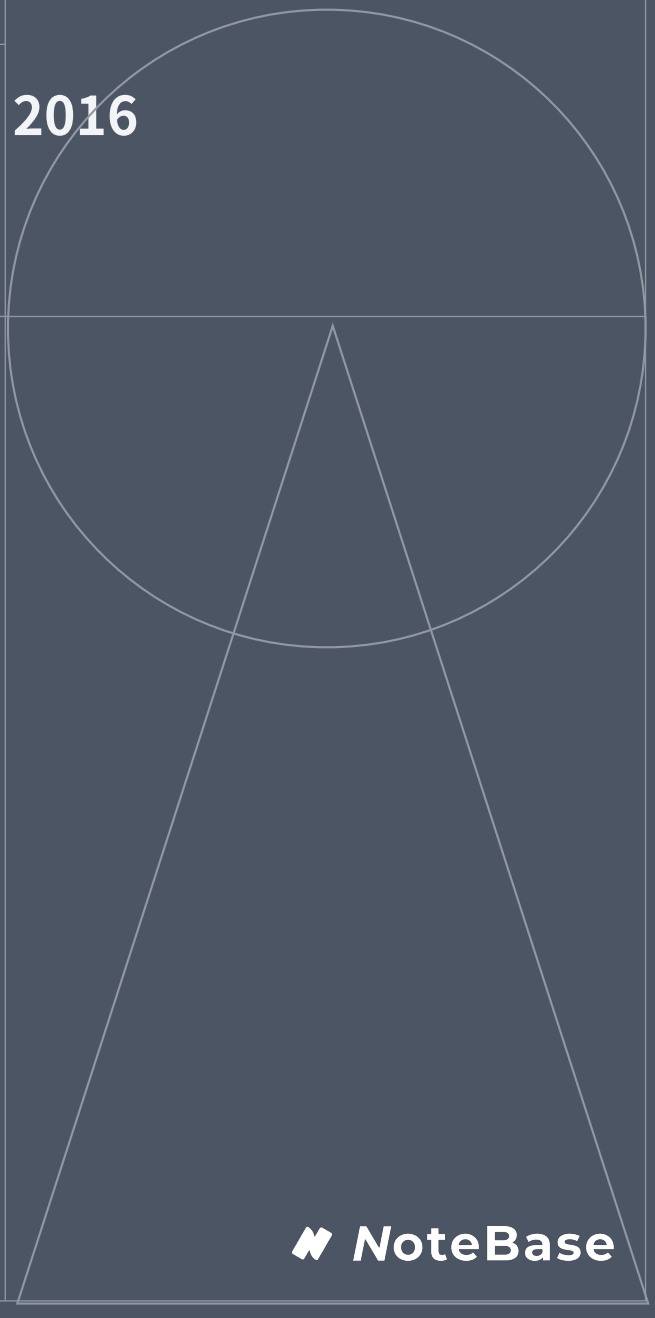
기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2016



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2016

공무원/국가직/9급 · 수학 · 2016

문 1. 정적분 $\int_{-1}^{2}|x^2-1|dx$의 값은?

① $\frac{4}{3}$

② 2

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{10}{3}$

정답 3번

간단한 해설

절댓값 안의 식이 0이 되는 지점에서 **부호에 따라 적분 구간을 나눈다**. -1≤ x≤1에서는 $1-x^2$을, 1≤ x≤2에서는 x^2-1을 적분하여 더하면 $\frac{8}{3}$이다.

계산 과정

구간 나누기: $x^2-1=(x-1)(x+1)$이므로 영점은 −1과 1이다. 적분 구간에서 -1≤ x≤1이면 x^2-1≤0이므로 $|x^2-1|=1-x^2$이다. 1≤ x≤2이면 x^2-1≥0이므로 $|x^2-1|=x^2-1$이다. 따라서 **구간 내부에서 부호가 바뀌는 지점**인 $x=1$을 기준으로 나누어 적분한다.

−1부터 1까지: $1-x^2$의 원시함수는 $x-\frac{x^3}{3}$이다. 상한에서의 값에서 하한에서의 값을 빼면 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$이고, 그 값은 $\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$이다.

1부터 2까지: x^2-1의 원시함수는 $\frac{x^3}{3}-x$이다. 따라서 $\int_{1}^{2}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2}$이고, 그 값은 $\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$이다.

두 구간의 적분값은 각각 절댓값 함수의 그래프와 x축 사이의 넓이이므로 더한다. 구하는 값은 $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 2. _n→∞(an^2+bn+3)/(2n+5)=3일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 3번

간단한 해설

극한이 **유한한 값으로 수렴**하려면 분자의 이차항이 없어야 하므로 $a=0$이다. 이때 $\frac{b}{2}=3$에서 $b=6$이므로 $a+b=6$이다.

계산 과정

1. 상수 a 구하기: 분모는 일차식이므로 $a\neq 0$이면 분자의 이차항이 극한을 좌우한다. 이때 $\frac{an^2}{2n}=\frac{a}{2}n$처럼 값의 절댓값이 한없이 커져 3으로 수렴할 수 없다. 따라서 **이차항의 계수가 0**이어야 하므로 $a=0$이다.

2. 상수 b 구하기: $a=0$을 대입한 뒤 분자와 분모를 각각 n으로 나누면 $\frac{bn+3}{2n+5}=\frac{b+\frac{3}{n}}{2+\frac{5}{n}}$이다. $n\to\infty$일 때 $\frac{3}{n}$과 $\frac{5}{n}$은 0으로 수렴하고 분모는 2로 수렴하므로, 극한값은 $\frac{b}{2}$이다. 주어진 극한값이 3이므로 $\frac{b}{2}=3$, 즉 $b=6$이다.

3. 합 구하기: $a+b=0+6=6$이므로 구하는 값은 6이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 3. 등식 $(x+1)\left(x+\frac{1-i}{1+i}\right)=2+y\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 6

정답 2번

간단한 해설

주어진 분수의 값은 $-i$이다. **실수부와 허수부를 각각 비교**하면 $x(x+1)=2, y=x+1$이므로 $xy=x(x+1)=2$이다.

계산 과정

복소수 분수 정리: $i^2=-1$이고, 분모의 켤레복소수는 $1-i$이다. 분모와 분자에 $1-i$를 곱하면 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{2}$이다. 여기서 $(1-i)^2=-2i$이므로 주어진 분수의 값은 $-i$이다.

실수부와 허수부 비교: 원래 등식에 $-i$를 대입하면 $(x+1)(x-i)=2-yi$이다. 왼쪽을 전개하면 $x(x+1)-(x+1)i=2-yi$가 된다. x, y가 실수이므로 **실수부끼리, 허수부끼리 같아야 한다**. 따라서 $x(x+1)=2, -(x+1)=-y$이고, 두 번째 관계에서 $y=x+1$을 얻는다.

곱의 계산: 구하려는 xy에 $y=x+1$을 대입하면 $xy=x(x+1)$이다. 이 식은 실수부를 비교하여 얻은 값과 같으므로 $xy=2$이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 4. 좌표평면 위의 점 A(1, 3)을 지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$과 접하는 점을 T라 할 때, $\overline{AT}$의 길이는?

① $\frac{5}{2}$
② $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
③ 5
④ $5\sqrt{2}$

정답 3번

간단한 해설

접점에서 반지름과 접선은 **서로 수직**이므로 피타고라스 정리를 적용한다. 중심에서 A까지의 거리의 제곱은 29, 반지름의 제곱은 4이므로 접선의 길이는 $\sqrt{29 - 4} = 5$이다.

계산 과정

원의 방정식을 완전제곱식으로 정리하면 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$이다. 따라서 중심을 C라 하면 C의 좌표는 $(-1, -2)$이고, 반지름은 2이다.

A(1, 3)과 C(−1, −2)의 x좌표 차이는 2, y좌표 차이는 5이므로 $\overline{AC}^2 = 2^2 + 5^2 = 29$이다. 이는 반지름의 제곱인 4보다 크므로 A는 원 밖에 있다.

T는 접점이므로 **반지름 CT와 접선 AT가 수직**이다. 따라서 삼각형 ACT는 AC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다. 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AT}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CT}^2$이고, 값을 대입하면 $\overline{AT}^2 = 29 - 4 = 25$이다.

길이는 양수이므로 $\overline{AT} = 5$이며, ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 5. 어느 고등학교에서는 전체 학생의 20%가 자전거를 타고 등교한다고 한다. 이 학교 학생 중 100명을 임의로 뽑아 등교 수단을 조사할 때, 자전거를 타고 등교하는 학생의 수를 확률변수 X라 하자. X의 표준편차는?

① 4

② 10

③ 16

④ 20

정답 1번

간단한 해설

자전거 등교 확률이 0.2인 학생 100명의 수를 세는 이항분포 모형에서 분산은 $100 \times 0.2 \times 0.8 = 16$이다. 표준편차는 **분산의 양의 제곱근**이므로 4명이다.

계산 과정

자전거를 타고 등교하면 성공, 그렇지 않으면 실패로 구분한다. 이 문제에서는 각 학생의 등교 수단을 서로 독립인 시행으로 보아 **이항분포 모형**을 적용한다. 시행 횟수는 $n = 100$, 성공 확률은 $p = 0.2$이므로, 자전거로 등교하는 학생 수 X는 $B(100, 0.2)$를 따른다.

이항분포 $B(n, p)$의 분산은 $V(X) = np(1-p)$이다. 한 시행의 성공 여부를 1과 0으로 나타내면 분산이 $p(1-p)$이고, 독립인 시행의 합에서는 분산을 더하기 때문이다. 따라서 $V(X) = 100 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 16$이다. 여기서 16은 **표준편차가 아니라 분산**이다.

표준편차는 분산의 양의 제곱근이므로 $\sigma(X) = \sqrt{16} = 4$이다. 학생 수의 표준편차는 4명이며, 선택지 ①의 4에 해당한다.

NoteBase

문 6. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 8일 때, 이차방정식 $f(3x-2)=0$의 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

간단한 해설

$f(3x-2)=0$의 근은 **원래의 각 근에 2를 더한 뒤 3으로 나눈 값**이다. 따라서 두 근의 합은 $\frac{8+2+2}{3}=4$이다.

계산 과정

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면, 주어진 조건은 $\alpha+\beta=8$이다.

$f(3x-2)=0$이 되려면 **함수에 대입되는 값**인 $3x-2$가 α 또는 β여야 한다. 따라서 $3x-2=\alpha$ 또는 $3x-2=\beta$를 풀면, 새 방정식의 두 근은 $\frac{\alpha+2}{3}, \frac{\beta+2}{3}$이다.

두 근을 더하면 $\frac{\alpha+2}{3}+\frac{\beta+2}{3}=\frac{\alpha+\beta+4}{3}$이다. 여기에 $\alpha+\beta=8$을 대입하면 $\frac{8+4}{3}=4$이므로, 구하는 두 근의 합은 4이며 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 7. 두 집합 A, B는 공집합이 아니고 다음 조건을 만족시킨다.
두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는?

(가) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(나) A와 B는 서로소이다.

① 29
② 30
③ 31
④ 32

정답 2번

간단한 해설

다섯 원소를 각각 **한쪽 집합에만** 넣으므로 전체 배정은 2^5가지이다. 이 중 **어느 한 집합이 공집합인 두 경우**를 제외하면 30가지이다.

계산 과정

조건 해석: (가)에 따라 1, 2, 3, 4, 5는 모두 두 집합 중 적어도 하나에 속한다. (나)의 서로소 조건은 $A \cap B = \varnothing$이라는 뜻이므로, 각 원소는 **두 집합 중 정확히 한 곳**에 속한다. 따라서 각 원소가 속할 집합을 정하면 두 집합이 모두 결정된다. 순서쌍 (A, B)에서는 두 집합의 자리를 바꾼 것을 서로 다른 경우로 센다.

전체 경우의 수: 각 원소마다 들어갈 곳을 A 또는 B 중에서 고르는 2가지 선택이 있고, 다섯 원소의 선택은 서로 독립적이다. 곱의 법칙에 따라 전체 배정은 $2^5 = 32$가지이다. 이 수에는 한쪽 집합이 공집합인 경우도 포함되어 있다.

공집합인 경우 제외: A가 공집합이면 다섯 원소가 모두 B에 들어가는 1가지이고, B가 공집합이면 모두 A에 들어가는 1가지이다. 합집합에 다섯 원소가 있으므로 두 집합이 동시에 공집합일 수는 없어 두 경우는 겹치지 않는다. 두 집합이 모두 공집합이 아니어야 하므로 이들을 제외하면 32 - 1 - 1 = 30가지이며, 이는 ②의 30에 해당한다.

NoteBase

문 8. 두 조건 $p : |x-2| < 1, \quad q : x^2 - 2ax - 3a^2 < 0$ 에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, 실수 a의 최댓값은? (단, $a < 0$)

① −1

② −2

③ −3

④ −4

정답 3번

간단한 해설

p가 q의 충분조건이려면 **p의 해집합이 q의 해집합에 포함**되어야 한다. 따라서 q의 해 구간의 오른쪽 끝점은 3 이상이어야 하므로 -a≥3이고, a의 최댓값은 −3이다.

계산 과정

충분조건과 p의 해집합: p가 q이기 위한 충분조건이라는 것은 **p를 만족하는 모든 실수가 q도 만족**한다는 뜻이다. $|x-2| < 1$을 풀면 $-1 < x-2 < 1$이므로 p의 해집합은 $1 < x < 3$이다.

q의 해집합: $x^2 - 2ax - 3a^2 = (x-3a)(x+a)$로 인수분해된다. **$a < 0$이므로 두 근의 순서는** $3a < -a$이다. 두 일차식의 곱이 음수가 되는 범위는 두 근 사이이므로 q의 해집합은 $3a < x < -a$이다.

해집합의 포함 조건: 구간 $(1, 3)$이 구간 $(3a, -a)$에 포함되려면 3a≤1과 -a≥3이어야 한다. $a < 0$이므로 $3a < 0 < 1$은 항상 성립한다. 따라서 필요한 조건은 -a≥3이다. 이때 **끝점이 같아도 포함 관계가 성립**한다. p의 해집합에는 끝점 3이 들어 있지 않기 때문이다.

a의 최댓값: -a≥3을 정리하면 $a \leq -3$이다. 실제로 $a = -3$이면 q의 해집합은 $-9 < x < 3$이므로 $1 < x < 3$을 모두 포함한다. 따라서 최댓값은 −3이며, 선택지 ③의 값과 일치한다.

NoteBase

문 9. 주사위를 던져 3의 배수의 눈이 나오면 동쪽으로 1m 직진하고, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 북쪽으로 1m 직진한다고 하자. 이 규칙에 따라 주사위를 던지는 시행을 4회 반복할 때, 처음 위치로부터 거리가 3m 이하일 확률은?

① $\frac{5}{27}$
② $\frac{2}{9}$
③ $\frac{7}{27}$
④ $\frac{8}{27}$

정답 4번

간단한 해설

처음 위치에서 3m 이내에 있으려면 **동쪽과 북쪽으로 각각 두 번** 이동해야 한다. 이 조건을 만족하는 이동 순서는 6가지이므로, 구하는 확률은 $\frac{8}{27}$이다.

계산 과정

한 번 던질 때 동쪽으로 이동하는 눈은 3, 6의 2개이므로 그 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다. 북쪽으로 이동하는 눈은 나머지 4개이므로 그 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다. 각 시행은 서로 독립이다.

동쪽으로 이동한 횟수를 k라 하면 북쪽으로 이동한 횟수는 $4-k$이다. 두 방향은 수직이므로 피타고라스 정리에 따라 처음 위치로부터의 거리는 $\sqrt{k^2+(4-k)^2}$ m이다. $k=0$, 4이면 거리는 4m이고, $k=1$, 3이면 $\sqrt{10}$ m로 3m를 초과한다. $k=2$일 때만 거리가 $\sqrt{8}$ m로 3m 이하이다. 따라서 **동쪽 2회, 북쪽 2회**인 경우를 구한다.

4회의 시행 중 동쪽으로 이동할 두 자리를 고르는 방법은 $\binom{4}{2}=6$가지이다. 각 이동 순서는 동쪽 2회와 북쪽 2회로 이루어지므로, **특정한 한 이동 순서의 확률**은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{81}$이다.

이 6가지 이동 순서는 서로 겹치지 않으므로 확률을 더하면 $6\cdot\frac{4}{81}=\frac{8}{27}$이다. 이는 ④의 값과 일치한다.

NoteBase

문 10. 두 함수 $f(x)=x^4+x^3+x^2+k$, $g(x)=x^3-x^2+3$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

간단한 해설

방정식을 정리하면 $x^4+2x^2=3-k$이고, $0<x<1$에서 왼쪽 식의 값의 범위는 $(0,3)$이다. 따라서 $0<k<3$을 만족하는 정수는 1, 2로 두 개이다.

계산 과정

1. 방정식 정리: $f(x)=g(x)$에 주어진 두 함수를 대입하면 $x^4+x^3+x^2+k=x^3-x^2+3$이다. 양변의 세제곱항을 소거하고 정리하면 $x^4+2x^2=3-k$를 얻는다.

2. 왼쪽 식의 값의 범위: $h(x)=x^4+2x^2$라 두면 $h'(x)=4x^3+4x>0$이므로 h는 구간 $(0,1)$에서 증가한다. 또한 다항함수이므로 연속이고, $h(0)=0$, $h(1)=3$이다. 따라서 $0<x<1$에서 $h(x)$는 0과 3 사이의 모든 값을 갖는다. **양 끝점이 포함되지 않으므로** 값의 범위는 $0<h(x)<3$이다.

3. 정수의 개수: 구간 $(0,1)$에서 실근이 적어도 하나 존재할 필요충분조건은 $0<3-k<3$이다. 이를 풀면 $0<k<3$이므로 가능한 정수는 $k=1, 2$이다. 그 개수는 2개이며 ②에 해당한다.

NoteBase

문 11. 등식 $x^4 + ax + b = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})P(x) + \sqrt{6}$이 x에 대한 항등식일 때 상수 a의 값은? (단, b는 상수, $P(x)$는 다항식)

① $-5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

② $-5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

③ $5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

정답 2번

간단한 해설

$x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{3}$을 대입하면 **다항식이 곱해진 항이 0**이 된다. 얻은 두 식을 빼서 b를 없애면 $a = -5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$를 얻는다.

계산 과정

항등식은 모든 x에 대해 성립하므로, **곱해진 인수를 0으로 만드는 값**을 대입할 수 있다. $x = -\sqrt{2}$를 대입하면 $4 - a\sqrt{2} + b = \sqrt{6}$이고, $x = \sqrt{3}$을 대입하면 $9 + a\sqrt{3} + b = \sqrt{6}$이다. 두 경우 모두 $P(x)$가 곱해진 항은 0이 된다.

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 **공통으로 들어 있는 상수항이 소거**된다. 따라서 $5 + a(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$이고, $a = -\frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$이다.

분모와 분자에 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$를 곱해 분모를 유리화한다. 합과 차의 곱을 이용하면 분모는 $3 - 2 = 1$이므로, $a = -\frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2}$, 즉 $a = -5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$이다. 이는 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 12. 두 함수 f와 g는 모두 역함수가 존재하고 $f(2x+1)=g(x+3)$이다. $f^{-1}(5)=3$일 때, $g^{-1}(5)$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

간단한 해설

$f^{-1}(5)=3$은 **3을 넣으면 5가 나온다**는 뜻이다. $f(2x+1)$의 입력이 3이 되는 $x=1$을 대입하면 $g(4)=5$이므로 $g^{-1}(5)=4$이다.

계산 과정

역함수는 원래 함수의 입력값과 출력값을 서로 바꾼다. 따라서 $f^{-1}(5)=3$을 원래 함수로 나타내면 $f(3)=5$이다.

주어진 관계 $f(2x+1)=g(x+3)$에서 **왼쪽 함수의 입력을 3으로 맞추면** 함수값이 5가 된다. $2x+1=3$을 풀면 $x=1$이다. 이를 대입하면 $f(3)=g(4)$이므로 $g(4)=5$를 얻는다.

g도 역함수가 존재하므로, $g(4)=5$에서 $g^{-1}(5)=4$이다. 구한 값 4는 ④에 해당한다.

NoteBase

문 13. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x) = ax + 1\ (0 \le x \le 2)$일 때, 상수 a의 값은?

① -1
② $-\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{2}$
④ 1

정답 2번

간단한 해설

확률밀도함수는 주어진 구간에서 **적분값이 1**이어야 한다. 따라서 $2a + 2 = 1$이므로 $a = -\frac{1}{2}$이다.

계산 과정

확률밀도함수의 구간별 적분값은 그 구간에 속할 확률을 나타낸다. 전체 확률은 1이므로 **전체 구간에서의 적분값을 1로 놓는다**. 주어진 구간이 $0 \le x \le 2$이므로 $\int_0^2 (ax + 1)dx = 1$이다.

적분하면 $\left[\frac{a}{2}x^2 + x\right]_0^2 = 2a + 2$이다. 이 값이 전체 확률이므로 $2a + 2 = 1$이고, 이를 풀면 $2a = -1$, $a = -\frac{1}{2}$이다.

이때 $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$는 $0 \le x \le 2$에서 1부터 0까지 감소하므로 **함숫값이 음이 아니어야 한다는 조건**도 만족한다. 따라서 구한 $a = -\frac{1}{2}$은 ②의 값과 일치한다.

NoteBase

문 14. 함수 $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1, y=-2$이고 $f(2)=3$이다. 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

① 14

② 16

③ 18

④ 20

정답 1번

간단한 해설

수직점근선은 $x=-c$, 수평점근선은 $y=a$이므로 **점근선의 위치**에서 $c=-1, a=-2$를 구한다. 여기에 $f(2)=3$을 적용하면 $b=7$이므로 $abc=14$이다.

계산 과정

수직점근선으로 c 구하기: 수직점근선은 **분모가 0이 되는 위치**에서 생긴다. 주어진 수직점근선이 $x=1$이므로 $1+c=0$, 즉 $c=-1$이다. 이때 실제로 수직점근선이 존재하므로 분자는 같은 위치에서 0이 되지 않는다.

수평점근선으로 a 구하기: x의 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)=\frac{a+b/x}{1+c/x}$에서 b/x와 c/x가 0에 가까워지므로 함수값은 a에 가까워진다. 따라서 수평점근선은 $y=a$이고, 주어진 $y=-2$와 비교하면 $a=-2$이다.

함숫값으로 b 구하기: $a=-2, c=-1$을 대입하면 $f(x)=\frac{-2x+b}{x-1}$이다. **그래프가 점 (2, 3)을 지난다**는 조건을 이용하면 $f(2)=\frac{-4+b}{2-1}=3$이므로 $-4+b=3, b=7$이다.

곱 계산하기: 구한 세 상수를 곱하면 $abc=(-2)\cdot 7\cdot(-1)=14$이다. 이는 ①의 14와 일치한다.

NoteBase

문 15. $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$**라 할 때** $\log_{15} 80$**을** a, b**로 바르게 나타낸 것은?**

① $\frac{2+b}{a+b}$
② $\frac{4+a}{b+ab}$
③ $\frac{4+b}{a+ab}$
④ $\frac{4+ab}{a+ab}$

정답 4번

간단한 해설

로그의 **밑을 2로 통일**하면 $\log_2 5 = ab$를 이용할 수 있다. 80의 로그는 $4 + ab$, 15의 로그는 $a + ab$이므로, 구하는 값은 $\frac{4+ab}{a+ab}$이다.

계산 과정

밑의 통일: 주어진 $a = \log_2 3$을 이용하기 위해 **밑의 변환 공식**을 적용한다. 밑과 진수가 모두 양수이고 밑이 1이 아니므로, $\log_{15} 80 = \frac{\log_2 80}{\log_2 15}$로 나타낼 수 있다. 이제 분자와 분모를 각각 a, b로 표현한다.

5의 로그: $b = \log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$이다. 여기서 $\log_2 3 = a$이므로 $\log_2 5 = ab$를 얻는다. 이는 밑이 3인 로그를 밑이 2인 로그로 바꾼 값이다.

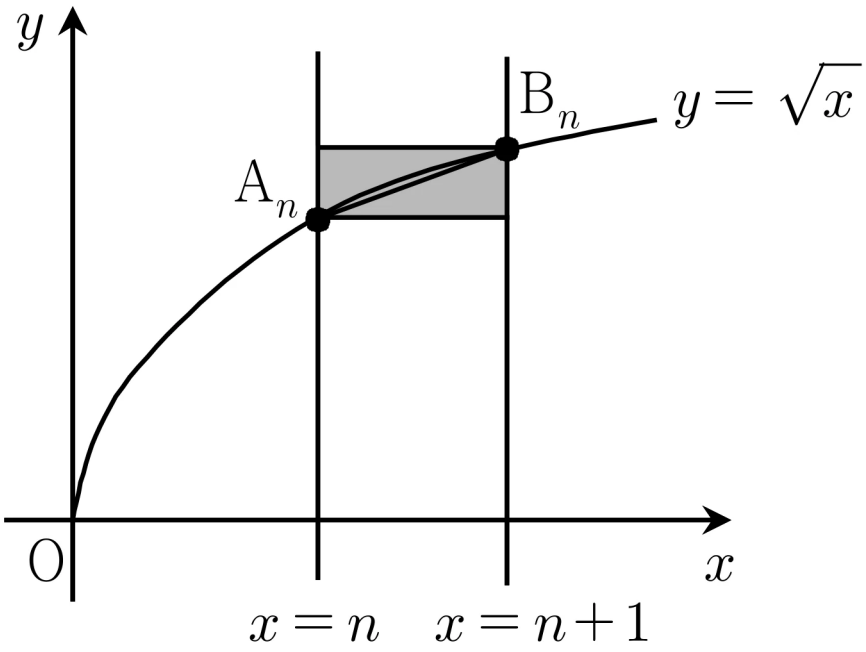
분자 계산: $80 = 2^4 \cdot 5$이므로, **곱의 로그는 각 로그의 합**이라는 성질을 이용하면
$\log_2 80 = 4 + \log_2 5 = 4 + ab$이다.

분모 계산: $15 = 3 \times 5$이므로 $\log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5$이다. 따라서 $\log_2 15 = a + ab$이다.

결과: 밑의 변환 공식의 분자에 $4 + ab$, 분모에 $a + ab$를 대입하면 $\log_{15} 80 = \frac{4+ab}{a+ab}$이다. 이 식은 ④의 식과 일치한다.

NoteBase

문 16. 자연수 n에 대하여 두 직선 $x = n$, $x = n + 1$이 곡선 $y = \sqrt{x}$와 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 그림과 같이 선분 A_nB_n을 대각선으로 하고 변이 축에 평행한 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{99} S_n$의 값은?



① 9

② 10

③ 11

④ 12

정답 1번

간단한 해설

직사각형의 가로 길이는 1이므로 S_n=√(n+1)- n이다. 이를 더하면 **중간의 제곱근 항이 서로 소거**되어 √(100)-1=9만 남는다.

NoteBase

계산 과정

두 점은 곡선 y= x 위에 있으므로 좌표는 각각 A_n=(n, n), $B_n = (n+1, \sqrt{n+1})$이다.

직사각형의 변이 축에 평행하므로 **가로와 세로 길이는 각각 두 점의 좌표 차**이다. 가로 길이는 $(n+1) - n = 1$이고, 세로 길이는 √(n+1)- n이다. 따라서 넓이는 S_n=√(n+1)- n이다.

처음 두 넓이는 S_1=2-1, S_2=3-2이다. 이들을 더하면 앞 항의 2와 다음 항의 -2가 소거된다. 같은 방식으로 계속 더하면 중간 항이 모두 소거되고, 마지막 넓이 $S_{99} = \sqrt{100} - \sqrt{99}$의 $\sqrt{100}$과 첫 넓이의 -1만 남는다.

따라서 $\sum_{n=1}^{99} S_n = \sqrt{100} - 1 = 9$이며, 이는 ①의 값이다.

NoteBase

문 17. 닫힌 구간 [0, 1]에서 함수 $f(x) = px^2 - 2x + q$의 최솟값이 1일 때, 상수 p, q의 합 $p + q$의 값은? (단, $0 < p < 1$)

① 3
② $\frac{7}{2}$
③ 4
④ $\frac{9}{2}$

정답 1번

간단한 해설

조건 $0 < p < 1$에서 꼭짓점은 주어진 구간의 오른쪽에 있으므로 **오른쪽 끝점에서 최솟값**을 갖는다. 따라서 $f(1) = p + q - 2 = 1$이므로 $p + q = 3$이다.

계산 과정

최솟값을 갖는 위치: $p > 0$이므로 포물선은 아래로 볼록하고, 축은 $x = \frac{1}{p}$이다. $0 < p < 1$이면 $\frac{1}{p} > 1$이므로 꼭짓점은 **닫힌 구간 [0, 1] 밖의 오른쪽**에 있다. 따라서 이 구간에서는 함수가 계속 감소한다.

최솟값 조건 적용: 감소하는 함수는 구간의 오른쪽 끝점에서 가장 작은 값을 갖는다. 따라서 주어진 최솟값 1은 $f(1)$이며, $f(1) = p - 2 + q = 1$이다.

합 계산: $p - 2 + q = 1$의 양변에 2를 더하면 $p + q = 3$이다. 이는 ①의 3과 일치한다.

NoteBase

문 19. 어느 학급 학생을 대상으로 세 영화 A, B, C의 관람 여부를 조사하였더니 A 영화를 관람한 학생이 10명, B 영화를 관람한 학생이 9명, C 영화를 관람한 학생이 11명이고, 이 중 A와 B 두 영화만 관람한 학생이 2명, 세 영화를 모두 관람한 학생이 5명이었다. C 영화만 관람한 학생의 수의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

간단한 해설

C 관람자 중 다른 영화도 본 학생은 세 영화를 모두 본 학생과 A·C만 또는 B·C만 본 학생을 합해 **최대 10명**이다. 따라서 C만 관람한 학생은 최소 11 − 10 = 1명이다.

계산 과정

A 관람자 10명 중 A·B만 본 2명과 세 영화를 모두 본 5명은 서로 다른 학생이다. 이들을 제외한 10 − 2 − 5 = 3명은 A만 보았거나 A·C만 보았다. 따라서 **A·C만 본 학생은 최대 3명**이다.

B 관람자 9명에서도 A·B만 본 2명과 세 영화를 모두 본 5명을 제외하면 9 − 2 − 5 = 2명이 남는다. 이들은 B만 보았거나 B·C만 보았으므로, B·C만 본 학생은 최대 2명이다.

C 관람자 중 다른 영화도 본 학생은 A·C만 본 학생, B·C만 본 학생, 세 영화를 모두 본 학생으로 나뉜다. 이 세 집단은 겹치지 않으므로 합계는 최대 3 + 2 + 5 = 10명이다. C 관람자는 11명이므로 C만 본 학생은 적어도 11 − 10 = 1명이다.

이 하한이 실제로 가능한지도 확인한다. **A만 본 학생과 B만 본 학생을 각각 0명**으로 두고, A·C만 본 학생을 3명, B·C만 본 학생을 2명으로 두면 된다. A·B만 본 2명과 세 영화를 모두 본 5명을 포함하면 A 관람자는 2 + 3 + 5 = 10명, B 관람자는 2 + 2 + 5 = 9명이다. 여기에 C만 본 1명을 두면 C 관람자도 3 + 2 + 5 + 1 = 11명이 되어 모든 조건을 만족한다.

따라서 C만 관람한 학생의 최솟값은 1명이며, ①의 값에 해당한다.

NoteBase

문 20. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같다.

$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$b_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad (b_{n+1})^2 = b_n b_{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

10 이하인 두 자연수 m, n에 대하여 $a_m + b_n$이 3의 배수인 순서쌍 (a_m, b_n)의 개수는?

① 30

② 35

③ 40

④ 45

정답 2번

간단한 해설

b_n을 3으로 나눈 나머지는 1과 2가 번갈아 나타나므로, 합이 3의 배수가 되려면 두 항의 **나머지가 1과 2로 짝지어져야 한다**. 해당 항의 개수를 곱하여 더하면 $4 \times 5 + 3 \times 5 = 35$개이다.

계산 과정

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열이므로 $a_m = 1 + 4(m-1) = 4m - 3$이다. 따라서 a_m을 3으로 나눈 나머지는 **m을 3으로 나눈 나머지와 같다**. 1부터 10까지에서 나머지가 1인 m은 1, 4, 7, 10으로 4개, 나머지가 2인 m은 2, 5, 8로 3개, 나머지가 0인 m은 3, 6, 9로 3개이다.

$b_1 = 1, b_2 = 2$이고 $b_{n+2} = \frac{(b_{n+1})^2}{b_n}$이므로 모든 항은 양수이다. 주어진 관계식의 양변을 $b_n b_{n+1}$로 나누면 $\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$이다. 즉, **이웃한 두 항의 비가 일정**하므로 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이다. 따라서 $b_n = 2^{n-1}$이다.

b_n은 1, 2, 4, 8, …이므로 3으로 나눈 나머지는 1, 2, 1, 2, …로 반복된다. n이 홀수이면 나머지가 1이고 짝수이면 나머지가 2이다. 1부터 10까지 홀수와 짝수가 각각 5개이므로, 나머지가 1인 항과 2인 항도 각각 5개이다. 나머지가 0인 항은 없다.

$a_m + b_n$이 3의 배수가 되려면 **두 나머지의 합이 3**이어야 한다. 나머지가 각각 1, 2인 경우는 $4 \times 5 = 20$개이고, 각각 2, 1인 경우는 $3 \times 5 = 15$개이다. 두 수열 모두 항이 서로 다르므로 서로 다른 m, n의 선택은 서로 다른 순서쌍을 만든다. 두 경우는 겹치지 않으므로 구하는 순서쌍은 $20 + 15 = 35$개이며, ②의 값과 일치한다.

NoteBase