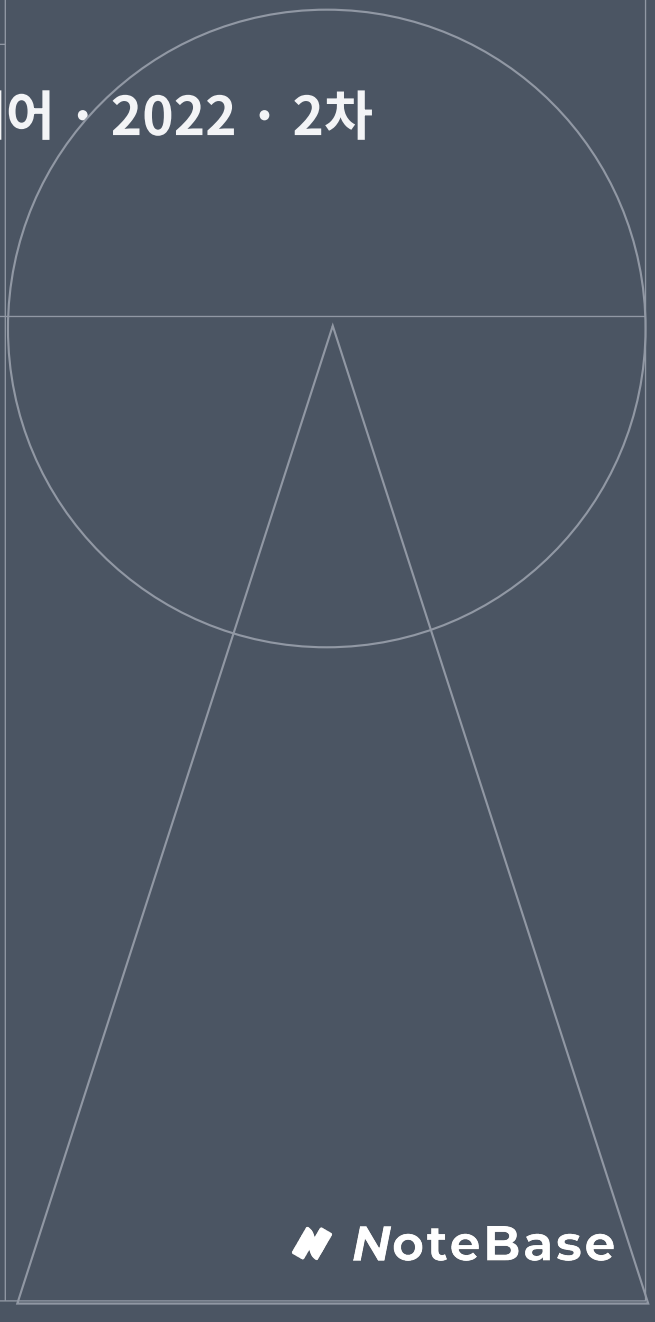
기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2022 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2022 · 2차

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2022 · 2차

문 1. 폐루프(closed-loop) 제어시스템에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 외란에 의한 영향을 제거하지 못한다.

② 일반적으로 시스템 파라미터의 변화에 둔감하다.

③ 불안정한 시스템을 항상 안정하게 제어할 수 있다.

④ 개루프 제어시스템보다 구조가 간단하고 비용이 적게 든다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 폐루프 제어시스템과 개루프 제어시스템의 차이, 특히 피드백 유무에 따른 외란 억제, 파라미터 민감도, 안정도, 구조 복잡성을 묻는 문제이다.

핵심 개념

폐루프 제어는 출력값을 피드백하여 목표값과 비교하면서 오차를 줄이는 제어이다. 키워드는 피드백, 오차 보정, 외란 억제, 저감도이다.
개루프 제어는 출력 피드백 없이 입력만으로 동작하는 제어이다. 키워드는 단순 구조, 저비용, 외란과 파라미터 변화에 취약이다.

선지별 해설

① X: 틀린 부분은 "제거하지 못한다"이다. 폐루프 제어는 피드백으로 외란의 영향을 보정하므로 외란 영향을 줄이거나 상당 부분 억제할 수 있다.
② O: 피드백은 시스템 파라미터 변화에 대한 민감도를 낮추므로 폐루프 제어는 일반적으로 파라미터 변화에 둔감하다.
③ X: 틀린 부분은 "항상 안정하게"이다. 폐루프 제어가 안정도를 개선할 수는 있지만, 모든 불안정한 시스템을 항상 안정하게 만들 수 있는 것은 아니다.
④ X: 틀린 부분은 "구조가 간단하고 비용이 적게 든다"이다. 올바르게는 폐루프 제어는 개루프보다 비교기, 센서, 피드백 경로가 추가되어 구조가 더 복잡하고 비용도 대체로 더 든다.

NoteBase

오답 포인트

폐루프 제어를 자동 보정이 가능한 만능 제어처럼 받아들이면 ③에 끌리기 쉽다. 그러나 피드백의 장점은 외란 억제와 저감도이지, 모든 시스템을 무조건 안정화한다는 뜻은 아니다. ④는 폐루프의 장점과 개루프의 장점을 서로 바꿔 놓은 전형적인 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

제어 방식 비교 문제는 먼저 피드백 유무를 본다. 피드백이 있으면 외란 보정과 파라미터 변화 둔감성은 커지고, 구조와 비용은 불리해진다. "항상" 같은 절대 표현은 먼저 의심하는 것이 맞다.

암기 포인트

폐루프는 보정에 강하고 복잡하며, 개루프는 단순하고 외란에 약하다.

NoteBase

문 2. 전달함수 $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{5}{2s^3+6s^2+8s+10}$에 대한 상태공간방정식으로 옳은 것은?

① x=bmatrix0&1&0\\0&0&1\\-3&-4&-5bmatrixx+bmatrix0\\0\\1bmatrixu, y=bmatrix(5)/(2)&0&0bmatrixx

② x=bmatrix0&1&0\\0&0&1\\-5&-4&-3bmatrixx+bmatrix0\\0\\(5)/(2)bmatrixu, y=bmatrix1&0&0bmatrixx

③ x=bmatrix0&1&0\\0&0&1\\-6&-8&-10bmatrixx+bmatrix0\\0\\2bmatrixu, y=bmatrix5&0&0bmatrixx

④ x=bmatrix0&1&0\\0&0&1\\-10&-8&-6bmatrixx+bmatrix0\\0\\5bmatrixu, y=bmatrix2&0&0bmatrixx

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 전달함수를 분모가 1인 형태로 정규화한 뒤 가제어 표준형 상태공간방정식으로 옮길 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s)=\frac{5}{2s^3+6s^2+8s+10}$이다.
상태공간 표준형을 쓰려면 먼저 분모 최고차항 계수를 1로 맞춘다.
따라서 $G(s)=\frac{5/2}{s^3+3s^2+4s+5}$로 정리된다.

사용할 공식

가제어 표준형에서 분모가 $s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$, 분자가 상수 b_0이면
A=bmatrix0&1&0; 0&0&1; -a_0&-a_1&-a_2bmatrix, B=bmatrix0; 0; 1bmatrix,
C=bmatrixb_0&0&0bmatrix로 둘 수 있다.
같은 전달함수이면 입력 이득 b_0를 B에 넣고 $C=[1\ 0\ 0]$으로 두어도 된다.

계산 과정

정규화한 분모에서 $a_2=3, a_1=4, a_0=5$이다.
따라서 동반형의 마지막 행은 $[-5\ \ -4\ \ -3]$이 된다.
분자 상수는 5/2이므로 B=bmatrix0; 0; 5/2bmatrix, C=bmatrix1&0&0bmatrix로 두면
$G(s)=\frac{5/2}{s^3+3s^2+4s+5}=\frac{5}{2s^3+6s^2+8s+10}$가 그대로 복원된다.

NoteBase

선지별 해설

1번 X: 마지막 행이 $[-3\ \ -4\ \ -5]$로 되어 있어 계수 배치가 거꾸로 되었다. 가제어 표준형에서는 상수항, s항, s^2항 순서로 $[-5\ \ -4\ \ -3]$이 들어가야 한다. 틀린 표현은 $[-3\ \ -4\ \ -5]$이고, 올바르게는 $[-5\ \ -4\ \ -3]$이다.

2번 O: 분모를 정규화하면 마지막 행이 $[-5\ \ -4\ \ -3]$이 되고, 분자 이득 5/2를 B의 마지막 원소에 넣으면 원래 전달함수가 정확히 나온다. $C=[1\ 0\ 0]$으로 두는 것도 같은 전달함수를 만드는 동치 표현이다.

3번 X: $[-6\ \ -8\ \ -10]$은 원래 분모 계수를 그대로 넣은 값인데, 상태공간 표준형에서는 먼저 최고차항 계수 2로 나누어 정규화해야 한다. 틀린 표현은 마지막 행 $[-6\ \ -8\ \ -10]$과 이득 배치이고, 올바르게는 분모를 s^3+3s^2+4s+5로 만든 뒤 마지막 행을 $[-5\ \ -4\ \ -3]$으로 둔다.

4번 X: 마지막 행 $[-10\ \ -8\ \ -6]$은 계수의 순서도 틀리고 정규화도 되지 않았다. 또한 B와 C의 이득을 5와 2로 두면 분자 이득이 10이 되어 원래 전달함수와 달라진다. 틀린 표현은 $[-10\ \ -8\ \ -6]$, B=bmatrix0; 0; 5bmatrix, $C=[2\ 0\ 0]$이고, 올바르게는 $[-5\ \ -4\ \ -3]$과 총이득 5/2의 조합이다.

오답 포인트

전달함수 분모가 $2s^3+6s^2+8s+10$처럼 최고차항 계수가 1이 아닐 때 이를 바로 마지막 행에 넣으면 틀린다. 또 마지막 행은 a_0, a_1, a_2 순서인데 a_2, a_1, a_0로 뒤집어 넣는 실수가 자주 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

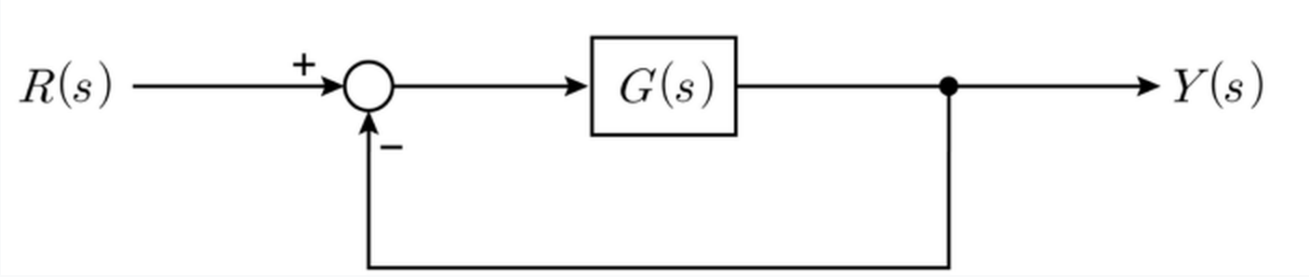
전달함수를 보면 먼저 최고차항 계수를 1로 정규화하고, 그다음 분모 계수를 상수항부터 읽어 마지막 행 $[-a_0\ \ -a_1\ \ -a_2]$에 넣는다. 마지막으로 분자 이득이 B와 C에 어떻게 배치되어도 총이득이 같은지만 확인하면 된다.

암기 포인트

가제어 표준형은 분모를 먼저 정규화하고 마지막 행은 상수항부터 역순이 아니라 $a_0 \to a_1 \to a_2$ 순서의 음수로 넣는다.

NoteBase

문 3. 다음 블록선도의 폐루프시스템에 대한 주파수 응답의 설명으로 옳은 것은? (단, $M(s)$는 폐루프 전달함수이다)



① 대역폭에서 $|M(j\omega)| = \frac{|M(j0)|}{\sqrt{2}}$이다.

② $|G(j\omega)| \ll 1$인 경우 $|M(j\omega)| \simeq 1$이다.

③ $|G(j\omega)| \gg 1$인 경우 $|M(j\omega)| \simeq |G(j\omega)|$이다.

④ $G(j\omega)$가 순허수이면 절점주파수에서 $|M(j\omega)| = \frac{1}{2}$이다.

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위 음의 되먹임계의 폐루프 전달함수 $M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$와 대역폭의 $-3dB$ 정의를 이용해 주파수대별 크기 근사를 판정하는 문제이다.

조건 정리

블록선도는 단위 음의 되먹임계이므로 $M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$이다.
주파수응답의 크기는 $|M(j\omega)| = \left|\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}\right|$이다.
대역폭은 $|M(j\omega)|$가 $|M(j0)|/\sqrt{2}$로 떨어지는 주파수로 정의된다.

사용할 공식

$M(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}, \quad |M(j\omega)| = \left|\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}\right|$
이 식을 쓰는 이유는 각 선지가 모두 폐루프 주파수응답 $M(j\omega)$의 크기와, $|G(j\omega)|$가 매우 작거나 매우 큰 경우의 근사를 묻기 때문이다.

NoteBase

선지 판단

1번 O: 대역폭은 폐루프 크기응답이 직류값에서 $1/\sqrt{2}$배로 감소하는 $-3dB$ 지점이므로 $|M(j\omega)| = |M(j0)|/\sqrt{2}$라는 설명이 옳다.
2번 X: 틀린 표현은 "≤ft|M(jω)|1"이다. $|G(j\omega)| \ll 1$이면 분모 $1 + G(j\omega) \approx 1$이어서 $M(j\omega) \approx G(j\omega)$이므로, 올바르게는 $|M(j\omega)| \approx |G(j\omega)|$이다.
3번 X: 틀린 표현은 "≤ft|M(jω)|≤ft|G(jω)|"이다. $|G(j\omega)| \gg 1$이면 $1 + G(j\omega) \approx G(j\omega)$이어서 $M(j\omega) \approx 1$이므로, 올바르게는 $|M(j\omega)| \approx 1$이다.
4번 X: 틀린 표현은 "≤ft|M(jω)|=1/2"이다. $G(j\omega)$가 순허수이고 해당 주파수에서 $|G(j\omega)| = 1$이면 $G(j\omega) = j$로 둘 수 있어 $M(j\omega) = \frac{j}{1+j}$, 따라서 $|M(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$이다. 올바르게는 $|M(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$이다.

오답 포인트

저주파와 고주파에서의 근사를 거꾸로 외우면 2번과 3번이 뒤집힌다. 폐루프 응답은 $|G| \ll 1$일 때는 G를 따라가고, $|G| \gg 1$일 때는 1에 가까워진다는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위 피드백 블록선도가 나오면 먼저 $M = \frac{G}{1+G}$를 쓴다. 그다음 $|G| \ll 1$이면 $M \approx G$, $|G| \gg 1$이면 $M \approx 1$, 대역폭이면 $|M| = |M(0)|/\sqrt{2}$를 순서대로 대입해 판단한다.

암기 포인트

단위 음의 되먹임계는 $M = \frac{G}{1+G}$, 저주파 약루프는 $M \approx G$, 강루프는 $M \approx 1$, 대역폭은 $-3dB = 1/\sqrt{2}$이다.

NoteBase

문 4. 진상보상기(lead compensator)에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 과도응답을 개선한다.

② 폐루프시스템의 대역폭이 증가한다.

③ 폐루프시스템의 위상여유를 개선한다.

④ 진상보상기 극점은 복소평면에서 항상 진상보상기 영점의 오른쪽에 있다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 진상보상기의 대표 효과와 극점·영점의 상대적 위치를 구별할 수 있는지를 묻는다.

핵심 개념

진상보상기는 위상을 앞서게 만들어 위상여유를 키우고 응답 속도를 높이는 보상기이다.
진상보상기에서는 영점이 극점보다 원점에 더 가깝고, 극점은 영점보다 더 왼쪽에 놓인다.
따라서 과도응답 개선, 대역폭 증가, 위상여유 개선이 대표적 효과이다.

선지별 해설

1번: O. 진상보상기는 응답 속도를 높이고 감쇠 특성을 개선하는 방향으로 작용하므로 과도응답을 개선한다.
2번: O. 진상보상기는 고주파 응답을 상대적으로 키워 폐루프시스템의 대역폭을 증가시키는 효과가 있다.
3번: O. 진상보상기의 핵심 목적 중 하나가 위상여유 개선이므로 이 설명은 옳다.
4번: X. 틀린 표현은 "극점은 복소평면에서 항상 진상보상기 영점의 오른쪽"이다. 진상보상기에서는 오히려 영점이 극점의 오른쪽에 있고, 극점은 영점보다 더 왼쪽에 있다.

오답 포인트

진상보상기와 지상보상기의 극점·영점 위치를 서로 바꾸어 기억하면 틀리기 쉽다. 효과만 외우고 위치 관계를 놓치면 4번 선지에 걸린다.

다시 나오면 이렇게 판단

진상보상기가 나오면 먼저 위상여유와 대역폭을 키우는 보상기인지 확인한다. 그다음 영점이 오른쪽, 극점이 왼쪽이라는 위치 관계를 대입해 선지를 판단한다.

암기 포인트

진상은 영점이 오른쪽, 극점이 왼쪽이다. 효과는 속도, 대역폭, 위상여유 개선이다.

NoteBase

문 5. 다음 상태방정식으로 표현된 시스템이 가제어성(controllability)을 만족하기 위한 조건으로 옳은 것은?

$\dot{x}_1 = -2x_1 + u$
$\dot{x}_2 = -3x_2 + kx_1$

① $k \neq 3$

② $k \neq 2$

③ $k \neq 1$

④ $k \neq 0$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식에서 제어가능 행렬을 만들어 가제어성 조건을 판별하는 문제이다.

조건 정리

주어진 시스템은 $\dot{x} = Ax + Bu$ 꼴로 쓰면 A=bmatrix-2&0&-3bmatrix, B=bmatrix1; 0bmatrix 이다.
가제어성을 만족하려면 2차 시스템의 제어가능 행렬 $\mathcal{C} = [B\ AB]$ 의 rank가 2가 되어야 한다.
입력 u 는 x_1 에 직접 작용하고, x_2 는 kx_1 항을 통해서만 간접적으로 제어된다.

사용할 공식

제어가능 행렬은 $\mathcal{C} = [B\ AB]$ 이다.
AB=bmatrix-2&0&-3bmatrixbmatrix1; 0bmatrix=bmatrix-2bmatrix 이므로
C=bmatrix1&-2; 0&kbmatrix
2차 시스템에서는 $\det(\mathcal{C}) \neq 0$ 이면 가제어이다.
이 공식을 쓰는 이유는 발문이 가제어성의 성립 조건을 직접 묻고 있고, 주어진 식이 상태방정식 형태이기 때문이다.

계산 과정

1. A 와 B 를 읽어 제어가능 행렬 $\mathcal{C} = [B\ AB]$ 를 만든다.
2. AB=bmatrix-2bmatrix 를 계산한다.
3. C=bmatrix1&-2; 0&kbmatrix 이고, $\det(\mathcal{C}) = 1 \cdot k - 0 \cdot (-2) = k$ 이다.
4. 따라서 $k \neq 0$ 일 때만 rank가 2가 되어 가제어성을 만족한다.

NoteBase

선지별 해설

① X
- "k≠ 3" 가 조건이라는 표현이 틀렸다. 올바른 조건은 "k≠ 0" 이다.
- $k = 3$ 이면 $\det(\mathcal{C}) = 3 \neq 0$ 이므로 오히려 가제어이다.

② X
- "k≠ 2" 가 조건이라는 표현이 틀렸다. 올바른 조건은 "k≠ 0" 이다.
- $k = 2$ 이면 $\det(\mathcal{C}) = 2 \neq 0$ 이므로 가제어이다.

③ X
- "k≠ 1" 이 핵심 조건이라는 표현이 틀렸다. 올바른 조건은 "k≠ 0" 이다.
- $k = 1$ 이면 $\det(\mathcal{C}) = 1 \neq 0$ 이므로 가제어이다.

④ O
- "k≠ 0" 가 맞다. $k = 0$ 이면 x_2 방정식의 kx_1 항이 사라져 입력이 x_2 로 전달되지 못한다.
- 따라서 $\det(\mathcal{C}) = 0$ 이 되어 가제어성을 잃고, $k \neq 0$ 일 때만 두 상태를 모두 제어할 수 있다.

오답 포인트

가제어성은 고유값 $-2, -3$ 자체로 판단하는 것이 아니라 입력이 각 상태로 전달되는 경로가 살아 있는지로 판단한다. 이 문항은 숫자 1, 2, 3에 시선을 빼앗겨 k 의 특정 값만 제외한다고 착각하기 쉽지만, 실제 함정은 x_2 로 가는 연결항 kx_1 이 0이 되는 순간만 문제라는 점이다.

다시 나오면 이렇게 판단

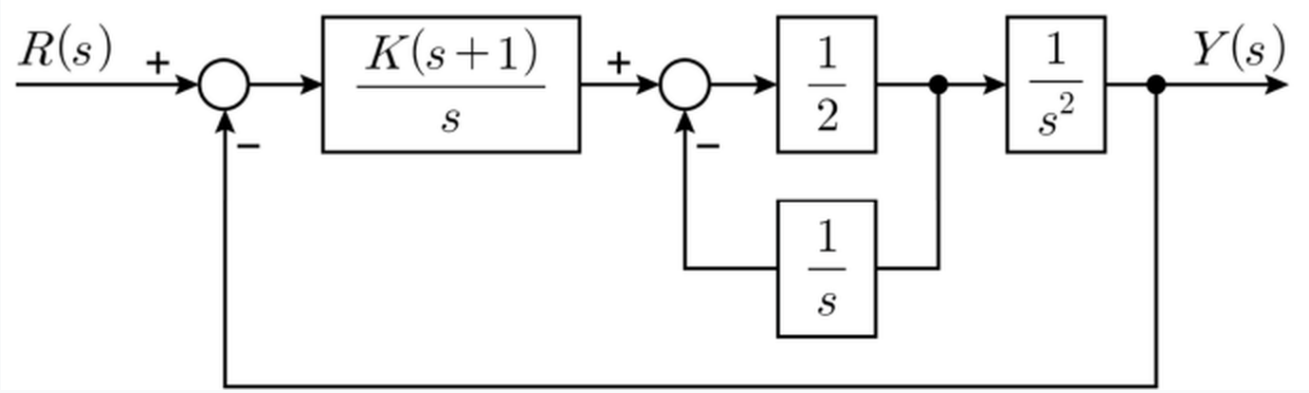
상태방정식에서 가제어성을 묻는 문제는 먼저 A, B 를 읽고 $\mathcal{C} = [B\ AB]$ 를 만든다. 그다음 2차 시스템이면 determinant가 0인지 아닌지만 확인하면 빠르게 판단할 수 있다.

암기 포인트

이 문항은 입력에서 상태로 이어지는 연결이 끊기면 비가제어, 연결이 살아 있으면 가제어라는 구조로 정리된다. 여기서는 $k = 0$ 이 연결 단절점이다.

NoteBase

문 6. 다음 블록선도의 폐루프시스템에 대한 근궤적을 대략적으로 그리고자 할 때, 필요한 점근선의 개수는? (단, $K \geq 0$이다)



① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 블록선도를 등가 전달함수로 줄인 뒤 근궤적 접근선의 개수를 $n - m$로 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

외부는 단위 음의 피드백 구조이다.
내부에는 전진 요소 1/2와 피드백 요소 1/s의 음의 피드백 루프가 있다.
구해야 할 값은 개루프 전달함수의 극점 수와 영점 수를 이용한 접근선의 개수이다.

사용할 공식

접근선의 개수는 개루프 극점 수에서 개루프 영점 수를 뺀 값이므로 $n - m$이다.
이 문제는 블록선도를 먼저 등가화해 개루프 전달함수를 만든 뒤 그 극점과 영점을 세어야 하므로 이 공식을 사용한다.

NoteBase

계산 과정

1. 내부 피드백 루프를 줄이면 $G_{in}(s) = \frac{1/2}{1 + (1/2)(1/s)} = \frac{s}{2s+1}$이다.
2. 이를 전체 전진 경로에 대입하면 $G(s) = \frac{K(s+1)}{s} \cdot \frac{s}{2s+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{K(s+1)}{s^2(2s+1)}$이다.
3. 따라서 근궤적의 개루프 극점은 $s = 0$에서 2개, $s = -1/2$에서 1개로 모두 3개이고, 개루프 영점은 $s = -1$에서 1개이다.
4. 접근선의 개수는 $3 - 1 = 2$이므로 2개이다.

선지 판단

1번 X: 접근선을 1개로 본 판단이다. 이는 극점 수와 영점 수의 차를 잘못 세었기 때문이다. 올바르게는 개루프 극점 3개, 영점 1개이므로 접근선은 2개이다.
2번 O: 내부 피드백을 등가화하면 전체 개루프 전달함수는 $\frac{K(s+1)}{s^2(2s+1)}$가 된다. 따라서 극점 3개와 영점 1개의 차로 접근선은 2개가 되어 정답이다.
3번 X: 접근선을 3개로 본 판단이다. 이는 영점을 빼지 않고 극점 수만 본 경우에 해당한다. 올바르게는 $n - m = 3 - 1 = 2$이므로 3개가 아니라 2개이다.
4번 X: 접근선을 4개로 본 판단이다. 이는 내부 루프를 정리하지 않고 차수를 과대평가한 경우에 해당한다. 올바르게는 블록선도를 등가화한 뒤 세어야 하며 접근선은 2개이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 블록선도를 바로 읽지 않고 극점 수를 감으로 세는 데 있다. 특히 내부 피드백 루프를 먼저 $\frac{s}{2s+1}$로 줄이지 않으면 차수를 잘못 세어 3개나 4개로 오판하기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적 블록선도 문제는 내부 피드백부터 등가화하고, 그다음 전체 개루프 전달함수를 만든 뒤, 마지막에 극점 수와 영점 수의 차 $n - m$를 계산하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

근궤적 접근선 수는 개루프 극점 수에서 영점 수를 뺀 값이다.

NoteBase

문 7. 선형 시불변시스템의 주파수 응답의 크기 $M(\omega)$와 위상 $\phi(\omega)$가 다음과 같을 때, 시스템의 극점을 모두 구하면?

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + (3\omega)^2}}$$
$$\phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{3\omega}{2-\omega^2}\right)$$

① -2, -3

② -1, -3

③ -1, -2

④ $-\sqrt{2}$, -2

정답 3번

출제 포인트

주파수응답의 크기식과 위상식에서 $G(j\omega)$의 분모를 복원한 뒤, $s = j\omega$ 대응으로 전달함수의 극점을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + (3\omega)^2}}, \quad \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{3\omega}{2-\omega^2}\right)$
구해야 할 값: 시스템의 모든 극점
주의할 조건: 크기식의 제곱합과 위상식의 분자·분모를 함께 보면 $G(j\omega)$의 분모 실수부와 허수부를 바로 읽을 수 있다.

사용할 공식

$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{1}{(2-\omega^2) + j3\omega}$
$s = j\omega \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$
이 공식을 쓰는 이유는 $s = j\omega$를 대입한 전달함수의 분모가 $2 - \omega^2 + j3\omega$ 꼴로 나타나므로, 주파수응답 식에서 전달함수의 원래 특성방정식을 되살릴 수 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 크기식과 위상식을 함께 보면 분모가 $2-\omega^2+j3\omega$인 것을 읽을 수 있으므로
$G(j\omega)=\frac{1}{2-\omega^2+j3\omega}$
이다.
2. $s=j\omega$이면
$s^2+3s+2=(j\omega)^2+3j\omega+2=2-\omega^2+j3\omega$
이므로
$G(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$
이다.
3. 특성방정식 $s^2+3s+2=0$을 인수분해하면
$(s+1)(s+2)=0$
이므로 극점은 $s=-1,\ -2$이다.

선지별 해설

① X: 제시값은 $-2,\ -3$인데, 실제 특성방정식은 $s^2+3s+2=0$이다. $-2,\ -3$이면
$(s+2)(s+3)=s^2+5s+6$이 되어 주어진 주파수응답과 맞지 않는다. 틀린 표현은 "-3"이고, 올바르게는 "-1"이다.
② X: -1 하나는 맞지만 다른 하나가 틀리다. $-1,\ -3$이면 $(s+1)(s+3)=s^2+4s+3$이므로 3ω 항의 계수를 pole 값 -3으로 잘못 읽은 경우에 해당한다. 틀린 표현은 "-3"이고, 올바르게는 "-2"이다.
③ O: $-1,\ -2$이면 $(s+1)(s+2)=s^2+3s+2$가 되어 주어진 $2-\omega^2+j3\omega$와 정확히 대응한다.
④ X: $-\sqrt{2},\ -2$이면 곱이 $2\sqrt{2}$가 되어 상수항 2를 만족하지 못한다. 이는 상수항 2를 pole 하나의 값으로 오독한 경우이다. 틀린 표현은 "-\sqrt{2}"이고, 올바르게는 "-1"이다.

오답 포인트

분모의 3ω를 보고 pole 하나가 -3이라고 바로 대응시키거나, 상수항 2를 보고 pole 하나가 -2 또는 $-\sqrt{2}$라고 단정하면 오답이 된다. 계수는 극점의 합과 곱으로 연결된다는 점을 함께 봐야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

주파수응답에서 $2-\omega^2+j3\omega$처럼 분모를 먼저 복원하고, 그다음 $s=j\omega$를 거꾸로 적용해 특성방정식을 만든 뒤 인수분해로 극점을 판단한다.

암기 포인트

$2-\omega^2+j3\omega$가 보이면 원래 분모는 s^2+3s+2이고, 극점은 합과 곱으로 $-1,\ -2$이다.

NoteBase

문 8. 다음 상태공간방정식에 대한 전달함수 $G(s)=\frac{s+2}{s^2+as+b}$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

x=bmatrix-2 & 4 \ 1 & 6bmatrixx+bmatrix1 \ 2bmatrixu
y=bmatrix1 & 0bmatrixx

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{2}$
③ 2
④ 4

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 상태공간방정식에서 전달함수 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$를 구해 분모의 계수 a, b를 읽어내는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 A=bmatrix-2&4; 1&6bmatrix, B=bmatrix1; 2bmatrix, C=bmatrix1&0bmatrix이다.
구해야 할 값은 전달함수 $G(s)=\frac{s+2}{s^2+as+b}$의 $\frac{b}{a}$이다.
분모는 $\det(sI-A)$에서 바로 나온다는 점이 핵심이다.

사용할 공식

전달함수는 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$이다.
여기서 분모는 $\det(sI-A)$, 분자는 $C\text{adj}(sI-A)B$로 구한다.
이 공식을 쓰는 이유는 상태공간모형이 직접 주어졌고, 문제에서 전달함수의 분모 계수 a, b를 묻고 있기 때문이다.

계산 과정

1. sI-A=bmatrixs+2&-4; -1&s-6bmatrix이다.
2. 분모는 $\det(sI-A)=(s+2)(s-6)-(-4)(-1)=s^2-4s-16$이다.
3. 따라서 $a=-4$, $b=-16$이다.
4. 분자는 adj(sI-A)B=bmatrixs-6&4; 1&s+2bmatrixbmatrix1; 2bmatrix=bmatrixs+2; 2s+5bmatrix이고, 여기에 C=bmatrix1&0bmatrix를 곱하면 $s+2$가 되어 문제의 전달함수 형태와 일치한다.
5. 따라서 $\frac{b}{a}=\frac{-16}{-4}=4$이다.

NoteBase

선지 판단

1번: X. $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$가 되려면 a와 b를 거꾸로 나누어 $\frac{a}{b}$를 계산한 셈이다. 올바르게는 $\frac{b}{a} = 4$이다.
2번: X. $\frac{1}{2}$는 분모 전개나 나눗셈 과정과 맞지 않는 값이다. $a = -4$, $b = -16$이므로 올바르게는 $\frac{b}{a} = 4$이다.
3번: X. 2는 $b = -8$ 또는 $a = -8$처럼 계수를 잘못 읽었을 때 나올 수 있는 값이다. 실제 분모는 $s^2 - 4s - 16$이므로 올바르게는 $\frac{b}{a} = 4$이다.
4번: O. $\det(sI - A) = s^2 - 4s - 16$이므로 $a = -4$, $b = -16$이고, 따라서 $\frac{b}{a} = 4$가 된다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 $\frac{b}{a}$를 $\frac{a}{b}$로 뒤집어 계산하는 경우와, $\det(sI - A)$에서 비대각 원소 곱의 부호를 잘못 처리하는 경우이다. 이 문제에서는 $(-4)(-1) = 4$를 빼야 하므로 분모가 $s^2 - 4s - 16$이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태공간에서 전달함수를 묻는 문제는 먼저 $sI - A$를 만든 뒤 분모 $\det(sI - A)$를 계산하고, 그다음 분자의 형태가 제시식과 맞는지 확인하는 순서로 판단하면 된다. 마지막에는 a, b의 위치를 다시 확인해 $\frac{b}{a}$와 $\frac{a}{b}$를 혼동하지 않게 된다.

암기 포인트

상태공간 전달함수의 분모는 $\det(sI - A)$이고, 계수비를 물으면 a, b의 위치부터 확인하는 것이 핵심이다.

NoteBase

문 9. 영점이 -2, -3이고, 극점이 -1, -5인 선형 시불변시스템의 직류 이득(DC gain)이 6일 때, 시스템의 전달함수로 옳은 것은?

① $\frac{5(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+5)}$
② $\frac{5(s-2)(s-3)}{(s-1)(s-5)}$
③ $\frac{6(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+5)}$
④ $\frac{6(s-2)(s-3)}{(s-1)(s-5)}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 영점과 극점의 위치로 전달함수의 인수를 정하고, 직류 이득 $G(0)$ 조건으로 이득 상수 K를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 영점은 $-2,\ -3$, 극점은 $-1,\ -5$, 직류 이득은 6이다.
구해야 할 값: 전달함수 $G(s)$의 식이다.
주의할 조건: 영점이 $-2,\ -3$이면 분자는 $(s+2)(s+3)$ 꼴이고, 극점이 $-1,\ -5$이면 분모는 $(s+1)(s+5)$ 꼴이 된다.

사용할 공식

전달함수는 $G(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$ 이고, 직류 이득은 $G(0)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 영점과 극점이 직접 주어졌으므로 인수분해 형태로 전달함수를 바로 세울 수 있고, 직류 이득은 $s=0$에서의 값으로 정의되기 때문이다.

계산 과정

영점이 $-2,\ -3$이므로 분자는 $(s+2)(s+3)$이다.
극점이 $-1,\ -5$이므로 분모는 $(s+1)(s+5)$이다.
따라서 $G(s)=K\frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+5)}$ 이다.
직류 이득이 6이므로
$G(0)=K\frac{(0+2)(0+3)}{(0+1)(0+5)}=K\frac{6}{5}=6$
따라서 $K=5$이다.
결국 전달함수는 $G(s)=5\frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+5)}$ 이다.

NoteBase

선지별 해설

① O
영점과 극점의 부호가 모두 조건과 일치하고, $G(0) = 5 \times \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 5} = 6$이므로 맞다.

② X
틀린 표현은 $(s-2)(s-3)$와 $(s-1)(s-5)$이다. 이 식은 영점이 $+2,\ +3$, 극점이 $+1,\ +5$인 경우에 해당하므로 문제 조건의 음의 영점, 음의 극점과 맞지 않는다. 올바르게는 $(s+2)(s+3)$와 $(s+1)(s+5)$이어야 한다.

③ X
영점과 극점의 위치는 맞지만 이득 상수가 틀리다. $G(0) = 6 \times \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{36}{5}$이므로 직류 이득이 6이 아니다. 틀린 표현은 앞의 계수 6이고, 올바르게는 계수 5이어야 한다.

④ X
틀린 표현은 부호와 계수 모두이다. $(s-2)(s-3)$, $(s-1)(s-5)$는 영점과 극점 위치가 문제 조건과 반대이고, 계수 6을 대입하면 $G(0) = \frac{36}{5}$가 되어 직류 이득도 맞지 않는다. 올바르게는 $5\frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+5)}$이다.

오답 포인트

영점이 $-a$이면 인수는 $(s+a)$가 된다는 점에서 부호를 자주 거꾸로 읽는다. 또 영점과 극점 위치만 맞추고 직류 이득 $G(0)$으로 상수 K를 검산하지 않으면 ③처럼 계수만 다른 오답에 걸리기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

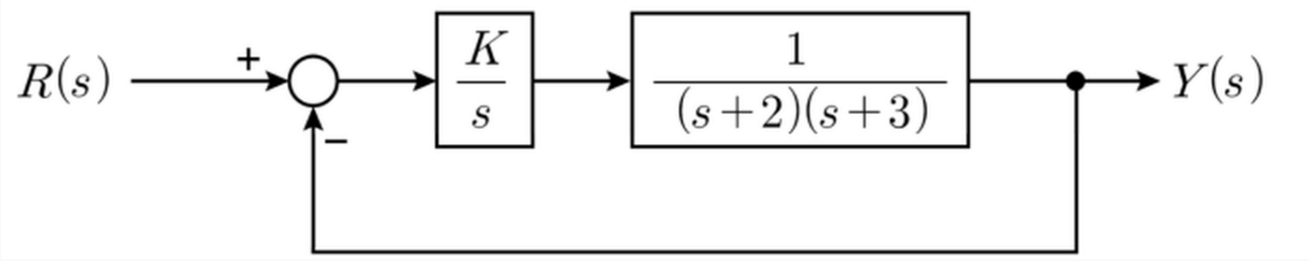
전달함수형 문제는 먼저 영점과 극점의 좌표를 인수 형태로 옮겨 적고, 그다음 $s = 0$을 대입해 직류 이득 $G(0)$으로 상수 K를 결정하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

영점 $-a$는 $(s+a)$, 극점 $-b$는 분모의 $(s+b)$, 직류 이득은 $G(0)$이다.

NoteBase

문 10. 다음 블록선도에 표현된 시스템이 임계 안정(marginally stable)일 때, 특성방정식의 근을 모두 구하면?



① $-5,\ \pm j\sqrt{6}$

② $-5,\ \pm j\sqrt{3}$

③ $-10,\ \pm j\sqrt{6}$

④ $-30,\ \pm j\sqrt{3}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 시스템의 폐루프 특성방정식을 세우고 Routh 판별법으로 임계안정 조건의 근을 구하는 문제이다.

조건 정리

개루프 전달함수는 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+3)}$이다.
임계안정은 폐루프 특성방정식의 근 중 한 쌍이 허수축 위에 있고 나머지 근은 좌반평면에 있는 상태이다.
구해야 할 값은 임계안정일 때의 특성방정식 근 전체이다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식은 $1 + G(s)H(s) = 0$이다.
3차식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$는 Routh 배열의 s^1행 첫 항이 0이 되는 순간 임계안정 조건을 만든다.
이 문제는 블록선도에서 바로 특성방정식을 만들 수 있고, 임계안정 조건은 Routh 판별법이 가장 빠르게 찾을 수 있다.

NoteBase

계산 과정

폐루프 특성방정식은 $1+\frac{K}{s(s+2)(s+3)}=0$이므로 $s(s+2)(s+3)+K=0$이다.
전개하면 $s^3+5s^2+6s+K=0$이다.
Routh 배열 첫 열은 $1,\ 5,\ \frac{30-K}{5},\ K$이다.
임계안정이 되려면 $\frac{30-K}{5}=0$이므로 $K=30$이다.
이때 보조방정식은 $5s^2+30=0$이므로 $s^2+6=0$, 따라서 $s=\pm j\sqrt{6}$이다.
또한 $s^3+5s^2+6s+30=(s+5)(s^2+6)$이므로 나머지 한 근은 -5이다.

선지 판단

1번: O. 임계안정 조건에서 특성방정식은 $(s+5)(s^2+6)=0$이므로 근은 $-5,\ \pm j\sqrt{6}$이다.
2번: X. 허근 값이 틀렸다. 보조방정식 $5s^2+30=0$에서 $s^2=-6$이므로 $\pm j\sqrt{6}$가 되어야 한다. $\pm j\sqrt{3}$가 아니라 $\pm j\sqrt{6}$이다.
3번: X. 실근 값이 틀렸다. 인수분해 결과가 $(s+5)(s^2+6)$이므로 실근은 -5이다. -10이 아니라 -5이다.
4번: X. 실근과 허근이 모두 틀렸다. $K=30$일 때의 근은 $-5,\ \pm j\sqrt{6}$뿐이므로 $-30,\ \pm j\sqrt{3}$가 아니다.

오답 포인트

Routh 배열로 $K=30$만 찾고 보조방정식 $5s^2+30=0$을 다시 풀지 않으면 2번처럼 허근의 제곱근 값을 틀리기 쉽다.
허근쌍을 구한 뒤 남은 1차 인수를 끝까지 확인하지 않으면 3번처럼 실근을 잘못 적기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위 피드백 3차계의 임계안정 문제는 폐루프 특성방정식을 만든 뒤 Routh 배열 첫 열 조건으로 이득을 정하고, 0이 된 행의 바로 윗행으로 보조방정식을 세워 $\pm j\omega$를 구한 다음 남은 실근까지 확인하면 된다.

암기 포인트

임계안정 3차계는 Routh에서 0행이 나오면 보조방정식으로 허근쌍을 구하고, 남은 인수에서 실근 하나를 끝까지 확인하는 구조이다.

NoteBase

문 11. 다음 특성방정식을 갖는 제어시스템 중 안정한 것만을 모두 고르면?

ㄱ. $s^7 + 5s^6 + 2s^2 + 4s + 1 = 0$
ㄴ. $s^5 + 3s^4 - 2s^2 + 8s + 5 = 0$
ㄷ. $2s^4 - 3s^3 - 7s^2 + 3s + 4 = 0$
ㄹ. $s^3 + 4s^2 + 5s + 10 = 0$

① ㄷ
② ㄹ
③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 특성방정식의 계수 조건과 Routh-Hurwitz 판별법으로 안정 여부를 가리는 문제이다.

조건 정리

안정한 제어계는 특성방정식의 모든 근의 실수부가 음수인 Hurwitz 다항식이어야 한다.
ㄱ: $s^7 + 5s^6 + 2s^2 + 4s + 1 = 0$
ㄴ: $s^5 + 3s^4 - 2s^2 + 8s + 5 = 0$
ㄷ: $2s^4 - 3s^3 - 7s^2 + 3s + 4 = 0$
ㄹ: $s^3 + 4s^2 + 5s + 10 = 0$

사용할 공식

연속시간 제어계의 특성방정식이 안정하려면 계수가 모두 같은 양의 부호를 가져야 하고 중간 차수의 계수가 0이면 안 된다. 또한 3차식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$은 $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$이면 안정이다.
이 공식을 쓰는 이유는 보기마다 특성방정식만 주어졌고, 근을 직접 구하지 않아도 계수 조건과 Routh-Hurwitz 기준으로 안정성을 바로 판별할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. ㄱ은 s^5, s^4, s^3 항의 계수가 0이므로 Hurwitz 다항식의 필요조건을 만족하지 못해 불안정이다.
2. ㄴ은 s^2 항 계수가 -2이고, ㄷ은 s^3, s^2 항 계수가 음수이므로 계수가 모두 양수여야 하는 필요조건을 만족하지 못해 둘 다 불안정이다.
3. ㄹ은 3차식이므로 $a_1 = 4, a_2 = 5, a_3 = 10$을 대입하면 모두 양수이고 $a_1 a_2 = 4 \times 5 = 20 > 10 = a_3$ 이므로 안정이다.

NoteBase

선지별 해설

1번 X: ㄷ은 $2s^4 - 3s^3 - 7s^2 + 3s + 4 = 0$에서 중간 계수가 음수이므로 안정하지 않다. 틀린 표현은 'ㄷ이 안정하다'이고, 올바르게는 'ㄷ은 불안정하다'이다.
2번 O: ㄹ은 3차 안정조건 $a_1 a_2 > a_3$를 만족하므로 안정하다. 보기 중 안정한 것은 ㄹ만 있으므로 옳다.
3번 X: ㄹ은 안정하지만 ㄱ은 중간 항이 빠져 있어 안정하지 않다. 틀린 표현은 'ㄱ, ㄹ이 모두 안정하다'이고, 올바르게는 'ㄹ만 안정하다'이다.
4번 X: ㄴ은 s^2 항 계수가 음수이고 ㄷ도 음수 계수가 있어 둘 다 안정하지 않다. 틀린 표현은 'ㄴ, ㄷ이 안정하다'이고, 올바르게는 'ㄴ과 ㄷ은 모두 불안정하다'이다.

오답 포인트

계수가 모두 양수인지와 중간 차수 항이 비어 있는지를 먼저 보지 않고 바로 근을 구하려 들면 시간이 오래 걸린다. 이 문항은 ㄱ의 누락 항과 ㄴ, ㄷ의 음수 계수를 빠르게 걸러내면 ㄹ만 남는다.

다시 나오면 이렇게 판단

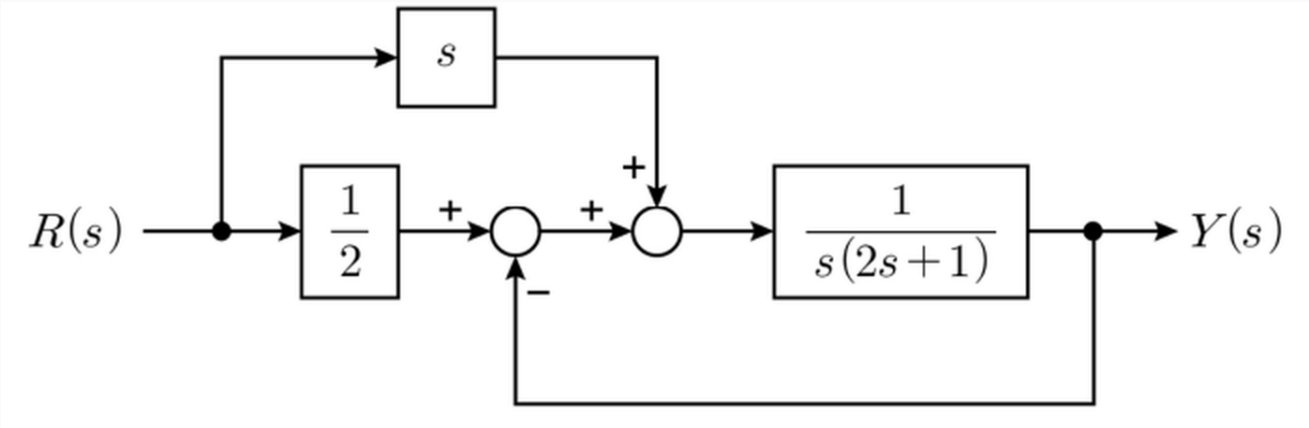
특성방정식 안정 판별 문제는 먼저 계수의 부호와 누락 항을 확인해 필요조건으로 탈락시키고, 끝까지 남는 식에만 Routh-Hurwitz 조건을 적용하면 된다.

암기 포인트

Hurwitz 다항식은 계수가 모두 같은 양의 부호를 가져야 한다. 3차식은 여기에 더해 $a_1 a_2 > a_3$까지 확인하면 된다.

NoteBase

문 12. 다음 블록선도에서 시스템의 입출력 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)}$는?



① $\frac{2s+1}{s(s+1)}$
② $\frac{2s+1}{2s(s+1)}$
③ $\frac{2s+1}{2s^2+s+1}$
④ $\frac{2s+1}{2(2s^2+s+1)}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 블록선도에서 첫 합산점과 둘째 합산점을 식으로 바꾼 뒤 폐루프 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)}$를 정확히 정리할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

플랜트는 $G(s)=\frac{1}{s(2s+1)}$이다.
첫 합산점 출력은 $e_1(s)=\frac{1}{2}R(s)-Y(s)$이다.
둘째 합산점 입력은 $e_2(s)=e_1(s)+sR(s)=\left(s+\frac{1}{2}\right)R(s)-Y(s)$이다.
구해야 할 값은 전체 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)}$이다.

사용할 공식

출력은 $Y(s)=G(s)e_2(s)$로 쓴다.
즉 $Y(s)=\frac{1}{s(2s+1)}\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)R(s)-Y(s)\right]$이다.
이 식을 쓰는 이유는 둘째 합산점에서 기준입력 쪽 신호가 $sR(s)$와 $\frac{1}{2}R(s)$로 합쳐지고, 출력 $Y(s)$가 단위 피드백으로 음의 부호로 다시 들어가기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 둘째 합산점 입력을 정리하면 $e_2(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)R(s) - Y(s)$이다.
2. 플랜트에 통과시키면 $Y(s) = \frac{1}{s(2s+1)}\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)R(s) - Y(s)\right]$이다.
3. 양변에 $s(2s+1)$를 곱하면 $s(2s+1)Y(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)R(s) - Y(s)$이다.
4. $Y(s)$항을 한쪽으로 모으면 $[s(2s+1)+1]Y(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)R(s)$이다.
5. 따라서 $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+\frac{1}{2}}{2s^2+s+1} = \frac{2s+1}{2(2s^2+s+1)}$이다.

선지 판단

1번: X. 제시식 $\frac{2s+1}{s(s+1)}$는 분모를 s^2+s로 본 식인데, 실제 폐루프 분모는 $s(2s+1)+1 = 2s^2+s+1$이다. 틀린 부분은 피드백으로 생기는 $+1$과 플랜트의 $2s+1$ 구조를 누락한 점이다. 올바르게는 $\frac{2s+1}{2(2s^2+s+1)}$이다.
2번: X. 제시식 $\frac{2s+1}{2s(s+1)}$도 분모를 $2s^2+2s$로 잘못 둔 식이다. 실제로는 폐루프 정리 후 분모가 $2(2s^2+s+1)$가 되어야 한다. 틀린 부분은 합산점 뒤의 음의 피드백 효과를 반영하지 않은 점이다. 올바르게는 $\frac{2s+1}{2(2s^2+s+1)}$이다.
3번: X. 제시식 $\frac{2s+1}{2s^2+s+1}$는 분자에 있어야 할 $\frac{1}{2}$를 빠뜨린 식이다. $s+\frac{1}{2}$를 $2s+1$로만 바꾸면 2배 크게 계산된다. 올바르게는 $s+\frac{1}{2} = \frac{2s+1}{2}$이므로 $\frac{2s+1}{2(2s^2+s+1)}$이다.
4번: O. 계산 결과 $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s+1}{2(2s^2+s+1)}$이므로 이 식이 맞다. 첫 합산점의 $\frac{1}{2}R(s)$와 위쪽 경로의 $sR(s)$를 먼저 합쳐 $\left(s+\frac{1}{2}\right)R(s)$로 두고, 여기에 단위 음의 피드백 $-Y(s)$를 반영하면 정확히 이 식이 나온다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 블록선도를 눈으로만 보고 직렬 블록처럼 곱해 버리거나, $s+\frac{1}{2}$를 $2s+1$로 바꾸는 과정에서 분자 2를 놓치는 데 있다. 특히 3번은 계산 막바지에서 $\frac{1}{2}$를 누락했을 때 바로 나오는 대표 오답이다.

다시 나오면 이렇게 판단

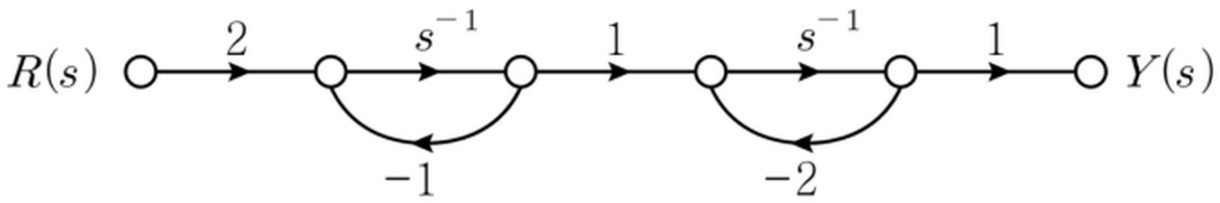
블록선도 전달함수 문제는 합산점마다 중간신호를 $e_1(s)$, $e_2(s)$처럼 문자로 둔 뒤 출력식을 세우고, 마지막에 $Y(s)$항을 한쪽으로 모아 폐루프 분모에 피드백 항이 살아 있는지 확인하면 된다.

암기 포인트

블록선도는 눈으로 외우지 않고 합산점 식으로 푼다. $s+\frac{1}{2} = \frac{2s+1}{2}$의 $\frac{1}{2}$를 끝까지 보존해야 정답이 된다.

NoteBase

문 13. 다음 신호흐름선도(signal flow graph)를 가지는 시스템을 종속형(cascade form) 상태방정식 $\dot{x} = Ax + Br$로 표현할 때, 행렬 A와 행렬 B를 바르게 연결한 것은? (단, $R(s)$는 입력, $Y(s)$는 출력이다)



① A: bmatrix1 & -2 \ 0 & -1bmatrix, B: bmatrix0 \ -2bmatrix

② A: bmatrix-2 & 1 \ 0 & -1bmatrix, B: bmatrix0 \ 2bmatrix

③ A: bmatrix0 & -1 \ -2 & 1bmatrix, B: bmatrix0 \ -2bmatrix

④ A: bmatrix2 & 1 \ 0 & 1bmatrix, B: bmatrix0 \ 2bmatrix

정답 2번

출제 포인트

신호흐름선도에서 적분기 출력들을 상태변수로 잡고, 선택지의 상태 순서에 맞게 종속형 상태방정식의 A, B를 구성하는 문제이다.

조건 정리

오른쪽 적분기 출력이 최종 출력 $Y(s)$이므로 이를 x_1, 왼쪽 적분기 출력을 x_2로 두면 선택지의 행렬 배열과 바로 비교할 수 있다.
첫 번째 적분기 입력은 왼쪽 합점 신호이고, 두 번째 적분기 입력은 오른쪽 합점 신호이다.
피드백 이득은 각각 -1, -2, 입력 이득은 2이다.

사용할 공식

적분기 입력이 상태미분이므로
$\dot{x} = Ax + Br$
형태에서 각 상태의 미분식을 신호흐름선도에서 직접 읽어 행렬 계수로 옮긴다.
이 공식을 쓰는 이유는 종속형 상태방정식이 각 적분기 출력과 그 입력의 관계를 그대로 행렬식으로 정리한 형태이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

상태를 x_1=오른쪽 적분기 출력, x_2=왼쪽 적분기 출력으로 둔다.
그러면 출력은 $y = x_1$이다.
오른쪽 적분기 입력은 왼쪽에서 오는 x_2와 피드백 $-2x_1$의 합이므로 $\dot{x}_1 = x_2 - 2x_1$이다.
왼쪽 적분기 입력은 입력 이득 $2r$와 피드백 $-x_2$의 합이므로 $\dot{x}_2 = 2r - x_2$이다.
따라서
bmatrixx_1x_2bmatrix=bmatrix-2&1; 0&-1bmatrixbmatrixx_1_2bmatrix+bmatrix0; 2bmatrixr
이므로 A=bmatrix-2&1; 0&-1bmatrix, B=bmatrix0; 2bmatrix이다.

선지별 해설

① X: A의 1행이 $[1,\ -2]$이면 $\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2$가 되어 실제 식 $\dot{x}_1 = x_2 - 2x_1$와 계수 위치가 뒤바뀐다. 또한 B=bmatrix0; -2bmatrix이면 입력이 x_2 방정식에 음의 부호로 들어가는데, 실제로는 $+2r$이 들어간다. 틀린 표현은 1행 계수와 B의 부호이며, 올바르게는 A=bmatrix-2&1; 0&-1bmatrix, B=bmatrix0; 2bmatrix이다.
② O: $\dot{x}_1 = x_2 - 2x_1$, $\dot{x}_2 = 2r - x_2$를 그대로 쓰면 A=bmatrix-2&1; 0&-1bmatrix, B=bmatrix0; 2bmatrix가 되어 선지와 일치한다.
③ X: A=bmatrix0&-1; -2&1bmatrix이면 $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2$가 되어 두 적분기 입력을 모두 잘못 읽은 꼴이 된다. 여기에 B=bmatrix0; -2bmatrix까지 써서 입력 부호도 반대로 잡았다. 틀린 표현은 A 전체 계수 배치와 B의 부호이며, 올바르게는 A=bmatrix-2&1; 0&-1bmatrix, B=bmatrix0; 2bmatrix이다.
④ X: A=bmatrix2&1; 0&1bmatrix이면 두 피드백이 모두 양의 되먹임처럼 반영되어 -1, -2 피드백 정보를 완전히 놓친다. B는 맞지만 A의 부호가 틀렸다. 틀린 표현은 대각 성분과 피드백 반영 부호이며, 올바르게는 A=bmatrix-2&1; 0&-1bmatrix이다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 적분기 출력 순서를 아무 생각 없이 왼쪽부터 x_1, x_2로 두고 계산하는 데 있다. 그렇게 하면 식 자체는 맞아도 선택지의 상태 순서와 달라 바로 대응되지 않는다. 또한 피드백 이득 -1, -2의 부호를 놓치면 ④처럼 양의 계수 행렬을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

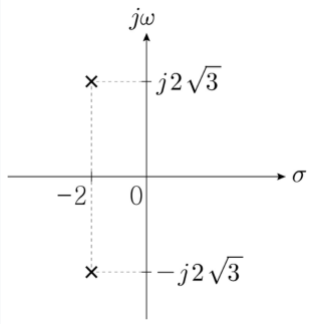
상태공간 선지는 먼저 상태변수의 순서가 무엇인지부터 맞춘 뒤, 각 적분기 입력을 그대로 $\dot{x}_i$로 적는다. 그 다음 피드백 계수는 A의 해당 항으로, 입력 이득은 B의 해당 행으로 옮기면 된다.

암기 포인트

적분기 입력이 곧 상태미분이고, 피드백 부호는 A, 외부입력 계수는 B에 그대로 들어간다.

NoteBase

문 14. 다음 그림과 같이 2차 표준형 시스템의 극점의 위치가 주어질 때, 시스템의 응답 특성에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① 감쇠비(damping ratio) ζ는 $\frac{1}{2}$이다.

② 고유주파수(natural frequency) ω_n는 16[rad/sec]이다.

③ 오차가 목표값(최종값)의 2%안에 들어가는 데 걸리는 정착시간(settling time) $T_s \cong 2[sec]$이다.

④ 최고시간(peak time) T_p는 시스템의 출력이 최대 오버슈트점에 도달하는 데 걸리는 시간으로 $T_p = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}[sec]$이다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 2차 표준형 시스템의 극점 $-2 \pm j2\sqrt{3}$\에서 $\zeta, \omega_n, T_s, T_p$를 연결해 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 극점은 $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$이다.
2차 표준형 극점은 $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$이다.
따라서 실수부에서 $\zeta\omega_n = 2$, 허수부에서 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 2\sqrt{3}$임을 읽어야 한다.

사용할 공식

$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$ (2% 기준)
$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$
이 공식을 쓰는 이유는 주어진 정보가 시간응답이 아니라 표준 2차계의 극점 위치이기 때문이다. 극점의 실수부와 허수부를 바로 $\zeta\omega_n$와 ω_d에 대응시키면 각 응답 지표를 계산할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

1. $\zeta\omega_n = 2$, $\omega_d = 2\sqrt{3}$이다.
2. $\omega_n^2 = (\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$이므로 $\omega_n = 4rad/s$이다.
3. 따라서 $\zeta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$이다.
4. 정착시간은 $T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{2} = 2s$이다.
5. 최고시간은 $T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}s$이다.

선지 판단

1번 O: $\zeta = \frac{1}{2}$이므로 맞는 설명이다.
2번 X: 계산 결과 고유주파수는 $\omega_n = 4rad/s$이다. 틀린 표현은 "ω_n는 16"이고, 올바르게는 "ω_n는 $4rad/s$이다"이다. 16은 ω_n가 아니라 ω_n^2 값이다.
3번 O: 2% 정착시간은 $T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2s$이므로 맞는 설명이다.
4번 O: 최고시간은 감쇠진동 각주파수 $\omega_d = 2\sqrt{3}$를 써서 $T_p = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}s$가 되므로 맞는 설명이다.

오답 포인트

출제자가 노린 함정은 ω_n와 ω_n^2를 혼동하는 점이다. 실수부와 허수부를 제곱해 더하면 16이 나오지만, 그것은 고유주파수 자체가 아니라 ω_n^2이다. 또 최고시간에는 ω_n이 아니라 감쇠진동 각주파수 ω_d가 들어간다는 점도 자주 섞인다.

다시 나오면 이렇게 판단

2차계 극점이 $-a \pm jb$ 꼴로 주어지면 먼저 $\zeta\omega_n = a$, $\omega_d = b$로 읽는다. 그다음 $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\zeta = \frac{a}{\omega_n}$를 구하고, 마지막에 T_s, T_p 공식을 대입하면 된다.

암기 포인트

2차계 극점 $-a \pm jb$에서는 $\zeta\omega_n = a$, $\omega_d = b$, $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$이다.

NoteBase

문 15. 단위 피드백시스템의 루프 전달함수 $L(s)$가 다음과 같을 때, 시스템의 이득 여유(gain margin)[dB]는?

$L(s) = \frac{4}{s(s+2)^2}$

① $20\log_{10} 2$

② $20\log_{10} 3$

③ $20\log_{10} 4$

④ $20\log_{10} 5$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 위상교차주파수에서의 개루프 크기를 구한 뒤 이득 여유를 dB로 바꾸는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $L(s) = \frac{4}{s(s+2)^2}$
구해야 할 값: 이득 여유 GM의 dB값
주의할 조건: 이득 여유는 위상이 -180°가 되는 주파수 ω_{pc}에서 $GM = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$로 구한다.

사용할 공식

위상 조건은 $\angle L(j\omega) = -90^\circ - 2\tan^{-1}(\omega/2)$이다.
이득 여유는 $GM = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$, dB값은 $GM_{dB} = 20\log_{10} GM$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이득 여유가 위상이 -180°가 되는 지점에서 폐루프가 불안정 경계까지 얼마나 더 이득을 키울 수 있는지를 나타내기 때문이다.

계산 과정

1. 위상교차주파수는 $-90^\circ - 2\tan^{-1}(\omega/2) = -180^\circ$를 만족하는 값이므로 $2\tan^{-1}(\omega/2) = 90^\circ$에서 $\tan^{-1}(\omega/2) = 45^\circ$, 따라서 $\omega_{pc} = 2$이다.
2. $\omega = 2$에서 크기는 $|L(j2)| = \frac{4}{|j2||2+j2|^2} = \frac{4}{2(\sqrt{2^2+2^2})^2} = \frac{4}{2\cdot 8} = \frac{1}{4}$이다.
3. 따라서 $GM = \frac{1}{|L(j2)|} = 4$이고, $GM_{dB} = 20\log_{10} 4$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X

- 틀린 표현은 $20\log_{10} 2$이다. 계산 결과 이득 여유는 2가 아니라 4이므로 올바르게는 $20\log_{10} 4$이다.
- 이 값은 $|j2| = 2$를 빠뜨리고 $|2 + j2|^2 = 8$만 반영해 $|L(j2)| = 1/2$로 오산할 때 나오기 쉽다.

② X

- 틀린 표현은 $20\log_{10} 3$이다. 위상교차주파수 계산과 크기 계산을 모두 거치면 이득 여유는 정확히 4가 되므로 올바르게는 $20\log_{10} 4$이다.
- 3은 이 문제의 위상교차주파수나 개루프 크기에서 직접 나오지 않는 값이므로 계산 중간값을 임의로 대입한 오답이다.

③ O

- $\omega_{pc} = 2$에서 $|L(j2)| = 1/4$이므로 이득 여유는 4이다.
- 따라서 dB값은 $20\log_{10} 4$가 되어 정답과 일치한다.

④ X

- 틀린 표현은 $20\log_{10} 5$이다. 계산 결과 이득 여유는 5가 아니라 4이므로 올바르게는 $20\log_{10} 4$이다.
- 분모의 크기를 덧셈처럼 처리하거나 위상교차주파수를 잘못 잡으면 5처럼 과대한 값으로 흐르기 쉽다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 위상교차주파수를 먼저 구하지 않고 숫자를 바로 맞추려는 데 있다. 특히 $|2 + j2| = 2\sqrt{2}$를 제곱하면 8이 된다는 점과, 여기에 $|j2| = 2$가 한 번 더 곱해진다는 점을 놓치면 ①처럼 잘못 계산된다.

다시 나오면 이렇게 판단

이득 여유 문제는 먼저 위상식으로 ω_{pc}를 구하고, 그 주파수에서 개루프 크기 $|L(j\omega_{pc})|$를 계산한 뒤 마지막에 역수를 취해 dB로 바꾸는 순서로 판단한다.

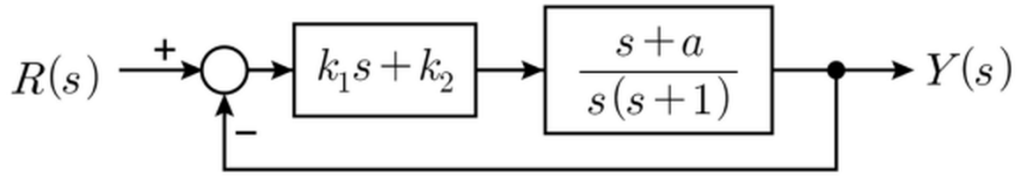
암기 포인트

이득 여유는 위상 -180° 지점의 크기 역수이며, dB 변환은 20_10(이득 여유)이다.

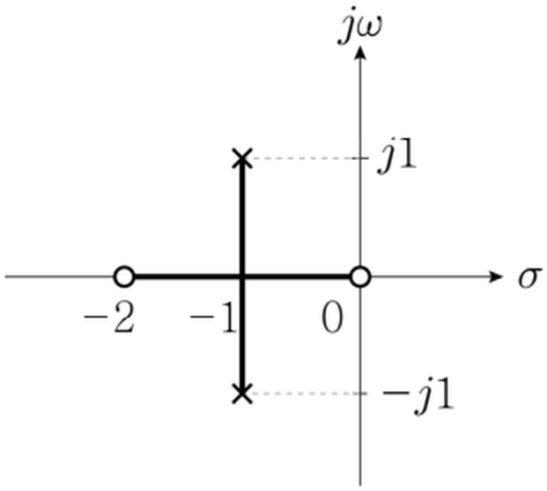
NoteBase

문 16. 다음 그림 (가)와 같이 피드백 제어기를 설계하고자 한다. $k_2 = b$로 고정한 후에 k_1에 대한 근궤적이 그림 (나)와 같을 때, $a + b$의 값은? (단, 그림 (나)에서 ○는 영점, ×는 극점을 표시한다)

(가)



(나)



① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 폐루프 특성방정식을 $P(s) + k_1Q(s) = 0$ 꼴로 정리한 뒤, 근궤적의 영점과 극점 위치로부터 a와 b를 역으로 구하는 계산형 문제이다.

조건 정리

전달함수는 $\frac{(k_1s + k_2)(s + a)}{s(s + 1)}$이고 $k_2 = b$로 고정되어 있다. 따라서 특성방정식은 $1 + \frac{(k_1s + b)(s + a)}{s(s + 1)} = 0$이다. 그림 (나)에서 영점은 $s = 0,\ -2$, 극점은 $s = -1 \pm j$이다.

NoteBase

사용할 공식

특성방정식을 $s(s+1)+b(s+a)+k_1 s(s+a)=0$으로 정리하면 $P(s)=s(s+1)+b(s+a)$, $Q(s)=s(s+a)$가 된다. 근궤적을 $1+k_1\frac{Q(s)}{P(s)}=0$으로 보면 영점은 $Q(s)=0$의 근, 극점은 $P(s)=0$의 근이 된다. 이 공식을 쓰는 이유는 그림 (나)가 k_1 변화에 대한 근궤적이므로, k_1에 곱해진 항과 그렇지 않은 항을 분리해야 영점과 극점을 바로 읽을 수 있기 때문이다.

계산 과정

먼저 $Q(s)=s(s+a)$의 근이 그림의 영점 $0,\ -2$와 같아야 하므로 $a=2$이다. 다음으로 $P(s)=s(s+1)+b(s+a)=s^2+(1+b)s+ab$이다. 그림의 극점이 $-1\pm j$이므로 이에 대응하는 다항식은 $(s+1-j)(s+1+j)=s^2+2s+2$이다. 계수를 비교하면 $1+b=2$이어서 $b=1$이고, $ab=2$이므로 $a=2$와도 일치한다. 따라서 $a+b=2+1=3$이다.

선지별 해설

① X: 계산 결과 $a+b=3$이므로 1은 아니다. 틀린 값은 1이고, 올바르게는 $a+b=3$이다. 이 값은 영점 하나만 보고 $a=1$로 잘못 읽거나 극점 계수비교를 생략할 때 나오기 쉽다.
② X: 계산 결과 $a+b=3$이므로 2는 아니다. 틀린 값은 2이고, 올바르게는 $a+b=3$이다. 이 값은 $a=2$까지만 구하고 $b=0$처럼 두는 실수에서 나온다.
③ O: 영점 $0,\ -2$에서 $a=2$, 극점 $-1\pm j$에서 $P(s)=s^2+2s+2$이므로 $b=1$이다. 따라서 $a+b=3$이 되어 옳다.
④ X: 계산 결과 $a+b=3$이므로 4는 아니다. 틀린 값은 4이고, 올바르게는 $a+b=3$이다. 이 값은 극점의 실수부 -1과 허수부 $\pm j$를 단순 합산하거나 계수비교 없이 감으로 고를 때 생긴다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 블록선도에 보이는 전달함수를 그대로 영점과 극점으로 읽는 데 있다. k_1에 대한 근궤적이므로 먼저 특성방정식을 $P(s)+k_1Q(s)=0$ 꼴로 분리해야 한다. 특히 $Q(s)$의 근이 영점, $P(s)$의 근이 극점이라는 대응을 놓치면 b를 잘못 잡기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적 역추론 문제는 먼저 어떤 이득이 가변인지 확인하고, 특성방정식을 그 이득에 대해 $P(s)+KQ(s)=0$ 꼴로 정리한다. 그다음 그림의 영점으로 $Q(s)$를 맞추고, 그림의 극점으로 $P(s)$의 계수를 비교하면 된다.

암기 포인트

근궤적 역추론은 가변이득 기준으로 분리한 뒤 영점은 $Q(s)$, 극점은 $P(s)$에서 읽는다.

NoteBase

문 17. 다음 상태공간방정식으로 표현된 시스템이 안정하기 위한 K의 범위는?

x=bmatrix0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 1 \ 2-5K & K^2-4 & -1bmatrixx+bmatrix0 \ 0 \ 1bmatrixu,
x(0)=bmatrix1 \ 0 \ 0bmatrix
$y = [1\ 0\ 0]x$

① $-6 < K < \frac{2}{5}$
② $-6 < K < 1$
③ $\frac{2}{5} < K < 1$
④ $\frac{2}{5} < K < 2$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 상태공간 계수행렬의 특성방정식을 만든 뒤 3차 Hurwitz 안정조건으로 K의 범위를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 계수행렬은
A=bmatrix 0&1&0; 0&0&1; 2-5K&K^2-4&-1 bmatrix
이다.
구해야 할 값은 시스템이 안정하기 위한 K의 범위이다.
연속시간 상태방정식의 안정성은 행렬 A의 모든 고유값이 좌반평면에 있는지로 판단한다.

사용할 공식

이 행렬은 동반형이므로 특성방정식은
$\det(sI - A) = s^3 + s^2 + (4 - K^2)s + (5K - 2)$
이다.
3차 다항식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ 가 안정하려면
$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3$
를 만족해야 한다.
이 공식을 쓰는 이유는 상태공간모델의 안정성이 특성방정식의 근, 즉 Hurwitz 다항식 여부로 결정되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 계수를 비교하면 $a_1 = 1, a_2 = 4 - K^2, a_3 = 5K - 2$ 이다.
2. 계수 양수 조건에서
$4 - K^2 > 0 \Rightarrow -2 < K < 2,$
$5K - 2 > 0 \Rightarrow K > \frac{2}{5}$
를 얻는다.
3. 마지막 Hurwitz 조건에서
$a_1 a_2 > a_3 \Rightarrow 1 \cdot (4 - K^2) > 5K - 2$
이므로
$K^2 + 5K - 6 < 0$
이고,
$(K + 6)(K - 1) < 0 \Rightarrow -6 < K < 1$
이다.
4. 세 조건의 공통범위는
$\frac{2}{5} < K < 1$
이다.

선지별 해설

① X: $-6 < K < \frac{2}{5}$ 구간이 포함되어 있으므로 $5K - 2 \le 0$ 인 값들이 들어간다. 상수항이 양수가 아니면 안정할 수 없다. 틀린 표현은 하한을 너무 넓게 잡은 부분이며, 올바르게는 $K > \frac{2}{5}$ 를 먼저 만족해야 한다.
② X: $-6 < K < 1$ 는 Hurwitz의 마지막 부등식만 반영한 범위이다. 이 범위에는 $K \le \frac{2}{5}$ 가 포함되어 $5K - 2 > 0$ 조건을 깨는 값이 들어간다. 올바르게는 $-6 < K < 1$ 에 $K > \frac{2}{5}$ 를 함께 교집합으로 취해야 한다.
③ O: $\frac{2}{5} < K < 1$ 이면 $4 - K^2 > 0, 5K - 2 > 0, 4 - K^2 > 5K - 2$ 를 모두 만족한다. 따라서 특성방정식은 Hurwitz 다항식이 되고 시스템은 안정하다.
④ X: $\frac{2}{5} < K < 2$ 는 계수 양수 조건만 반영한 범위이다. $1 \le K < 2$ 에서는 $4 - K^2 > 5K - 2$ 가 깨져 안정조건을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 상한을 2까지 둔 부분이며, 올바르게는 상한이 1이어야 한다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 계수 양수 조건만 보고 끝내는 데 있다. $4 - K^2 > 0$ 과 $5K - 2 > 0$ 만 확인하면 ④처럼 보이기 쉽지만, 3차 Hurwitz에서는 반드시 $a_1 a_2 > a_3$ 를 추가로 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

동반형 상태방정식이 나오면 마지막 행의 부호를 보고 특성방정식을 바로 만든다. 그다음 3차 Hurwitz 조건 $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$ 를 순서대로 적용하고 마지막에 교집합만 남기면 된다.

NoteBase

암기 포인트

3차 안정판정은 계수 양수만으로 끝나지 않고 $a_1a_2 > a_3$ 까지 확인해야 한다.

NoteBase

문 18. 다음과 같은 상태공간방정식에서 r이 단위계단입력일 때, 정상상태오차는?

x=bmatrix-1 & 2 \ 0 & -2bmatrixx+bmatrix1 \ 0bmatrixr, x(0)=bmatrix0 \ 0bmatrix
$y = [1\ 0]x$

① -1

② 0

③ 1

④ ∞

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태공간방정식에서 정상상태값을 구한 뒤 $e_{ss} = r(\infty) - y(\infty)$로 정상상태오차를 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 x=bmatrix-1 & 2 ; 0 & -2bmatrixx+bmatrix1 ; 0bmatrixr, $y = [10]x$이다.
입력은 단위계단이므로 $r(t) = 1$이다.
x_2는 입력항이 없고 초기값도 0이므로 따로 0으로 수렴하는 상태이다.

사용할 공식

정상상태에서는 $\dot{x} = 0$을 두고 상태의 정상값을 구한다.
또한 정상상태오차는 $e_{ss} = r(\infty) - y(\infty)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 문제에서 단위계단입력에 대한 정상상태오차를 직접 묻고 있기 때문이다.

계산 과정

1. 두 번째 상태식은 $\dot{x}_2 = -2x_2$이다. 초기조건이 $x_2(0) = 0$이므로 $x_2(t) = 0$, 따라서 $x_{2,ss} = 0$이다.
2. 첫 번째 상태식은 $\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + r$이다. 정상상태에서 $x_2 = 0, r = 1$이므로 $0 = -x_{1,ss} + 1$이 되어 $x_{1,ss} = 1$이다.
3. 출력은 $y = [10]x$이므로 $y_{ss} = x_{1,ss} = 1$이다.
4. 따라서 $e_{ss} = 1 - 1 = 0$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: -1이 되려면 정상상태출력이 2가 되어야 한다. 이 계의 정상상태출력은 1이므로 맞지 않는다. 틀린 표현은 오차를 음수로 본 부분이며, 올바르게는 정상상태오차는 0이다.
② O: $x_{2,ss}=0$, $x_{1,ss}=1$, $y_{ss}=1$이므로 단위계단입력 1과의 차는 0이다. 따라서 정상상태오차는 0이 맞다.
③ X: 오차가 1이 되려면 정상상태출력이 0이어야 한다. 그러나 첫 번째 상태는 입력 r를 직접 받아 정상상태에서 1로 수렴한다. 틀린 표현은 출력을 0으로 본 부분이며, 올바르게는 정상상태오차는 0이다.
④ X: ∞가 되려면 계가 발산하거나 적어도 정상상태가 존재하지 않아야 한다. 이 계의 고유값은 -1, -2로 안정하므로 정상상태가 존재한다. 틀린 표현은 오차가 무한대라는 부분이며, 올바르게는 정상상태오차는 0이다.

오답 포인트

상태가 두 개라는 이유로 둘 다 출력에 영향을 준다고 보는 실수가 잦다. 이 문제는 $y=[10]x$이므로 출력은 x_1만 본다. 또한 x_2는 입력이 없고 초기값도 0이라서 처음부터 끝까지 0이라는 점을 놓치면 2번 항 $2x_2$를 불필요하게 계산하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

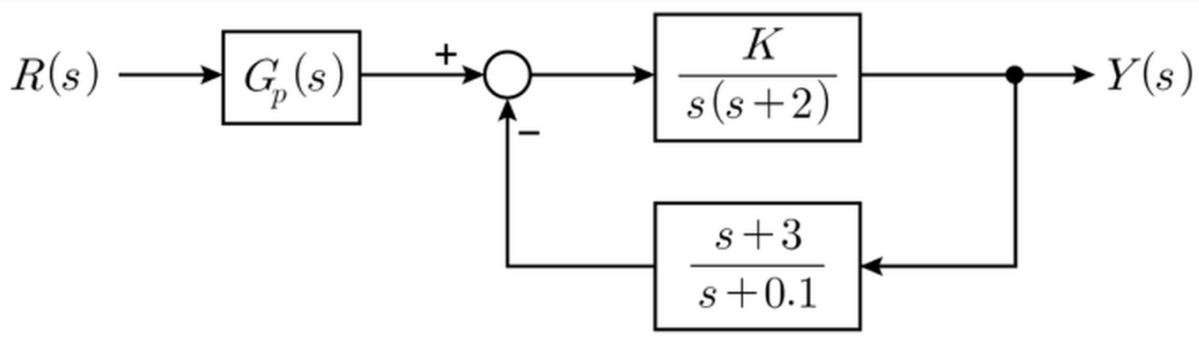
상태공간에서 정상상태오차를 묻는 문제는 먼저 $\dot{x}=0$을 두고 각 상태의 정상값을 구한 뒤, 출력식으로 y_{ss}를 만든 다음 $e_{ss}=r-y_{ss}$ 순서로 판단한다. 입력이 걸리지 않는 상태와 출력에 직접 보이지 않는 상태를 먼저 걸러내면 계산이 짧아진다.

암기 포인트

정상상태오차는 상태를 다 구한 뒤 출력으로 바꿔서 $e_{ss}=r-y_{ss}$로 마무리하는 값이다.

NoteBase

문 19. 다음 피드백 제어시스템에서 $r(t)$가 단위계단입력으로 주어질 때, 정상상태오차가 0이 되도록 하는 $G_p(s)$로 가능한 것은?



① $30 + 0.1s$

② $30 + \frac{0.1}{s}$

③ $20 + 10s$

④ $10 + \frac{0.1}{s} + 20s$

정답 1번

출제 포인트

비단위 피드백계에서 단위계단입력의 정상상태오차를 0으로 만들기 위한 전치보상기 $G_p(s)$의 DC 이득 조건을 묻는 문제이다.

조건 정리

주어진 전진경로는 $G(s) = K/[s(s + 2)]$, 피드백 경로는 $H(s) = (s + 3)/(s + 0.1)$이다.
입력 $r(t)$는 단위계단입력이므로 $R(s) = 1/s$이다.
정상상태 판단은 $s \to 0$에서 하므로 s항은 0으로 사라지고, $1/s$항이 있으면 DC 이득이 발산한다.

사용할 공식

폐루프 전달함수는 $T(s) = Y(s)/R(s) = G_p(s)G(s)/(1 + G(s)H(s))$이다.
정상상태오차는 $e_{ss} = \lim_{s\to 0}[1-T(s)]$이다.
이 문제의 $G(s) = K/[s(s + 2)]$는 적분기를 포함하므로 $s \to 0$에서 $G(s) \to \infty$가 되어 $T(0) = \lim_{s\to 0} G_p(s)/H(s)$로 정리된다.

NoteBase

계산 과정

1. $H(0) = (0 + 3)/(0 + 0.1) = 30$이다.
2. 따라서 $T(0) = G_p(0)/30$이다.
3. 단위계단입력의 정상상태오차가 0이 되려면 $T(0) = 1$이어야 하므로 $G_p(0) = 30$이어야 한다.
4. 즉 $G_p(s)$는 정상상태에서 유한한 값 30을 가져야 한다.

선지별 해설

① O : $G_p(s) = 30 + 0.1s$이므로 $G_p(0) = 30$이다. 미분항 $0.1s$는 정상상태에서 0이 되므로 $T(0) = 30/30 = 1$, $e_{ss} = 0$이 된다.
② X : $G_p(s) = 30 + 0.1/s$는 $s \to 0$에서 $0.1/s$가 발산하여 $G_p(0)$가 유한한 30으로 정해지지 않는다. 정상상태오차 0 조건은 적분항 추가가 아니라 DC 이득을 정확히 30으로 맞추는 것이다. 틀린 표현은 "0.1/s를 더해도 된다"는 부분이고, 올바르게는 적분항 없이 $G_p(0) = 30$이 되도록 잡아야 한다.
③ X : $G_p(s) = 20 + 10s$이므로 $G_p(0) = 20$이다. 따라서 $T(0) = 20/30 = 2/3$, $e_{ss} = 1 - 2/3 = 1/3$이어서 0이 아니다. 틀린 표현은 상수항이 20인 부분이고, 올바르게는 상수항이 30이어야 한다.
④ X : $G_p(s) = 10 + 0.1/s + 20s$도 $0.1/s$ 때문에 $s \to 0$에서 발산한다. 상수항 10과 미분항 20s가 있어도 정상상태에서 필요한 것은 유한한 DC 이득 30이다. 틀린 표현은 적분항을 포함한 구조이고, 올바르게는 $1/s$항 없이 $G_p(0) = 30$이 되도록 구성해야 한다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 전진경로에 적분기 $1/s$가 이미 있으므로 수험생이 전치보상기에도 적분항을 넣어야 영오차가 된다고 오해하기 쉽다는 점이다. 이 문제에서는 $G(s) \to \infty$이므로 최종적으로 $Y/R \to G_p/H$가 되고, 핵심은 $G_p(0) = H(0) = 30$을 맞추는 것이다.

다시 나오면 이렇게 판단

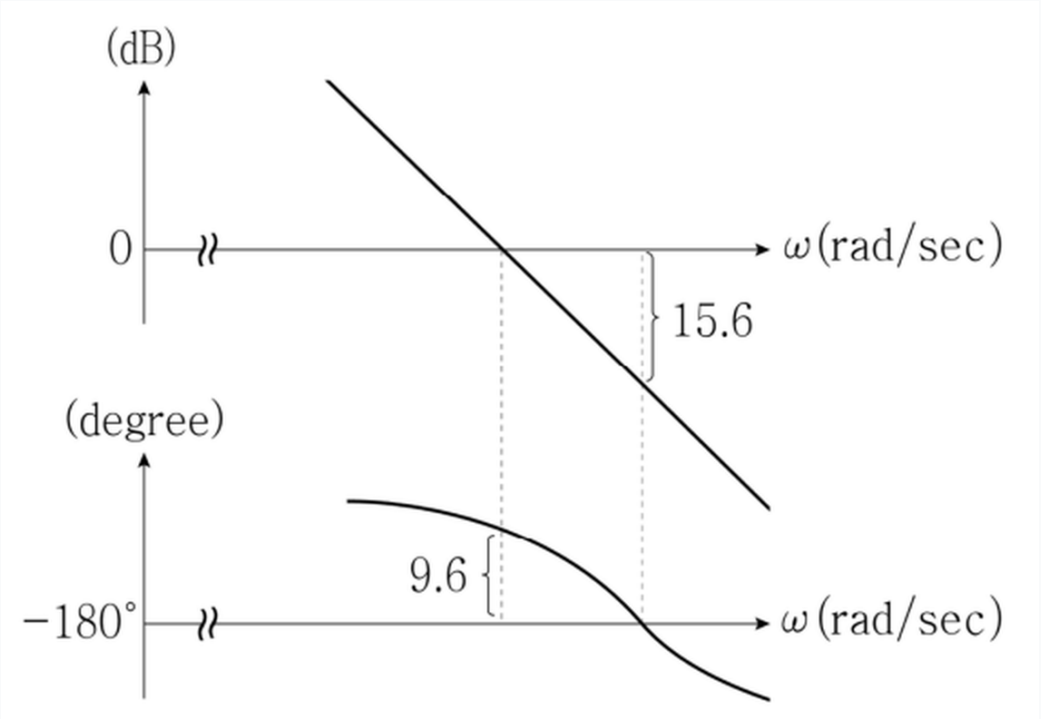
비단위 피드백계의 단위계단 정상상태오차 문제는 먼저 $T(s) = G_pG/(1 + GH)$를 쓰고, 적분기 유무를 본 뒤 $s \to 0$에서 $T(0) = 1$이 되도록 $G_p(0)$와 $H(0)$를 비교하면 된다.

암기 포인트

적분기가 있는 비단위 피드백계의 영오차 조건은 $G_p(0) = H(0)$이다.

NoteBase

문 20. 단위 피드백시스템의 안정한 개루프 전달함수 $KG(s)$에 대하여 위상교차점 부근의 보드선도가 그림과 같을 때, 이 시스템이 임계 안정(marginally stable)하기 위해서는 K가 몇 배 증가해야 하는가? (단, $\log_{10} 2 = 0.30$, $\log_{10} 3 = 0.48$로 가정하여 계산한다)



① 2

② 3

③ 5

④ 6

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 위상교차 주파수에서의 이득여유를 읽어 K의 증가 배수를 구하는 문제이다.

조건 정리

현재 시스템은 안정하다.

위상교차 주파수에서 크기선도는 $0dB$보다 $15.6dB$ 낮다.

한계안정이 되려면 위상교차 주파수에서 크기선도가 정확히 $0dB$가 되어야 한다.

NoteBase

사용할 공식

이득 배수를 a라 두면 크기선도의 상승량은 $20\log_{10} a$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 K를 a배 키우면 개루프 전달함수의 크기만 전체적으로 $20\log_{10} a$만큼 위로 평행이동하고 위상은 변하지 않기 때문이다.

계산 과정

1. 그림의 오른쪽 점선은 위상교차 주파수이고, 그 주파수에서 크기선도 값은 $-15.6dB$이다.
2. 한계안정 조건은 위상교차 주파수에서 크기가 $0dB$가 되는 것이므로 K를 올려야 할 양은 $15.6dB$이다.
3. 증가 배수를 a라 두면 $20\log_{10} a = 15.6$이다.
4. 따라서 $\log_{10} a = 15.6/20 = 0.78$이다.
5. 주어진 값으로 $0.78 = 0.30 + 0.48 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \log_{10} 6$이므로 $a = 6$이다.

선지 판단

1번 X: 2배이면 상승량은 $20\log_{10} 2 = 6.0dB$에 불과하다. 위상교차점에서 아직 $-9.6dB$가 남으므로 한계안정이 되지 않는다. 틀린 표현은 '2배면 충분하다'이고, 올바르게는 '6만큼만 올라 부족하다'이다.
2번 X: 3배이면 상승량은 $20\log_{10} 3 = 9.6dB$이다. 위상교차점에서 아직 $-6.0dB$가 남으므로 부족하다. 틀린 표현은 '3배면 한계안정이다'이고, 올바르게는 '아직 $0dB$에 도달하지 못한다'이다.
3번 X: 5배이면 상승량은 $20\log_{10} 5 = 20(1 - 0.30) = 14.0dB$이다. 위상교차점에서 아직 $-1.6dB$가 남으므로 정확한 한계안정 조건에 못 미친다. 틀린 표현은 '5배가 이득여유와 같다'이고, 올바르게는 '필요한 상승량 $15.6dB$를 채우려면 6배가 필요하다'이다.
4번 O: 6배이면 상승량은 $20\log_{10} 6 = 20(0.30 + 0.48) = 15.6dB$이다. 위상교차점의 크기가 정확히 $0dB$가 되므로 한계안정이 된다.

오답 포인트

그림에 함께 적힌 9.6°는 위상여유이고, K의 배수를 구할 때 직접 써야 하는 값은 위상교차 주파수에서의 이득여유 $15.6dB$이다. 위상여유와 이득여유를 섞어 읽으면 3배 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

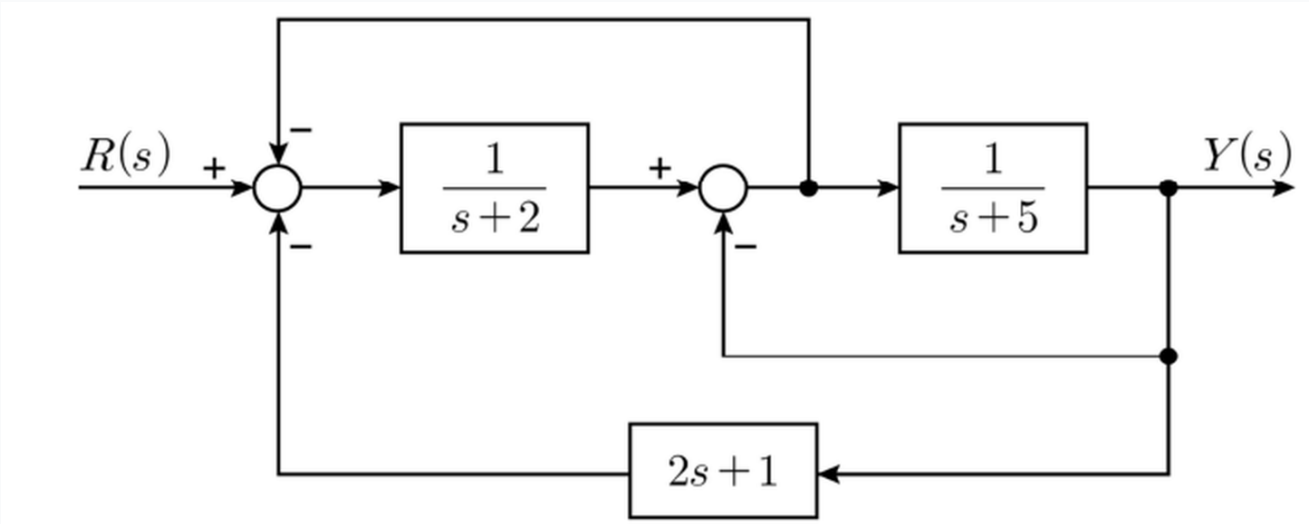
보드선도에서 K의 증감을 묻는 문제는 먼저 위상교차 주파수에서 이득여유를 읽고, 그다음 20_10 a = 필요한 상승량으로 배수 a를 구하면 된다.

암기 포인트

이득여유가 $G_m dB$이면 한계안정까지 필요한 K 배수는 $10^{G_m/20}$이다.

NoteBase

문 21. 다음과 같은 제어시스템에서 단위계단입력에 대한 $t \geq 0$일 때, 출력 $y(t)$는? (단, 초기조건은 0이다)



① $\frac{1}{7}e^{-2t} - \frac{1}{7}e^{-9t}$

② $\frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-7t}$

③ $\frac{1}{18} - \frac{1}{14}e^{-2t} + \frac{1}{63}e^{-9t}$

④ $\frac{1}{18} - \frac{1}{10}e^{-2t} + \frac{1}{35}e^{-7t}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 블록선도에서 내부 피드백을 반영해 폐루프 전달함수를 구한 뒤, 단위계단입력에 대한 $y(t)$를 역라플라스변환으로 구하는 문제이다.

조건 정리

입력은 단위계단입력이므로 $R(s) = \frac{1}{s}$이다.
첫 번째 합점 출력이 $a(s)$, 두 번째 합점 출력이 $c(s)$라고 두면 $Y(s) = \frac{1}{s+5}c(s)$이다.
첫 번째 합점에는 $-c(s)$와 $-(2s+1)Y(s)$가 되먹임되고, 두 번째 합점에는 $-Y(s)$가 되먹임된다.

사용할 공식

블록선도 식을 그대로 연립한다.
$c(s) = \frac{a(s)}{s+2} - Y(s), \quad Y(s) = \frac{c(s)}{s+5}, \quad a(s) = R(s) - c(s) - (2s+1)Y(s)$
이 공식을 쓰는 이유는 각 합점과 전달요소가 직렬 결합만이 아니라 되먹임으로 연결되어 있어, 단순 곱셈보다 신호식 연립이 가장 안전하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. $Y(s)=\frac{c(s)}{s+5}$이므로 $c(s)=(s+5)Y(s)$이다.
2. 두 번째 합점 식 $c(s)=\frac{a(s)}{s+2}-Y(s)$에 대입하면
$(s+5)Y(s)=\frac{a(s)}{s+2}-Y(s)$
이므로
$a(s)=(s+2)(s+6)Y(s)$
이다.
3. 첫 번째 합점 식 $a(s)=R(s)-c(s)-(2s+1)Y(s)$에 $c(s)=(s+5)Y(s)$를 넣으면
$a(s)=R(s)-(s+5)Y(s)-(2s+1)Y(s)=R(s)-3(s+2)Y(s)$
이다.
4. 두 식을 같게 두면
$(s+2)(s+6)Y(s)=R(s)-3(s+2)Y(s)$
이므로
$R(s)=(s+2)(s+9)Y(s)$
이고, 따라서 폐루프 전달함수는
$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{(s+2)(s+9)}$
이다.
5. 단위계단입력 $R(s)=\frac{1}{s}$를 곱하면
$Y(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+9)}=\frac{1}{18s}-\frac{1}{14(s+2)}+\frac{1}{63(s+9)}$
이므로
$y(t)=\frac{1}{18}-\frac{1}{14}e^{-2t}+\frac{1}{63}e^{-9t}$
이다.

선지별 해설

① X: $\frac{1}{7}e^{-2t}-\frac{1}{7}e^{-9t}$는 $\frac{1}{(s+2)(s+9)}$의 역라플라스변환에 해당한다. 단위계단입력이므로 $R(s)=\frac{1}{s}$를 한 번 더 곱해야 하며, 따라서 정상상태항 $\frac{1}{18}$이 반드시 포함되어야 한다. 틀린 식 $\frac{1}{7}e^{-2t}-\frac{1}{7}e^{-9t}$ → 올바르게는 $\frac{1}{18}-\frac{1}{14}e^{-2t}+\frac{1}{63}e^{-9t}$이다.
② X: e^{-7t}가 들어간 것은 폐루프 극을 -7로 잘못 잡은 것이다. 실제 폐루프 분모는 $(s+2)(s+9)$이므로 극은 $-2,\ -9$이다. 또한 상수항도 빠져 있다. 틀린 식 $\frac{1}{5}e^{-2t}-\frac{1}{5}e^{-7t}$ → 올바르게는 $\frac{1}{18}-\frac{1}{14}e^{-2t}+\frac{1}{63}e^{-9t}$이다.
③ O: 위 계산 결과와 정확히 일치한다. $t\to\infty$일 때 $y(t)\to\frac{1}{18}$이 되어 최종값 정리와도 맞는다.
④ X: 상수항 $\frac{1}{18}$은 맞지만, 감쇠항의 계수와 극이 잘못되었다. e^{-7t}가 아니라 e^{-9t}가 나와야 하고, 계수도 $-\frac{1}{10},\frac{1}{35}$가 아니라 $-\frac{1}{14},\frac{1}{63}$이다. 틀린 식 $\frac{1}{18}-\frac{1}{10}e^{-2t}+\frac{1}{35}e^{-7t}$ → 올바르게는 $\frac{1}{18}-\frac{1}{14}e^{-2t}+\frac{1}{63}e^{-9t}$이다.

오답 포인트

단위계단입력인데 전달함수만 구한 뒤 바로 역라플라스변환해서 $\frac{1}{s}$를 빠뜨리기 쉽다. 또 두 번째 합점의 $-Y(s)$와 첫 번째 합점의 $-(2s+1)Y(s)$를 따로 정리하지 않으면 $(s+2)(s+7)$처럼 잘못된 폐루프 분모를 만들기 쉽다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

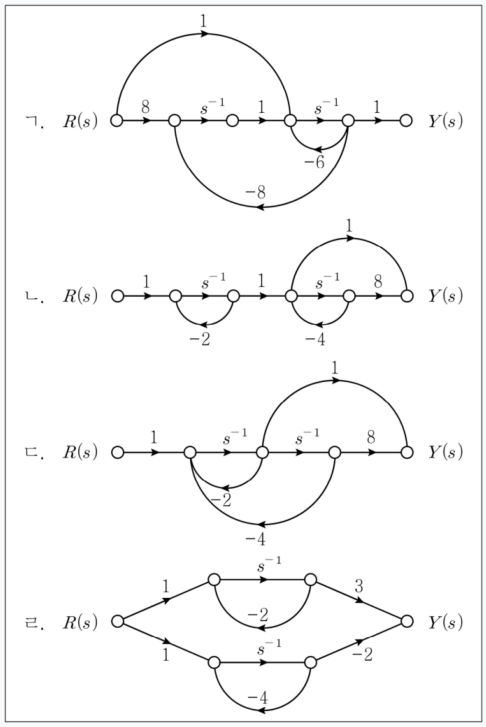
블록선도 계산형은 각 합점 출력을 먼저 문자로 둔 뒤, 가장 안쪽 되먹임부터 연립식으로 정리한다. 그 다음 $R(s) = \frac{1}{s}$를 마지막에 곱해 단위계단응답인지 확인하고, 최종값 $G(0)$와 상수항이 일치하는지 검산하면 된다.

암기 포인트

단위계단응답은 전달함수에 $\frac{1}{s}$를 한 번 더 곱한 식이며, 안정계의 정상상태값 $G(0)$가 시간응답의 상수항으로 남는다.

NoteBase

문 22. 다음 신호흐름선도 중 전달함수가 서로 같은 것만을 모두 고르면?



① ㄱ, ㄴ, ㄷ

② ㄱ, ㄴ, ㄹ

③ ㄱ, ㄷ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 메이슨 공식을 이용해 각 신호흐름선도의 전달함수를 구하고, 분자와 분모가 같은 선도끼리 묶을 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 값은 각 신호흐름선도의 전진경로 이득과 피드백 루프 이득이다.
구해야 할 값은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 전달함수 $T(s)$이다.
주의할 조건은 비접촉 루프가 있으면 Δ에 곱항이 들어가고, 구조가 비슷해 보여도 피드백이 걸리는 위치가 다르면 분모가 달라진다는 점이다.

NoteBase

사용할 공식

메이슨 공식은 $T = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$이다.
여기서 $\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \cdots$이다.
이 문제는 각 선도를 전진경로 P_k와 루프 L_i로 정확히 분해할 수 있으므로 메이슨 공식으로 비교하는 것이 가장 빠르다.

계산 과정

ㄱ: 전진경로는 $P_1 = \frac{8}{s^2}$, $P_2 = \frac{1}{s}$이다. 루프는 $L_1 = -\frac{6}{s}$, $L_2 = -\frac{8}{s^2}$이므로 $\Delta = 1 + \frac{6}{s} + \frac{8}{s^2}$이다. 따라서 T_ㄱ=((8)/(s^2)+(1)/(s))/(1+(6)/(s)+(8)/(s^2))=(s+8)/(s^2+6s+8)이다.
ㄴ: 전진경로는 $P_1 = \frac{8}{s^2}$, $P_2 = \frac{1}{s}$이다. 루프는 $L_1 = -\frac{2}{s}$, $L_2 = -\frac{4}{s}$이고 두 루프는 비접촉이므로 $\Delta = 1 - \left(-\frac{2}{s} - \frac{4}{s}\right) + \left(-\frac{2}{s}\right)\left(-\frac{4}{s}\right) = 1 + \frac{6}{s} + \frac{8}{s^2}$이다. 따라서 T_ㄴ=(s+8)/(s^2+6s+8)이다.
ㄷ: 전진경로는 $P_1 = \frac{8}{s^2}$, $P_2 = \frac{1}{s}$로 같지만 루프가 $L_1 = -\frac{2}{s}$, $L_2 = -\frac{4}{s^2}$이어서 $\Delta = 1 + \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2}$가 된다. 따라서 T_ㄷ=((8)/(s^2)+(1)/(s))/(1+(2)/(s)+(4)/(s^2))=(s+8)/(s^2+2s+4)이다.
ㄹ: 위 경로는 $P_1 = \frac{3}{s}$, 아래 경로는 $P_2 = -\frac{2}{s}$이다. 루프는 $L_1 = -\frac{2}{s}$, $L_2 = -\frac{4}{s}$이고 서로 비접촉이므로 $\Delta = 1 + \frac{6}{s} + \frac{8}{s^2}$이다. 또 $\Delta_1 = 1 - L_2 = 1 + \frac{4}{s}$, $\Delta_2 = 1 - L_1 = 1 + \frac{2}{s}$이므로 T_ㄹ=((3)/(s)≤ft(1+(4)/(s))-(2)/(s)≤ft(1+(2)/(s)))/(1+(6)/(s)+(8)/(s^2))=((1)/(s)+(8)/(s^2))/(1+(6)/(s)+(8)/(s^2))=(s+8)/(s^2+6s+8)이다.
정리하면 T_ㄱ=T_ㄴ=T_ㄹ, T_ㄷ ≠ T_ㄱ이다.

선지 판단

1번 X: ㄱ, ㄴ은 같지만 ㄷ은 $\frac{s+8}{s^2+2s+4}$로 달라서 셋이 모두 같지 않다. 틀린 표현은 "ㄱ, ㄴ, ㄷ"이고, 올바르게는 "ㄱ, ㄴ, ㄹ"이다.
2번 O: ㄱ, ㄴ, ㄹ은 모두 $\frac{s+8}{s^2+6s+8}$이므로 같은 전달함수를 가진다.
3번 X: ㄱ과 ㄹ은 같지만 ㄷ은 분모가 달라 같은 군에 들어갈 수 없다. 틀린 표현은 "ㄱ, ㄷ, ㄹ"이고, 올바르게는 "ㄱ, ㄴ, ㄹ"이다.
4번 X: ㄴ과 ㄹ은 같지만 ㄷ은 다르다. 틀린 표현은 "ㄴ, ㄷ, ㄹ"이고, 올바르게는 "ㄱ, ㄴ, ㄹ"이다.

오답 포인트

ㄴ과 ㄹ은 모양이 꽤 달라 보여서 다른 전달함수로 오인하기 쉽고, ㄴ과 ㄷ은 숫자 배치가 비슷해서 같다고 착각하기 쉽다. 실제 함정은 피드백 이득의 숫자 자체보다 피드백이 어느 구간에 걸리는지와 비접촉 루프의 곱항이 들어가는지를 놓치는 데 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

신호흐름선도 비교 문제는 전진경로 P_k를 먼저 적고, 루프 L_i와 비접촉 여부를 정리한 뒤, 마지막에 Δ와 $\sum P_k \Delta_k$를 비교하면 된다. 분자와 분모가 모두 같을 때만 같은 전달함수라고 판단할 수 있다.

NoteBase

암기 포인트

신호흐름선도는 그림이 아니라 P_k, L_i, Δ로 비교하며, 비접촉 루프가 있으면 Δ에 곱항이 추가된다.

NoteBase

문 23. 다음 전달함수에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, $p_3 \neq 0$이고, 극점-영점 상쇄는 없다)

$$G(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

① z_1, z_2, p_1, p_2, p_3 모두 양수이면, $G(s)$는 안정하다.

② $G(s)$의 안정도는 해당 영점의 위치에 의해서 결정된다.

③ p_1, p_2, p_3 모두 양의 실수부를 갖고 있으면, $G(s)$는 불안정하다.

④ $G(s)$가 불안정한 극점을 갖고 있는 경우, 제어대상으로 사용하는 것은 불가능하다.

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 전달함수의 안정도가 영점이 아니라 극점의 위치, 정확히는 각 극점 실수부의 부호로 결정된다는 점을 묻는다.

핵심 개념

연속시간 전달함수의 안정성은 분모의 근인 극점 위치로 판단한다. 극점의 실수부가 모두 음수이면 안정이고, 하나라도 양수이면 우반평면 극점이므로 불안정이다. 영점은 과도응답 특성에는 영향을 주지만 안정도를 직접 결정하지는 않는다.

선지별 해설

1번: X. 틀린 부분은 "z_1, z_2, p_1, p_2, p_3 모두 양수이면 안정하다"는 표현이다. 이 전달함수의 극점은 $s = p_1, p_2, p_3$이므로 p_1, p_2, p_3가 모두 양수이면 극점이 우반평면에 놓여 오히려 불안정하다. 올바르게는 "극점의 실수부가 모두 음수이면 안정하다"이다.
2번: X. 틀린 부분은 "안정도는 해당 영점의 위치에 의해 결정된다"는 표현이다. 안정도는 영점이 아니라 극점 위치에 의해 결정된다. 올바르게는 "안정도는 분모의 근인 극점의 위치에 의해 결정된다"이다.
3번: O. p_1, p_2, p_3 모두 양의 실수부를 가지면 세 극점이 모두 우반평면에 있으므로 $G(s)$는 불안정하다. 안정 판정에서 필요한 정보는 극점 실수부의 부호이다.
4번: X. 틀린 부분은 "불안정한 극점을 가지면 제어대상으로 사용하는 것은 불가능하다"는 표현이다. 제어대상이 개루프에서 불안정해도 피드백 제어로 안정화할 수 있으므로 제어대상 자체로 사용할 수 없다고 단정할 수는 없다. 올바르게는 "불안정 극점을 가진 대상은 제어기 설계 시 안정화 여부를 별도로 검토해야 한다"이다.

오답 포인트

영점과 극점을 함께 제시해 놓고 안정성을 묻기 때문에 영점도 안정도에 직접 영향을 준다고 착각하기 쉽다. 또한 $(s - p_i)$ 꼴이면 극점이 $-p_i$가 아니라 p_i에 생긴다는 부호 해석을 놓치면 1번을 고르기 쉽다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

전달함수 안정성 문제는 먼저 분모를 보고 극점 위치를 잡는다. 연속시간계에서는 극점 실수부가 모두 음수인지 확인하고, 하나라도 양수이면 즉시 불안정으로 판단한다. 영점은 안정도 판단의 1차 기준이 아니다.

암기 포인트

안정은 영점이 아니라 극점으로 본다. 연속시간계에서 우반평면 극점 1개만 있어도 불안정이다.

NoteBase

문 24. 개루프 전달함수 $G(s)=\frac{as+1}{s^2}$를 가지는 단위 피드백 제어 시스템의 위상여유가 60°가 되기 위한 a는? (단, $a>0$이다)

① $\frac{1}{\sqrt{3}}$
② $\frac{1}{\sqrt{2}}$
③ $\frac{\sqrt{6}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백계의 위상여유 정의와 이득교차주파수 조건을 함께 써서 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 개루프 전달함수는 $G(s)=\frac{as+1}{s^2}$이다.
단위 피드백이므로 개루프 전달함수 $L(s)=G(s)$로 위상여유를 계산한다.
구해야 할 값은 위상여유가 60°가 되게 하는 a이다.

사용할 공식

이득교차주파수 ω_{gc}에서 $|L(j\omega_{gc})|=1$, 위상여유는 $PM=180^\circ+\angle L(j\omega_{gc})$이다.
여기서
$L(j\omega)=\frac{1+ja\omega}{(j\omega)^2}$
이므로
$|L(j\omega)|=\frac{\sqrt{1+a^2\omega^2}}{\omega^2}, \qquad \angle L(j\omega)=-180^\circ+\tan^{-1}(a\omega)$
가 된다.
이 공식을 쓰는 이유는 위상여유가 이득교차주파수에서의 개루프 위상으로 정의되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 위상여유가 60°이므로

$60^\circ = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc}) = 180^\circ + (-180^\circ + \tan^{-1}(a\omega_{gc}))$

따라서

$\tan^{-1}(a\omega_{gc}) = 60^\circ \Rightarrow a\omega_{gc} = \sqrt{3}$

이다.

2. 이득교차주파수에서 $|L(j\omega_{gc})| = 1$이므로

$\frac{\sqrt{1 + a^2\omega_{gc}^2}}{\omega_{gc}^2} = 1$

이다. 위에서 $a^2\omega_{gc}^2 = 3$이므로

$\frac{\sqrt{4}}{\omega_{gc}^2} = 1 \Rightarrow \frac{2}{\omega_{gc}^2} = 1 \Rightarrow \omega_{gc}^2 = 2$

이다.

3. 따라서 $\omega_{gc} = \sqrt{2}$이고

$a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

이다.

선지별 해설

① X

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$이면 $a\omega_{gc} = \sqrt{\frac{2}{3}}$가 되어 $\tan^{-1}(a\omega_{gc}) \neq 60^\circ$이다. 따라서 위상여유 60° 조건을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 이 값이 정답이라는 점이고, 올바르게는 $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$이다.

② X

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$이면 $a\omega_{gc} = 1$이므로 위상여유는 45°가 된다. 이는 60°가 아니라 $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$를 대입한 경우에 해당한다. 올바르게는 $a\omega_{gc} = \sqrt{3}$이어야 하므로 정답이 아니다.

③ X

$a = \frac{\sqrt{6}}{3}$이면 $a\omega_{gc} = \frac{2}{\sqrt{3}}$이므로 위상여유는 약 49.1°이다. 이 값도 60° 조건을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 위상여유 60°를 만드는 a라는 점이고, 올바른 값은 $\frac{\sqrt{6}}{2}$이다.

④ O

$a = \frac{\sqrt{6}}{2}$이면 $a\omega_{gc} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}$이므로 위상여유가 정확히 60°가 된다. 이득조건과 위상조건을 동시에 만족하므로 옳다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 위상조건과 이득조건 중 하나만 쓰고 멈추는 데 있다. $PM = 60^\circ$에서 바로 $a = \sqrt{3}$처럼 두면 ω_{gc}가 빠진다. 또 $(j\omega)^2 = -\omega^2$에서 생기는 -180°를 놓치면 위상식을 잘못 세우게 된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

위상여유 문제는 먼저 $PM = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc})$로 위상식을 세워 $a\omega_{gc}$를 구하고, 다음에 $|L(j\omega_{gc})| = 1$을 적용해 ω_{gc}와 미지수를 분리하면 된다. 위상조건과 이득조건을 반드시 연립해야 한다.

암기 포인트

단위 피드백 위상여유는 이득교차점에서 정해지고, 계산은 위상조건 1개와 이득조건 1개를 연립해서 끝난다.

NoteBase

문 25. 다음 상태피드백 제어시스템에서 단위계단입력에 대한 정상상태 오차가 0.9가 되는 제어 이득 k_1과 k_2의 값을 바르게 연결한 것은?

x=bmatrix0 & 1 \ -2 & -4bmatrixx+bmatrix0 \ 1bmatrixu
y=bmatrix1 & 0bmatrixx
u=bmatrix-k_1 & -k_2bmatrixx+r

① k_1: 8, k_2: 5

② k_1: 4, k_2: -5

③ k_1: -4, k_2: 5

④ k_1: -8, k_2: -5

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 상태피드백 폐루프에서 단위계단입력에 대한 정상상태 오차를 정상상태 대수방정식으로 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 식은 $\dot{x} = Ax + Bu, y = [1\ 0]x = x_1$이다.
제어입력은 $u = -[k_1\ k_2]x + r$이므로 폐루프는 $\dot{x} = (A - BK)x + Br$가 된다.
단위계단입력은 $r = 1$, 정상상태 오차는 $e_{ss} = 1 - y_{ss} = 0.9$이다.

사용할 공식

정상상태에서는 $\dot{x} = 0$이므로
$0 = (A - BK)x_{ss} + Br$
를 사용한다.
이 문제는 전달함수보다 상태방정식의 정상상태 관계식을 직접 쓰는 것이 가장 빠르다.

NoteBase

계산 과정

A-BK=bmatrix0&1; -2-k_1&-4-k_2bmatrix이다.
정상상태에서 $x_{ss} = [x_1\ x_2]^T$라 두면
$0 = x_2$
$0 = -(2 + k_1)x_1 - (4 + k_2)x_2 + 1$
이다.
첫째 식에서 $x_2 = 0$이고, 이를 둘째 식에 대입하면
$(2 + k_1)x_1 = 1$
$y_{ss} = x_1 = \frac{1}{2 + k_1}$
이다.
따라서
$e_{ss} = 1 - y_{ss} = 1 - \frac{1}{2 + k_1} = 0.9$
이므로 $\frac{1}{2 + k_1} = 0.1$, $2 + k_1 = 10$, $k_1 = 8$이다.
정상상태 오차 식에는 k_2가 직접 들어가지 않으므로 보기는 k_1로 판별한다.

선지 판단

1번: O. $k_1 = 8$이면 $y_{ss} = \frac{1}{10}$, $e_{ss} = 1 - \frac{1}{10} = 0.9$가 된다. 제시된 보기 중 조건을 만족하는 연결이다.
2번: X. $k_1 = 4$이면 $y_{ss} = \frac{1}{6}$, $e_{ss} = \frac{5}{6}$이다. 틀린 표현은 $k_1 = 4$가 정상상태 오차 0.9를 만든다고 보는 판단이며, 올바르게는 $k_1 = 8$이어야 한다.
3번: X. $k_1 = -4$이면 $y_{ss} = -\frac{1}{2}$, $e_{ss} = \frac{3}{2}$이다. 틀린 표현은 음의 k_1로도 같은 오차가 나온다고 보는 점이며, 올바르게는 $k_1 = 8$일 때만 $e_{ss} = 0.9$가 된다.
4번: X. $k_1 = -8$이면 $y_{ss} = -\frac{1}{6}$, $e_{ss} = \frac{7}{6}$이다. 틀린 표현은 $k_1 = -8$이 조건을 만족한다고 보는 판단이며, 올바르게는 $k_1 = 8$이어야 한다.

오답 포인트

상태피드백 이득이 두 개 보이면 둘 다 정상상태 오차 식에 반드시 들어간다고 오해하기 쉽다. 이 문항은 $y = x_1$이고 정상상태에서 $x_2 = 0$이므로 오차가 사실상 k_1만으로 결정된다는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태방정식의 정상상태 오차 문제는 먼저 $\dot{x} = 0$을 두고 바로 0이 되는 상태변수를 찾는다. 그다음 출력식 $y = Cx$로 y_{ss}를 구해 $e_{ss} = r - y_{ss}$에 대입하면 된다.

암기 포인트

단위계단 정상상태에서는 $\dot{x} = 0$부터 놓고, 이 문항처럼 $y = x_1$이면 x_1를 먼저 구하면 오차가 바로 나온다.

NoteBase