반지름은 4이다. 직선이 원의 넓이를 이등분하려면 **중심을 지나야 한다**. 중심을 지나는 직선은 지름을 포함하므로 원을 넓이가 같은 두 반원으로 나눈다.

상수 k의 값: 중심 $(k, 2)$가 직선 $3x+4y+1=0$ 위에 있으므로 $3k+4\cdot 2+1=0$이다. 이를 정리하면 $3k+9=0$, $k=-3$이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 함수 f(x)=_n→∞(x^2n-1+2x+3)/(x^2n+1)에 대하여 _x→1^-f(x)+_x→2^+f(x)의 값은?

① 4

② $\frac{9}{2}$

③ 5

④ $\frac{11}{2}$

정답 4번

간단한 해설

먼저 **x가 속한 구간에 따라** n에 대한 극한을 구하면, $0 < x < 1$에서는 $f(x) = 2x + 3$, $x > 1$에서는 $f(x) = \frac{1}{x}$이다. 따라서 두 극한값의 합은 $5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$이다.

계산 과정

함수 $f(x)$는 각 x를 고정하고 **먼저 n에 대한 극한을 취해** 정의된다. 따라서 필요한 구간에서 $f(x)$의 식을 구한 뒤 x에 대한 극한을 계산한다.

1의 왼쪽에서의 극한: x가 1보다 작고 충분히 가까우면 $0 < x < 1$이다. 이 구간에서 x를 고정하고 $n \to \infty$로 보내면 $x^{2n-1} \to 0$, $x^{2n} \to 0$이므로 $f(x) = 2x + 3$이다. 따라서 $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$이다.

2의 오른쪽에서의 극한: 이때는 $x > 1$이므로 분자와 분모를 **가장 높은 차수의 항**인 x^{2n}으로 나눈다. 주어진 분수는 $\frac{\frac{1}{x} + \frac{2x+3}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}}$가 된다. x를 고정하고 $n \to \infty$로 보내면 $x^{2n} \to \infty$이므로 $\frac{2x+3}{x^{2n}} \to 0$, $\frac{1}{x^{2n}} \to 0$이다. 따라서 $f(x) = \frac{1}{x}$이고, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$이다.

두 극한값을 더하면 $5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$이며, 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 다항함수 $f(x)$에 대하여 _x→3(f(x)-5)/(x^3-27)=(1)/(9)이 성립할 때, $f(3)f'(3)$의 값은?

① 15

② 20

③ 25

④ 30

정답 1번

간단한 해설

분모가 0으로 수렴하는데 극한값이 유한하므로 분자도 0으로 수렴하여 $f(3) = 5$이다. 분모를 인수분해하고 **미분계수의 정의**를 적용하면 $f'(3) = 3$이므로, 두 값의 곱은 15이다.

계산 과정

1. 함수값 구하기: $x \to 3$일 때 $x^3 - 27 \to 0$이고, 주어진 비의 극한값은 유한한 수 $\frac{1}{9}$이다. 따라서 **분자도 0으로 수렴**해야 한다. 다항함수는 연속이므로 $f(3) - 5 = 0$, 즉 $f(3) = 5$이다.

2. 미분계수 구하기: 분모를 인수분해하면 $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$이다. 분자의 5를 $f(3)$으로 바꾸고 분모의 두 인자로 나누어 생각한다. **미분계수의 정의**에 따라 $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3)$이고, 나머지 인자 $x^2 + 3x + 9$는 27로 수렴한다. 따라서 주어진 극한 조건은 $\frac{f'(3)}{27} = \frac{1}{9}$이므로 $f'(3) = 27 \cdot \frac{1}{9} = 3$이다.

3. 곱 구하기: $f(3)f'(3) = 5 \cdot 3 = 15$이므로 선택지 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 11. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A \subset B$일 때, 다음 중 항상 성립하는 것은? (단, A^c은 A의 여집합)

① $A^c \cup B = \emptyset$

② $A \cap B^c = U$

③ $A \cap B = B$

④ $B^c \subset A^c$

정답 4번

간단한 해설

$A \subset B$이면 B에 속하지 않는 원소는 A에도 속하지 않는다. 따라서 **여집합을 취하면 포함 관계의 방향이 바뀌어** $B^c \subset A^c$가 성립한다.

선지별 해설

$A \subset B$는 A의 모든 원소가 B에도 속한다는 뜻이다. 여집합 A^c는 전체집합 U의 원소 중 A에 속하지 않는 원소들의 집합이다.

① X: A에 속하지 않는 원소는 A^c에 들어가고, A에 속하는 원소는 B에 들어간다. 따라서 두 집합의 합집합은 **전체집합**이며, 항상 성립하는 식은 $A^c \cup B = U$이다. 선지의 등식은 항상 성립하지 않는다.

② X: A의 원소는 모두 B에 속하므로 B^c에는 속할 수 없다. 따라서 두 집합에는 **공통 원소가 없으며**, 항상 성립하는 식은 $A \cap B^c = \emptyset$이다. 선지의 등식은 항상 성립하지 않는다.

③ X: A의 모든 원소가 이미 B에 들어 있으므로 두 집합의 교집합은 A이다. 따라서 항상 성립하는 식은 $A \cap B = A$이며, 선지처럼 B와 같아지는 것은 **두 집합이 같을 때뿐**이다.

④ O: B^c의 임의의 원소를 x라 하면 $x \notin B$이다. 만약 $x \in A$라면 $A \subset B$에 의해 $x \in B$여야 하므로 모순이다. 따라서 $x \notin A$, 즉 $x \in A^c$이다. 이처럼 **큰 집합의 바깥은 작은 집합의 바깥에 포함**되므로 $B^c \subset A^c$가 항상 성립한다.

NoteBase

문 12. 부정적분 $\int(x+1)^2dx-\int(x-1)^2dx$를 구하면?

① $\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

② x^2+C (단, C는 적분상수)

③ $2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

④ $\frac{1}{3}x^3+C$ (단, C는 적분상수)

정답 3번

간단한 해설

두 피적분함수의 차를 전개하면 제곱항과 상수항이 없어져 $4x$**만 남는다**. 이를 적분하면 $2x^2+C$이다.

계산 과정

부정적분의 선형성에 따라 **두 피적분함수의 차를 먼저 구한 뒤 적분**할 수 있다. 두 부정적분에 각각 붙는 적분상수의 차도 하나의 임의의 상수이므로 마지막에 C로 나타낸다.

두 제곱식을 전개하면 $(x+1)^2=x^2+2x+1$, $(x-1)^2=x^2-2x+1$이다. 두 식을 빼면 제곱항과 상수항은 없어지고, 일차항은 $2x-(-2x)=4x$가 된다. 따라서 $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$이다.

$\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$이고 상수배는 적분 밖으로 꺼낼 수 있으므로 $\int 4xdx=2x^2+C$이다. 따라서 주어진 부정적분의 차는 $2x^2+C$로, ③의 식과 일치한다.

NoteBase

문 13. 세 수 a, b, 5가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $-b$, 4, $8a$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은? (단, b는 자연수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

등차수열과 등비수열의 가운데 항 관계를 함께 이용하고 **b가 자연수**라는 조건을 적용하면 $b=2$, $a=-1$이다. 따라서 $a+b=1$이다.

계산 과정

등차수열은 이웃한 두 항의 차가 일정하므로 $b-a=5-b$이다. 이를 정리하면 $2b=a+5$, 즉 $a=2b-5$이다.

연속한 세 등비수열 항에서는 **가운데 항의 제곱이 양 끝 항의 곱**과 같다. 따라서 $4^2=(-b)\cdot(8a)$이므로 $16=-8ab$, 즉 $ab=-2$이다.

$ab=-2$에 $a=2b-5$를 대입하면 $(2b-5)b=-2$이다. 이를 정리하고 인수분해하면 $2b^2-5b+2=0$, $(2b-1)(b-2)=0$이므로 $b=\frac{1}{2}$ 또는 $b=2$이다.

b는 자연수이므로 $b=2$만 가능하다. 이때 $a=2\cdot 2-5=-1$이다.

따라서 구하는 값은 $a+b=-1+2=1$이며, ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. $\log_3 5$를 $\log_3 5 = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)로 표현할 때, 9^{α}의 값은?

① $\frac{5}{3}$

② $\frac{25}{9}$

③ $3^{\frac{5}{3}}$

④ $3^{\frac{25}{9}}$

정답 2번

간단한 해설

$\log_3 5$의 정수 부분은 1이므로 $3^{\alpha} = \frac{5}{3}$이다. 9^{α}는 **이 값을 제곱한 값**이므로 $\frac{25}{9}$이다.

계산 과정

$3^1 < 5 < 3^2$이고 밑이 3인 로그함수는 증가하므로 $1 < \log_3 5 < 2$이다. n은 정수이고 $0 \le \alpha < 1$이므로, n은 $\log_3 5$의 **정수 부분**이다. 따라서 $n = 1$이다.

주어진 식은 $\log_3 5 = 1 + \alpha$가 된다. 로그의 정의에 따라 $3^{1+\alpha} = 5$이고, 지수법칙을 적용하면 $3 \cdot 3^{\alpha} = 5$이다. 따라서 $3^{\alpha} = \frac{5}{3}$이다.

구하려는 식은 **밑 9를 3의 제곱으로 바꾸어** 계산한다. 지수법칙에 따라 $9^{\alpha} = (3^2)^{\alpha} = (3^{\alpha})^2$이므로, $9^{\alpha} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$이다. 이 값은 ②에 해당한다.

NoteBase

문 15. $(ax^2 - \frac{2}{x})^5$**의 전개식에서** $\frac{1}{x^2}$**의 계수가 240일 때, 실수** a**의 값은?**

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 2번

간단한 해설

x의 지수가 −2가 되려면 **둘째 항을 네 번** 골라야 한다. 이때 계수는 $80a$이므로 $80a = 240$에서 a = 3이다.

계산 과정

1. 해당 항 찾기: 주어진 식은 같은 괄호 다섯 개를 곱한 것이다. 각 괄호에서 ax^2 또는 $-\frac{2}{x}$를 하나씩 고른다. 둘째 항을 k번 고르면 첫째 항은 $5-k$번 고르므로, 곱한 항에서 x의 지수는 $2(5-k)-k = 10-3k$이다. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$이므로 $10-3k = -2$를 풀면 $k = 4$이다.

2. 계수 계산: 첫째 항을 한 번, 둘째 항을 네 번 골라야 한다. **첫째 항을 고를 괄호의 위치가 다섯 곳**이므로 같은 항이 5번 나온다. 한 번의 곱은 $(ax^2)(-\frac{2}{x})^4 = \frac{16a}{x^2}$이다. 따라서 $\frac{1}{x^2}$의 계수는 $5 \cdot 16a = 80a$이다.

3. 조건 적용: 주어진 계수가 240이므로 $80a = 240$이다. 양변을 80으로 나누면 a = 3이며, 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 16. 확률변수 X가 정규분포 $N(120, 6^2)$을 따를 때, 주어진 표준정규분포표를 이용하여 확률 P(117≤X≤132)를 구하면?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328

② 0.6247

③ 0.6687

④ 0.7745

정답 3번

간단한 해설

표준화하면 구하려는 구간은 -0.5≤ Z≤2이다. 표준정규분포의 **좌우 대칭성**을 이용해 0의 양쪽 구간 확률을 더하면 0.1915 + 0.4772 = 0.6687이다.

NoteBase

계산 과정

평균은 120, 분산은 6^2이므로 표준편차는 6이다. **평균을 빼고 표준편차로 나누어** $Z = \frac{X-120}{6}$으로 표준화하면, Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

구간의 양 끝을 표준화하면 $\frac{117-120}{6} = -0.5$, $\frac{132-120}{6} = 2$이다. 따라서 구하려는 확률은 P(-0.5≤ Z≤2)이며, 이 구간은 평균 0을 사이에 두고 양쪽에 걸쳐 있다.

표의 값은 **0부터 양수 z까지의 확률**이다. z = 0.5인 행에서 P(0≤ Z≤0.5)=0.1915, z = 2.0인 행에서 P(0≤ Z≤2)=0.4772를 읽는다. 표준정규분포는 0을 기준으로 좌우 대칭이므로 P(-0.5≤ Z≤0)=0.1915이다.

0에서 나눈 두 구간의 확률을 더한다. 연속확률분포에서는 $P(Z = 0) = 0$이므로 경계점 0의 중복은 계산에 영향을 주지 않는다. 구하는 확률은 0.1915 + 0.4772 = 0.6687이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 17. a=_n→∞(3n^2-n+2)/(2n^2+3n+1)이고 b=_n→∞(√(n^2+2n-1)-n)일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{2}$

② 3

③ $\frac{7}{2}$

④ 4

정답 1번

간단한 해설

a는 분자와 분모를 n^2**으로 나누어** $\frac{3}{2}$를 얻는다. b는 **켤레식으로 유리화**하면 1에 수렴하므로, $a+b=\frac{5}{2}$이다.

계산 과정

1. a 계산: 분자와 분모의 최고차항이 모두 이차항이므로 **분자와 분모를 각각 n^2으로 나눈다**.
$a=\lim_{n\to\infty}\frac{3-1/n+2/n^2}{2+3/n+1/n^2}$.
$n\to\infty$일 때 $1/n$과 $1/n^2$은 0으로 수렴하고 분모는 2로 수렴하므로, $a=\frac{3}{2}$이다.

2. b 계산: 제곱근 부분과 n이 모두 무한히 커지므로 두 항의 극한을 따로 빼서 계산할 수 없다. **켤레식 $\sqrt{n^2+2n-1}+n$을 분자와 분모에 곱한다**. 제곱의 차를 이용하면 분자는 $(n^2+2n-1)-n^2=2n-1$이 된다.
$b=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$.
이제 분자와 분모를 n으로 나눈다. n은 양수이므로 제곱근 부분을 n으로 나누면 $\sqrt{1+2/n-1/n^2}$이 된다.
$b=\lim_{n\to\infty}\frac{2-1/n}{\sqrt{1+2/n-1/n^2}+1}$.
분자는 2, 분모는 $\sqrt{1}+1=2$로 수렴하므로 $b=\frac{2}{2}=1$이다.

3. 합 계산: $a+b=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$이므로 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 18. 부등식 $x^2 + y^2 - 2x - 2y \leq 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x + y$의 최댓값은?

① $\sqrt{2}$
② 2
③ $2\sqrt{2}$
④ 4

정답 4번

간단한 해설

제곱이 0 이상이라는 성질과 주어진 부등식을 결합하면 0≤ x+y≤4를 얻는다. $x = y = 2$일 때 **상한 4가 실제로 달성**되므로 최댓값은 4이다.

계산 과정

1. 구하려는 합을 $s = x + y$라 두면, 주어진 부등식은 x^2+y^2≤2s로 정리된다.

2. 실수의 제곱은 0 이상이므로 (x-y)^2≥0이다. 이를 전개하면 $2xy \leq x^2 + y^2$이므로 (x+y)^2≤2(x^2+y^2)를 얻는다. 여기에 앞의 조건을 적용하면 s^2≤4s이다.

3. s^2≤4s를 이항하여 인수분해하면 s(s-4)≤0이다. 두 근 0과 4 사이에서 곱이 0 이하이므로 0≤ s≤4이다. 따라서 $x + y$가 가질 수 있는 값의 **상한은 4**이다.

4. 최댓값이 되려면 **상한을 실제로 만족하는 값**이 있어야 한다. $x = y = 2$를 원래 부등식에 대입하면 4 + 4 - 4 - 4 = 0이므로 조건을 만족한다. 이때 $x + y = 4$이므로 최댓값은 4이며, ④에 해당한다.

NoteBase

문 19. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\int_2^x tf(t)dt = \frac{1}{2}x^2f(x) + x^4 - 2x^3$을 만족시키고 $f'(0) = 12$일 때, $f(0)$의 값은?

① -8

② -6

③ -4

④ -2

정답 1번

간단한 해설

주어진 적분식에 **상한과 하한이 같은** $x = 2$를 대입하면 $f(2) = 0$이다. 양변을 미분해 얻는 $f'(x) = 12 - 8x$와 이 조건을 이용하면 $f(0) = -8$이다.

계산 과정

1. 경계값 구하기: 주어진 식에 $x = 2$를 대입하면 적분 구간의 양 끝이 같으므로 좌변은 0이다. 따라서 $0 = 2f(2) + 16 - 16$이므로 $f(2) = 0$이다. 이 값은 이후 적분상수를 정하는 조건이 된다.

2. 적분식 미분하기: 미분가능한 함수는 연속이므로 미적분의 기본정리에 따라 좌변을 x에 관해 미분하면 $xf(x)$이다. 우변의 첫 항에는 곱의 미분법을 적용하여 $\frac{1}{2}x^2f(x)$의 도함수를 $xf(x) + \frac{1}{2}x^2f'(x)$로 구한다. 양변의 공통항 $xf(x)$를 소거하면 $\frac{1}{2}x^2f'(x) + 4x^3 - 6x^2 = 0$이다.

3. 함수식 구하기: $x \neq 0$**일 때** 위 식을 x^2으로 나누면 $\frac{1}{2}f'(x) + 4x - 6 = 0$, 즉 $f'(x) = 12 - 8x$이다. 주어진 조건 $f'(0) = 12$에 따라 이 관계는 $x = 0$에서도 성립한다. 따라서 적분하면 $f(x) = 12x - 4x^2 + C$이며, C는 적분상수이다.

4. 적분상수와 구하는 값: 앞서 구한 $f(2) = 0$**을 적용**하면 $0 = 24 - 16 + C$이므로 $C = -8$이다. 따라서 $f(0) = C = -8$이며, 이는 ①의 값과 일치한다.

NoteBase

문 20. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x) = 6x^2 - 8$이고 $f(0) = 0$일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 12

② 16

③ 20

④ 24

정답 2번

간단한 해설

곡선과 x축 사이의 넓이는 **함수값의 부호가 바뀌는 점에서 나누어** 구한다. $[-2, 0]$과 $[0, 2]$에서 생기는 두 부분의 넓이가 각각 8이므로 전체 넓이는 16이다.

계산 과정

1. 함수 구하기: $f'(x) = 6x^2 - 8$을 적분하면 $f(x) = 2x^3 - 8x + C$이다. 조건 $f(0) = 0$을 대입하면 적분상수 $C = 0$이므로 $f(x) = 2x^3 - 8x$이다.

2. 교점 구하기: x축과 만나는 점에서는 $f(x) = 0$이다. $2x^3 - 8x = 2x(x-2)(x+2)$이므로 교점의 x좌표는 $-2, 0, 2$이다. 따라서 넓이를 구할 구간은 $[-2, 0]$과 $[0, 2]$이다.

3. 넓이 식 세우기: $-2 < x < 0$에서는 $f(x) > 0$이고, $0 < x < 2$에서는 $f(x) < 0$이다. 넓이는 항상 양수이므로 **곡선이 축 아래에 있는 구간에서는 부호를 바꾸어 적분한다**. 구하는 넓이를 S라 하면 $S = \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{2} f(x)dx$이다.

4. 적분 계산: $f(x)$의 한 부정적분은 $F(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2$이다. $F(-2) = F(2) = -8$, $F(0) = 0$이므로 $\int_{-2}^{0} f(x)dx = 0 - (-8) = 8$이고 $\int_{0}^{2} f(x)dx = -8 - 0 = -8$이다. 두 번째 적분값은 곡선이 축 아래에 있어 음수이지만, 그 부분의 넓이는 8이다.

따라서 전체 넓이는 $8 + 8 = 16$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase