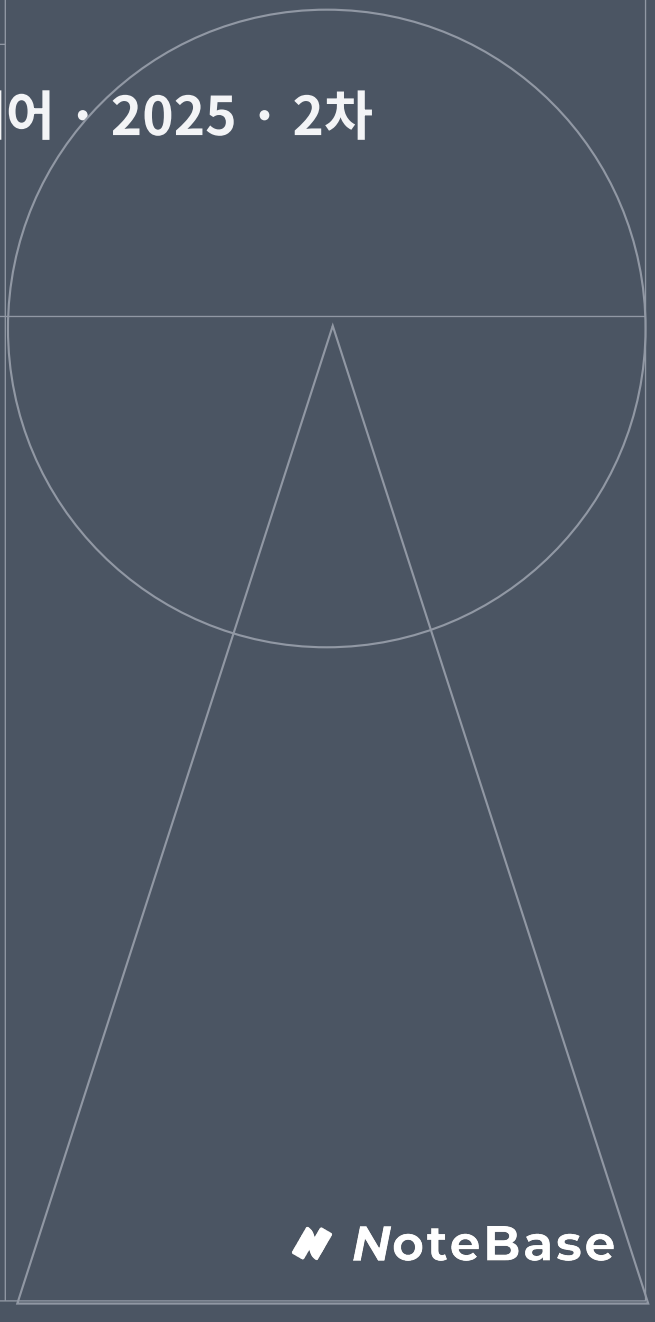
기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2025 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2025 · 2차

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2025 · 2차

문 1. 선형시불변 시스템의 특성으로 옳지 않은 것은?

① 시스템의 응답은 중첩(superposition)의 원리를 만족한다.

② 시스템의 전달함수는 단위임펄스응답의 라플라스 변환이다.

③ 정현파 입력이 시스템에 가해지면 동위상의 정현파 응답이 나온다.

④ 시스템의 응답은 입력과 단위임펄스응답의 컨볼루션(convolution)으로 표현된다.

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 선형시불변 시스템의 기본 성질인 중첩 원리, 전달함수와 임펄스응답의 관계, 컨볼루션 표현, 정현파 정상상태 응답의 위상 특성을 구분하는 문제이다.

핵심 개념

선형시불변 시스템은 선형성과 시불변성을 만족하는 시스템이다. 선형성이 있으면 중첩 원리가 성립하고, 시불변 시스템의 출력은 입력과 임펄스응답의 컨볼루션으로 나타난다. 전달함수 $G(s)$는 영초기조건에서 임펄스응답 $h(t)$의 라플라스 변환이다. 정현파 입력에 대한 정상상태 출력은 같은 주파수의 정현파이지만, 일반적으로 진폭과 위상은 변한다.

선지별 해설

① O: 선형시불변 시스템은 선형성을 가지므로 입력의 합에 대한 응답이 각 입력 응답의 합으로 나타난다. 따라서 중첩 원리를 만족한다.

② O: 단위임펄스응답 $h(t)$의 라플라스 변환이 전달함수 $G(s)$이다. 영초기조건에서 $G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$가 성립한다.

③ X: 틀린 부분은 "동위상"이다. 선형시불변 시스템에 정현파를 입력하면 정상상태 출력은 같은 주파수의 정현파가 되지만, 시스템의 주파수응답에 따라 위상지연 또는 위상선행이 생길 수 있다. 올바르게는 "정현파 입력이 시스템에 가해지면 일반적으로 위상이 변한 정현파 응답이 나온다"이다.

④ O: 선형시불변 시스템의 출력은 입력과 단위임펄스응답의 컨볼루션으로 표현된다. 이는 LTI 시스템 해석의 기본식이다.

NoteBase

오답 포인트

정현파 입력에 대한 응답이 정현파로 나온다는 성질과 동위상이라는 조건을 혼동하기 쉽다. 같은 주파수의 정현파가 나온다는 사실은 맞지만, 위상은 시스템에 따라 변할 수 있으므로 ③의 "동위상"이라는 단정이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

선형시불변 시스템 성질 문제는 선형성, 전달함수-임펄스응답 관계, 컨볼루션 표현, 정현파 정상상태 응답의 네 축으로 나누어 본다. 정현파 관련 선지에서 "동위상", "진폭 불변"처럼 항상 성립한다고 단정하는 표현이 나오면 먼저 의심하게 된다.

암기 포인트

LTI는 중첩이 성립하고, 전달함수는 임펄스응답의 라플라스 변환이며, 출력은 컨볼루션으로 구한다. 정현파 출력은 같은 주파수이지만 위상은 달라질 수 있다.

NoteBase

문 2. 표준형 2차 시스템에서 극점(pole)과 영점(zero)의 특성으로 옳지 않은 것은?

① s 평면의 좌반평면에 공액복소수 극점을 갖는 시스템은 부족감쇠(underdamped)이다.

② 극점이 s 평면의 좌반평면에 위치하면 시스템은 안정하고, 허수축으로부터 멀어질수록 임펄스응답의 수렴속도는 느려진다.

③ 영점이 s 평면의 우반평면에 추가되면 시스템은 비최소위상(nonminimum phase)이 된다.

④ 영점이 s 평면의 우반평면에 추가되면 단위계단입력에 대한 시스템의 초기 출력은 정상상태 출력값과 반대방향으로 나타난다.

정답 2번

출제 포인트

극점의 위치가 안정도와 응답 속도에 미치는 영향, 그리고 우반평면 영점이 만드는 비최소위상 특성을 구별하는 문제이다.

핵심 개념

극점은 시스템의 고유응답, 안정도, 감쇠속도를 정하고 영점은 응답의 형상과 초기 방향을 바꾼다.
좌반평면의 공액복소극점은 진동하면서 감쇠하는 부족감쇠를 뜻한다.
극점이 허수축에서 멀수록 실수부 절댓값이 커지므로 응답은 더 빨리 수렴한다.
우반평면 영점은 비최소위상을 만들고 계단응답 초기에 역응답을 유발할 수 있다.

선지별 해설

① O: 좌반평면의 공액복소극점은 감쇠진동 응답을 만드는 전형적인 부족감쇠 형태이므로 옳다.
② X: 틀린 표현은 '허수축으로부터 멀어질수록 임펄스응답의 수렴속도는 느려진다'이다. 좌반평면에서 극점이 더 왼쪽으로 갈수록 감쇠가 커지므로 수렴속도는 더 빨라진다. 올바르게는 '허수축으로부터 멀어질수록 임펄스응답의 수렴속도는 빨라진다'이다.
③ O: 우반평면에 영점이 있으면 위상지연이 커져 비최소위상 시스템이 되므로 옳다.
④ O: 우반평면 영점은 계단응답 초기에 최종값과 반대방향으로 움직이는 역응답을 만들 수 있으므로 옳다.

오답 포인트

②는 안정도 판단과 응답 속도 판단을 한 선지에 묶어 놓은 함정이다. '좌반평면이면 안정'은 맞지만 뒤의 '멀어질수록 느려진다'는 반대이므로, 앞부분만 보고 넘어가면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

극점은 먼저 좌우 위치로 안정 여부를 판단하고, 다음에 허수축과의 거리로 감쇠속도를 판단한다. 영점은 좌우 위치를 보고 최소위상 여부와 역응답 가능성을 판단한다.

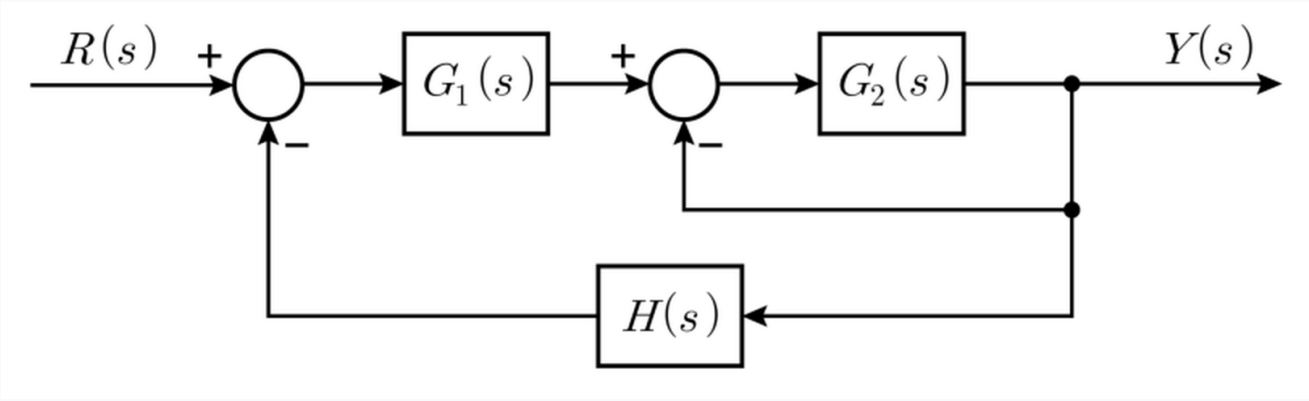
NoteBase

암기 포인트

극점은 왼쪽일수록 빨리 죽고, 우반평면 영점은 비최소위상과 역응답을 만든다.

NoteBase

문 3. 다음 제어시스템에서 폐루프 전달함수가 1이 될 때, $H(s)$는?



① $\frac{G_2(s)-1}{G_1(s)G_2(s)-G_2(s)-1}$
② $\frac{G_2(s)+1}{G_1(s)G_2(s)+G_2(s)+1}$
③ $\frac{G_1(s)G_2(s)-G_2(s)-1}{G_1(s)G_2(s)}$
④ $\frac{G_1(s)G_2(s)+G_1(s)-1}{G_1(s)G_2(s)}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 내부 단위 음의 되먹임을 먼저 등가화한 뒤, 전체 폐루프 전달함수 $T(s)$가 1이 되도록 외부 피드백 $H(s)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 구조는 $G_1(s)$ 뒤에 $G_2(s)$가 있고, $G_2(s)$에는 단위 음의 되먹임이 걸려 있다. 출력 $Y(s)$는 다시 $H(s)$를 거쳐 첫 번째 합점으로 음의 되먹임된다. 구해야 할 값은 전체 폐루프 전달함수 $Y(s)/R(s) = 1$이 되게 하는 $H(s)$이다.

사용할 공식

내부 루프를 먼저 정리하면 첫 번째 합점 출력에서 최종 출력까지의 등가 전달함수는 $P(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)}$이다. 외부 음의 되먹임을 적용하면 전체 전달함수는 $T(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)H(s)}$가 된다. 이 공식을 쓰는 이유는 블록선도에 음의 되먹임 루프가 두 겹으로 존재하므로, 안쪽 루프를 폐루프 등가 블록으로 바꾼 뒤 바깥 루프를 일반 폐루프 공식으로 처리할 수 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 내부 루프에서 두 번째 합점의 출력은 $e_2(s) = G_1(s)e_1(s) - Y(s)$이고, $Y(s) = G_2(s)e_2(s)$이므로 $Y(s) = G_2(s)\{G_1(s)e_1(s) - Y(s)\}$가 된다. 따라서 $(1 + G_2(s))Y(s) = G_1(s)G_2(s)e_1(s)$이고, $\frac{Y(s)}{e_1(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)} = P(s)$이다.
2. 외부 루프를 적용하면 $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{1 + P(s)H(s)}$이다. 문제 조건이 $T(s) = 1$이므로 $1 = \frac{P(s)}{1 + P(s)H(s)}$이다.
3. 이를 정리하면 $1 + P(s)H(s) = P(s)$, $H(s) = \frac{P(s) - 1}{P(s)}$이다. 여기에 $P(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)}$를 대입하면 $H(s) = \frac{\frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)} - 1}{\frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)}} = \frac{G_1(s)G_2(s) - G_2(s) - 1}{G_1(s)G_2(s)}$가 된다.

선지별 해설

① X: 분자가 $G_2(s) - 1$, 분모가 $G_1(s)G_2(s) - G_2(s) - 1$로 되어 있는데, 이는 $H(s) = \frac{P - 1}{P}$를 정리하지 못하고 역수 형태를 잘못 취한 값이다. 틀린 표현은 전체 분수 구조이며, 올바르게는 $H(s) = \frac{G_1(s)G_2(s) - G_2(s) - 1}{G_1(s)G_2(s)}$이다.
② X: 내부 폐루프 $1 + G_2(s)$는 맞게 보이지만, 전체 조건 $T(s) = 1$을 적용할 때 부호가 바뀌어야 하는 부분을 모두 양수로 처리한 오답이다. 틀린 표현은 $+G_2(s) + 1$ 구조이며, 올바르게는 $-G_2(s) - 1$가 들어가서 $H(s) = \frac{G_1(s)G_2(s) - G_2(s) - 1}{G_1(s)G_2(s)}$가 된다.
③ O: 내부 루프를 $\frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)}$로 정리한 뒤, 외부 루프의 폐루프 전달함수 $\frac{P}{1 + PH}$를 1로 두면 $H = \frac{P - 1}{P}$가 된다. 이를 대입하면 $\frac{G_1(s)G_2(s) - G_2(s) - 1}{G_1(s)G_2(s)}$가 되어 정답과 일치한다.
④ X: 분자에 $G_1(s)$가 따로 남는 형태는 내부 루프를 $1 + G_2(s)$로 처리하지 않고, 첫 번째 블록 $G_1(s)$의 위치를 잘못 섞어 계산할 때 나오는 오답이다. 틀린 표현은 $+G_1(s) - 1$ 부분이며, 올바르게는 내부 피드백 때문에 $-G_2(s) - 1$가 나타나야 하므로 $H(s) = \frac{G_1(s)G_2(s) - G_2(s) - 1}{G_1(s)G_2(s)}$이다.

오답 포인트

안쪽 피드백 루프를 먼저 닫지 않고 전체를 한 번에 처리하면 $1 + G_2(s)$ 항을 놓치거나, $T = 1$에서 $H = \frac{P - 1}{P}$ 대신 역수나 부호가 뒤집힌 식을 만들기 쉽다. 특히 ②처럼 모든 부호를 양수로 두는 실수와 ④처럼 $G_1(s)$를 잘못 남기는 실수가 대표적이다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 계산 문제는 가장 안쪽 피드백 루프부터 등가화하고, 그다음 바깥 폐루프 공식을 적용하는 순서로 판단한다. 마지막에는 문제 조건 $T(s) = 1$을 대입해 $1 + PH = P$처럼 식을 한 번 더 검산하면 부호 오류를 줄일 수 있다.

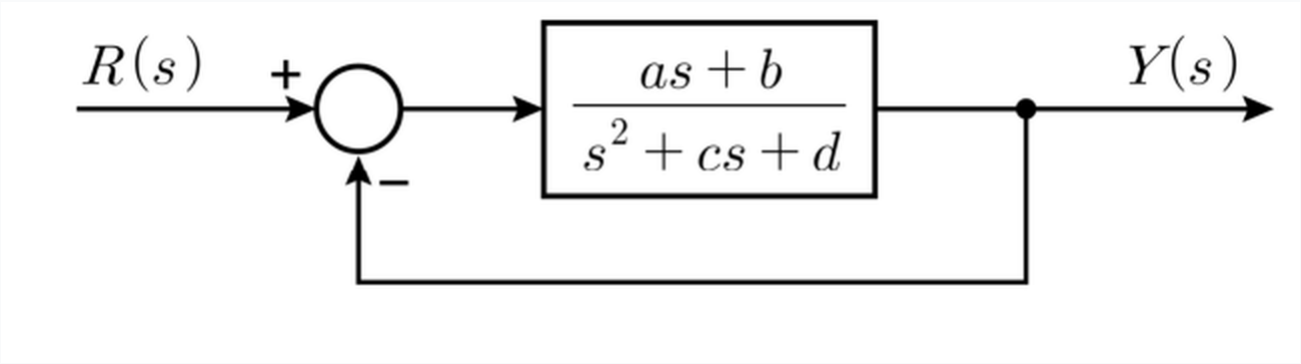
암기 포인트

중첩 피드백은 안쪽 루프부터 닫고, 외부 음의 되먹임은 $T = \frac{P}{1 + PH}$로 정리한다.

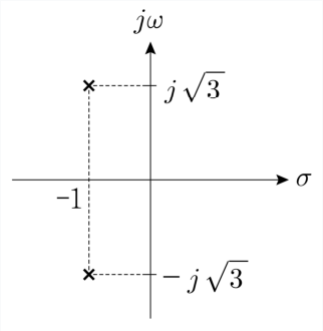
NoteBase

문 4. 그림 (가)의 폐루프 시스템은 표준형 2차 시스템이고 폐루프 극점이 그림 (나)로 주어질 때, 계수의 합 a + b + c + d는?

(가)



(나)



① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 unity feedback 폐루프 전달함수를 표준형 2차 시스템과 연결하고, 주어진 폐루프 극점으로 특성방정식을 복원해 계수의 합을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 블록은 $G(s) = \frac{as+b}{s^2+cs+d}$이다.
폐루프는 unity negative feedback 구조이다.
폐루프 극점은 그림 (나)에서 $-1 \pm j\sqrt{3}$이다.
폐루프 시스템이 표준형 2차 시스템이므로 폐루프 전달함수는 분자가 상수인 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 꼴이어야 한다.

NoteBase

사용할 공식

폐루프 전달함수는 $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$이다.
따라서
$T(s) = \frac{as+b}{s^2+cs+d+as+b} = \frac{as+b}{s^2+(a+c)s+(b+d)}$
를 쓴다.
이 공식을 쓰는 이유는 문제에서 폐루프 극점이 직접 주어졌으므로, 폐루프 분모를 극점으로부터 바로 정할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 표준형 2차 시스템의 분자는 상수이므로 폐루프 전달함수의 분자 $as+b$에서 s항이 없어야 한다. 따라서 $a=0$이다.
2. 폐루프 극점이 $-1 \pm j\sqrt{3}$이므로 폐루프 특성방정식은
$(s+1-j\sqrt{3})(s+1+j\sqrt{3}) = (s+1)^2+3 = s^2+2s+4$
이다.
3. $a=0$을 대입하면 폐루프 분모는 $s^2+cs+(b+d)$이므로 $c=2, b+d=4$이다.
4. 표준형 2차 폐루프 전달함수는 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 꼴이어서 분자 상수와 분모 상수항이 같아야 한다. 따라서 $b = b+d$이므로 $d=0$, 이어서 $b=4$이다.
5. 따라서 $a+b+c+d = 0+4+2+0 = 6$이다.

선지 판단

① O: 계산 결과 $a+b+c+d=6$이므로 옳다.
② X: 7이 아니다. 틀린 표현은 합을 7로 본 점이다. 올바르게는 $a+b+c+d=6$이다.
③ X: 8이 아니다. 틀린 표현은 합을 8로 본 점이다. 올바르게는 $a+b+c+d=6$이다.
④ X: 9가 아니다. 틀린 표현은 합을 9로 본 점이다. 올바르게는 $a+b+c+d=6$이다.

오답 포인트

폐루프 분모를 s^2+cs+d로 그대로 보는 실수가 가장 흔하다. unity feedback이면 분모가 $s^2+(a+c)s+(b+d)$로 바뀐다. 또 표준형 2차 시스템이라는 조건을 놓치면 $a=0, d=0$을 잡지 못해 합이 달라진다.

다시 나오면 이렇게 판단

폐루프 극점 문제가 나오면 먼저 $T(s) = \frac{G}{1+G}$로 폐루프 분모를 만든다. 다음으로 극점에서 특성방정식을 복원한다. 마지막으로 표준형 여부를 보고 분자 구조와 상수항 일치 조건까지 확인한다.

NoteBase

암기 포인트

unity feedback의 폐루프 분모는 원래 분모에 원래 분자를 더한 꼴이며, 표준형 2차 시스템은 분자가 상수 ω_n^2인 형태이다.

NoteBase

문 5. 시스템 $M(s)=\frac{1}{s^2+3s+5}$에 단위계단입력이 주어질 때, 정상상태에서 입력과 출력의 차이는?

① $\frac{1}{5}$
② $\frac{2}{5}$
③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 전달함수에 단위계단입력을 넣었을 때 최종값정리를 이용해 정상상태 출력과 정상상태 오차를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $M(s)=\frac{1}{s^2+3s+5}$, 단위계단입력 $R(s)=\frac{1}{s}$이다.
구해야 할 값: 정상상태에서 입력과 출력의 차이 e_{ss}이다.
주의할 조건: 묻는 값은 출력의 최종값 자체가 아니라 입력 1과 최종출력의 차이이다.

사용할 공식

출력의 정상상태값은 최종값정리로 $y(\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)$이다.
여기서 $Y(s)=M(s)R(s)=\frac{1}{s(s^2+3s+5)}$이므로 $y(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+3s+5}$이다.
정상상태 입력은 단위계단입력이므로 1이고, 따라서 입력과 출력의 차이는 $e_{ss}=1-y(\infty)$로 계산된다.
이 공식을 쓰는 이유: 문제가 정상상태에서의 입력과 출력의 차이를 묻고 있으므로 먼저 최종출력을 구한 뒤 입력 1에서 빼야 하기 때문이다.

계산 과정

1. $Y(s)=\frac{1}{s(s^2+3s+5)}$로 둔다.
2. 최종값정리를 적용하면 $y(\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+3s+5}=\frac{1}{5}$이다.
3. 단위계단입력의 정상상태 입력은 1이므로 $e_{ss}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$이다.

NoteBase

선지 판단

① X: $\frac{1}{5}$는 정상상태 출력값이다. 문제는 입력과 출력의 차이를 묻고 있으므로 틀린 표현은 차이를 출력값으로 본 점이다. 올바르게는 $e_{ss} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$이다.
② X: $\frac{2}{5}$는 계산 결과와 맞지 않는다. $1 - \frac{1}{5}$를 잘못 계산한 값이다. 올바르게는 $\frac{4}{5}$이다.
③ X: $\frac{3}{5}$는 분자만 보고 임의로 선택한 값일 뿐 최종값정리 결과와 일치하지 않는다. 틀린 표현은 정상상태 오차를 $\frac{3}{5}$로 본 점이다. 올바르게는 $\frac{4}{5}$이다.
④ O: 정상상태 출력이 $\frac{1}{5}$이므로 입력 1과의 차이는 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$이다.

오답 포인트

가장 흔한 함정은 $\frac{1}{5}$를 구해 놓고 그것을 바로 정답으로 고르는 것이다. 이 문항은 전달함수의 DC 이득이 아니라 정상상태에서 입력과 출력의 차이를 묻기 때문에 마지막에 반드시 1에서 출력값을 한 번 더 빼야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

정상상태 오차를 묻는 계산형 문제는 입력의 최종값과 출력의 최종값을 분리해서 본다. 먼저 최종값정리로 $y(\infty)$를 구하고, 그다음 문제에서 묻는 값이 출력 자체인지 오차 $e(\infty) = r(\infty) - y(\infty)$인지 확인하면 된다.

암기 포인트

단위계단입력에서는 정상상태 입력이 1이므로 오차는 1 −최종출력이다.

NoteBase

문 6. 다음 상태방정식에서 감쇠비와 임펄스응답은? (단, $u(t)$는 입력, $y(t)$는 출력, $x(t)$는 상태변수 벡터이고, $t \geq 0$이다)

x(t)=bmatrix0&1\\-1000&-20bmatrixx(t)+bmatrix0\\400bmatrixu(t)
y(t)=bmatrix1&0bmatrixx(t)

① 감쇠비: $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 임펄스응답: $\frac{40}{3}e^{-10t}\sin 30t$
② 감쇠비: $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 임펄스응답: $\frac{40}{3}e^{-10t}\cos 30t$
③ 감쇠비: $\frac{2}{\sqrt{10}}$, 임펄스응답: $\frac{40}{3}e^{-10t}\sin 30t$
④ 감쇠비: $\frac{2}{\sqrt{10}}$, 임펄스응답: $\frac{40}{3}e^{-10t}\cos 30t$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식에서 전달함수를 구한 뒤 표준 2차계와 비교하여 감쇠비와 임펄스응답을 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 계는 $A = [0, 1; -1000, -20], B = [0; 400], C = [1, 0], D = 0$인 상태공간 표현이다.
구해야 할 값은 감쇠비 ζ와 임펄스응답 $g(t)$이다.
임펄스응답은 영초기조건에서 전달함수 $G(s)$의 역라플라스변환으로 구한다.

사용할 공식

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$
$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$
이 문제는 상태방정식에서 전달함수를 먼저 구한 뒤, 분모를 표준 2차형과 비교하면 감쇠비가 나오고, $G(s)$를 역라플라스변환하면 임펄스응답이 바로 나온다.

계산 과정

1. 전달함수는 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{400}{s^2 + 20s + 1000}$이다.
2. 분모를 표준형 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 비교하면 $\omega_n^2 = 1000, 2\zeta\omega_n = 20$이므로 $\omega_n = 10\sqrt{10}, \zeta = 1/\sqrt{10}$이다.
3. $s^2 + 20s + 1000 = (s + 10)^2 + 30^2$이므로 $G(s) = \frac{400}{(s+10)^2 + 30^2} = \frac{40}{3} \cdot \frac{30}{(s+10)^2 + 30^2}$
따라서 임펄스응답은 $g(t) = \frac{40}{3}e^{-10t}\sin 30t$이다.

NoteBase

선지별 해설

① O: 감쇠비가 $1/\sqrt{10}$이고 임펄스응답도 $\frac{40}{3}e^{-10t}\sin 30t$이므로 맞다.
② X: 감쇠비 $1/\sqrt{10}$는 맞지만 임펄스응답의 함수형이 틀리다. 틀린 표현은 $\cos 30t$이고, 올바르게는 $\sin 30t$이다. 상수 분자를 가진 $1/((s+a)^2+b^2)$ 꼴의 역라플라스는 사인형이다.
③ X: 임펄스응답은 맞지만 감쇠비가 틀리다. 틀린 표현은 $2/\sqrt{10}$이고, 올바르게는 $1/\sqrt{10}$이다. $2\zeta\omega_n = 20$에서 계수 2를 한 번 더 남기면 나오는 오답이다.
④ X: 감쇠비와 임펄스응답이 모두 틀리다. 틀린 표현은 $2/\sqrt{10}$, $\cos 30t$이고, 올바르게는 $1/\sqrt{10}$, $\frac{40}{3}e^{-10t}\sin 30t$이다.

오답 포인트

분모를 표준 2차형과 비교할 때 $2\zeta\omega_n$의 앞에 붙은 2를 빼먹으면 감쇠비가 $2/\sqrt{10}$로 잘못 나온다. 또 분자가 상수인지 $s+a$인지 구분하지 않으면 사인형과 코사인형을 뒤바꾸기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태방정식 문제는 먼저 $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$로 전달함수를 만들고, 분모는 표준 2차형과 비교하고, 마지막에 완전제곱으로 바꾸어 역라플라스의 사인형과 코사인형을 판별하면 된다.

암기 포인트

$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$에서 감쇠비는 $2\zeta\omega_n$ 항으로 구하고, $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$의 역라플라스는 $e^{-at}\sin bt$이다.

NoteBase

문 7. 루프전달함수 $KG(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$를 갖는 제어시스템의 근궤적이 허수축과 만날 때, 허수축의 좌표와 K는? (단, $K>0$이다)

① 허수축의 좌표: $\pm j, K=3$

② 허수축의 좌표: $\pm j, K=6$

③ 허수축의 좌표: $\pm j\sqrt{2}, K=3$

④ 허수축의 좌표: $\pm j\sqrt{2}, K=6$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 닫힌루프 특성방정식을 세운 뒤 Routh 판별법으로 허수축 교차 조건과 그때의 K, ω를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 루프전달함수는 $KG(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$이다.
구해야 할 값: 근궤적이 허수축과 만날 때의 좌표와 K이다.
주의할 조건: 근궤적의 허수축 교차는 닫힌루프 특성방정식의 근이 $\pm j\omega$가 되는 순간이며, $K>0$이어야 한다.

사용할 공식

닫힌루프 특성방정식은
$1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}=0$
이므로
$s(s+1)(s+2)+K=0$
$s^3+3s^2+2s+K=0$
가 된다.
Routh 배열에서 3차식 $s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0$가 허수축과 만나는 조건은 s^1행의 첫 항이 0이 되는 경우이다.
이 공식을 쓰는 이유: 문제는 근궤적이 허수축과 만나는 순간의 안정한계 이득을 묻고 있으므로 닫힌루프 특성방정식의 허수근 발생 조건을 바로 확인하는 Routh 판별법이 가장 직접적이다.

NoteBase

계산 과정

1. 특성방정식 $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$에 대해 Routh 배열을 만들면
arrayc|cc s^3 & 1 & 2 \ s^2 & 3 & K \ s^1 & (6-K)/(3) & 0 \ s^0 & K & array
가 된다.
2. 허수축과 만나는 순간은 s^1행 첫 항이 0이므로
$\frac{6-K}{3} = 0 \Rightarrow K = 6$
이다.
3. 이때 보조방정식은 바로 위 행인 $3s^2 + 6 = 0$이므로
$s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$
이다. 따라서 허수축 교차 좌표는 $\pm j\sqrt{2}$, 이득은 $K = 6$이다.

선지 판단

① X
- 틀린 표현은 "허수축의 좌표가 $\pm j$이고 $K = 3$"이다. 계산 결과 허수축 교차는 $s = \pm j\sqrt{2}, K = 6$에서만 발생한다. 올바르게는 "허수축의 좌표는 $\pm j\sqrt{2}, K = 6$이다."이다.

② X
- 틀린 표현은 "허수축의 좌표가 $\pm j$"이다. $K = 6$은 맞지만 보조방정식 $s^2 + 2 = 0$에서 얻는 주파수는 $\omega = \sqrt{2}$ 이므로 좌표는 $\pm j\sqrt{2}$이다. 올바르게는 "허수축의 좌표는 $\pm j\sqrt{2}, K = 6$이다."이다.

③ X
- 틀린 표현은 "$K = 3$"이다. 좌표 $\pm j\sqrt{2}$는 맞지만, 같은 조건을 특성방정식에 대입하면 $K = 3\omega^2 = 3 \times 2 = 6$ 이므로 $K = 3$은 나올 수 없다. 올바르게는 "허수축의 좌표는 $\pm j\sqrt{2}, K = 6$이다."이다.

④ O
- Routh 배열에서 허수축 교차 조건이 $K = 6$으로 정해지고, 보조방정식 $3s^2 + 6 = 0$에서 $s = \pm j\sqrt{2}$가 나오므로 좌표와 K의 짝이 정확하다.

계산 결과 허수축 교차 좌표는 $\pm j\sqrt{2}, K = 6$이므로 정답은 4번이다.

오답 포인트

허수축 교차에서 $s = j\omega$의 ω를 1로 단순 오인하면 $\pm j$로 잘못 고르기 쉽다. 또 Routh 배열의 s^1행을 만들지 않고 막연히 계수만 보면 $K = 3$처럼 잘못 추정하기 쉽다. 이 문제의 함정은 좌표와 이득을 한 쌍으로 동시에 맞춰야 한다는 점이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

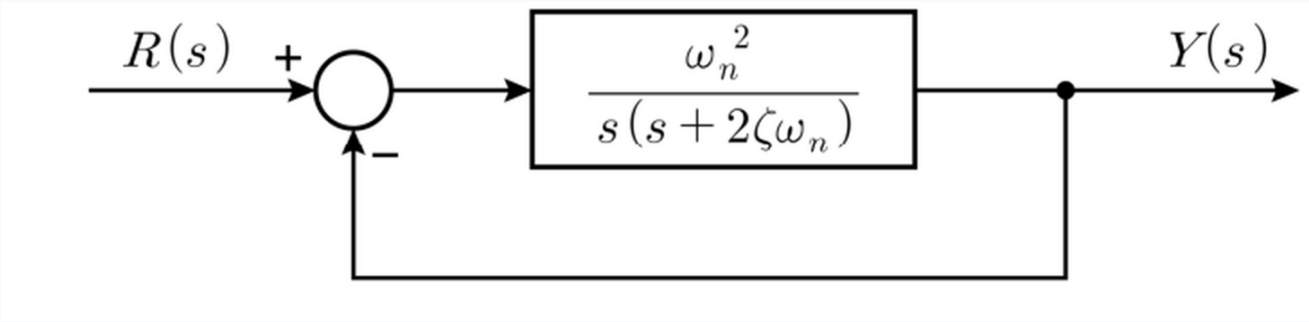
3차 근궤적이 허수축과 만나는 점을 묻는 문제는 먼저 닫힌루프 특성방정식을 만든다. 그다음 Routh 배열에서 s^1행 첫 항을 0으로 두어 한계이득 K를 구한다. 마지막으로 바로 위 행의 보조방정식에서 $\pm j\omega$를 구하면 좌표와 K를 함께 정리할 수 있다.

암기 포인트

3차식의 허수축 교차는 Routh의 s^1행 0 조건으로 K를 찾고, 바로 위 행 보조방정식으로 ω를 찾는 구조이다.

NoteBase

문 8. 다음 폐루프 제어시스템의 대역폭(bandwidth) ω_{BW}가 고유진동수 ω_n과 같을 때, 감쇠비 ζ는?



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{\sqrt{3}}$
③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
④ 1

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 2차계의 폐루프 주파수응답에서 대역폭 조건 $|T(j\omega_{BW})| = 1/\sqrt{2}$를 이용해 감쇠비를 구하는 문제이다.

조건 정리

- 전진경로 전달함수는 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$이다.
- 단위 음의 피드백이므로 폐루프 전달함수로 바꿔서 본다.
- 대역폭이 $\omega_{BW} = \omega_n$라는 조건이 주어져 있다.
- 대역폭은 직류이득의 $1/\sqrt{2}$가 되는 주파수이다.

사용할 공식

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$
$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

이 공식을 쓰는 이유는 주어진 블록선도가 단위 피드백 2차 표준형으로 정리되며, 대역폭은 폐루프 크기응답으로 판단하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 단위 피드백을 적용하면 폐루프 전달함수는 $T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$가 된다.
2. $\omega = \omega_n$를 대입하면 $\omega/\omega_n = 1$이므로
$|T(j\omega_n)| = \frac{1}{\sqrt{(1-1)^2 + (2\zeta)^2}} = \frac{1}{2\zeta}$
3. 대역폭이 ω_n와 같으려면 $|T(j\omega_n)| = 1/\sqrt{2}$이어야 하므로
$\frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\zeta = \sqrt{2} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
따라서 정답은 3번이다.

선지별 해설

① X
- $\zeta = \frac{1}{2}$이면 $|T(j\omega_n)| = \frac{1}{2\zeta} = 1$이 된다. 대역폭 조건은 크기응답이 $1/\sqrt{2}$가 되는 지점이므로 맞지 않는다.
- 틀린 수치 $\frac{1}{2}$ → 올바르게는 감쇠비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이어야 한다.

② X
- $\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}$이면 $|T(j\omega_n)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$가 되어 $1/\sqrt{2}$보다 크다. 따라서 ω_n은 아직 대역폭 주파수가 아니다.
- 틀린 수치 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ → 올바르게는 감쇠비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이어야 한다.

③ O
- $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$이면 $|T(j\omega_n)| = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$가 된다. 이는 대역폭의 정의와 정확히 일치한다.

④ X
- $\zeta = 1$이면 $|T(j\omega_n)| = \frac{1}{2}$가 된다. 이는 $1/\sqrt{2}$보다 작으므로 대역폭이 ω_n보다 더 낮은 쪽에서 이미 결정된다.
- 틀린 수치 1 → 올바르게는 감쇠비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이어야 한다.

오답 포인트

대역폭을 $|T(j\omega)| = 1$이 되는 지점으로 착각하면 ①을 고르기 쉽다. 이 문항은 고유진동수 ω_n와 대역폭 ω_{BW}를 같은 기호 수준에서 섞어 놓아, 폐루프 크기응답의 -3dB 조건을 빼먹는 실수를 유도한다.

다시 나오면 이렇게 판단

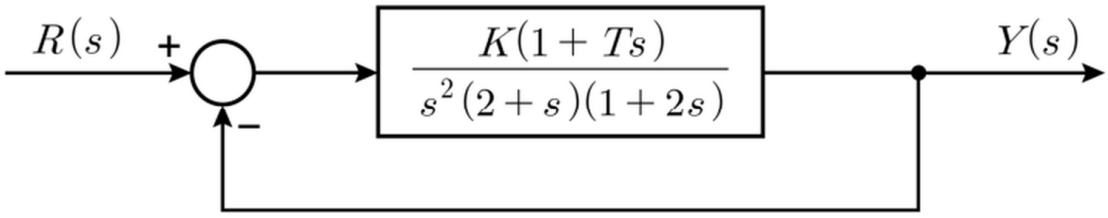
단위 피드백 2차계가 보이면 먼저 폐루프 전달함수를 표준형으로 만든 뒤, 대역폭 조건을 항상 $|T(j\omega_{BW})| = 1/\sqrt{2}$로 바꿔서 대입해 판단한다. 특히 $\omega = \omega_n$에서는 크기응답이 $1/(2\zeta)$로 바로 정리된다는 점을 이용하면 빠르게 판단할 수 있다.

암기 포인트

$\omega = \omega_n$에서 2차 폐루프 크기응답은 $1/(2\zeta)$이고, 대역폭 기준은 $1/\sqrt{2}$이다.

NoteBase

문 9. 다음 폐루프 제어시스템에 $r(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)u_s(t)$의 입력이 인가될 때, 정상상태오차가 0.01이 되기 위한 K는? (단, $u_s(t)$는 단위계단함수이다)



① 100

② 200

③ 400

④ 800

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 2형 폐루프 제어시스템에서 가속도 오차상수 K_a를 이용해 포물선 입력의 정상상태오차를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s) = \frac{K(1+Ts)}{s^2(s+2)(1+2s)}$이다.
입력은 $r(t) = (1 + t + \frac{t^2}{2})u_s(t)$이므로 $R(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$이다.
원점에 적분기 2개가 있으므로 시스템 형식은 2형이다.
구해야 할 값은 정상상태오차가 0.01이 되게 하는 K이다.

사용할 공식

2형 시스템에서는 계단입력과 램프입력의 정상상태오차는 0이고, 포물선입력 $\frac{t^2}{2}$에 대한 정상상태오차는 $e_{ss} = \frac{1}{K_a}$이다.
가속도 오차상수는 $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 주어진 입력이 계단, 램프, 포물선의 합이고 2형 시스템에서는 포물선 성분만 유한한 정상상태오차를 남기기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 가속도 오차상수를 구하면 $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot \frac{K(1+Ts)}{s^2(s+2)(1+2s)} = \lim_{s\to 0} \frac{K(1+Ts)}{(s+2)(1+2s)} = \frac{K}{2}$이다.
2. $s \to 0$에서 $(1+Ts) \to 1$이므로 T는 정상상태오차에 영향을 주지 않는다.
3. 따라서 전체 입력의 정상상태오차는 포물선 성분만 남아 $e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K/2} = \frac{2}{K}$이다.
4. 조건 $e_{ss} = 0.01$을 대입하면 $\frac{2}{K} = 0.01$이므로 $K = 200$이다.

선지 판단

① X: $K = 100$이면 $e_{ss} = \frac{2}{100} = 0.02$이다. 틀린 표현은 "100이면 조건을 만족한다"이고, 올바르게는 정상상태오차가 0.02로 커서 조건을 만족하지 않는다.
② O: $K = 200$이면 $e_{ss} = \frac{2}{200} = 0.01$이므로 조건을 정확히 만족한다.
③ X: $K = 400$이면 $e_{ss} = \frac{2}{400} = 0.005$이다. 틀린 표현은 "400이 0.01을 만든다"이고, 올바르게는 오차가 0.005로 더 작아진다.
④ X: $K = 800$이면 $e_{ss} = \frac{2}{800} = 0.0025$이다. 틀린 표현은 "800이 요구 오차와 일치한다"이고, 올바르게는 오차가 0.0025이므로 요구값 0.01과 다르다.

오답 포인트

입력을 1, t, $\frac{t^2}{2}$로 나누어 보지 않으면 위치오차상수나 속도오차상수를 잘못 적용하기 쉽다. 또한 $1+Ts$ 때문에 T가 결과에 들어간다고 오해하기 쉬우나, 정상상태에서는 $s \to 0$이므로 이 항은 1로 수렴한다.

다시 나오면 이렇게 판단

정상상태오차 문제는 먼저 원점 적분기의 개수로 시스템 형식을 판단하고, 그 형식에서 오차가 남는 입력 성분이 무엇인지 고른 뒤, 해당 오차상수 K_p, K_v, K_a를 계산해 조건식에 대입하면 된다.

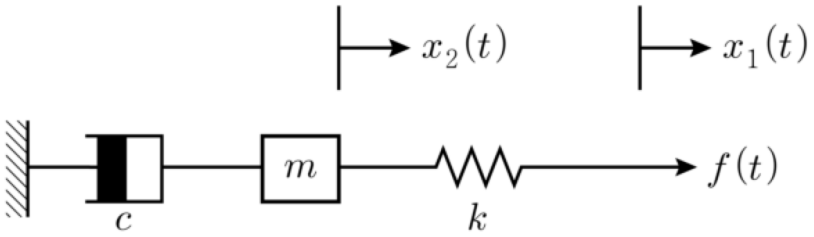
암기 포인트

2형 시스템은 계단과 램프 오차는 0이고 포물선 오차만 $e_{ss} = \frac{1}{K_a}$로 남는다.

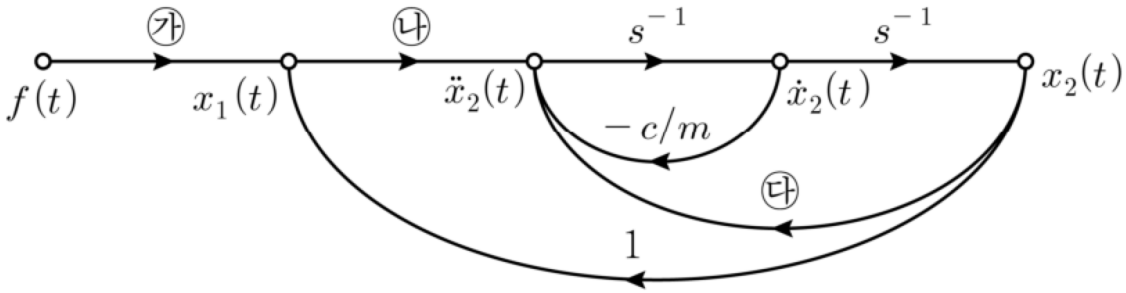
NoteBase

문 10. 그림 (가)는 질량-스프링-댐퍼 시스템이고 그림 (나)는 시스템의 입력 $f(t)$와 출력 변위 $x_2(t)$의 관계에 대한 신호흐름선도를 나타낼 때, 그림 (나)의 ㉮ ~ ㉰에 해당하는 이득은? (단, m은 질량, k는 스프링 상수, c는 감쇠 상수이다)

(가)



(나)



① ㉮: $\frac{1}{k}$, ㉯: $\frac{k}{m}$, ㉰: $-\frac{k}{m}$

② ㉮: $\frac{1}{k}$, ㉯: $\frac{k}{m}$, ㉰: $\frac{k}{m}$

③ ㉮: $\frac{m}{k}$, ㉯: $\frac{1}{m}$, ㉰: $-\frac{k}{m}$

④ ㉮: $\frac{m}{k}$, ㉯: $\frac{1}{m}$, ㉰: $\frac{k}{m}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 질량-스프링-댐퍼 시스템을 힘 평형식으로 바꾸어 신호흐름선도의 각 이득 가, 나, 다를 대응시키는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

1번: O. 가=1/k, 나=k/m, 다=-k/m로 운동방정식과 정확히 일치한다.
2번: X. 다의 부호가 틀렸다. x_2는 $\ddot{x}_2 = (k/m)x_1 - (c/m)\dot{x}_2 - (k/m)x_2$에서 복원력 항으로 들어가므로 다=-k/m가 되어야 한다.
3번: X. 가와 나가 모두 틀렸다.
- 가=m/k가 틀린 이유: 스프링 관계식 $f = k(x_1 - x_2)$에서 $x_1 = x_2 + f/k$이므로, 피드백 이득 1을 제외한 전향 이득 가는 $1/k$이어야 한다.
- 나=1/m이 틀린 이유: 질량 방정식 $\ddot{x}_2 = (k/m)x_1 - (c/m)\dot{x}_2 - (k/m)x_2$에서 $x_1 \to \ddot{x}_2$ 이득은 k/m이므로 나는 k/m이어야 한다.
4번: X. 가, 나, 다가 모두 틀렸다. 올바르게는 가=1/k, 나=k/m, 다=-k/m이다.

오답 포인트

입력 $f(t)$를 그대로 질량에 작용하는 힘으로만 보고 x_1과 스프링 변형의 관계를 생략하면 가와 나를 잘못 잡기 쉽다. 특히 x_2 항은 복원력이라 항상 음의 피드백으로 들어간다는 점을 놓치면 2번처럼 다의 부호를 반대로 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

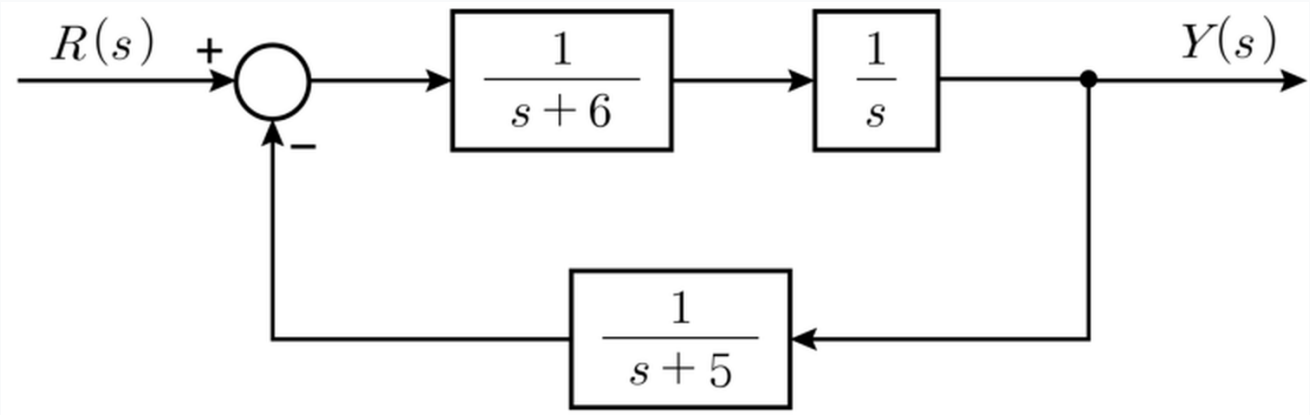
기계계 신호흐름선도는 먼저 스프링과 댐퍼의 힘 관계를 써서 중간변수 사이의 식을 만든 뒤, 마지막에 질량 운동방정식을 $\ddot{x} =$ 형태로 정리해 각 항의 계수와 부호를 블록 이득에 대응시키면 된다.

암기 포인트

스프링은 상대변위 $k(x_1 - x_2)$, 댐퍼는 속도항 $-c\dot{x}$, 질량은 $m\ddot{x}$로 두고 $\ddot{x}$ 식으로 정리하면 부호가 정리된다.

NoteBase

문 11. 다음 폐루프 제어시스템의 특성방정식은?



① $s^3 + 11s^2 + s + 30 = 0$

② $s^3 + 11s^2 + 30s + 1 = 0$

③ $s^3 + 30s^2 + s + 11 = 0$

④ $s^3 + 30s^2 + 11s + 1 = 0$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 음의 피드백 폐루프에서 특성방정식을 $1 + G(s)H(s) = 0$으로 세우고 전개할 수 있는지를 묻는 문제이다.

조건 정리

전진경로 전달함수는 $G(s) = \frac{1}{s(s+6)}$이다.
피드백 전달함수는 $H(s) = \frac{1}{s+5}$이다.
가산점의 아래 입력이 음수이므로 음의 피드백 구조이다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식은 $1 + G(s)H(s) = 0$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 블록선도가 전형적인 단일 루프 음의 피드백 시스템이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

먼저 $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+6)(s+5)}$이다.
따라서 특성방정식은 $1 + \frac{1}{s(s+6)(s+5)} = 0$이다.
분모를 없애면 $s(s+6)(s+5) + 1 = 0$이다.
$(s+6)(s+5) = s^2 + 11s + 30$이므로 $s(s+6)(s+5) + 1 = s(s^2 + 11s + 30) + 1$이다.
정리하면 $s^3 + 11s^2 + 30s + 1 = 0$이다.

선지 판단

① X: $(s+6)(s+5) = s^2 + 11s + 30$까지는 맞지만, 이를 s와 곱한 뒤 상수항 $+1$을 더해야 한다. 틀린 표현은 $s^3 + 11s^2 + s + 30$이고, 올바르게는 $s^3 + 11s^2 + 30s + 1$이다.
② O: 음의 피드백 특성방정식 $1 + G(s)H(s) = 0$을 적용하면 $s^3 + 11s^2 + 30s + 1 = 0$이 된다.
③ X: 틀린 표현은 $(s+6)(s+5)$를 $s^2 + 30s + 11$처럼 전개한 부분에 해당한다. 올바른 전개는 $s^2 + 11s + 30$이므로 올바르게는 $s^3 + 11s^2 + 30s + 1$이다.
④ X: 상수항 $+1$은 맞게 들어갔지만, $(s+6)(s+5)$의 중간항과 상수항 계수를 뒤바꾸었다. 틀린 표현은 $s^3 + 30s^2 + 11s + 1$이고, 올바르게는 $s^3 + 11s^2 + 30s + 1$이다.

오답 포인트

블록선도 문제에서 가장 흔한 실수는 피드백까지 포함한 $G(s)H(s)$를 만들지 않고 전진경로만 보는 실수, 그리고 $(s+a)(s+b) = s^2 + (a+b)s + ab$ 전개에서 $a+b$와 ab를 뒤바꾸는 실수이다.

다시 나오면 이렇게 판단

폐루프 특성방정식 문제는 먼저 피드백 부호를 확인하고, 다음에 $G(s)$와 $H(s)$를 분리한 뒤, 마지막에 $1 \pm G(s)H(s) = 0$에서 분모를 없애고 다항식을 전개하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

음의 피드백 특성방정식은 $1 + G(s)H(s) = 0$, $(s+a)(s+b)$의 계수는 합이 중간항, 곱이 상수항이다.

NoteBase

문 12. 다음 상태방정식에 대한 전달함수가 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s+6}$일 때, $\frac{b}{a}$는?

x(t)=bmatrix0&1\\0&abmatrixx(t)+bmatrix0\bmatrixu(t)
y(t)=bmatrix0&1bmatrixx(t)

① -2

② -0.5

③ 0.5

④ 2

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식의 A, B, C 행렬에서 전달함수 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$를 구해 a, b를 비교하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $A = [0, 1; 0, a], B = [0; b], C = [0, 1]$이다.
전달함수는 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s+6}$이다.
구해야 할 값은 $\frac{b}{a}$이다.
출력식이 $y(t) = [0\ 1]x(t)$이므로 두 번째 상태변수가 직접 출력이 된다.

사용할 공식

전달함수는 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 상태방정식과 출력방정식이 직접 주어졌고, 여기서 분모는 A의 극점 구조를, 분자는 입력 $u(t)$가 출력으로 전달되는 계수를 보여 주기 때문이다.

계산 과정

1. $sI - A = [s, -1; 0, s - a]$이다.
2. 따라서 $(sI - A)^{-1} = \left[\frac{1}{s}, \frac{1}{s(s-a)}; 0, \frac{1}{s-a}\right]$이다.
3. 여기에 B를 곱하면 $(sI - A)^{-1}B = \left[\frac{b}{s(s-a)}; \frac{b}{s-a}\right]$이다.
4. 다시 $C = [0\ 1]$를 곱하면 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{b}{s-a}$이다.
5. 이를 $\frac{3}{s+6}$와 비교하면 $b = 3, s - a = s + 6$이므로 $a = -6$이다.
6. 따라서 $\frac{b}{a} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} = -0.5$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 계산 결과는 $\frac{b}{a} = -0.5$이다. '$\frac{b}{a} = -2$'가 틀린 표현이며, 올바르게는 '$\frac{b}{a} = -0.5$'이다.
② O: $a = -6$, $b = 3$이므로 $\frac{b}{a} = \frac{3}{-6} = -0.5$이다. 전달함수의 분모에서 a의 부호를 정확히 읽으면 바로 맞는다.
③ X: '$\frac{b}{a} = 0.5$'는 크기만 보고 부호를 놓친 오답이다. $a = -6$이므로 올바르게는 '$\frac{b}{a} = -0.5$'이다.
④ X: '$\frac{b}{a} = 2$'는 분자 3과 분모 6을 잘못 대응하거나 상태방정식의 구조를 무시한 값이다. 올바르게는 '$\frac{b}{a} = -0.5$'이다.

오답 포인트

이 문항은 분모의 $s + 6$을 보고 $a = 6$으로 두거나, 분자 3을 곧바로 $\frac{b}{a}$로 오해하면 틀리기 쉽다. 전달함수를 먼저 $\frac{b}{s-a}$ 꼴로 만든 뒤 분모 비교로 a의 부호를 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태방정식에서 전달함수를 묻는 문제는 먼저 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$를 세우고, 출력행렬 C가 어떤 상태를 읽는지 확인한 다음, 최종식의 분모로 극점을 비교하고 분자로 입력계수를 비교하면 된다.

암기 포인트

출력이 두 번째 상태변수이면 이 문제의 전달함수는 $\frac{b}{s-a}$ 꼴로 정리되고, $s + 6$과 비교하면 $a = -6$이 된다는 점이 핵심이다.

NoteBase

문 13. 보상기 $G_c(s)=\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (단, $0<\alpha<1$이고, $T>0$이다)

① 위상각은 항상 양이다.

② 지상보상기(lag compensator)이다.

③ α가 작아질수록 최대 위상각은 커진다.

④ 위상각이 최대가 되는 각주파수는 $\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$이다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 $G_c(s)=\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$에서 $0<\alpha<1$일 때 진상보상기의 위상특성과 최대 위상 주파수를 판별하는 문제이다.

조건 정리

주어진 보상기는 $G_c(s)=\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$이다.
조건은 $0<\alpha<1, T>0$이다.
영점은 $-1/T$, 극점은 $-1/(\alpha T)$이다.

사용할 공식

위상각은 $\phi(\omega)=\tan^{-1}(\omega T)-\tan^{-1}(\omega\alpha T)$이다.
최대 위상각이 되는 각주파수는 $\omega_m=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$이다.
최대 위상각은 $\phi_{\max}=\sin^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이 전달함수가 1차 영점과 1차 극점으로 이루어진 위상보상기이므로 위상특성과 최대 위상 조건을 바로 판별할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. $0<\alpha<1$이면 $\omega T>\omega\alpha T$이므로 $\tan^{-1}(\omega T)>\tan^{-1}(\omega\alpha T)$이다. 따라서 $\phi(\omega)>0$가 되어 양의 위상선행을 만든다.
2. 영점 $-1/T$가 극점 $-1/(\alpha T)$보다 원점에 더 가깝고, 주파수축에서는 영점 주파수 $1/T$가 극점 주파수 $1/(\alpha T)$보다 작다. 따라서 저주파 쪽에서 영점이 먼저 작용하는 진상보상기이다.
3. $\phi_{\max}=\sin^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$에서 α가 작아질수록 $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$가 커지므로 최대 위상각은 커진다.
4. 최대 위상각 조건은 $\omega_m=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$이므로 4번 식은 맞다.

NoteBase

선지별 해설

① O: $\phi(\omega) = \tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\omega\alpha T)$이고 $0 < \alpha < 1$이므로 $\omega > 0$에서 앞항이 항상 더 크다. 따라서 이 보상기는 양의 위상선행을 준다.
② X: 틀린 표현은 '지상보상기'이다. $0 < \alpha < 1$인 $\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$는 지상보상기가 아니라 진상보상기(lead compensator)이다.
③ O: 최대 위상각은 $\phi_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$이므로 α가 작아질수록 값이 커진다.
④ O: 최대 위상각이 되는 각주파수는 $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$이므로 선지의 식이 맞다.

오답 포인트

지상보상기와 진상보상기를 α의 범위로 뒤집어 외우면 ②에 걸린다. 이 문항은 이름만 묻는 것이 아니라 위상각 부호, 최대 위상각, 최대 위상 주파수까지 한 묶음으로 알고 있는지를 확인하는 문제이다.

다시 나오면 이렇게 판단

형태가 $\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$일 때 먼저 α의 범위를 본다. $0 < \alpha < 1$이면 진상보상기, $\alpha > 1$이면 지상보상기로 판단하고, 이어서 $\phi(\omega)$의 부호와 $\omega_m = 1/(T\sqrt{\alpha})$를 확인하면 된다.

암기 포인트

$0 < \alpha < 1$이면 진상보상기, $\alpha \downarrow$이면 $\phi_{\max} \uparrow$, 최대 위상 주파수는 $1/(T\sqrt{\alpha})$이다.

NoteBase

문 14. 다음 시스템이 가제어(controllable)하고 가관측(observable)하기 위한 a와 b로 옳은 것은?

x(t)=bmatrix-4 & 2 \ 0 & 0bmatrixx(t)+bmatrix0 \ abmatrixu(t)
y(t)=bmatrixb & 1bmatrixx(t)

① a: 1, b: -3

② a: 1, b: 0

③ a: 4, b: -2

④ a: 4, b: 0

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식의 가제어성 판별행렬과 가관측성 판별행렬의 rank 조건을 이용해 a와 b의 허용값을 고르는 문제이다.

조건 정리

주어진 행렬은 $A = [-4, 2; 0, 0]$, $B = [0; a]$, $C = [b, 1]$이다.
가제어이려면 가제어성 행렬의 행렬식이 0이 아니어야 한다.
가관측이려면 가관측성 행렬의 행렬식이 0이 아니어야 한다.

사용할 공식

가제어성은 $\mathcal{C} = [B\ AB]$, 가관측성은 O=≤ft[C]로 판정한다.
이 문제는 2차 시스템이므로 두 행렬의 행렬식이 0이 아닌지 확인하면 된다.

계산 과정

1. AB=≤ft[-4 , 2; 0 , 0]≤ft[0]=≤ft[2a; 0]이다.
2. 따라서 C=≤ft[0 , 2a , 0], $\det(\mathcal{C}) = -2a^2$이므로 가제어 조건은 $aeq0$이다.
3. $CA = [b, 1][-4, 2; 0, 0] = [-4b, 2b]$이다.
4. 따라서 $\mathcal{O} = [b, 1;\ -4b, 2b]$, $\det(\mathcal{O}) = 2b^2 + 4b = 2b(b + 2)$이므로 가관측 조건은 $beq0$이고 $beq -2$이다.
5. 두 조건을 동시에 만족해야 하므로 $aeq0$, $beq0$, -2를 만족하는 보기를 고르면 된다.

NoteBase

선지별 해설

① O: $a = 1$은 $aeq0$를 만족하고, $b = -3$은 0도 아니고 -2도 아니므로 가제어성과 가관측성을 모두 만족한다.
② X: $a = 1$이라 가제어는 가능하지만 $b = 0$이면 $\det(\mathcal{O}) = 2b(b + 2) = 0$이 되어 가관측이 아니다. 틀린 표현은 $b = 0$이고, 올바르게는 $beq0,\ -2$여야 한다.
③ X: $a = 4$라서 가제어는 가능하지만 $b = -2$이면 $\det(\mathcal{O}) = 2b(b + 2) = 0$이 되어 가관측이 아니다. 틀린 표현은 $b = -2$이고, 올바르게는 $beq0,\ -2$여야 한다.
④ X: $a = 4$는 문제없지만 $b = 0$이면 가관측 조건을 깨므로 틀리다. 틀린 표현은 $b = 0$이고, 올바르게는 $beq0,\ -2$여야 한다.

오답 포인트

가제어성과 가관측성을 한 번에 섞어 보면 실수하기 쉽다. 이 문항의 함정은 $aeq0$만 보고 끝내거나, 가관측성 조건에서 $\det(\mathcal{O}) = 2b(b + 2)$를 끝까지 인수분해하지 않아 $b = 0$과 $b = -2$를 동시에 놓치는 데 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

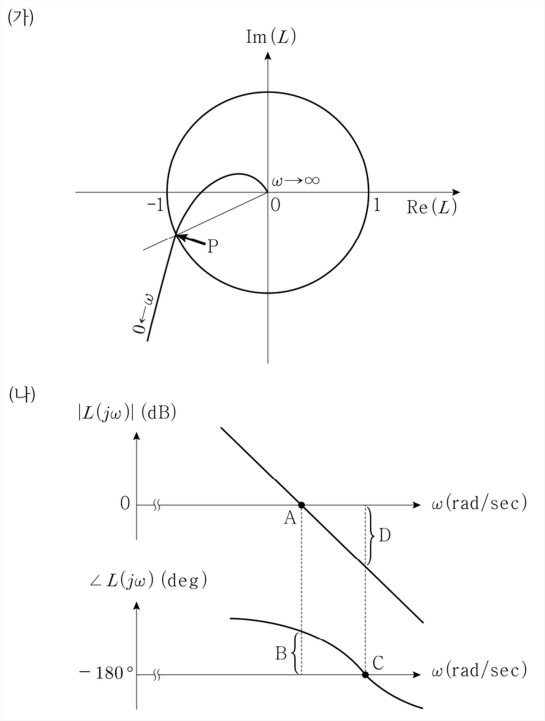
2차 상태공간 문제는 먼저 $\mathcal{C} = [B\ AB]$, O=≤ft[C]를 만든 뒤 행렬식이 0이 되는 값을 각각 구한다. 마지막에 두 조건의 교집합만 남기면 정답을 바로 고를 수 있다.

암기 포인트

2차 시스템은 가제어성은 $\det[B\ AB]eq0$, 가관측성은 ≤ft[C] eq 0로 빠르게 판정한다.

NoteBase

문 15. 동일한 선형시스템의 주파수응답을 그림 (가)의 나이퀴스트 선도와 그림 (나)의 보드 선도로 나타낼 때, 나이퀴스트 선도 P점에 대응하는 보드 선도상의 각주파수[rad/sec]와 위상여유[°]는?



① 각주파수: A, 위상여유: B

② 각주파수: A, 위상여유: D

③ 각주파수: C, 위상여유: B

④ 각주파수: C, 위상여유: D

정답 1번

출제 포인트

나이퀴스트 선도의 특정 점이 보드 선도의 이득교차주파수, 위상교차주파수, 위상여유, 이득여유 중 무엇에 대응하는지를 연결하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① O
P는 나이퀴스트 평면의 단위원 위 점이므로 $|L(j\omega)| = 1$이다. 보드 크기선도에서 $|L(j\omega)| = 1$은 0 dB 교차점이므로 각주파수는 A이다. 이 주파수에서 위상이 -180°보다 얼마나 덜 지연되었는지가 위상여유이므로 위상여유는 B이다.

② X
각주파수 A는 맞지만 위상여유를 D로 본 것이 틀리다. D는 $\angle L(j\omega) = -180^\circ$가 되는 위상교차주파수 C에서 읽는 이득여유이다. 올바르게는 위상여유가 B이다.

③ X
각주파수를 C로 본 것이 틀리다. C는 위상선도가 -180°를 지나는 위상교차주파수이지, $|L(j\omega)| = 1$인 이득교차주파수가 아니다. 올바르게는 P에 대응하는 각주파수가 A이고, 위상여유는 B이다.

④ X
C와 D의 조합은 위상교차주파수와 이득여유 조합이다. 이는 나이퀴스트 선도가 음의 실축을 지나는 점에 대응할 때의 해석이다. P는 단위원 위 점이므로 올바르게는 A와 B의 조합이다.

오답 포인트

위상여유와 이득여유를 모두 안정여유로 묶어서 외우면 B와 D를 뒤바꾸기 쉽다. 이 문제의 함정은 P가 왼쪽 반평면에 있다는 모양에 끌려 -180° 조건으로 오인하게 만드는 데 있다. 실제 판단 기준은 위치의 좌우가 아니라 P가 단위원 위에 있는지, 음의 실축 위에 있는지이다.

다시 나오면 이렇게 판단

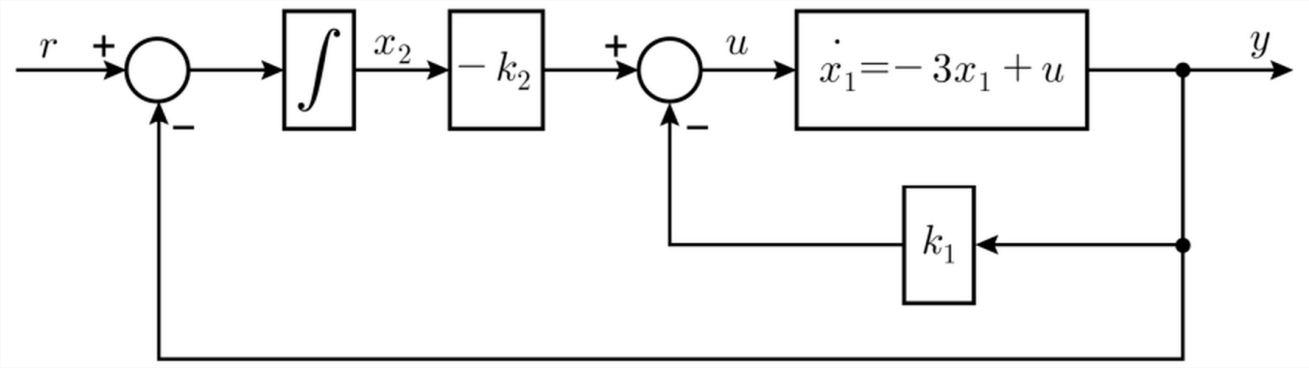
나이퀴스트 점이 나오면 먼저 그 점이 $|L(j\omega)| = 1$인지, $\angle L(j\omega) = -180^\circ$인지부터 구분한다. 단위원 위 점이면 보드 선도에서 0 dB 교차주파수와 위상여유를 읽고, 음의 실축 교차점이면 -180° 교차주파수와 이득여유를 읽는다.

암기 포인트

단위원은 0 dB와 대응하고 위상여유로 이어지며, -180° 교차는 이득여유로 이어진다.

NoteBase

문 16. 다음 적분제어기를 포함한 상태 피드백 제어시스템에서 감쇠비가 1이고 고유주파수가 3 [rad/sec]일 때, 제어이득 k_1과 k_2는?



① k_1: -3, k_2: -9

② k_1: -3, k_2: 9

③ k_1: 3, k_2: -9

④ k_1: 3, k_2: 9

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 적분제어기를 포함한 상태 피드백 제어계의 폐루프 특성방정식을 세우고, 감쇠비 $\zeta = 1$, 고유주파수 $\omega_n = 3$rad/sec에 맞춰 k_1, k_2를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 감쇠비 $\zeta = 1$, 고유주파수 $\omega_n = 3$rad/sec, 식 $\dot{x}_1 = -3x_1 + u$, 출력 $y = x_1$이다.
구해야 할 값: 상태 피드백 이득 k_1, 적분 상태 이득 k_2이다.
주의할 조건: 블록선도에서 $u = -k_1 y - k_2 x_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2$, 적분기 출력 상태는 $\dot{x}_2 = r - y = r - x_1$가 된다.

사용할 공식

표준 2차 특성방정식은 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$이다.
이 문제에서는 상태방정식으로 폐루프 행렬을 만든 뒤 그 특성방정식을 이 표준형과 계수 비교한다. 감쇠비와 고유주파수가 주어졌으므로 가장 직접적인 방법이 계수 비교이다.

NoteBase

계산 과정

1. 블록선도에서 $u = -k_1 x_1 - k_2 x_2$, $\dot{x}_2 = r - x_1$이다.
2. 따라서 $\dot{x}_1 = -3x_1 + u = -(3 + k_1)x_1 - k_2 x_2$이므로 폐루프 상태방정식은 ≤ft[x_1; x_2]=≤ft[-(3+k_1), -k_2; -1, 0]≤ft[x_1_2]+≤ft[0; 1]r이다.
3. 특성방정식은 $|sI - A| = 0$에서 $s^2 + (3 + k_1)s - k_2 = 0$ 이다.
4. $\zeta = 1$, $\omega_n = 3$이므로 원하는 특성방정식은 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 6s + 9$ 이다.
5. 계수 비교를 하면 $3 + k_1 = 6$, $-k_2 = 9$이므로 $k_1 = 3$, $k_2 = -9$이다.

선지 판단

① X
- ①의 $k_1 = -3$, $k_2 = -9$를 대입하면 특성방정식은 $s^2 + 9$가 된다. s항이 0이므로 감쇠비 $\zeta = 1$의 표준형 $s^2 + 6s + 9$와 맞지 않는다.
- 틀린 표현은 $k_1 = -3$이다. 올바르게는 $k_1 = 3$이어야 한다.

② X
- ②의 $k_1 = -3$, $k_2 = 9$를 대입하면 특성방정식은 $s^2 - 9$가 된다. s항과 상수항이 모두 목표식과 다르다.
- 틀린 표현은 $k_1 = -3$, $k_2 = 9$이다. 올바르게는 $k_1 = 3$, $k_2 = -9$이다.

③ O
- ③의 $k_1 = 3$, $k_2 = -9$를 대입하면 특성방정식은 $s^2 + 6s + 9$가 된다. 이는 $\zeta = 1$, $\omega_n = 3$의 표준형과 정확히 일치한다.

④ X
- ④의 $k_1 = 3$, $k_2 = 9$를 대입하면 특성방정식은 $s^2 + 6s - 9$가 된다. s항은 맞지만 상수항 부호가 틀려서 원하는 특성방정식이 아니다.
- 틀린 표현은 $k_2 = 9$이다. 올바르게는 두 번째 합점 앞 부호 때문에 $-k_2 = 9$가 되어 $k_2 = -9$이다.

계산 결과 $k_1 = 3$, $k_2 = -9$이므로 정답은 3번이다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 식 $u = -k_1 x_1 - k_2 x_2$의 부호를 놓쳐 상수항을 $+k_2$로 쓰는 것이다. 또 식 $\dot{x}_1 = -3x_1 + u$에 이미 있는 $-3x_1$를 빼먹으면 s항 계수를 잘못 맞추게 된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

적분기를 포함한 상태 피드백 문제는 먼저 상태변수와 입력식을 써서 폐루프 특성방정식을 만든 다음, 그 식을 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 계수 비교하는 순서로 판단한다. 특히 합점의 부호와 원래 플랜트의 고유항을 먼저 확인하면 부호 실수를 줄일 수 있다.

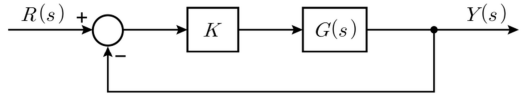
암기 포인트

표준 2차형은 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$이고, 이 문제의 핵심은 $s^2 + (3 + k_1)s - k_2$와의 계수 비교이다.

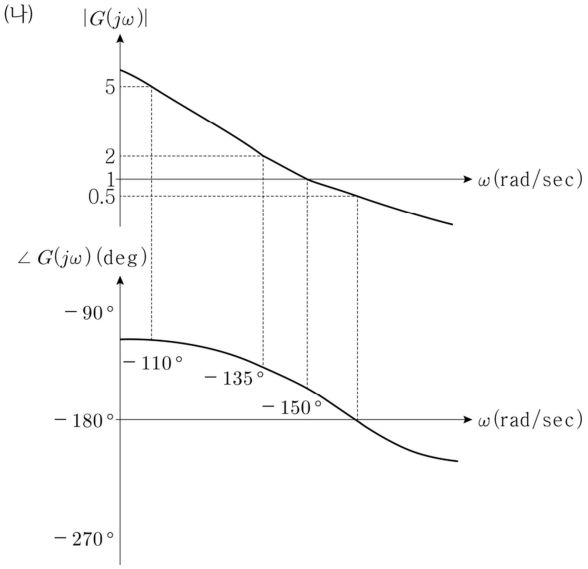
NoteBase

문 17. 그림 (가)와 같은 제어시스템에서 전달함수 $G(s)$의 보드 선도는 그림 (나)와 같다. $K = 0.5$일 때, 위상여유[°]는?

(가)



(나)



① 0

② 30

③ 45

④ 70

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 보드선도에서 K를 반영한 개루프 전달함수 $L(s) = KG(s)$의 이득교차주파수를 찾고, 그 주파수에서 위상을 읽어 위상여유를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $K = 0.5$와 전달함수 $G(s)$의 보드선도이다.
구해야 할 값은 위상여유이다.
주의할 조건은 위상여유를 $G(s)$가 아니라 $KG(s)$의 이득교차주파수에서 구해야 한다는 점이다.

NoteBase

사용할 공식

개루프 전달함수를 $L(s) = KG(s)$라고 두면, 이득교차주파수 ω_{gc}는 $|L(j\omega_{gc})| = 1$을 만족하는 주파수이다.
따라서 $|KG(j\omega_{gc})| = 1$이고, $K = 0.5$이므로 $|G(j\omega_{gc})| = 2$가 된다.
위상여유는 $PM = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc})$이다.
$K > 0$이므로 위상은 바뀌지 않아 $\angle L(j\omega_{gc}) = \angle G(j\omega_{gc})$이다.

계산 과정

1. $K = 0.5$이므로 $|KG| = 1$이 되려면 $|G| = 2$인 점을 찾아야 한다.
2. 그림 (나)의 크기 선도에서 $|G(j\omega)| = 2$일 때의 주파수에 대응하는 위상은 -135°이다.
3. 따라서 위상여유는 $PM = 180^\circ + (-135^\circ) = 45^\circ$이다.

선지별 해설

① X: 위상여유가 0도가 되려면 이득교차주파수에서 위상이 -180°여야 한다. 이 문항에서는 $|G| = 0.5$일 때 위상이 -180°로 보이므로, 이는 $K = 0.5$를 반영하기 전의 이득교차조건과 맞지 않는다. 틀린 표현은 위상여유를 0도로 본 점이고, 올바르게는 45도이다.
② X: 30도는 이득교차주파수에서 위상이 -150°일 때의 값이다. 그러나 $K = 0.5$이면 $|G| = 1$이 아니라 $|G| = 2$인 점이 이득교차주파수이다. 틀린 표현은 $|G| = 1$ 지점에서 위상을 읽은 점이고, 올바르게는 $|G| = 2$ 지점의 위상 -135°를 사용하여 45도로 구한다.
③ O: $K = 0.5$이면 $|KG| = 1$ 조건이 $|G| = 2$가 된다. 보드선도에서 $|G| = 2$일 때 위상은 -135°이므로 위상여유는 45도이다.
④ X: 70도는 이득교차주파수에서 위상이 -110°일 때의 값이다. 이는 그림에서 $|G| = 5$ 부근에 대응하는 값으로, $K = 0.5$일 때의 이득교차조건과 다르다. 틀린 표현은 -110° 지점을 이득교차점으로 본 점이고, 올바르게는 -135°를 읽어 45도로 판단한다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 $K = 0.5$를 무시하고 $|G| = 1$인 지점에서 바로 위상을 읽는 점이다. 이 문항은 보상기 이득이 앞단에 추가되어 있으므로, 먼저 $|KG| = 1$을 $|G| = 2$로 바꿔 읽어야 한다는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

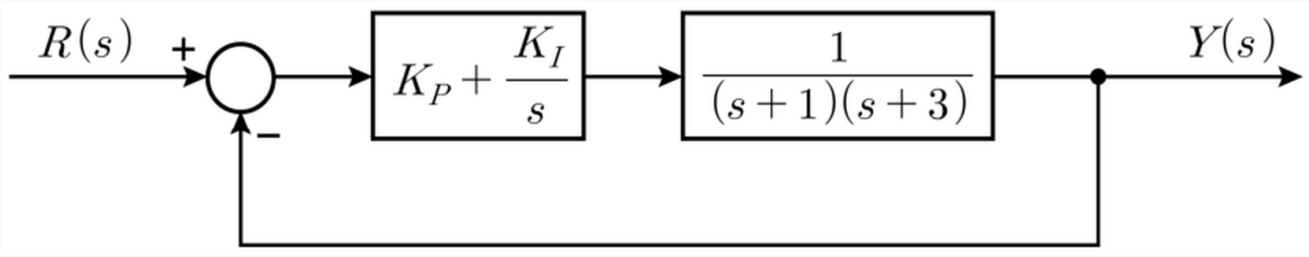
위상여유 문제는 먼저 개루프 전달함수를 $L(s)$로 두고, $|L| = 1$ 조건을 원래 보드선도의 $|G|$ 값으로 환산한 뒤 그 주파수의 위상을 읽어 180°에 더해 판단한다.

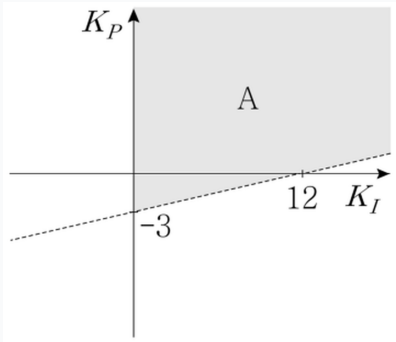
암기 포인트

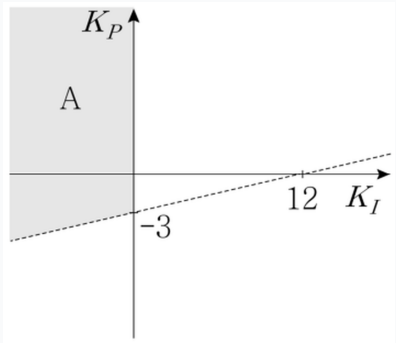
위상여유는 항상 $|KG| = 1$에서 읽고, $K < 1$이면 원래 크기선도에서는 $1/K$만큼 큰 $|G|$ 지점을 찾는다.

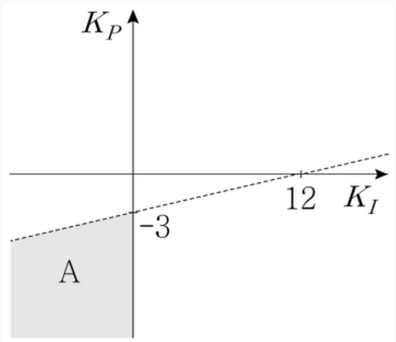
NoteBase

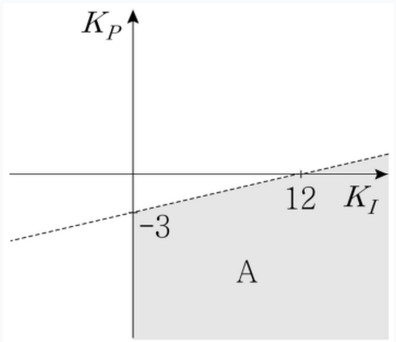
문 18. 다음 제어시스템이 안정할 때, 이를 만족하기 위한 K_P와 K_I의 영역 A를 바르게 표시한 것은?



① 

② 

③ 

④ 

NoteBase

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 PI 제어기가 포함된 폐루프 계의 특성방정식을 세우고 Routh 안정조건으로 K_P, K_I의 안정영역을 찾는 문제이다.

조건 정리

개루프 전달함수는 $G(s) = \frac{K_P + K_I/s}{(s+1)(s+3)} = \frac{K_P s + K_I}{s(s+1)(s+3)}$ 이다.
폐루프 특성방정식은 $s(s+1)(s+3) + K_P s + K_I = 0$ 이다.
정리하면 $s^3 + 4s^2 + (K_P + 3)s + K_I = 0$ 이다.

사용할 공식

3차식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ 가 안정하려면 $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$ 를 만족해야 한다.
이 문제의 특성방정식이 정확히 3차식이므로 Routh 안정조건을 바로 적용할 수 있다.

계산 과정

1. 특성방정식 $s^3 + 4s^2 + (K_P + 3)s + K_I = 0$ 에서 계수를 읽으면 $a_1 = 4, a_2 = K_P + 3, a_3 = K_I$ 이다.
2. 안정조건으로부터 $K_P + 3 > 0, K_I > 0, 4(K_P + 3) > K_I$ 를 얻는다.
3. 마지막 식을 K_P 에 대해 정리하면 $K_P > \frac{K_I}{4} - 3$ 이다.
4. 따라서 안정영역은 $K_I > 0$ 이면서 직선 $K_P = \frac{K_I}{4} - 3$ 의 위쪽이다. 이 직선은 $(K_I, K_P) = (0, -3), (12, 0)$ 을 지난다.

NoteBase

선지별 해설

① O
영역 A가 $K_I > 0$ 인 세로축 오른쪽에 있고, 동시에 직선 $K_P = \frac{K_I}{4} - 3$ 의 위쪽에 있다. 안정조건 $K_I > 0$, $K_P > \frac{K_I}{4} - 3$ 와 일치한다.

② X
영역 A가 세로축 왼쪽, 즉 $K_I < 0$ 인 부분을 포함한다. 안정하려면 $K_I > 0$ 이어야 하므로 틀리다. 올바르게는 세로축 오른쪽에서 직선 위쪽이 영역 A이다.

③ X
영역 A가 직선 아래쪽에 있어 $K_P < \frac{K_I}{4} - 3$ 인 부분을 나타낸다. 이는 $4(K_P + 3) > K_I$ 를 만족하지 못하는 불안정 영역이다. 올바르게는 직선 위쪽이 영역 A이다.

④ X
영역 A가 세로축 오른쪽이기는 하지만 직선 아래쪽에 있어 $K_I > 0$ 조건만 만족하고 $K_P > \frac{K_I}{4} - 3$ 조건을 만족하지 못한다. 올바르게는 세로축 오른쪽이면서 직선 위쪽이 영역 A이다.

오답 포인트

가로축이 K_I, 세로축이 K_P 라는 점을 바꾸어 읽기 쉽다. 또한 $K_P > -3$ 만 보고 끝내면 안 되고, 반드시 $4(K_P + 3) > K_I$ 를 직선 경계로 바꿔 위쪽인지 아래쪽인지까지 판단해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

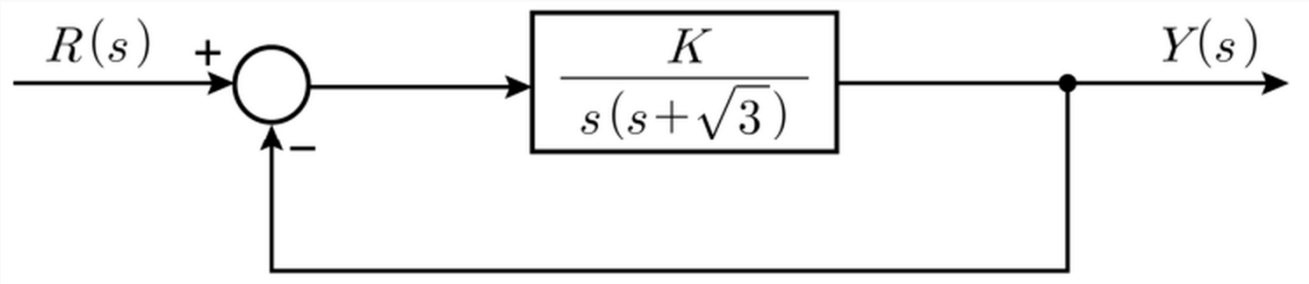
PI 제어기 안정영역 문제는 먼저 폐루프 특성방정식을 만든 뒤 3차식 Routh 조건을 적용한다. 그다음 부등식을 K_I-K_P 평면의 직선 경계로 바꾸고, 절편 $(0, -3)$, $(12, 0)$ 을 찍어 위쪽인지 아래쪽인지 판단한다.

암기 포인트

3차식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ 는 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 > a_3$ 이면 안정이다.

NoteBase

문 19. 다음 제어시스템에서 위상여유가 60 [°]일 때, 제어이득 K는? (단, $K > 0$이다)



① 1

② 1.5

③ 2

④ 2.5

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 위상여유의 정의와 이득교차주파수 조건을 이용해 제어이득 K를 구하는 문제이다.

조건 정리

개루프 전달함수는 $L(s) = \frac{K}{s(s+\sqrt{3})}$이다.
위상여유는 60도이다.
구해야 할 값은 양의 제어이득 K이다.

사용할 공식

위상여유는 $\text{PM} = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc})$이다.
이득교차주파수 ω_{gc}에서는 $|L(j\omega_{gc})| = 1$이다.
이 문제의 위상과 크기는 각각 $\angle L(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}(\omega/\sqrt{3})$, $|L(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+3}}$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 위상여유가 주어지면 먼저 ω_{gc}를 정하고, 그 주파수에서 크기조건으로 K를 구할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. $\text{PM} = 60^\circ$이므로 $\angle L(j\omega_{gc}) = -120^\circ$이다.
2. $-90^\circ - \tan^{-1}(\omega_{gc}/\sqrt{3}) = -120^\circ$이므로 $\tan^{-1}(\omega_{gc}/\sqrt{3}) = 30^\circ$이다. 따라서 $\omega_{gc}/\sqrt{3} = \tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$이어서 $\omega_{gc} = 1$이다.
3. $|L(j1)| = \frac{K}{1\cdot\sqrt{1+3}} = \frac{K}{2}$이다. 이득교차조건 $|L(j1)| = 1$을 대입하면 $\frac{K}{2} = 1$이고, 따라서 $K = 2$이다.

NoteBase

선지 판단

① X: $K=1$이면 $|L(j1)|=\frac{1}{2}$로 이득교차조건을 만족하지 않는다. 틀린 값 $K=1 \rightarrow$ 올바르게는 $K=2$이다.
② X: $K=1.5$이면 $|L(j1)|=\frac{1.5}{2}=0.75$이므로 위상여유 60도를 만드는 교차조건보다 작다. 틀린 값 $K=1.5 \rightarrow$ 올바르게는 $K=2$이다.
③ O: $\omega_{gc}=1$에서 $|L(j1)|=1$이 되려면 $K=2$이어야 하므로 맞다.
④ X: $K=2.5$이면 $|L(j1)|=\frac{2.5}{2}=1.25$로 너무 커서 이득교차주파수가 1보다 커진다. 그러면 위상은 -120°보다 더 작아져 위상여유가 60도보다 작아진다. 틀린 값 $K=2.5 \rightarrow$ 올바르게는 $K=2$이다.

오답 포인트

위상여유 60도를 보고 바로 크기만 맞추거나, 위상교차조건 -180°과 이득교차점에서의 위상조건 -120°을 혼동하면 오답이 나온다. 이 문제는 먼저 위상으로 ω_{gc}를 정한 뒤 그 점에서 크기조건을 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

위상여유 문제는 먼저 $\mathrm{PM}=180^\circ+\angle L(j\omega_{gc})$로 이득교차주파수의 위상을 정하고, 그다음 $|L(j\omega_{gc})|=1$에서 미지 이득을 구하면 된다.

암기 포인트

단위되먹임계에서 위상여유 60도는 이득교차점 위상이 -120°라는 뜻이다.

NoteBase

문 20. 다음 상태방정식의 상태천이행렬(state transition matrix)이 다음과 같을 때, a와 b는?

bmatrix 2e^-t - e^-2t & e^-t - e^-2t \ -2e^-t + 2e^-2t & -e^-t + 2e^-2t bmatrix
x(t) = bmatrix 0 & 1 \ a & b bmatrix x(t) + bmatrix 0 \ 1 bmatrix u(t)
y(t) = bmatrix 1 & 0 bmatrix x(t)

① a: -3, b: -2

② a: -2, b: -3

③ a: 2, b: 3

④ a: 3, b: 2

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태천이행렬 $\Phi(t) = e^{At}$가 주어졌을 때 $A = \Phi'(0)$를 이용하여 상태행렬의 미지수 a, b를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 상태천이행렬 $\Phi(t) = [2e^{-t} - e^{-2t}, e^{-t} - e^{-2t}; -2e^{-t} + 2e^{-2t}, -e^{-t} + 2e^{-2t}]$와 상태방정식의 계수행렬 $A = [0, 1; a, b]$이다. 구해야 할 값은 a와 b이다. 상태천이행렬은 $t = 0$에서 $\Phi(0) = I$이므로 $A = \Phi'(0)$를 바로 사용할 수 있다.

사용할 공식

$\Phi(t) = e^{At}, \quad \Phi(0) = I, \quad \Phi'(0) = A$
이 공식을 쓰는 이유는 선형 시불변 상태방정식에서 상태천이행렬이 e^{At}이고, $t = 0$에서 미분값이 곧 상태행렬 A가 되기 때문이다.

계산 과정

1. 주어진 상태천이행렬을 항목별로 미분하면
$\Phi'(t) = [-2e^{-t} + 2e^{-2t}, -e^{-t} + 2e^{-2t}; 2e^{-t} - 4e^{-2t}, e^{-t} - 4e^{-2t}]$
이 된다.
2. $t = 0$을 대입하면
$\Phi'(0) = [-2 + 2, -1 + 2; 2 - 4, 1 - 4] = [0, 1; -2, -3]$
이 된다.
3. $A = [0, 1; a, b]$와 비교하면 $a = -2, b = -3$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 이 선지는 $a=-3, b=-2$라고 본 경우이다. 계산 결과는 $A=[0, 1; -2, -3]$이므로 틀린 표현은 $a=-3,\ b=-2$이고, 올바르게는 $a=-2,\ b=-3$이다.
② O: $\Phi'(0)=A$를 적용하면 둘째 행이 $(-2, -3)$으로 나온다. 따라서 $a=-2, b=-3$이므로 정답과 일치한다.
③ X: 이 선지는 $a=2, b=3$으로 부호를 반대로 본 경우이다. 미분 후 $t=0$을 대입하면 둘째 행 원소가 모두 음수이므로 틀린 표현은 $a=2,\ b=3$이고, 올바르게는 $a=-2,\ b=-3$이다.
④ X: 이 선지는 절댓값만 보고 $a=3, b=2$로 읽은 경우이다. 실제 비교 대상은 $(-2, -3)$이므로 틀린 표현은 $a=3,\ b=2$이고, 올바르게는 $a=-2,\ b=-3$이다.

오답 포인트

상태천이행렬이 주어졌을 때 고유값만 보고 성급하게 추정하거나, 항목별 미분 뒤 $t=0$ 대입을 하지 않으면 부호와 위치를 쉽게 바꿔 적게 된다. 특히 둘째 행 첫째 열이 a, 둘째 행 둘째 열이 b라는 자리 대응을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

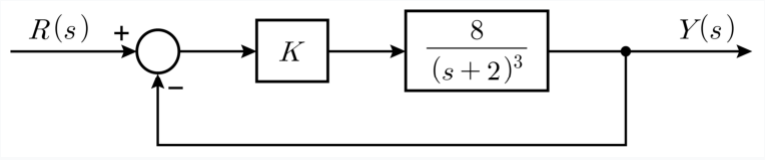
상태천이행렬 전체가 주어지면 먼저 $\Phi(0)=I$를 확인하고 바로 $A=\Phi'(0)$를 적용한다. 그다음 미분값 행렬을 상태행렬의 같은 위치와 1대1로 대응시켜 a, b를 읽어 내면 된다.

암기 포인트

상태천이행렬이 주어지면 $A=\Phi'(0)$이고, $\Phi(0)=I$이다.

NoteBase

문 21. 다음 폐루프 제어시스템이 안정할 때, 단위계단입력에 대한 출력의 정상상태오차 e_{ss} 범위는? (단, $K > 0$이다)



① $\frac{1}{9} < e_{ss} < 1$

② $\frac{1}{8} < e_{ss} < 2$

③ $0 < e_{ss} < 8$

④ $1 < e_{ss} < 9$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 폐루프 안정조건으로 K의 범위를 먼저 구한 뒤, 단위계단입력의 정상상태오차 e_{ss}를 위치오차상수 K_p로 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 계는 단위 음의 되먹임 폐루프계이다.
전달함수의 전진경로는 $G(s) = \frac{8K}{(s+2)^3}$이다.
구해야 할 값은 단위계단입력에 대한 정상상태오차 e_{ss}의 범위이다.
주의할 조건은 계가 안정해야 하므로 $K > 0$만으로 끝나지 않고 폐루프 특성방정식의 안정조건을 함께 만족해야 한다는 점이다.

NoteBase

사용할 공식

폐루프 특성방정식은 $1 + G(s) = 0$이다.

따라서

$(s+2)^3 + 8K = 0$

$s^3 + 6s^2 + 12s + 8(1+K) = 0$

이다.

3차식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$가 안정하려면 계수가 양수이고 $a_1 a_2 > a_3$이어야 한다.

또 단위계단입력의 정상상태오차는

$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}, \qquad K_p = \lim_{s\to 0} G(s)$

이다.

이 공식을 쓰는 이유는 이 계가 단위 되먹임의 0형 시스템이므로 계단입력 오차를 위치오차상수로 바로 구할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 안정조건을 구하면 $a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = 8(1+K)$이므로 $6 \cdot 12 > 8(1+K)$이다.
2. 따라서 $72 > 8 + 8K$, 즉 $64 > 8K$이므로 $K < 8$이다. 조건 $K > 0$과 합치면 $0 < K < 8$이다.
3. 위치오차상수는 $K_p = \lim_{s\to 0} \frac{8K}{(s+2)^3} = \frac{8K}{8} = K$이다.
4. 따라서 $e_{ss} = \frac{1}{1+K}$이다.
5. $0 < K < 8$을 대입하면 $\frac{1}{9} < e_{ss} < 1$이다.

선지별 해설

① O

- 계산 결과가 바로 $\frac{1}{9} < e_{ss} < 1$이므로 옳다.

② X

- 이 선지는 하한이 틀렸다. 실제 하한은 $K < 8$에서 나오는 $\frac{1}{9}$이지 $\frac{1}{8}$이 아니다.
- 틀린 표현은 "$\frac{1}{8} < e_{ss}$"이다. 올바르게는 "$\frac{1}{9} < e_{ss}$"이다.

③ X

- $e_{ss} = \frac{1}{1+K}$이고 $K > 0$이므로 항상 $e_{ss} < 1$이다. 상한을 8로 둔 것은 정상상태오차 공식을 쓰지 못한 경우의 오답이다.
- 틀린 표현은 "$e_{ss} < 8$"이다. 올바르게는 "$e_{ss} < 1$"이다.

④ X

- $e_{ss} = \frac{1}{1+K}$는 양수이지만 1보다 항상 작다. 따라서 $1 < e_{ss}$는 성립할 수 없다.
- 틀린 표현은 "$1 < e_{ss}$"이다. 올바르게는 "$e_{ss} < 1$"이다.

NoteBase

오답 포인트

안정조건을 빼고 $K>0$만 사용하면 $0<e_{ss}<1$ 정도만 보고 ③으로 흔들리기 쉽다. 또 $(s+2)^3$의 상수항 8과 안정조건에서 나온 경계값 $K=8$을 섞어 $\frac{1}{8}$을 하한으로 잘못 쓰기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

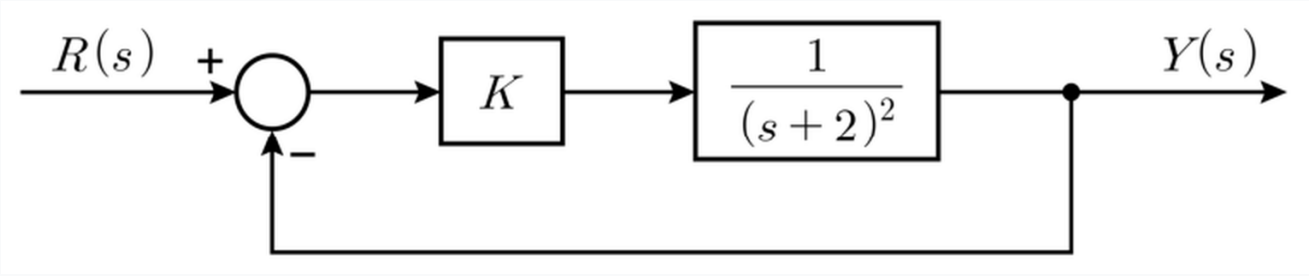
폐루프 정상상태오차 범위를 묻는 계산형 문항은 먼저 폐루프 특성방정식으로 안정한 K 범위를 구하고, 그다음 K_p, K_v, K_a 중 해당 오차상수를 계산해 최종 범위를 정리하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

단위 되먹임 0형 시스템의 계단오차는 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$이고, 이 문제에서는 $K_p=K$, 안정범위는 $0<K<8$이다.

NoteBase

문 22. 다음 폐루프 제어시스템에서 이득 $K = K_1$일 때 단위계단응답의 최고시간(peak time)은 t_p이다. t_p를 0.5배로 단축하기 위한 새로운 이득 K는? (단, $K > 0$이다)



① $\frac{K_1}{4}$

② $\frac{K_1}{2}$

③ $2K_1$

④ $4K_1$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 2차 폐루프계의 최고시간 t_p와 특성방정식의 관계를 이용해 이득 K의 변화를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
- 전진경로 전달함수는 $\frac{K}{(s+2)^2}$이다.
- 단위 피드백 폐루프이다.
- $K = K_1$일 때 최고시간이 t_p이다.
- 새로운 목표 최고시간은 $0.5t_p$이다.

구해야 할 값:
- 새로운 이득 K이다.

주의할 조건:
- 최고시간은 감쇠진동하는 2차계에서 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$를 사용한다.

NoteBase

사용할 공식

폐루프 전달함수는
$T(s) = \frac{K}{(s+2)^2 + K} = \frac{K}{s^2 + 4s + (4+K)}$
이다.
이를 표준 2차형 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 비교하면
$2\zeta\omega_n = 4, \quad \omega_n^2 = 4 + K$
이다.
여기서 $\omega_n = \sqrt{4+K}, \zeta = \frac{2}{\sqrt{4+K}}$이므로 $K > 0$이면 항상 $\zeta < 1$이어서 이 계는 감쇠진동계이다. 따라서 최고시간 공식 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$를 적용할 수 있다.
따라서
$\zeta\omega_n = 2, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{\omega_n^2 - (\zeta\omega_n)^2} = \sqrt{(4+K) - 4} = \sqrt{K}$
이므로
$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$
이다.
이 공식을 쓰는 이유는 폐루프 특성방정식이 표준 2차형으로 바로 정리되고, 최고시간이 감쇠진동 주파수 ω_d로 결정되기 때문이다.

계산 과정

1. $K = K_1$일 때 최고시간은
$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$
이다.
2. 새로운 최고시간이 $0.5t_p$이므로
$\frac{\pi}{\sqrt{K}} = 0.5 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$
이다.
3. π를 약분하면
$\frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{2\sqrt{K_1}}$
이므로
$\sqrt{K} = 2\sqrt{K_1}$
이다.
4. 양변을 제곱하면
$K = 4K_1$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X
- $K=\frac{K_1}{4}$이면 $t_p=\frac{\pi}{\sqrt{K_1/4}}=2\frac{\pi}{\sqrt{K_1}}=2t_p$가 된다.
- 0.5배 단축이 아니라 2배 증가이므로 틀리다.
- 틀린 표현은 $K=\frac{K_1}{4}$이다. 올바르게는 $K=4K_1$이다.

② X
- $K=\frac{K_1}{2}$이면 $t_p=\frac{\pi}{\sqrt{K_1/2}}=\sqrt{2}\,t_p$가 된다.
- 최고시간이 더 길어지므로 틀리다.
- 틀린 표현은 $K=\frac{K_1}{2}$이다. 올바르게는 $K=4K_1$이다.

③ X
- $K=2K_1$이면 $t_p=\frac{\pi}{\sqrt{2K_1}}=\frac{t_p}{\sqrt{2}}$이다.
- 감소는 맞지만 $0.5t_p$가 아니라 약 $0.707t_p$이므로 부족하다.
- 틀린 표현은 $K=2K_1$이다. 올바르게는 $K=4K_1$이다.

④ O
- $K=4K_1$이면 $t_p=\frac{\pi}{\sqrt{4K_1}}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{K_1}}=0.5t_p$가 된다.
- 조건을 정확히 만족하므로 옳다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 t_p가 K에 반비례한다고 오해하는 데 있다. 실제로는 $t_p=\frac{\pi}{\sqrt{K}}$이므로 최고시간을 절반으로 줄이려면 K를 2배가 아니라 4배로 키워야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

폐루프 2차계의 시간응답을 묻는 문제는 먼저 특성방정식을 표준형 $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$로 맞춘다. 그다음 ω_d를 구해 $t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$에 대입하고, 시간값이 몇 배 변하는지 보면 K의 제곱근 관계를 바로 판단할 수 있다.

암기 포인트

최고시간은 $t_p\propto\frac{1}{\sqrt{K}}$이므로 시간 1/2는 이득 4배이다.

NoteBase

문 23. 다음과 같은 제어시스템과 관측기에서 상태관측기의 고윳값(eigenvalue)이 $-5,\ -6$일 때, 관측기 이득 L은? (단, $\hat{x}(t)$은 $x(t)$의 추정 상태변수이고, A = bmatrix 0 & 1 \ -2 & -3 bmatrix, B = bmatrix 0 \ 1 bmatrix, C = bmatrix 1 & 0 bmatrix이다)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

① bmatrix -8 \ -4 bmatrix

② bmatrix -4 \ -8 bmatrix

③ bmatrix 4 \ 8 bmatrix

④ bmatrix 8 \ 4 bmatrix

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 관측기 오차동역학의 행렬 $A - LC$에 대해 원하는 고윳값 $-5,\ -6$을 만들도록 관측기 이득 L을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 행렬은 $A = [0, 1;\ -2,\ -3], C = [1, 0]$이다.
구해야 할 값은 $L = [l_1 l_2]$이다.
관측기 오차를 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$라 두면 $\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$가 된다.

사용할 공식

$\det(sI - (A - LC)) = (s + 5)(s + 6)$
이 공식을 쓰는 이유는 상태관측기의 고윳값이 $-5,\ -6$이라는 말이 곧 오차동역학 행렬 $A - LC$의 특성근을 $-5,\ -6$으로 맞추라는 뜻이기 때문이다.

계산 과정

1. $L = [l_1 l_2]$라 두면 $LC = [l_1, 0 l_2, 0]$이므로 $A - LC = [-l_1, 1;\ -2 - l_2,\ -3]$이다.
2. 특성방정식은
$\det[s + l_1,\ -1; 2 + l_2, s + 3] = (s + l_1)(s + 3) + (2 + l_2) = s^2 + (l_1 + 3)s + (3l_1 + l_2 + 2)$이다.
3. 원하는 특성방정식은 $(s + 5)(s + 6) = s^2 + 11s + 30$이므로 계수비교를 하면 $l_1 + 3 = 11$, $3l_1 + l_2 + 2 = 30$이다.
4. 따라서 $l_1 = 8, l_2 = 4$이므로 $L = [8; 4]$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X. $L=[-8;\ -4]$를 대입하면 특성방정식이 $s^2-5s-26$이 되어 고윳값이 $-5,\ -6$이 아니다. 틀린 표현은 이득의 부호이며, 올바르게는 $L=[8;4]$이다.
② X. $L=[-4;\ -8]$를 대입하면 특성방정식이 s^2-s-18이 되어 계수부터 맞지 않는다. 틀린 표현은 두 성분의 값과 부호이며, 올바르게는 $L=[8;4]$이다.
③ X. $L=[4;8]$를 대입하면 특성방정식이 $s^2+7s+22$가 되어 원하는 $s^2+11s+30$과 다르다. 틀린 표현은 두 성분을 절반으로 잡은 값이며, 올바르게는 $L=[8;4]$이다.
④ O. $L=[8;4]$를 대입하면 특성방정식이 $s^2+11s+30=(s+5)(s+6)$이 되어 고윳값이 정확히 $-5,\ -6$이 된다.

오답 포인트

관측기에서는 $A-LC$를 써야 하는데 $A+LC$처럼 부호를 반대로 두면 ① 같은 오답이 나온다. 또 행렬 원소를 직접 맞추는 것이 아니라 특성방정식의 계수를 비교해야 하므로 ②, ③처럼 성분의 위치나 크기를 감으로 정하면 틀리게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

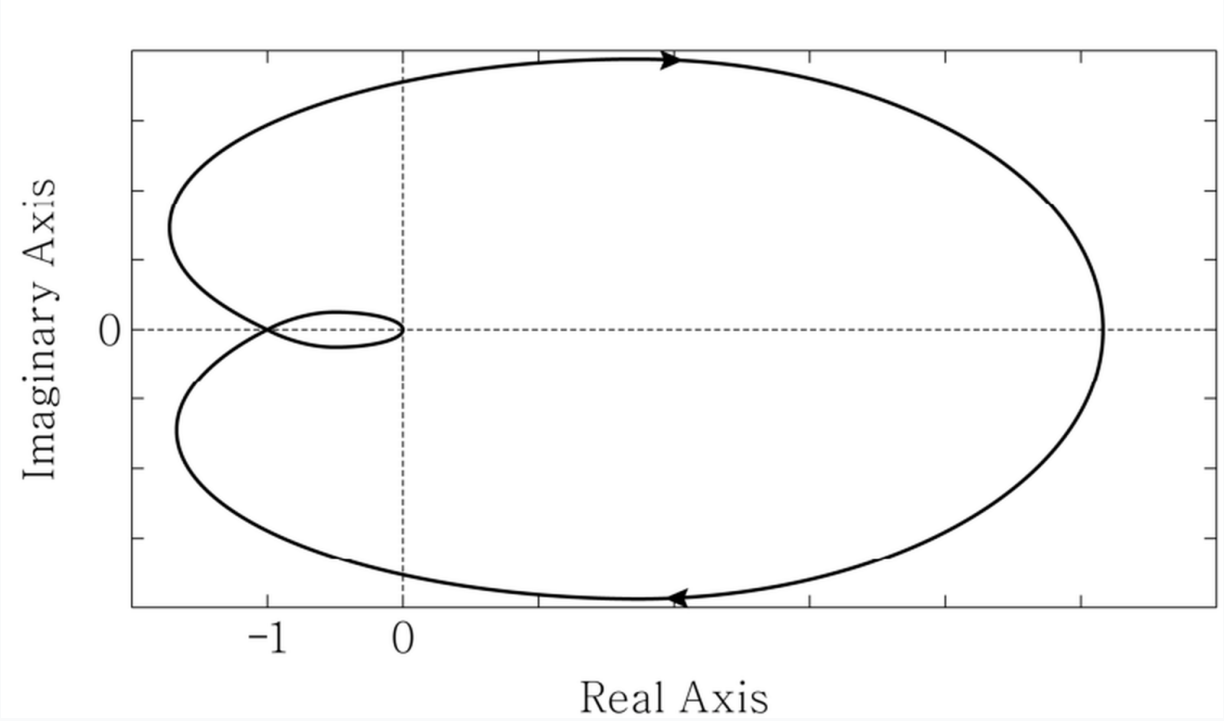
관측기 이득 문제는 먼저 L을 미지수로 두고 $A-LC$를 만든 뒤, 그 특성방정식을 원하는 극 $(s-p_1)(s-p_2)$와 계수비교하는 순서로 판단하면 된다.

암기 포인트

관측기 극 배치는 $A-LC$, 상태피드백 극 배치는 $A-BK$의 특성방정식을 맞춘다는 점을 함께 기억해 두면 된다.

NoteBase

문 24. 다음 루프전달함수 $KG(s)=\frac{10K}{(s+1)(s^2+2s+2)}$의 나이퀴스트 선도에서 단위 피드백 제어시스템이 임계 안정(marginally stable)할 때, 각주파수 ω[rad/sec]와 K는? (단, $K>0$이고, $\omega>0$이다)



① ω: 1, K: 0.5

② ω: 1, K: 1

③ ω: 2, K: 0.5

④ ω: 2, K: 1

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 선도에서 임계 안정 조건 $KG(j\omega)=-1+j0$을 이용해 ω와 K를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 루프전달함수는 $KG(s)=\frac{10K}{(s+1)(s^2+2s+2)}$이다.
개루프 극은 $s=-1$과 $s^2+2s+2=0$의 근인 $s=-1\pm j$로 모두 좌반평면에 있다. 따라서 나이퀴스트 안정 조건은 선도가 $-1+j0$을 감싸지 않는 것(에움 횟수 $N=0$)이며, 선도가 $-1+j0$을 정확히 통과하는 순간이 임계 안정이다(통과 후 감싸면 $N\neq 0$이 되어 불안정).
주어진 선도에서도 궤적이 실수축과 만나는 안쪽 교점이 -1 근방에 있어, 이 교점이 정확히 $-1+j0$에 놓이는 ω와 K를 찾는 문제이다.
구해야 할 값은 $\omega>0$와 $K>0$이다.

NoteBase

사용할 공식

임계 안정 조건은 $KG(j\omega) = -1 + j0$이다.

$s = j\omega$를 대입하면

$KG(j\omega) = \frac{10K}{(1+j\omega)\{(2-\omega^2)+j2\omega\}}$

이고, 분모를 전개하면

$(1+j\omega)\{(2-\omega^2)+j2\omega\} = (2-3\omega^2)+j\omega(4-\omega^2)$

이 된다.

이 공식을 쓰는 이유는 임계 안정점이 실수축의 -1점이므로 허수부가 먼저 0이 되어야 하고, 그때의 실수부 크기로 K를 정할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 허수부가 0이어야 하므로 $\omega(4-\omega^2) = 0$이다.
2. 조건 $\omega > 0$이므로 $\omega = 2$이다.
3. $\omega = 2$를 대입하면 분모는 $2 - 3(2)^2 = -10$이므로 $KG(j2) = \frac{10K}{-10} = -K$이다.
4. 임계 안정에서는 $KG(j2) = -1$이어야 하므로 $-K = -1$, 따라서 $K = 1$이다.

선지별 해설

① X. $\omega = 1$이면 분모의 허수부가 $1 \cdot (4-1) = 3$이어서 전달함수 값이 실수축 위에 놓이지 않는다. 따라서 나이퀴스트 선도가 $-1 + j0$을 지날 수 없다. 틀린 표현은 "ω=1"이며, 올바르게는 $\omega = 2$이다.

② X. $K = 1$ 자체는 맞을 수 있으나 $\omega = 1$이어서 임계 안정 조건인 허수부 0을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 "ω=1"이며, 올바르게는 $\omega = 2$이다.

③ X. $\omega = 2$는 맞지만 이때 $KG(j2) = -K$이므로 $K = 0.5$이면 점 $-0.5 + j0$에 놓여 $-1 + j0$에 도달하지 못한다. 틀린 표현은 "K=0.5"이며, 올바르게는 $K = 1$이다.

④ O. $\omega = 2$에서 허수부가 0이 되고, 그때 $KG(j2) = -K$이므로 $K = 1$일 때 정확히 $-1 + j0$을 지난다. 따라서 단위 피드백 제어시스템은 임계 안정이 된다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 실수부만 보고 K를 먼저 맞추는 것이다. 이 문제는 먼저 허수부를 0으로 만들어 나이퀴스트 선도가 실수축 위의 임계점에 놓이는 주파수를 찾아야 한다. $\omega = 1$은 보기에서 그럴듯하지만 허수부가 0이 아니어서 바로 탈락한다.

다시 나오면 이렇게 판단

나이퀴스트 선도에서 임계 안정을 묻는 계산형은 $s = j\omega$ 대입 → 허수부 0으로 실수축 교점 주파수 결정 → 그 점의 실수부를 -1에 맞춰 이득 결정의 순서로 판단한다.

NoteBase

암기 포인트

임계 안정의 나이퀴스트 조건은 $-1 + j0$ 통과이며, 계산 순서는 허수부 0을 먼저 맞추고 그다음 실수부를 -1에 맞추는 것이다.

NoteBase

문 25. 루프전달함수가 $KG(s)=K\frac{s+\alpha}{s^2(s+1)}$인 폐루프 제어시스템의 근궤적이 음의 실수축에서 이탈점과 복귀점을 모두 가질 때, α로 옳은 것은? (단, $K>0$이다)

① 0.1

② 0.3

③ 0.5

④ 0.7

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 근궤적의 실축 이탈점·복귀점 조건을 $K=-\frac{s^2(s+1)}{s+\alpha}$의 정지점 조건으로 바꾸어 α의 범위를 판별하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 루프전달함수는 $KG(s)=K\frac{s+\alpha}{s^2(s+1)}$이다.
구해야 할 값: 음의 실수축에서 이탈점과 복귀점을 모두 가지게 하는 α이다.
주의할 조건: 보기들은 모두 $0<\alpha<1$ 범위이므로 실축 근궤적 구간은 $-1<s<-\alpha$이다. 이 구간 안에 정지점이 2개 있어야 이탈점과 복귀점을 모두 가진다.

사용할 공식

$K=-\frac{s^2(s+1)}{s+\alpha}$
$\frac{dK}{ds}=0\Rightarrow s\{2s^2+(1+3\alpha)s+2\alpha\}=0$
이 공식을 쓰는 이유: 근궤적의 이탈점과 복귀점은 실축 위에서 이득 K가 극값을 갖는 점이므로 $dK/ds=0$ 조건으로 찾는다.

계산 과정

1. 특성방정식 $1+K\frac{s+\alpha}{s^2(s+1)}=0$에서 $K=-\frac{s^2(s+1)}{s+\alpha}$를 얻는다.
2. 미분하면 $\frac{dK}{ds}=0\Rightarrow s\{2s^2+(1+3\alpha)s+2\alpha\}=0$이다. $s=0$은 개루프 중복극점이므로 이탈점·복귀점 판단은 $2s^2+(1+3\alpha)s+2\alpha=0$으로 본다.
3. 두 정지점이 모두 존재하려면 이 이차방정식이 서로 다른 실근 2개를 가져야 하므로 판별식이 양수여야 한다.
$\Delta=(1+3\alpha)^2-16\alpha=9\alpha^2-10\alpha+1=(9\alpha-1)(\alpha-1)$
4. 보기 범위 $0<\alpha<1$에서는 $\alpha-1<0$이므로 $\Delta>0$가 되려면 $9\alpha-1<0$, 즉 $\alpha<\frac{1}{9}$이어야 한다.
5. ①의 $\alpha=0.1$은 $\frac{1}{9}\approx0.111\ldots$보다 작다. 실제로 $2s^2+1.3s+0.2=0$의 근은 $s=-0.4,\ -0.25$로 둘 다 -1과 -0.1 사이에 있어 음의 실수축에서 이탈점과 복귀점을 모두 가진다.

NoteBase

선지 판단

① O: $0.1 < \frac{1}{9}$이므로 정지점 2개가 생긴다. 실제 근이 $s = -0.4,\ -0.25$이어서 둘 다 실축 근궤적 구간 $-1 < s < -0.1$ 안에 놓인다.
② X: $0.3 > \frac{1}{9}$이므로 판별식이 음수가 되어 정지점 2개가 생기지 않는다. 올바르게는 α가 $\frac{1}{9}$보다 작은 값이어야 한다.
③ X: 0.5도 $\frac{1}{9}$보다 커서 음의 실수축 이탈점과 복귀점을 동시에 만들 수 없다. 올바르게는 $\alpha < \frac{1}{9}$이어야 한다.
④ X: 0.7 역시 $\frac{1}{9}$보다 커서 조건을 만족하지 않는다. 올바르게는 α가 $0.111\cdots$보다 작은 값이어야 한다.

오답 포인트

이탈점·복귀점 조건을 단순히 실근 존재 조건으로만 보지 않고, 그 점이 실제 실축 근궤적 구간 안에 있는지도 함께 봐야 한다는 점이 함정이다. 이 문항은 보기들이 모두 $0 < \alpha < 1$이므로 $-1 < s < -\alpha$ 구간과 판별식 $\Delta > 0$만 연결하면 빠르게 걸러진다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적의 실축 이탈점·복귀점 문제는 먼저 K를 s의 식으로 정리하고, 다음에 $dK/ds = 0$으로 정지점을 구한 뒤, 마지막으로 그 점들이 실제 실축 근궤적 구간에 들어가는지를 확인하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

실축 이탈점·복귀점은 $dK/ds = 0$, 보기 범위가 $0 < \alpha < 1$이면 핵심 경계는 $\alpha = \frac{1}{9}$이다.

NoteBase