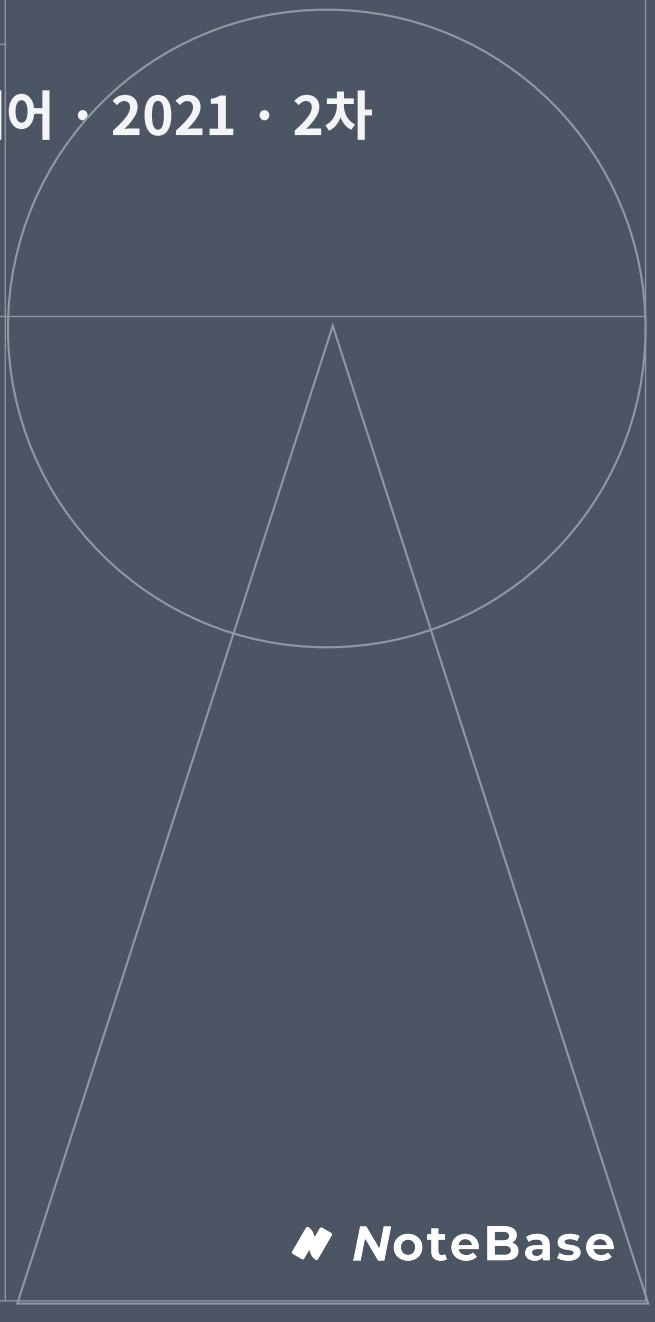
기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2021 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2021 · 2차

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2021 · 2차

문 1. 극점(pole)과 영점(zero)에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 시스템의 안정도(stability)는 극점에 의해 결정된다.

② 시스템의 과도응답(transient response)은 s 평면상의 허수축에 가까운 극점에 의하여 지배된다.

③ 시스템의 과도응답은 극점뿐만 아니라 영점에 의해 결정된다.

④ 우반평면에 영점을 갖는 시스템은 최소위상(minimum phase) 시스템이다.

정답 4번

출제 포인트

극점(pole)과 영점(zero)이 시스템의 안정도·과도응답에 각각 어떤 역할을 하는지, 그리고 최소위상 시스템의 정의를 정확히 구분하는지를 묻는다. 특히 우반평면(RHP) 영점을 갖는 시스템을 최소위상 시스템으로 잘못 알고 있는지가 이 문제의 핵심이다.

핵심 개념

전달함수의 극점은 특성방정식의 근으로, 시스템의 안정도와 과도응답의 형태(진동 여부, 감쇠 속도)를 지배한다. 특히 s 평면의 허수축(jω축)에 가까운 극점일수록 응답 속도가 느려 전체 응답을 지배하는데, 이를 지배극점(dominant pole)이라 한다. 반면 영점은 안정도 자체에는 영향을 주지 않지만 극점과 함께 과도응답의 크기·형태(오버슈트 등)에 영향을 준다. 최소위상 시스템은 모든 극점과 영점이 s 평면의 좌반평면(LHP)에 위치하는 시스템을 말한다. 우반평면(RHP)에 극점을 가지면 불안정 시스템이 되고, 우반평면에 영점을 가지면 안정할 수는 있으나 최소위상이 아닌 비최소위상(non-minimum phase) 시스템이 된다.

NoteBase

선지별 해설

① O: 시스템의 안정도는 특성방정식의 근인 극점의 위치(좌반평면인지 우반평면인지)에 의해 결정된다. 옳은 설명이다.
② O: 과도응답은 s 평면상의 허수축(jω축)에 가장 가까운 극점, 즉 지배극점에 의해 지배된다. 옳은 설명이다.
③ O: 과도응답의 형태는 극점만이 아니라 영점의 위치에 의해서도 영향을 받는다(영점은 응답의 오버슈트나 초기 반응 형태를 바꾼다). 옳은 설명이다.
④ X: 우반평면(RHP)에 영점을 갖는 시스템은 최소위상 시스템이 아니라 비최소위상(non-minimum phase) 시스템이다. 최소위상 시스템이 되려면 모든 극점과 영점이 좌반평면(LHP)에 있어야 한다. 틀린 표현 → 올바른 표현: "최소위상 시스템이다" → "비최소위상 시스템이다".

오답 포인트

극점과 영점의 역할을 혼동하면 안 된다. 안정도는 극점만으로 결정되지만, 과도응답의 형태는 극점과 영점 모두의 영향을 받는다는 점에서 ③을 옳지 않은 설명으로 착각하기 쉬우나 이는 맞는 설명이다. 반면 ④는 '우반평면 영점'과 '최소위상'을 짝지어 놓아 언뜻 그럴듯해 보이지만, 최소위상의 정의상 극점과 영점이 모두 좌반평면에 있어야 하므로 명백히 틀린 설명이다.

다시 나오면 이렇게 판단

선지에 '최소위상(minimum phase)'이라는 용어가 나오면 곧바로 '모든 극점과 영점이 좌반평면에 있는가'를 확인한다. 우반평면에 극점이나 영점이 하나라도 있으면 최소위상이 아니다. 또한 '안정도는 극점', '과도응답은 극점+영점'이라는 역할 구분을 먼저 떠올리고 선지를 대조한다.

암기 포인트

안정도=극점 위치로 결정, 과도응답=극점(지배극점)과 영점 모두 영향, 최소위상 시스템=모든 극점·영점이 좌반평면(LHP)에 위치, 우반평면에 극점이면 불안정·영점이면 비최소위상.

NoteBase

문 2. 주파수영역에서 단일 입출력 제어시스템의 해석에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 주파수 대역폭(bandwidth)이 커질수록 시스템의 응답속도는 느리다.

② 일반적으로 첨두공진치(resonant peak value)가 커지면 시간영역에서 단위계단응답의 오버슈트(overshoot)가 커진다.

③ 폐루프시스템의 안정도는 루프 전달함수(loop transfer function)의 나이퀴스트(Nyquist) 선도를 이용하여 판별할 수 있다.

④ 상대안정도(relative stability)는 일반적으로 이득여유(gain margin)와 위상여유(phase margin)로 나타낼 수 있다.

정답 1번

출제 포인트

주파수영역 해석에서 사용하는 대역폭, 첨두공진치, 나이퀴스트 선도, 이득여유·위상여유가 시간영역의 응답 특성(속도, 오버슈트, 안정도)과 어떻게 대응되는지를 묻는 문항이다. 각 주파수영역 지표가 실제로 무엇을 의미하는지 정확히 연결할 수 있어야 한다.

핵심 개념

대역폭(bandwidth)은 시스템이 입력 신호에 얼마나 빠르게 반응할 수 있는지를 나타내는 주파수영역 지표로, 대역폭이 클수록 고주파 성분까지 잘 따라가므로 시간영역에서의 상승시간(rise time)이 짧아지고 응답속도는 빨라진다. 즉 대역폭과 응답속도는 비례 관계이지 반비례 관계가 아니다. 첨두공진치(resonant peak value, M_p)는 주파수응답 크기 곡선에서 나타나는 최대값으로, 이 값이 커질수록 시스템의 감쇠비가 작아져 시간영역 단위계단응답의 오버슈트도 함께 커진다. 나이퀴스트 선도는 개루프(루프) 전달함수의 주파수응답 궤적으로부터 −1 지점에 대한 감김 횟수를 이용해 폐루프 시스템의 안정도를 판별하는 대표적 주파수영역 기법이다.
상대안정도는 시스템이 안정한계로부터 얼마나 여유가 있는지를 나타내며, 이득여유와 위상여유라는 두 가지 주파수영역 지표로 정량화한다.

선지별 해설

① X: 대역폭이 커질수록 시스템이 더 높은 주파수까지 신호를 통과시킬 수 있으므로 응답속도는 느려지는 것이 아니라 빨라진다. "느리다" → "빨라진다"로 고쳐야 옳은 설명이 된다.
② O: 첨두공진치가 커진다는 것은 감쇠비가 작아짐을 의미하고, 감쇠비가 작을수록 단위계단응답의 오버슈트는 커지므로 옳은 설명이다.
③ O: 폐루프시스템의 안정도는 개루프(루프) 전달함수의 나이퀴스트 선도를 그려 −1+j0점 주위의 감김 수로 판별할 수 있으므로 옳은 설명이다.
④ O: 상대안정도는 이득여유와 위상여유로 나타내는 것이 일반적이므로 옳은 설명이다.

NoteBase

오답 포인트

대역폭과 응답속도의 관계를 반대로 암기하면 ①을 옳은 설명으로 착각하기 쉽다. 대역폭이 크다는 것은 시스템이 더 넓은 주파수 범위, 즉 더 빠르게 변하는 신호에도 반응할 수 있다는 뜻이므로 응답속도가 빨라진다는 방향으로 이해해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

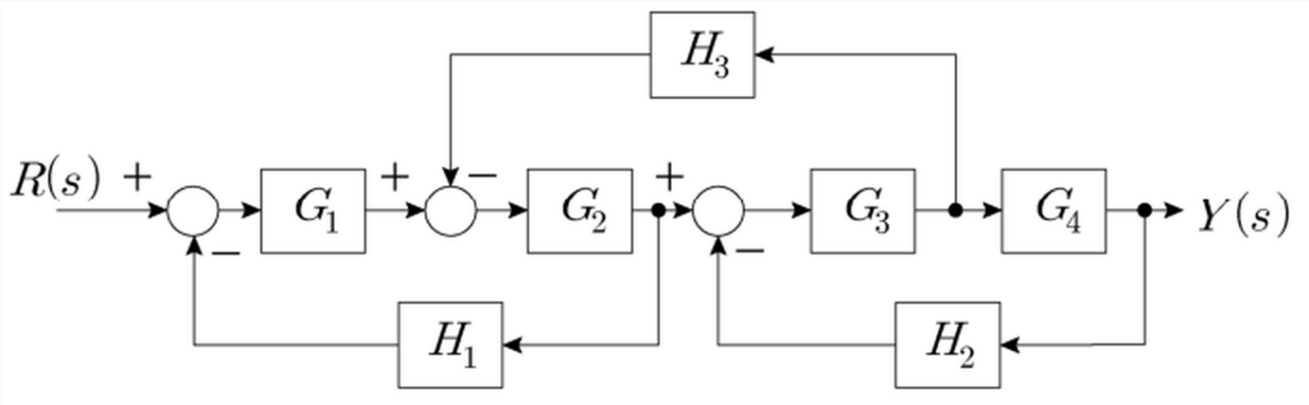
주파수영역 지표(대역폭, 첨두공진치, 이득여유, 위상여유)가 나오면 각각을 시간영역의 어떤 특성(응답속도, 오버슈트, 안정도 여유)과 짝짓는 문제라고 보고, 대역폭↑→응답속도↑(빨라짐), 첨두공진치↑→오버슈트↑ 두 관계를 먼저 떠올려 옳은 설명인지 판단한다.

암기 포인트

대역폭 크다 = 응답 빠르다. 첨두공진치 크다 = 오버슈트 크다. 폐루프 안정도 판별 = 나이퀴스트 선도(개루프 전달함수 기준). 상대안정도 = 이득여유 + 위상여유.

NoteBase

문 3. 다음 블록선도에서 시스템의 입출력 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)}$ 는?



① $\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2H_1+G_3G_4H_2-G_2G_3H_3}$
② $\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2H_1+G_3G_4H_2+G_2G_3H_3}$
③ $\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2H_1+G_3G_4H_2-G_2G_3H_3+G_1G_2G_3G_4H_1H_2}$
④ $\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2H_1+G_3G_4H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2G_3G_4H_1H_2}$

정답 4번

출제 포인트

세 개의 되먹임 루프(H1, H2, H3)가 서로 얽혀 있는 블록선도에서 전체 입출력 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)}$를 구하는 문제이다. 순방향 경로는 하나뿐이지만 되먹임 경로가 겹쳐 있어, 각 되먹임이 어느 구간을 감싸는지와 두 루프가 서로 마디를 공유하는지(접촉 여부)를 정확히 구분해야 분모를 올바르게 세울 수 있다.

조건 정리

순방향 경로는 $R \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to G_4 \to Y$ 하나이므로 분자는 $G_1G_2G_3G_4$로 고정된다. 되먹임은 세 개이다. H1은 G2 출력 마디에서 갈라져 첫 합산점으로 돌아가며 G1과 G2 구간을 감싸는 루프이다(음의 되먹임). H3는 G3 출력 마디에서 갈라져 두 번째 합산점으로 돌아가며 G2와 G3 구간을 감싸는 루프이다(음의 되먹임). H2는 최종 출력 Y에서 갈라져 세 번째 합산점으로 돌아가며 G3과 G4 구간을 감싸는 루프이다(음의 되먹임). H1의 루프와 H2의 루프는 서로 공통 마디가 없어 접촉하지 않는 루프이고, H3의 루프는 H1의 루프, H2의 루프 양쪽과 모두 마디를 공유해 접촉한다.

사용할 공식

메이슨 이득공식을 쓰면 $\frac{Y}{R}=\frac{\sum_k P_k\Delta_k}{\Delta}$이고, $\Delta = 1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\cdots$(합은 서로 접촉하지 않는 루프 조합에 대해서만 취한다)이다. 음의 되먹임 루프이득은 각각 $L_1=-G_1G_2H_1$, $L_2=-G_2G_3H_3$, $L_3=-G_3G_4H_2$이고, 서로 접촉하지 않는 조합은 L_1과 L_3 한 쌍뿐이다. 순방향 경로 $P_1=G_1G_2G_3G_4$는 모든 루프와 접촉하므로 $\Delta_1=1$이다.

NoteBase

계산 과정

분모를 직접 대입식으로 확인해도 같은 결과가 나온다. $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_3$에서
$-(L_1 + L_2 + L_3) = G_1G_2H_1 + G_2G_3H_3 + G_3G_4H_2$이고,
$L_1L_3 = (-G_1G_2H_1)(-G_3G_4H_2) = G_1G_2G_3G_4H_1H_2$이다. 따라서
$\Delta = 1 + G_1G_2H_1 + G_3G_4H_2 + G_2G_3H_3 + G_1G_2G_3G_4H_1H_2$가 되고, 전달함수는
$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_3G_4H_2 + G_2G_3H_3 + G_1G_2G_3G_4H_1H_2}$이다. 모든 되먹임이 음의 되먹임이므로 H1, H2, H3 항은 전부 분모에 더해지는 부호(+)를 가지며, H1 루프와 H2 루프가 서로 접촉하지 않기 때문에 그 곱인 $G_1G_2G_3G_4H_1H_2$ 항이 추가로 더해진다.

선지 판단

① G2G3H3 항의 부호가 (-)로 되어 있고 H1H2 교차항도 빠져 있다. H3도 음의 되먹임이므로 부호가 (+)여야 하고, H1과 H2 루프가 비접촉 관계이므로 교차항도 반영되어야 한다 → 오답.
② G2G3H3 항의 부호는 맞지만(+) H1H2 교차항 $G_1G_2G_3G_4H_1H_2$이 빠져 있다 → 오답.
③ H1H2 교차항은 포함되어 있지만 G2G3H3 항의 부호가 (-)로 잘못되어 있다 → 오답.
④ G1G2H1, G3G4H2, G2G3H3 세 되먹임 항이 모두 (+) 부호로 들어가 있고, 비접촉 루프쌍인 H1과 H2의 교차항 $G_1G_2G_3G_4H_1H_2$까지 정확히 반영되어 있다 → 정답.

오답 포인트

이 문제에서 틀리기 쉬운 지점은 두 가지이다. 첫째, 블록선도 위의 (-) 표시는 합산점에 들어가는 신호의 부호일 뿐이며, 음의 되먹임 루프는 메이슨 공식의 $1 - \sum L_i$ 구조를 거치면서 최종 분모에는 결국 (+)로 나타난다. 이를 헷갈려 H3 항의 부호를 (-)로 남겨두면 ①, ③처럼 틀린다. 둘째, H1의 루프(G1~G2 구간)와 H2의 루프(G3~G4 구간)는 공통 마디가 없는 비접촉 루프이므로 곱항 $G_1G_2G_3G_4H_1H_2$이 반드시 추가되어야 하는데, 이를 빠뜨리면 ②처럼 틀린다.

다시 나오면 이렇게 판단

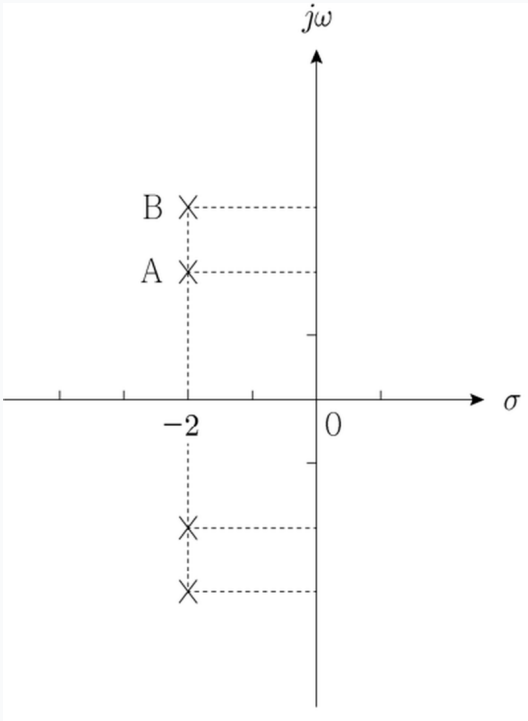
여러 되먹임이 겹친 블록선도가 나오면 먼저 순방향 경로를 하나로 확정해 분자를 정하고, 각 되먹임 되먹임 화살표가 정확히 어느 블록 구간을 감싸는지(어느 마디에서 갈라져 어느 합산점으로 들어가는지) 표시한다. 그 다음 모든 루프이득에 합산점의 부호(대개 음의 되먹임이면 -)를 반영해 $-\sum L_i$를 만들고, 마디를 전혀 공유하지 않는 두 루프가 있는지 찾아 그 곱을 $+\sum L_iL_j$로 더한다. 순방향 경로가 모든 루프와 접촉하면 $\Delta_1 = 1$이므로 분자는 그대로 곱해서 답으로 삼는다.

암기 포인트

음의 되먹임 루프는 분모에서 결국 (+)로 나타난다. 서로 마디를 공유하지 않는 두 루프가 있으면 그 곱을 분모에 추가로 더해야 한다(메이슨 공식의 비접촉 루프쌍 항). 순방향 경로가 모든 루프를 지나가면 그 경로에 대한 Δ_k는 1이다.

NoteBase

문 4. 다음 그림과 같이 2차 표준형 시스템의 극점의 위치가 A, B와 같이 주어질 때, 시스템의 응답특성에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① 극점 B에서의 상승시간(rise time)이 A보다 감소한다.

② 극점 B에서의 최대 오버슈트(maximum overshoot)가 A보다 크다.

③ 극점 B에서의 정착시간(settling time)이 A보다 감소한다.

④ 극점 B에서의 감쇠비(damping ratio)가 A보다 작다.

정답 3번

출제 포인트

2차 표준형 시스템의 극점 위치(σ, jω)만 보고 상승시간·최대 오버슈트·정착시간·감쇠비가 어떻게 변하는지 판단하는 문제이다. 극점의 실수부(σ)와 허수부(jω) 각각이 어떤 응답 특성과 대응되는지를 구분하는 것이 핵심이다.

조건 정리

그림에서 극점 A와 극점 B는 모두 같은 수직선 $\sigma = -2$ 위에 있다. 즉 두 극점의 실수부는 -2로 서로 같다. 다만 허수부는 B가 A보다 더 크다(B가 A보다 원점에서 더 멀리, 더 위쪽에 있다).

NoteBase

사용할 공식

2차 표준형 극점 $s = -\sigma + j\omega_d$(감쇠 고유주파수 ω_d, 고유주파수 $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$)에 대해 다음 근사식이 성립한다.
정착시간(2% 기준): $t_s \approx \frac{4}{\sigma}$ — 극점의 실수부(σ)에만 의존한다.
상승시간: $t_r \approx \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$ 로 근사되며, ω_d(허수부)가 커질수록 감소하는 경향을 가진다.
감쇠비: $\zeta = \cos\theta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}}$, 여기서 θ는 극점이 음의 실수축과 이루는 각이다.
최대 오버슈트: $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ 로, 감쇠비 ζ가 작을수록 커진다.

계산 과정

A, B는 실수부가 $\sigma = -2$로 동일하고 허수부만 B가 A보다 크다.
정착시간은 $t_s \approx 4/\sigma$로 실수부에만 의존하므로, 실수부가 같은 A와 B는 정착시간이 서로 같다. 따라서 B의 정착시간이 A보다 감소한다는 것은 성립하지 않는다.
허수부(즉 ω_d)가 커지면 극점이 음의 실수축에서 더 많이 회전한 위치, 즉 각 θ가 커진 위치에 있게 되어 $\zeta = \cos\theta$는 작아진다. 따라서 B의 감쇠비는 A보다 작다.
감쇠비가 작아지면 오버슈트 공식 $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$에서 지수의 크기가 작아져 M_p가 커지므로, B의 최대 오버슈트는 A보다 크다.
또한 ω_d가 커지면 진동이 더 빠르게 진행되어 응답이 목표값 부근에 더 빨리 도달하므로, B의 상승시간은 A보다 감소한다.

선지 판단

① 극점 B에서의 상승시간이 A보다 감소한다. → O. B는 A보다 허수부(ω_d)가 커서 응답이 더 빠르게 진동하며 목표값에 접근하므로 상승시간이 짧아진다.
② 극점 B에서의 최대 오버슈트가 A보다 크다. → O. B는 감쇠비가 A보다 작으므로 오버슈트는 더 커진다.
③ 극점 B에서의 정착시간이 A보다 감소한다. → X. 정착시간은 극점의 실수부(σ)에만 의존하는데, A와 B는 실수부가 -2로 동일하므로 정착시간은 서로 같다 → 감소한다는 설명은 틀렸다.
④ 극점 B에서의 감쇠비가 A보다 작다. → O. B는 A보다 허수부가 커서 극점이 음의 실수축에서 더 벌어진 각도에 위치하므로 $\zeta = \cos\theta$가 더 작다.

오답 포인트

정착시간을 감쇠비나 허수부와 연결지어 판단하면 틀리기 쉽다. 정착시간은 오직 극점의 실수부(감쇠율 σ)에 의해서만 결정되므로, 실수부가 같으면 허수부가 달라도 정착시간은 같다는 점을 놓치지 않아야 한다. 반대로 상승시간·오버슈트·감쇠비는 허수부(또는 각도 θ)의 변화에 민감하게 반응한다는 점과 구분해서 기억해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

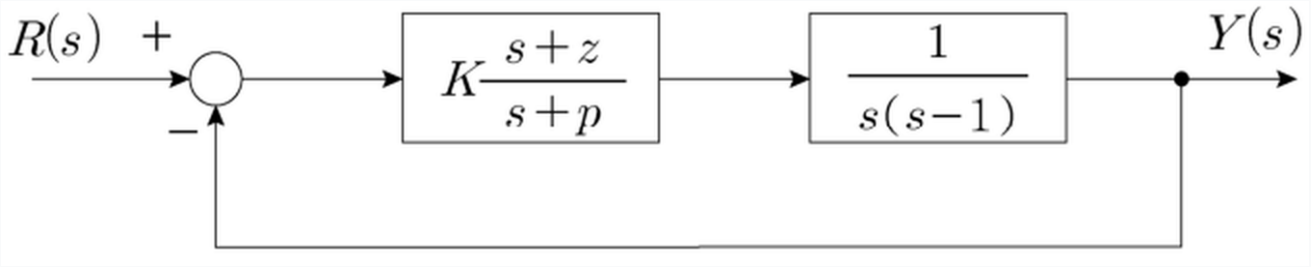
s평면 위에 극점 두 개가 주어지면 먼저 실수부와 허수부를 따로 비교한다. 실수부(σ)가 같다면 정착시간은 항상 같다고 판단하고, 허수부가 다르면 그 차이로 상승시간·오버슈트·감쇠비의 변화 방향(허수부가 클수록 상승시간 ↓, 오버슈트 ↑, 감쇠비 ↓)을 판단한다.

암기 포인트

정착시간 $t_s \approx 4/\sigma$는 실수부(σ)만의 함수 — 실수부가 같으면 정착시간도 같다. 감쇠비 $\zeta = \cos\theta$는 허수부가 커질수록(각도가 커질수록) 작아지고, 감쇠비가 작아질수록 오버슈트는 커지고 상승시간은 짧아진다.

NoteBase

문 5. 다음 그림과 같은 피드백 제어시스템이 안정하기 위한 필요조건으로 옳지 않은 것은? (단, $K>0$, $p>0$, $z>0$이고 $p \neq z$이다)



① $z<p-1$

② $p>1$

③ $K>\frac{p(p-1)}{p-z-1}$

④ $K<p$

정답 4번

출제 포인트

블록선도로 주어진 피드백 제어시스템의 특성방정식을 구하고, Routh-Hurwitz 안정판별법으로부터 얻어지는 필요조건들을 정확히 세울 수 있는지를 묻는 문제이다. 특히 계수 부호로부터 얻는 조건과 1차 소거행(Routh 배열 2행)에서 얻는 조건을 혼동하지 않아야 한다.

조건 정리

전향 경로 전달함수는 $K\frac{s+z}{s+p}\cdot\frac{1}{s(s-1)}$이고 피드백은 단위 음(-) 피드백이다. 주어진 조건은 $K>0,\ p>0,\ z>0,\ p\neq z$이다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식은 $s(s-1)(s+p)+K(s+z)=0$이며, 이를 전개하면 $s^3+(p-1)s^2+(K-p)s+Kz=0$이다. 3차 다항식의 Routh 배열은 다음과 같다.arrayc|ccs^3 & 1 & K-p\ s^2 & p-1 & Kz\ s^1 & ((p-1)(K-p)-Kz)/(p-1) & 0\ s^0 & Kz & array안정하려면 1열의 모든 원소가 양수여야 한다.

NoteBase

계산 과정

전개 과정: $s(s-1)(s+p) = s^3 + (p-1)s^2 - ps$이고 여기에 $K(s+z) = Ks + Kz$를 더하면 $s^3 + (p-1)s^2 + (K-p)s + Kz = 0$을 얻는다.

1열의 원소가 모두 양수여야 하므로 다음이 필요하다.
(1) $p - 1 > 0$, 즉 $p > 1$ — 이는 선지 ②에 해당한다.
(2) $K - p > 0$, 즉 $K > p$ — 계수가 양수여야 한다는 조건에서 바로 나오며, 선지 ④ $K < p$와는 정반대이다.
(3) $(p-1)(K-p) - Kz > 0$을 정리하면 $K(p-1-z) > p(p-1)$이 된다. 우변 $p(p-1)$은 $p > 1$이므로 양수이고 $K > 0$이므로, 좌변이 양수가 되려면 반드시 $p - 1 - z > 0$, 즉 $z < p - 1$이어야 한다 — 이는 선지 ①에 해당한다. 이 부호 조건이 성립할 때에만 양변을 $p - 1 - z$로 나눌 수 있고, $K > \frac{p(p-1)}{p-z-1}$을 얻는다 — 이는 선지 ③과 정확히 일치한다.

따라서 ①·②·③은 모두 안정을 위한 필요조건으로 성립하지만, ④는 $K > p$라는 필요조건과 정반대의 부등호를 제시하고 있어 옳지 않다.

선지 판단

① $z < p - 1$: O, 계수 조건 (3)에서 $K(p-1-z) > p(p-1) > 0$이 성립하려면 반드시 필요한 조건이다.
② $p > 1$: O, 특성방정식 2차항 계수 $p - 1$이 양수여야 하는 조건과 같다.
③ $K > \frac{p(p-1)}{p-z-1}$: O, ①이 성립하는 상황에서 Routh 배열 s^1행 조건을 정리하면 그대로 얻어지는 식이다.
④ $K < p$: X → $K < p$가 아니라 $K > p$가 필요조건이다(특성방정식 s^1항 계수 $K - p$가 양수여야 하므로). 부등호 방향이 반대로 되어 있어 옳지 않은 선지이다.

오답 포인트

①②③을 맞는 조건으로 오인해 소거하다 보면 남는 ④를 정답으로 고르기는 쉽지만, 왜 ④가 틀렸는지 이유를 정확히 알아야 한다. 특성방정식 $s^3 + (p-1)s^2 + (K-p)s + Kz = 0$에서 s^1 계수 $K - p$가 양수여야 안정하므로 필요조건은 $K > p$이며, ④는 이를 뒤집어 $K < p$라고 제시하고 있다. 부호를 반대로 쓰는 실수(계수 조건과 최종 부등식의 방향을 헷갈리는 것)가 가장 흔한 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도가 주어지면 먼저 폐루프 특성방정식을 직접 전개해 다항식 형태로 만든다. 이후 Routh 배열을 세워 1열의 모든 원소(즉 각 계수와, 배열에서 파생되는 조건식)가 양수인지 하나씩 확인한다. 선지에 등장하는 부등호의 방향이 실제로 유도한 부등식과 같은 방향인지 반드시 대조한다.

NoteBase

암기 포인트

3차 특성방정식 $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$이 안정하려면 모든 계수가 양수이고 $a_1a_2 > a_0a_3$이어야 한다. 계수 부호 조건에서 곧바로 나오는 필요조건(부등호 방향)을 선지와 비교할 때 방향이 뒤집혀 있지 않은지 항상 확인한다.

NoteBase

문 6. 함수 $y(t)$의 라플라스 변환 $Y(s)$가 다음과 같이 주어질 때, ω와 T의 값은? (단, $u_s(t)$는 단위계단함수이다)

$y(t) = e^{-2(t-1)}\cos(\omega(t-1))u_s(t-1)$
$Y(s) = e^{-Ts}\frac{s+2}{s^2+4s+13}$

① ω: 3, T: 1

② ω: 3, T: 2

③ ω: $\sqrt{13}$, T: 1

④ ω: $\sqrt{13}$, T: 2

정답 1번

출제 포인트

시간이동(지연)된 감쇠 코사인 함수의 라플라스 변환식을 보고 감쇠계수, 진동각주파수 ω, 지연시간 T를 역으로 읽어내는 문제이다. 시간축 이동 성질 $f(t-T)u_s(t-T) \leftrightarrow e^{-Ts}F(s)$와 감쇠 코사인의 표준 변환쌍을 결합해서 분모의 이차식을 완전제곱 형태로 바꾸는 것이 핵심이다.

조건 정리

주어진 시간영역 함수는 $y(t) = e^{-2(t-1)}\cos(\omega(t-1))u_s(t-1)$이다. 이는 $f(\tau) = e^{-2\tau}\cos(\omega\tau)u_s(\tau)$를 $\tau = t-1$만큼, 즉 $T = 1$만큼 시간축으로 지연시킨 형태이다. 이에 대응하는 라플라스 변환은 $Y(s) = e^{-Ts}\frac{s+2}{s^2+4s+13}$로 주어져 있으므로, 분모를 완전제곱 형태로 정리해 ω를 구하고 지연시간을 비교해 T를 구하면 된다.

사용할 공식

감쇠 코사인의 라플라스 변환: $\mathcal{L}\{e^{-a\tau}\cos(\omega\tau)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$. 시간이동 성질: $\mathcal{L}\{f(t-T)u_s(t-T)\} = e^{-Ts}F(s)$.

계산 과정

먼저 $f(\tau) = e^{-2\tau}\cos(\omega\tau)u_s(\tau)$의 라플라스 변환을 공식에 대입하면 $F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+\omega^2}$가 된다. 이때 $y(t) = f(t-1)u_s(t-1)$이므로 시간이동 성질에 의해 $Y(s) = e^{-1\cdot s}F(s) = e^{-s}\frac{s+2}{(s+2)^2+\omega^2}$이다. 이를 주어진 $Y(s) = e^{-Ts}\frac{s+2}{s^2+4s+13}$와 비교한다. 지수부를 비교하면 $e^{-s} = e^{-Ts}$이므로 $T = 1$이다. 분모를 비교하면 $(s+2)^2+\omega^2 = s^2+4s+4+\omega^2$이고, 이는 $s^2+4s+13$과 같아야 하므로 $4+\omega^2 = 13$, 즉 $\omega^2 = 9$이다. ω는 각주파수로 양수 값을 취하므로 $\omega = 3$이다. 따라서 $\omega = 3$, $T = 1$이다.

NoteBase

선지 판단

① ω=3, T=1: O. 위 계산 과정에서 구한 값과 정확히 일치한다.
② ω=3, T=2: X. ω=3은 맞지만 T=2는 틀린 값이다. 지연시간은 y(t) 정의식에서 $(t-1)$로 주어진 그대로 1이며, 분모의 상수항 4를 완전제곱 전개 상수 4와 혼동하여 T를 2로 잘못 볼 경우 나오는 오답이다.
③ ω=√13, T=1: X. T=1은 맞지만 ω=√13은 틀린 값이다. 분모 상수항 13을 그대로 ω^2으로 착각하여 $(s+2)^2$의 전개항 4를 빼지 않고 계산하면 나오는 오답이다.
④ ω=√13, T=2: X. ω, T 모두 위와 같은 두 가지 오류(13을 그대로 사용, 지연시간 혼동)가 겹친 오답이다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 분모 $s^2+4s+13$의 상수항 13을 곧바로 ω^2으로 오인하는 것이다. 실제로는 $(s+2)^2=s^2+4s+4$이므로 13에서 4를 뺀 9가 ω^2이 되어야 한다. 또한 $y(t)$의 정의식에 이미 $(t-1)$로 지연시간이 명시되어 있으므로, $Y(s)$의 지수부 e^{-Ts}와 별도로 새로운 값을 유추할 필요 없이 $T=1$임을 바로 알 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

$e^{-a\tau}\cos(\omega\tau)$ 꼴이 시간이동되어 나오면, 먼저 지연시간 T는 시간영역 함수의 $(t-T)$ 표현에서 그대로 읽고, 라플라스 변환식의 분모를 $(s+a)^2+\omega^2$ 형태로 완전제곱 전개해 비교한 뒤 ω^2을 구하는 순서로 접근한다. 분모 상수항을 바로 ω^2로 오독하지 않도록 주의한다.

암기 포인트

$\mathcal{L}\{e^{-a\tau}\cos(\omega\tau)u_s(\tau)\}=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$와 시간이동 성질 $\mathcal{L}\{f(t-T)u_s(t-T)\}=e^{-Ts}F(s)$를 한 세트로 기억해 둔다. 분모 이차식은 항상 완전제곱으로 펼쳐서 실수부와 허수부(감쇠계수와 각주파수)를 분리해 낸다.

NoteBase

문 7. 제어대상의 단위임펄스응답 $y(t)$가 다음과 같이 주어질 때, 입출력 전달함수 $G(s)$는? (단, $t \geq 0$이다)

$y(t) = 3e^{t} - 3e^{-t}(\sin(t) + \cos(t))$

① $\frac{3(s-4)}{(s+1)(s^2-2s+2)}$
② $\frac{3(s+4)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$
③ $\frac{s-4}{(s+1)(s^2-2s+2)}$
④ $\frac{s+4}{(s-1)(s^2+2s+2)}$

정답 2번

출제 포인트

단위임펄스응답 $y(t)$가 주어졌을 때 이를 라플라스 변환하면 곧바로 전달함수 $G(s)$가 된다는 사실을 이용하는 문제이다. 임펄스응답의 라플라스 변환이 전달함수와 같다는 성질과, 지수함수·감쇠 정현파의 라플라스 변환 공식을 정확히 적용할 수 있는지를 확인한다.

조건 정리

$y(t) = 3e^{t} - 3e^{-t}\sin(t) - 3e^{-t}\cos(t)$, $t \geq 0$이며, 이는 단위임펄스응답이므로 $G(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$이다.

사용할 공식

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$, $\mathcal{L}\{e^{-at}\cos(\omega t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$를 $a = 1, \omega = 1$로 적용한다.

계산 과정

첫째 항: $\mathcal{L}\{3e^{t}\} = \frac{3}{s-1}$.
둘째·셋째 항: $\mathcal{L}\{3e^{-t}\sin(t)\} = \frac{3}{(s+1)^2+1} = \frac{3}{s^2+2s+2}$, $\mathcal{L}\{3e^{-t}\cos(t)\} = \frac{3(s+1)}{s^2+2s+2}$.
따라서 $Y(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{3}{s^2+2s+2} - \frac{3(s+1)}{s^2+2s+2} = \frac{3}{s-1} - \frac{3(s+2)}{s^2+2s+2}$.
통분하면 분모는 $(s-1)(s^2+2s+2)$이고, 분자는
$3(s^2+2s+2) - 3(s+2)(s-1) = (3s^2+6s+6) - (3s^2+3s-6) = 3s+12 = 3(s+4)$.
따라서 $G(s) = Y(s) = \frac{3(s+4)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$이다.

NoteBase

선지 판단

① $\frac{3(s-4)}{(s+1)(s^2-2s+2)}$: X. 분모의 극이 $s=-1$과 $1\pm j$로 계산 결과와 다르고 분자 부호도 반대이다.
② $\frac{3(s+4)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$: O. 계산 결과와 정확히 일치한다.
③ $\frac{s-4}{(s+1)(s^2-2s+2)}$: X. 분자에 계수 3이 빠져 있고 분모의 극도 계산 결과와 다르다.
④ $\frac{s+4}{(s-1)(s^2+2s+2)}$: X. 분모는 맞지만 분자의 계수 3이 빠져 있어 틀린 표현이다 → $\frac{3(s+4)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$가 올바른 표현이다.

오답 포인트

① 지수함수 항 $3e^{t}$의 극을 $s=1$이 아닌 $s=-1$로 잘못 놓으면 분모 부호가 반대로 뒤집힌다. ③·④ 분자의 배율 3을 누락하면 극은 맞아도 분자가 틀린다. cos 항의 라플라스 변환에서 분자를 $s+1$이 아닌 s로 잘못 쓰면 최종 분자의 상수항이 달라져 4가 아닌 다른 값이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위임펄스응답이 주어지면 별도 조작 없이 그 라플라스 변환이 곧 전달함수라는 점부터 확정한다. 지수함수는 $e^{at}\to 1/(s-a)$로 부호에 유의해서 변환하고, 감쇠 정현파·여현파는 이동정리($s\to s+a$)를 적용한 뒤 통분하여 분자를 전개한다.

암기 포인트

임펄스응답 $y(t)$의 라플라스 변환 $\mathcal{L}\{y(t)\}$이 곧 전달함수 $G(s)$이다. $\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(\omega t)\}=\omega/((s+a)^2+\omega^2)$, $\mathcal{L}\{e^{-at}\cos(\omega t)\}=(s+a)/((s+a)^2+\omega^2)$ 공식을 기억해 둔다.

NoteBase

문 8. 전달함수 $G(s)=\frac{1}{s+1}$에 각주파수 ω[rad/sec]인 정현파 입력이 주어지고 그 입출력비가 -3dB일 때, 출력되는 정현파의 주파수[Hz]와 위상지연[rad]은? (단, 각주파수 $\omega>0$이고 $\log_{10}2\approx0.3$이다)

① 주파수 $\frac{1}{2\pi}$ 위상지연 $\frac{\pi}{4}$

② 주파수 $\frac{1}{2\pi}$ 위상지연 $\frac{\pi}{3}$

③ 주파수 1 위상지연 $\frac{\pi}{4}$

④ 주파수 1 위상지연 $\frac{\pi}{3}$

정답 1번

출제 포인트

1차 지연요소 $G(s)=\frac{1}{s+1}$의 주파수응답에서 크기(이득)가 특정 dB 값을 가지는 각주파수를 구하고, 그 각주파수를 Hz 단위 주파수로 환산하며 동시에 위상지연을 구하는 문제이다. 진폭비를 dB로 표현하는 방법과 각주파수-주파수 변환식, 위상각 계산식을 모두 알아야 풀 수 있다.

조건 정리

전달함수는 $G(s)=\frac{1}{s+1}$이고, 정현파 입력의 각주파수는 $\omega>0$이다. 주파수응답은 $s=j\omega$를 대입한 $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$이다. 입출력비(이득)가 -3dB가 되는 조건에서 ω를 구하고, 이때의 주파수(Hz)와 위상지연(rad)을 구한다.

사용할 공식

크기: $|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$. 이득의 dB 표현: $20\log_{10}|G(j\omega)|$. 위상: $\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}(\omega)$. 각주파수와 주파수의 관계: $\omega=2\pi f$.

계산 과정

이득이 -3dB이므로 $20\log_{10}|G(j\omega)|=-3$이다. 즉 $\log_{10}|G(j\omega)|=-0.15$인데, 문제에서 준 근사 $\log_{10}2\approx0.3$을 이용하면 $-3\text{dB}=-20\log_{10}\sqrt{2}$와 같은 값이 되어($\because$ _10√(2)=12_102≈0.15), $|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$임을 알 수 있다. 따라서 $\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\omega^2+1=2$, 즉 $\omega=1$[rad/sec]이다($\omega>0$ 조건). 이 각주파수를 Hz로 바꾸면 $f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}$[Hz]이다. 위상은 $\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}(\omega)=-\tan^{-1}(1)=-\frac{\pi}{4}$이므로 위상지연의 크기는 $\frac{\pi}{4}$[rad]이다.

NoteBase

선지 판단

① O: 주파수 $\frac{1}{2\pi}$[Hz], 위상지연 $\frac{\pi}{4}$[rad]로 계산 결과와 정확히 일치한다.
② X: 위상지연이 $\frac{\pi}{3}$로 되어 있으나 실제 위상지연은 $\frac{\pi}{4}$이므로 틀렸다 → 올바른 값은 $\frac{\pi}{4}$.
③ X: 주파수가 1로 되어 있으나 이는 각주파수 $\omega = 1$[rad/sec]을 그대로 쓴 것이고, 실제 주파수(Hz)는 $\omega/(2\pi) = \frac{1}{2\pi}$이다 → 올바른 주파수는 $\frac{1}{2\pi}$.
④ X: 주파수와 위상지연이 모두 잘못되었다. 주파수는 $\frac{1}{2\pi}$이어야 하고 위상지연은 $\frac{\pi}{4}$이어야 한다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 각주파수 ω와 주파수 f를 혼동하는 것이다. 문제에서 $\omega = 1$[rad/sec]로 계산했다면 이를 그대로 답으로 쓰지 말고 반드시 $f = \omega/(2\pi)$로 환산해야 한다(③, ④ 오답 유형). 또한 위상은 $-\tan^{-1}(\omega)$로 계산되며 $\omega = 1$일 때 정확히 $\tan^{-1}(1) = \pi/4$임을 기억해야 하고, 이를 $\pi/3$과 혼동하지 않아야 한다(②, ④ 오답 유형).

다시 나오면 이렇게 판단

1차 지연요소 $\frac{1}{Ts+1}$ 형태에서 이득이 -3dB가 되는 지점은 항상 절점각주파수(코너 주파수) $\omega = 1/T$이고 이때 위상은 항상 $-\pi/4$[rad]가 된다는 것을 공식처럼 기억해 둔다. 이번 문제는 $T = 1$이므로 절점각주파수가 $\omega = 1$이 되고, 이를 Hz로 바꾸는 것과 위상지연 부호(지연이므로 크기로 답함)를 놓치지 않는 것이 핵심이다.

암기 포인트

1차 지연요소 $\frac{1}{Ts+1}$의 절점각주파수(-3dB점)는 $\omega = 1/T$이며, 그 지점에서 위상지연은 항상 $\pi/4$[rad](45□)이다. 각주파수를 주파수(Hz)로 바꿀 때는 반드시 $f = \omega/(2\pi)$를 적용한다.

NoteBase

문 9. 다음과 같은 상태공간방정식에서 특성방정식(characteristic equation)의 근궤적(root locus)에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (단, $K > 0$이고, $j = \sqrt{-1}$이다)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

① 점근선의 각도는 60°, 180°, 300°이다.

② 점근선의 실수축과 교차점은 -2이다.

③ 근궤적의 허수축과 교차점은 $+j2$와 $-j2$이다.

④ 근궤적의 허수축과 교차점에서의 K값은 20이다.

정답 2번

출제 포인트

상태공간방정식에서 특성방정식을 구하고, 그로부터 얻은 개루프 전달함수의 극점을 이용해 근궤적의 점근선 각도·점근선의 실수축 교차점(centroid)·허수축과의 교차점(K값 포함)을 계산할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

시스템 행렬 A에서 3행이 [-K, -4, -5]이므로 특성방정식은 $s^3 + 5s^2 + 4s + K = 0$이다. 이를 $K = 0$인 부분과 분리하면 $s(s^2 + 5s + 4) + K = 0$, 즉 $s(s+1)(s+4) + K = 0$이 되어 개루프 전달함수는 $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$이다. 극점은 $0,\ -1,\ -4$의 3개이고 유한 영점은 없다(n=3, m=0).

사용할 공식

점근선 각도: $\theta_k = \frac{(2k+1)\cdot 180^\circ}{n-m}$ (k=0,1,2,⋯). 점근선의 실수축 교차점(centroid): _a=Σ(극점)-Σ(영점)n-m. 허수축 교차점은 라우스(Routh) 배열의 s^1행을 0으로 놓아 임계 K를 구하고, 그 K를 s^2행에서 나온 보조방정식에 대입해 구한다.

NoteBase

계산 과정

점근선 각도: n-m=3이므로 $\theta = \frac{180^\circ}{3}, \frac{3\cdot 180^\circ}{3}, \frac{5\cdot 180^\circ}{3} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$이다.
점근선의 실수축 교차점: $\sigma_a = \frac{0+(-1)+(-4)}{3} = \frac{-5}{3} \approx -1.67$이다.
허수축 교차점: 라우스 배열은 s^3행 $[1, 4]$, s^2행 $[5, K]$, s^1행 $\left[\frac{20-K}{5}\right]$, s^0행 $[K]$이다. 임계값은 $20 - K = 0 \Rightarrow K = 20$이고, 이때 s^2행의 보조방정식 $5s^2 + K = 0$에 대입하면 $5s^2 + 20 = 0 \Rightarrow s^2 = -4 \Rightarrow s = \pm j2$이다.

선지 판단

① 점근선의 각도는 60°, 180°, 300°이다 → O. 계산 결과와 일치한다.
② 점근선의 실수축과 교차점은 −2이다 → X. 실제 교차점은 $-5/3 \approx -1.67$이므로 −2가 아니다. 틀린 표현 → 올바른 표현: "점근선의 실수축과 교차점은 −5/3이다."
③ 근궤적의 허수축과 교차점은 +j2와 −j2이다 → O. 라우스 배열의 보조방정식에서 $s = \pm j2$로 확인된다.
④ 근궤적의 허수축과 교차점에서의 K값은 20이다 → O. 라우스 배열의 s^1행이 0이 되는 임계값이 K=20이다.

오답 포인트

점근선의 실수축 교차점을 구할 때 극점의 개수(3개)로 나누는 것을 빠뜨리고 단순히 극점 합만 답으로 쓰거나(−5), 반올림하여 −2로 잘못 암산하는 경우가 흔하다. −5/3은 정확히 −2가 아니므로 근사치를 답으로 고르지 않도록 주의한다.

다시 나오면 이렇게 판단

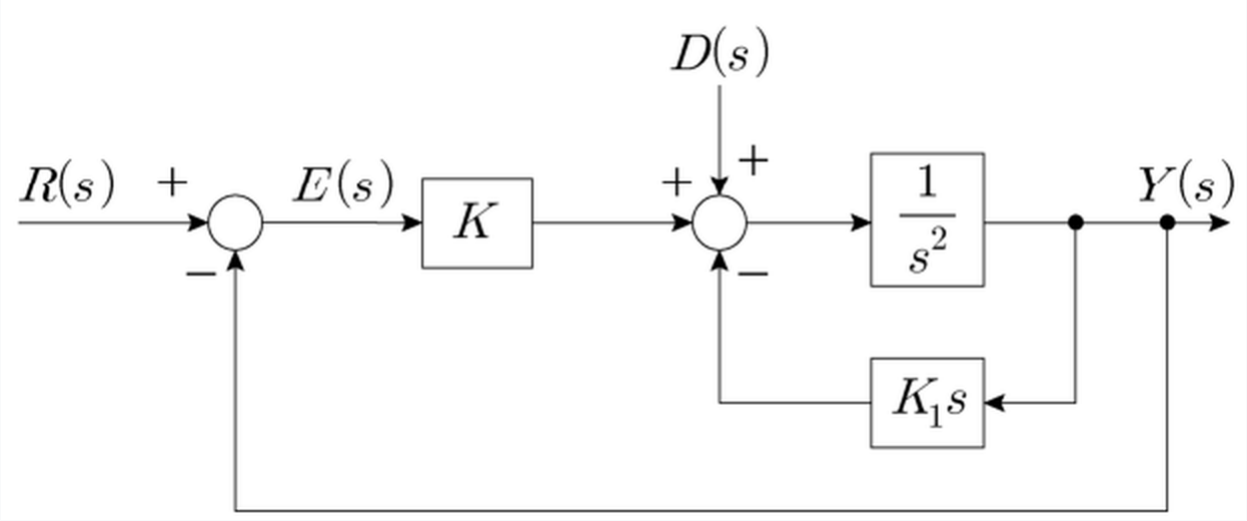
상태공간 행렬의 마지막 행에서 바로 특성방정식의 계수를 읽어낸 뒤, 이를 개루프 전달함수 형태로 인수분해하여 극점을 확인하는 순서로 접근한다. 이후 점근선 각도·centroid·라우스 배열을 이용한 허수축 교차점 계산을 순차적으로 수행하면 각 선지를 빠짐없이 검증할 수 있다.

암기 포인트

점근선 실수축 교차점 공식은 $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$이며, 분수 형태 그대로 계산해야 하고 임의로 정수로 반올림하면 안 된다. 허수축 교차점(K값 포함)은 라우스 배열의 s^1행을 0으로 두는 임계 K와, 그 K를 대입한 s^2행의 보조방정식에서 구한다는 점을 함께 기억해 둔다.

NoteBase

문 10. 다음 그림과 같은 피드백 제어시스템의 안정도와 성능에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (단, 기준입력 $R(s)=\frac{1}{s^2}$이고 외란입력 $D(s)=\frac{1}{s}$이며, $K>0$, $K_1>0$이다)



① 폐루프시스템은 항상 안정하다.

② K는 고정하고 K_1이 증가하면 $R(s)$에 대한 정상상태오차 크기는 증가한다.

③ K는 고정하고 K_1이 증가하면 $D(s)$에 대한 정상상태오차 크기는 감소한다.

④ K_1은 고정하고 K가 증가하면 $R(s)$와 $D(s)$에 대한 정상상태오차 크기는 모두 감소한다.

정답 3번

출제 포인트

블록선도를 전달함수로 정리해 폐루프 특성방정식의 안정성을 판단하고, 기준입력 $R(s)$와 외란입력 $D(s)$ 각각에 대한 정상상태오차가 이득 K, K_1에 어떻게 의존하는지 계산하는 문제다. K_1이 두 오차에 서로 다르게(하나는 영향, 다른 하나는 무영향) 작용한다는 점이 핵심 함정이다.

조건 정리

전향경로: 오차 $E(s)=R(s)-Y(s)$가 이득 K를 지나고, 그 출력에 외란 $D(s)$가 더해지고 내부 피드백 $K_1sY(s)$가 빼진 뒤 $1/s^2$ 블록을 지나 $Y(s)$가 된다. 즉 $s^2Y(s)=KE(s)+D(s)-K_1sY(s)$이다. 외부는 단위 음(-) 피드백이므로 $E(s)=R(s)-Y(s)$. 조건은 $R(s)=1/s^2$, $D(s)=1/s$, $K>0$, $K_1>0$이다.

사용할 공식

위 관계식을 $Y(s)$에 대해 정리하면 $Y(s)(s^2+K_1s+K)=KR(s)+D(s)$를 얻는다. 오차는 $E(s)=R(s)-Y(s)=\frac{R(s)(s^2+K_1s)-D(s)}{s^2+K_1s+K}$이며, 정상상태오차는 최종값 정리 $e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)$로 구한다. 안정성은 특성방정식 $s^2+K_1s+K=0$의 라우스-후르비츠 판별(2차식은 모든 계수가 양수이면 항상 안정)로 판단한다.

NoteBase

계산 과정

① 안정도: 특성방정식은 $s^2 + K_1 s + K = 0$이며, $K > 0, K_1 > 0$이므로 모든 계수가 양수인 2차 방정식은 라우스 판별에서 항상 안정하다. 따라서 폐루프시스템은 항상 안정하다.
② $R(s)$에 대한 오차(외란 $D = 0$으로 두고 계산): $E_R(s) = R(s)\frac{s^2 + K_1 s}{s^2 + K_1 s + K} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s^2 + K_1 s}{s^2 + K_1 s + K} = \frac{s + K_1}{s(s^2 + K_1 s + K)}$.
최종값 정리: $e_{ss,R} = \lim_{s \to 0} s E_R(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s + K_1}{s^2 + K_1 s + K} = \frac{K_1}{K}$. K 고정, K_1 증가 $\rightarrow e_{ss,R} = K_1/K$ 증가.
③ $D(s)$에 대한 오차(기준입력 $R = 0$으로 두고 계산): $E_D(s) = \frac{-D(s)}{s^2 + K_1 s + K} = \frac{-1/s}{s^2 + K_1 s + K}$. 최종값 정리: $e_{ss,D} = \lim_{s \to 0} s E_D(s) = \lim_{s \to 0} \frac{-1}{s^2 + K_1 s + K} = -\frac{1}{K}$. 이 식에는 K_1이 전혀 나타나지 않으므로, K를 고정한 채 K_1을 아무리 늘려도 $|e_{ss,D}| = 1/K$는 변하지 않는다(감소하지 않음).
④ K_1 고정, K 증가: $e_{ss,R} = K_1/K$는 K가 커질수록 작아지고, $|e_{ss,D}| = 1/K$도 K가 커질수록 작아지므로 두 오차 모두 감소한다.

선지 판단

① 특성방정식 $s^2 + K_1 s + K = 0$은 $K > 0, K_1 > 0$일 때 항상 안정 근을 가지므로 옳다(O).
② $e_{ss,R} = K_1/K$이므로 K 고정 시 K_1 증가는 정상상태오차 크기를 증가시킨다. 옳다(O).
③ $|e_{ss,D}| = 1/K$는 K_1과 무관한 값이므로, K를 고정하고 K_1을 증가시켜도 $D(s)$에 대한 정상상태오차 크기는 변하지 않는다. "감소한다"는 서술은 틀렸다 → 감소하지 않고 $1/K$로 일정하게 유지된다(X).
④ $e_{ss,R} = K_1/K$, $|e_{ss,D}| = 1/K$ 모두 K 증가에 반비례해 작아지므로 옳다(O).

오답 포인트

이 문제의 함정은 K_1(내부 속도 피드백 이득)이 두 정상상태오차에 서로 다르게 작용한다는 점이다. $R(s)$에 대한 오차식 K_1/K에는 K_1이 분자에 나타나 영향을 주지만, $D(s)$에 대한 오차식 $1/K$에는 K_1이 아예 나타나지 않는다. K_1이 외란 위치보다 앞쪽(전향경로 내부)에서 속도 피드백으로만 작용하기 때문에 외란에 의한 정상상태오차 크기에는 영향을 주지 못한다는 사실을 놓치면 ③을 옳은 설명으로 착각하기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도에서 오차를 구할 때는 반드시 $R(s)$만 입력(외란 0)으로 두고 구하는 오차와, $D(s)$만 입력(기준입력 0)으로 두고 구하는 오차를 따로 최종값 정리로 계산한다. 각 결과식에 어떤 이득(K, K_1 등)이 실제로 나타나는지를 확인하고, 식에 나타나지 않는 이득을 늘려도 그 오차는 변하지 않는다는 점을 우선 체크한다. 안정도는 특성방정식의 라우스-후르비츠 판별로 별도로 확인한다.

암기 포인트

2차 특성방정식 $s^2 + as + b = 0$은 $a > 0, b > 0$이면 항상 안정. 최종값 정리로 정상상태오차를 구할 때는 기준입력과 외란입력의 영향을 분리해서(중첩의 원리) 각각 계산한다. 오차식에 특정 이득이 나타나지 않으면 그 이득은 해당 오차에 영향을 주지 않는다는 것을 기억해 둔다.

NoteBase

문 11. 다음과 같은 단일 입출력 상태공간방정식에서 $x = Pz$를 이용하여 새로운 상태변수 z인 같은 차원의 상태공간방정식으로 상사변환(similarity transformation)할 때, 극점과 영점에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, x는 $n \times 1$ 상태벡터이고 P는 $n \times n$ 정칙행렬(nonsingular matrix)이다)

x = Ax + Bu \ y = Cx

① 상사변환 전후의 극점과 영점의 위치는 동일하다.

② 상사변환 전후의 극점의 위치는 동일하지만 영점의 위치는 달라진다.

③ 상사변환 전후의 극점의 위치는 달라지지만 영점의 위치는 동일하다.

④ 상사변환 전후의 극점과 영점의 위치는 달라진다.

정답 1번

출제 포인트

상사변환(similarity transformation)이 상태공간 표현의 극점(고유값)과 영점(전달함수 영점)에 미치는 영향을 묻는다. 상태변수를 $x = Pz$로 바꾸어도 시스템이 나타내는 입출력 관계 자체는 바뀌지 않는다는 점이 핵심이다.

조건 정리

원래 시스템은 $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx$이고, P는 $n \times n$ 정칙행렬이다. $x = Pz$를 대입하면
$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu,\ y = CPz$가 되므로 새로운 시스템 행렬은 $\bar{A} = P^{-1}AP,\ \bar{B} = P^{-1}B,\ \bar{C} = CP$이다.

사용할 공식

극점은 특성방정식 $\det(sI - A) = 0$의 근이고, 영점은 전달함수 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$의 분자가 0이 되는 근이다. 상사변환된 행렬의 특성방정식은
$\det(sI - \bar{A}) = \det(sI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(sI - A)P) = \det(P^{-1})\det(sI - A)\det(P) = \det(sI - A)$로 원래와 완전히 같다.

계산 과정

① 극점: $\det(sI - \bar{A}) = \det(sI - A)$이므로 특성방정식이 동일하고, 따라서 극점(고유값)의 위치는 상사변환 전후로 완전히 동일하다.
② 영점: 새로운 전달함수는 $\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B$이다. 여기서
$(sI - P^{-1}AP)^{-1} = (P^{-1}(sI - A)P)^{-1} = P^{-1}(sI - A)^{-1}P$이므로,
$\bar{G}(s) = CP \cdot P^{-1}(sI - A)^{-1}P \cdot P^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B = G(s)$가 된다.
즉 상사변환 후의 전달함수는 원래 전달함수와 완전히 같은 함수이므로, 전달함수의 분자 다항식(영점)도 동일하다.

NoteBase

선지 판단

① 상사변환 전후의 극점과 영점의 위치는 동일하다. → O. 특성방정식과 전달함수가 모두 상사변환에 불변이므로 옳다.
② 극점 동일, 영점은 달라진다. → X. 전달함수 자체가 불변이므로 영점도 달라지지 않는다.
③ 극점은 달라지고, 영점은 동일하다. → X. 특성방정식이 불변이므로 극점부터 달라지지 않는다.
④ 극점과 영점 모두 달라진다. → X. 둘 다 상사변환에 불변이므로 옳지 않다.

오답 포인트

상사변환은 상태변수를 선형적으로 재정의하는 좌표변환일 뿐, 시스템이 표현하는 입출력 관계(전달함수) 자체를 바꾸지 않는다. 그런데도 '상태행렬 A의 성분이 바뀌니 극점도 바뀔 것'이라고 착각하기 쉽다. 행렬의 성분(수치)은 바뀌어도 고유값(극점)은 상사변환에 불변이라는 선형대수의 기본 성질을 놓치면 ②나 ④를 고르게 된다. 반대로 'C와 B가 바뀌니 영점만 바뀔 것'이라 생각하면 ③을 고르는 오류가 생기는데, 전달함수 전체가 불변이므로 분자(영점)도 불변이다.

다시 나오면 이렇게 판단

상사변환 문제를 보면 곧바로 두 가지를 확인한다. 첫째, $\det(sI - \bar{A}) = \det(sI - A)$가 성립하므로 극점(고유값)은 항상 불변이다. 둘째, $\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}$를 전개하면 P와 P^{-1}이 서로 상쇄되어 원래의 $G(s)$와 완전히 같아지므로 영점(전달함수)도 항상 불변이다. 따라서 상사변환에 관한 문제의 정답은 특별한 조건이 없는 한 '극점과 영점 모두 불변'이다.

암기 포인트

상사변환(좌표변환) → 시스템의 물리적 입출력 특성은 그대로, 표현 방식(상태변수)만 바뀐다. 고유값(극점)과 전달함수(영점)는 상사변환 불변량이라는 것을 공식과 함께 기억해 둔다: $\det(sI - P^{-1}AP) = \det(sI - A)$, $CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B$.

NoteBase

문 12. 다음과 같은 상태공간방정식에서 단위계단입력에 대한 정상상태 출력은?

bmatrixx_1 \ x_2bmatrix = bmatrix-1 & 0 \ 1 & -2bmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix + bmatrix1 \ 0bmatrixu
y = bmatrix1 & 1bmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix

① -3
② $-\frac{3}{2}$
③ $\frac{3}{2}$
④ 3

정답 3번

출제 포인트

상태공간방정식으로 표현된 시스템에서 단위계단입력에 대한 정상상태 출력값을 구하는 문제이다.
시간영역에서 미분방정식을 직접 풀지 않고, 정상상태에서는 상태변수의 변화가 멈춘다는 성질을 이용해 대수적으로 계산한다.

조건 정리

상태방정식은 $\dot{x} = Ax + Bu$, 출력방정식은 $y = Cx$의 형태이며, A=bmatrix-1 & 0\ 1 & -2bmatrix, B=bmatrix1\\0bmatrix, C=bmatrix1 & 1bmatrix이다. 입력 u는 단위계단입력이므로 정상상태에서 $u = 1$이 된다.

사용할 공식

시스템이 안정하여 정상상태에 도달하면 상태변수의 시간에 대한 변화율이 0이 되므로 $\dot{x} = 0$이다. 따라서 $0 = Ax_{ss} + Bu$를 정리하면 $x_{ss} = -A^{-1}Bu$이고, 정상상태 출력은 $y_{ss} = Cx_{ss}$로 구한다.

계산 과정

먼저 A의 역행렬을 구한다. $\det A = (-1)(-2) - (0)(1) = 2$이므로 A^-1=(1)/(2)bmatrix-2 & 0\ -1 & -1bmatrix=bmatrix-1 & 0\ -0.5 & -0.5bmatrix이다.
다음으로 $x_{ss} = -A^{-1}Bu$에 $u = 1$, B=bmatrix1\\0bmatrix을 대입한다.
A^-1B=bmatrix-1\\-0.5bmatrix이므로 x_ss=-bmatrix-1\\-0.5bmatrix=bmatrix1\\0.5bmatrix이다.
마지막으로 y_ss=Cx_ss=bmatrix1 & 1bmatrixbmatrix1\\0.5bmatrix=1+0.5=1.5이다. 즉 정상상태 출력은 $\frac{3}{2}$이다.

NoteBase

선지 판단

① -3: 부호와 값 모두 실제 계산 결과와 다르다. X
② -3/2: 크기는 맞지만 부호가 반대이다. $x_{ss} = -A^{-1}Bu$에서 음의 부호를 빠뜨리고 $A^{-1}Bu$만 계산하면 나오는 값으로, 부호 처리 오류에 해당한다. X
③ 3/2: 계산 과정에서 구한 $y_{ss} = 1.5 = \frac{3}{2}$와 일치한다. O
④ 3: x_1과 x_2 성분을 더하지 않고 한쪽만 두 배로 계산하거나 역행렬 계산에서 오류가 있을 때 나올 수 있는 값이다. X

오답 포인트

가장 흔한 실수는 정상상태 조건 $0 = Ax_{ss} + Bu$에서 $x_{ss} = -A^{-1}Bu$로 정리할 때 음의 부호를 누락하는 것이다. 이 경우 부호가 반대인 ②가 나온다. 또한 2×2 역행렬을 구할 때 $\frac{1}{\det A}$를 곱하는 것을 빠뜨리거나 대각 원소와 비대각 원소의 위치를 바꾸어 계산하면 엉뚱한 값이 나올 수 있으므로, 역행렬 공식을 정확히 적용했는지 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

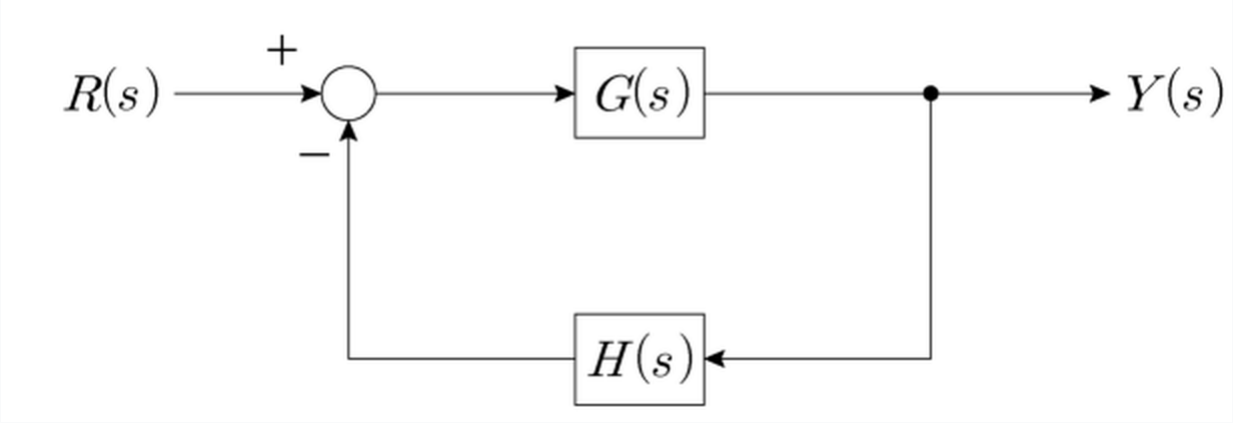
상태공간방정식에서 계단입력에 대한 정상상태 출력을 묻는 문제는 미분방정식을 직접 풀 필요 없이 $\dot{x} = 0$을 대입해 대수방정식으로 바꾸는 것이 핵심이다. $x_{ss} = -A^{-1}Bu$를 구한 뒤 $y_{ss} = Cx_{ss}$에 대입하는 순서를 그대로 적용하면 빠르게 풀 수 있다.

암기 포인트

정상상태 조건은 $\dot{x} = 0$이며, 이때 $x_{ss} = -A^{-1}Bu$, $y_{ss} = Cx_{ss}$라는 두 식을 순서대로 적용한다. 2×2 행렬 bmatrixa & b\ c & dbmatrix의 역행렬은 (1)/(ad-bc)bmatrixd & -b\ -c & abmatrix임을 함께 기억해 둔다.

NoteBase

문 13. 다음 그림과 같은 피드백 제어시스템에서 제어기 $H(s)$의 변화에 대한 폐루프 전달함수 $T(s)$의 감도(sensitivity) S_H^T는?



① $\frac{1}{1+G(s)H(s)}$
② $\frac{H(s)}{1+G(s)H(s)}$
③ $\frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$
④ $\frac{H(s)}{(1+G(s)H(s))^2}$

정답 3번

출제 포인트

폐루프 전달함수 $T(s)$가 파라미터 $H(s)$의 변화에 얼마나 민감하게 반응하는지를 나타내는 감도함수 S_H^T를 구하는 문항이다. 감도함수의 정의식을 정확히 알고 미분을 수행할 수 있는지를 확인한다.

조건 정리

그림의 블록선도는 음의 피드백 구조이므로 폐루프 전달함수는 $T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$이다. 감도함수의 일반 정의는 $S_H^T=\frac{H}{T}\frac{\partial T}{\partial H}$로, 파라미터 H가 1% 변할 때 T가 몇 % 변하는지를 나타내는 무차원 비율이다.

사용할 공식

감도함수 $S_H^T=\frac{H}{T}\frac{\partial T}{\partial H}$에 $T=\frac{G}{1+GH}$를 대입하여 H에 대해 편미분한다.

계산 과정

$T=\frac{G}{1+GH}$를 H로 편미분하면 $\frac{\partial T}{\partial H}=-\frac{G\cdot G}{(1+GH)^2}=-\frac{G^2}{(1+GH)^2}$이다. 이제 $S_H^T=\frac{H}{T}\cdot\frac{\partial T}{\partial H}=\frac{H(1+GH)}{G}\times\left(-\frac{G^2}{(1+GH)^2}\right)=-\frac{GH}{1+GH}$로 정리된다. 즉 $S_H^T=\frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$이다.

NoteBase

선지 판단

① 1/(1+GH) → 이 값은 감도함수가 아니라 T를 R에 대해 정규화했을 때 등장하는 형태이거나 다른 감도(예: S_G^T의 역수 관계)와 혼동한 결과이다. S_H^T의 계산 결과와 다르므로 틀리다.
② H/(1+GH) → 부호와 분자의 G가 빠져 있다. $\partial T/\partial H$를 정확히 계산하면 분자에 G^2이 나오고 H/T를 곱하면 G가 하나 남으므로, 분자에 H만 남는 이 선지는 계산 과정이 틀렸다.
③ -GH/(1+GH) → 계산 과정에서 유도한 S_H^T와 정확히 일치한다. 옳다.
④ H/(1+GH)^2 → 분모의 차수가 2제곱으로 과도하게 커졌고 분자의 G도 빠져 있다. 미분 과정에서 분모 제곱은 $\partial T/\partial H$ 자체에는 나타나지만 H/T를 곱하는 과정에서 분모의 제곱 중 하나가 상쇄되어 1제곱만 남아야 하므로, 상쇄를 누락한 계산 오류에 해당한다.

오답 포인트

감도함수를 구할 때 가장 흔한 실수는 H/T를 곱하는 정규화 과정을 생략하고 $\partial T/\partial H$ 자체를 답으로 착각하는 것이다. 이 경우 분모가 제곱으로 남아 ④와 같은 오답이 나온다. 또한 부호를 놓치는 경우 ②와 같이 음수 부호가 빠진 오답이 되기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

폐루프 전달함수 $T = G/(1 + GH)$ 형태에서 H에 대한 감도를 구하는 문제는 항상 $S_H^T = -\frac{GH}{1+GH}$로 귀결된다는 결과를 공식처럼 활용할 수 있다. 다만 시험에서는 유도 과정(편미분 후 H/T 곱하기)을 정확히 재현할 수 있어야 유사 변형 문제에도 대응할 수 있다.

암기 포인트

감도함수 정의: $S_x^T = \frac{x}{T}\frac{\partial T}{\partial x}$. 음의 피드백 폐루프 $T = G/(1 + GH)$에서 $S_G^T = \frac{1}{1+GH}$, $S_H^T = \frac{-GH}{1+GH}$라는 두 결과를 함께 기억해 둔다.

NoteBase

문 14. 다음 상태방정식에서 상태천이행렬(state transition matrix)을 bmatrix a_11 & a_12 \ a_21 & a_22 bmatrix이라 할 때, a_{12}는?

bmatrix x_1 \ x_2 bmatrix = bmatrix 0 & 1 \ -2 & -3 bmatrixbmatrix x_1 \ x_2 bmatrix + bmatrix 0 \ 1 bmatrixu

① $e^{-t} + e^{-2t}$

② $e^{-t} - e^{-2t}$

③ $-e^{-t} + e^{-2t}$

④ $-e^{-t} - e^{-2t}$

정답 2번

출제 포인트

상태방정식 $\dot{x} = Ax + Bu$가 주어졌을 때 상태천이행렬 $\Phi(t) = e^{At}$의 특정 원소(여기서는 a_{12})를 라플라스 변환을 이용해 구하는 문제이다. 상태천이행렬은 $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$로 계산되므로, 결국 $(sI - A)^{-1}$의 (1,2) 원소를 구한 뒤 역라플라스 변환하면 된다.

조건 정리

행렬 A=bmatrix0&1\\-2&-3bmatrix이다. 구해야 하는 것은 상태천이행렬 (t)=bmatrixa_11&a_12_21&a_22bmatrix의 a_{12}이다.

사용할 공식

상태천이행렬은 $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$로 구한다. 2×2 행렬 M=bmatrixp&q&sbmatrix의 역행렬은 M^-1=(1)/(ps-qr)bmatrixs&-q\\-r&pbmatrix이다.

계산 과정

먼저 $sI - A$를 구하면 sI-A=bmatrixs&-1\\2&s+3bmatrix이다.
행렬식은 $\det(sI - A) = s(s + 3) + 2 = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$이다.
역행렬 공식을 적용하면 (sI-A)^-1=(1)/((s+1)(s+2))bmatrixs+3&1\\-2&sbmatrix이다.
따라서 (1,2) 원소, 즉 a_{12}에 대응하는 라플라스 변환값은 $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$이다.
이를 부분분수로 전개하면 $\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$이다.
역라플라스 변환을 적용하면 $a_{12}(t) = e^{-t} - e^{-2t}$이다.

NoteBase

선지 판단

① $e^{-t}+e^{-2t}$ — X. 두 지수항의 부호가 모두 (+)로 되어 있어 부분분수 전개 결과와 다르다. 실제로는 $\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$이므로 두 번째 항의 부호가 (-)여야 한다.
② $e^{-t}-e^{-2t}$ — O. 계산 과정에서 구한 $a_{12}(t)=e^{-t}-e^{-2t}$와 정확히 일치한다.
③ $-e^{-t}+e^{-2t}$ — X. 전체 부호가 반대로 되어 있다. 이는 $(sI-A)^{-1}$의 (1,2) 원소가 아니라 부호가 뒤바뀐 다른 원소나 계산 실수에 해당한다.
④ $-e^{-t}-e^{-2t}$ — X. 두 항 모두 부호가 반대이며, 부분분수 전개 결과와 맞지 않는다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 역행렬 공식에서 부호를 놓치는 것이다. 2×2 역행렬은 (1)/(ps-qr)bmatrixs&-q\\-r&pbmatrix처럼 원래 행렬의 (1,2), (2,1) 원소 위치에 마이너스 부호가 붙는데, $sI-A$의 (1,2) 원소가 이미 -1이므로 부호가 다시 바뀌어 $+1$이 된다. 이 이중 부호 처리를 헷갈리면 ①이나 ④처럼 틀린 부호 조합을 고르게 된다. 또한 부분분수 전개 시 $\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$에서 두 번째 항의 부호가 (-)라는 점을 놓치면 ①을 고르는 실수가 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태천이행렬을 묻는 문제는 항상 $\Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$ 공식으로 접근한다. 순서는 다음과 같다. 먼저 $sI-A$를 만들고, 행렬식(특성방정식)을 구해 극점을 확인한다. 그다음 2×2 역행렬 공식으로 $(sI-A)^{-1}$의 각 원소를 라플라스 영역에서 구한 뒤, 원하는 원소만 부분분수 전개하여 역라플라스 변환한다. 굳이 행렬 전체를 다 구할 필요 없이 원하는 원소 하나만 계산하면 시간을 절약할 수 있다.

암기 포인트

2×2 역행렬 공식 (1)/(ps-qr)bmatrixs&-q\\-r&pbmatrix에서 비대각 원소는 부호가 바뀐다는 점, 그리고 $\frac{1}{(s+a)(s+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)$ 형태의 부분분수 전개 공식(여기서는 $b-a=1$이라 계수 없이 바로 차 형태로 떨어진다)을 기억해 둔다.

NoteBase

문 15. 보상기(compensator) $C(s)=\frac{aTs+1}{Ts+1}$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (단, $a=3$, $T=1$이다)

① $a>1$이므로 진상보상기(phase lead compensator)가 된다.

② 보상기 $C(s)$는 $\frac{d}{d\omega}[\tan^{-1}(aT\omega)-\tan^{-1}(T\omega)]=0$을 만족하는 주파수에서 최대 위상을 갖는다.

③ 보상기의 최대 위상각 ϕ_m은 $\frac{\pi}{6}$rad이다.

④ 보상기가 최대 위상을 갖는 각주파수 ω_m은 $\sqrt{3}$rad/sec이다.

정답 4번

출제 포인트

진상보상기(phase lead compensator) $C(s)=\frac{aTs+1}{Ts+1}$에서 최대 위상각 ϕ_m과 그 위상이 나타나는 각주파수 ω_m을 구하는 공식을 정확히 아는지, 그리고 그 공식을 실제 수치($a=3$, $T=1$)에 대입해 계산할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

$C(s)=\frac{aTs+1}{Ts+1}$, $a=3$, $T=1$이므로 $C(s)=\frac{3s+1}{s+1}$이다. $a>1$이므로 이 보상기는 위상을 앞서게(진상) 만드는 진상보상기이다.

사용할 공식

진상보상기의 위상은 $\phi(\omega)=\tan^{-1}(aT\omega)-\tan^{-1}(T\omega)$로 주어지며, 최대 위상이 나타나는 조건은 $\frac{d\phi}{d\omega}=0$이다. 이를 풀면 최대 위상각과 그때의 각주파수는 각각 $\sin\phi_m=\frac{a-1}{a+1}$, $\omega_m=\frac{1}{T\sqrt{a}}$로 정리된다.

계산 과정

먼저 최대 위상각을 구하면 $\sin\phi_m=\frac{a-1}{a+1}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로 $\phi_m=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ rad이다. 다음으로 최대 위상이 나타나는 각주파수를 구하면 $\omega_m=\frac{1}{T\sqrt{a}}=\frac{1}{1\times\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ rad/sec이다. 즉 ω_m은 $\sqrt{3}$이 아니라 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

선지 판단

① a>1이므로 진상보상기가 된다 → O. $a>1$일 때 $C(s)$의 영점이 극점보다 원점에서 더 멀리 있어 위상을 앞서게(진상) 만들며, 이는 진상보상기의 정의와 일치한다.

② 보상기는 위상을 각주파수로 미분해 0이 되는 주파수에서 최대 위상을 갖는다 → O.
$\phi(\omega)=\tan^{-1}(aT\omega)-\tan^{-1}(T\omega)$의 극값(최댓값)을 구하는 조건이 정확히 $\frac{d\phi}{d\omega}=0$이므로 옳은 설명이다.

③ 최대 위상각 ϕ_m은 $\frac{\pi}{6}$ rad이다 → O. 계산 과정에서 구한 대로 $\sin\phi_m=\frac{1}{2}$이므로 $\phi_m=\frac{\pi}{6}$ rad이 맞다.

④ 최대 위상을 갖는 각주파수 ω_m은 $\sqrt{3}$ rad/sec이다 → X. 공식에 대입하면 $\omega_m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ rad/sec이 되어야 하므로, $\sqrt{3}$이 아니라 $\frac{1}{\sqrt{3}}$(또는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$) rad/sec로 고쳐야 옳은 설명이 된다.

NoteBase

오답 포인트

$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ 공식을 $\omega_m = \frac{\sqrt{a}}{T}$처럼 분자·분모를 뒤집어 외우면 $\sqrt{3}$이라는 오답이 그대로 성립하는 것처럼 보이게 된다. a가 분모의 제곱근 안에 있다는 점을 헷갈리지 않아야 한다. 또한 ϕ_m을 구하는 $\sin\phi_m = \frac{a-1}{a+1}$과 ω_m을 구하는 $\frac{1}{T\sqrt{a}}$는 서로 다른 공식이므로 둘을 섞어 계산하지 않도록 유의한다.

다시 나오면 이렇게 판단

진상(또는 지상)보상기 문제가 나오면 먼저 a와 T 값을 정리한 뒤, $\sin\phi_m = \frac{a-1}{a+1}$로 최대 위상각을, $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$로 최대 위상 각주파수를 각각 독립적으로 계산한다. 두 공식의 결과값 형태(각도 vs 각주파수)가 다르므로 계산 후에는 반드시 어떤 물리량을 구한 것인지 다시 확인한다.

암기 포인트

진상보상기 $C(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1}$ $(a>1)$에서 최대 위상각은 $\sin\phi_m = \frac{a-1}{a+1}$, 최대 위상 각주파수는 $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$로 기억해 둔다.

NoteBase

문 16. 전달함수 $G(s)=\frac{4}{s^2+2s+4}$를 다음의 상태공간방정식으로 나타낼 때, ab의 값은?

x=bmatrix-1&√(3)\\-√(3)&-1bmatrixx+bmatrix0\bmatrixu
$y=[b\ 0]x$

① $\frac{1}{\sqrt{3}}$
② $\frac{2}{\sqrt{3}}$
③ $\frac{3}{\sqrt{3}}$
④ $\frac{4}{\sqrt{3}}$

정답 4번

출제 포인트

상태공간방정식 $\dot{x}=Ax+Bu,\ y=Cx$로 주어진 시스템의 전달함수를 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$로 구성하고, 이를 문제에서 주어진 전달함수 $G(s)=\frac{4}{s^2+2s+4}$와 계수를 비교하여 미지수 a, b의 곱을 구하는 문제이다. 2차 정방행렬의 역행렬 공식을 정확히 적용할 수 있는지를 확인한다.

조건 정리

행렬은 A=bmatrix-1 & √(3)\ -√(3) & -1bmatrix, B=bmatrix0\ abmatrix, C=bmatrixb & 0bmatrix로 주어진다. 목표는 $C(sI-A)^{-1}B$를 계산하여 $\frac{4}{s^2+2s+4}$와 같아지도록 하는 ab의 값을 구하는 것이다.

사용할 공식

2×2 행렬 M=bmatrixp & q\ r & sbmatrix의 역행렬은 M^-1=(1)/(M)bmatrixs & -q\ -r & pbmatrix이며 $\det M=ps-qr$이다.

계산 과정

먼저 sI-A=bmatrixs+1 & -√(3)\ √(3) & s+1bmatrix이고, 행렬식은
$\det(sI-A)=(s+1)^2+3=s^2+2s+4$로 문제의 분모와 일치한다.
역행렬은 (sI-A)^-1=(1)/(s^2+2s+4)bmatrixs+1 & √(3)\ -√(3) & s+1bmatrix이다.
이를 B=bmatrix0\ abmatrix에 곱하면 (sI-A)^-1B=(1)/(s^2+2s+4)bmatrix√(3) a\ a(s+1)bmatrix이다.
마지막으로 C=bmatrixb & 0bmatrix를 곱하면 첫 번째 성분만 남아 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{\sqrt{3}ab}{s^2+2s+4}$가 된다.
이를 주어진 $G(s)=\frac{4}{s^2+2s+4}$와 비교하면 $\sqrt{3}ab=4$, 즉 $ab=\frac{4}{\sqrt{3}}$이다.

NoteBase

선지 판단

① $1/\sqrt{3}$: X, 분자 계수를 1로 잘못 계산한 경우에 나오는 값이다.
② $2/\sqrt{3}$: X, 분자 계수를 2로 잘못 계산한 경우에 나오는 값이다.
③ $3/\sqrt{3}$: X, 분자 계수를 3으로 잘못 계산한 경우에 나오는 값이다.
④ $4/\sqrt{3}$: O, $\sqrt{3}ab = 4$에서 $ab = 4/\sqrt{3}$로 계산과 정확히 일치한다.

오답 포인트

이 문제에서 가장 흔한 실수는 $C(sI - A)^{-1}B$를 계산할 때 행과 열의 순서를 혼동하여 B를 먼저 곱하지 않고 C를 잘못된 위치에 곱하는 것이다. 또한 $C = [b\ 0]$이므로 $(sI - A)^{-1}B$의 두 번째 성분($a(s+1)$ 항)은 최종 결과에 전혀 기여하지 않는다는 점을 놓치고 두 성분을 모두 반영해 식을 세우면 분자에 s 항이 남아 계수 비교 자체가 어긋난다.

다시 나오면 이렇게 판단

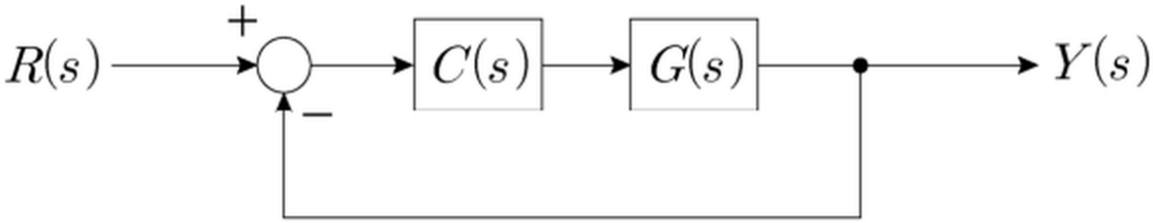
상태공간방정식에서 전달함수를 구하는 문제는 항상 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 공식을 그대로 적용하되, $sI - A$의 행렬식이 목표 전달함수의 분모와 일치하는지부터 확인하면 계산 실수를 빠르게 걸러낼 수 있다. 이후 C가 특정 성분만 뽑아내는 형태(예: $[b\ 0]$)라면 그 성분에 해당하는 결과만 남긴다는 점을 이용해 계산량을 줄인다.

암기 포인트

2×2 행렬 bmatrixp & q\ r & sbmatrix의 역행렬은 (1)/(ps-qr)bmatrixs & -q\ -r & pbmatrix이며, 전달함수 공식 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$에서 분모는 항상 det($sI - A$)의 특성다항식과 같다는 점을 기억해 둔다.

NoteBase

문 17. 다음과 같은 피드백 제어시스템에서 보상기 $C(s) = K\frac{s+z}{s+p}$를 사용하여 안정한 폐루프시스템을 설계할 때, 제어시스템의 특성에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (단, $G(s)$는 최소위상시스템이고, $K > 0,\ p > 0,\ z > 0,\ p \neq z$이다)



① $z > p$일 때 보상기는 폐루프시스템의 정상상태오차를 개선할 수 있다.

② $z < p$일 때 보상기는 폐루프시스템의 과도응답을 개선할 수 있다.

③ z와 p는 고정하고 K가 증가하면 루프 전달함수의 이득여유는 증가한다.

④ z와 p는 고정하고 K가 증가하면 루프 전달함수의 위상여유는 감소한다.

정답 3번

출제 포인트

이 문항은 보상기 $C(s) = K\frac{s+z}{s+p}$의 영점 z와 극점 p의 상대적 위치가 지시-지연(lead-lag) 특성을 어떻게 결정하는지, 그리고 이득 K의 변화가 이득여유(gain margin)와 위상여유(phase margin)에 미치는 영향을 함께 묻는다. 영점·극점 위치 비교로 정상상태오차 개선인지 과도응답 개선인지를 가르고, 루프 이득 증가가 안정여유를 어느 방향으로 움직이는지를 구분해야 한다.

핵심 개념

지연(lag) 보상기: 극점이 영점보다 원점에 더 가까운 경우(즉 $z > p$)이다. 저주파 영역에서 루프 이득을 키워 정상상태오차를 줄이는 데 쓰이며, 위상은 오히려 저주파 대역에서 지연시킨다.
지시(lead) 보상기: 영점이 극점보다 원점에 더 가까운 경우(즉 $z < p$)이다. 이득교차주파수 부근에서 위상을 앞서게 하여 위상여유를 늘리고, 그 결과 과도응답(오버슈트, 정착시간)을 개선한다.
이득여유와 위상여유: 이득여유는 위상이 $-180°$가 되는 주파수에서 루프 이득을 얼마나 더 키워야 불안정해지는지를 나타내는 여유량이고, 위상여유는 이득이 0 dB가 되는 이득교차주파수에서 위상이 $-180°$까지 얼마나 남았는지를 나타내는 여유량이다. K를 키우면 보드선도의 이득곡선이 위로 이동해 이득교차주파수가 높아진다. 최소위상시스템에서 주파수가 높아질수록 위상은 더 지연되므로, 이득교차주파수가 높아지면 그 지점의 위상이 더 내려가 있어 위상여유는 줄어든다. 같은 이유로 이득이 커진 상태에서 위상이 $-180°$에 도달하는 주파수까지 남은 이득의 여유는 줄어들므로 이득여유도 함께 줄어든다. 즉 K가 커질수록 이득여유와 위상여유는 모두 감소하는 것이 일반적인 경향이다.

NoteBase

선지별 해설

① O — $z > p$이면 극점이 영점보다 원점에 가까운 지연 보상기 구조이다. 지연 보상기는 저주파(정상상태) 영역의 루프 이득을 높여 정상상태오차를 개선하는 데 사용되므로 옳은 설명이다.
② O — $z < p$이면 영점이 극점보다 원점에 가까운 지시 보상기 구조이다. 지시 보상기는 이득교차주파수 부근에서 위상을 앞서게 해 위상여유를 늘리고 과도응답을 개선하므로 옳은 설명이다.
③ X — z, p를 고정하고 K를 키우면 이득교차주파수가 높아지고, 위상이 $-180°$에 이르는 주파수까지 남은 이득의 여유가 줄어들어 이득여유는 오히려 감소한다. "증가한다" → "감소한다"로 고쳐야 옳은 설명이 된다.
④ O — K를 키우면 이득교차주파수가 높아지고, 그 주파수에서의 위상은 더 지연되어 있으므로 $-180°$까지 남은 위상의 여유, 즉 위상여유는 감소한다. 옳은 설명이다.

오답 포인트

이득여유와 위상여유를 "이득이 커지면 시스템이 더 세게 동작하니 여유도 커질 것"이라는 직관으로 잘못 판단하기 쉽다. 실제로는 두 여유 모두 이득교차주파수가 높아질수록 줄어드는 방향으로 움직인다는 점을 혼동하지 않아야 한다. 또한 지연(lag)과 지시(lead) 보상기를 z와 p의 대소 관계로 구분하는 정의를 반대로 외워 ①과 ②를 혼동하는 경우가 많으므로 주의한다.

다시 나오면 이렇게 판단

보상기 문제에서는 먼저 z와 p 중 어느 쪽이 원점에 가까운지부터 확인한다. 극점이 가까우면 지연(정상상태오차 개선), 영점이 가까우면 지시(과도응답·위상여유 개선)로 분류한다. 그 다음 K가 변할 때는 이득교차주파수가 어느 방향으로 이동하는지를 그려보고, 최소위상시스템에서는 주파수가 높아질수록 위상이 더 지연된다는 사실로 이득여유·위상여유가 모두 줄어드는 방향임을 확인한다.

암기 포인트

$z > p$(극점이 원점에 가까움) = 지연 보상 = 정상상태오차 개선, $z < p$(영점이 원점에 가까움) = 지시 보상 = 과도응답·위상여유 개선. K 증가 → 이득교차주파수 상승 → 이득여유·위상여유 모두 감소(둘 다 같은 방향).

NoteBase

문 18. 다음과 같은 상태변수 피드백 제어시스템에서 폐루프시스템의 극점이 -2, -2일 때, 제어이득 k_1과 k_2는?

$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = u$
$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2$

① k_1: 2, k_2: 2
② k_1: 2, k_2: 4
③ k_1: 4, k_2: 2
④ k_1: 4, k_2: 4

정답 4번

출제 포인트

상태변수 피드백(상태궤환) 제어에서 폐루프 특성방정식을 구성하고, 원하는 극점(중근 -2, -2)이 되도록 제어이득 k_1, k_2를 결정하는 문제이다.

조건 정리

상태방정식은 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u$이고 제어입력은 $u = -k_1 x_1 - k_2 x_2$이다. 이 셋을 결합하면 상태변수만으로 이루어진 2계 미분방정식이 되고, 원하는 폐루프 극점은 -2, -2(중근)이다.

사용할 공식

상태궤환 폐루프 특성방정식 $s^2 + k_2 s + k_1 = 0$과, 중근 $-p,\ -p$를 갖는 목표 특성방정식 $(s+p)^2 = s^2 + 2ps + p^2 = 0$을 계수비교한다.

계산 과정

$\dot{x}_2 = u = -k_1 x_1 - k_2 x_2$이고 $\dot{x}_1 = x_2$이므로 $x_2 = \dot{x}_1$을 대입하면 $\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 \dot{x}_1$, 즉 $\ddot{x}_1 + k_2 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = 0$이다. 라플라스 변환하면 특성방정식은 $s^2 + k_2 s + k_1 = 0$이다. 극점이 -2, -2이므로 목표 특성방정식은 $(s+2)(s+2) = s^2 + 4s + 4 = 0$이다. 두 식의 계수를 비교하면 $k_2 = 4, k_1 = 4$이다.

NoteBase

선지 판단

① $k_1 = 2, k_2 = 2$: 대입하면 특성방정식이 $s^2 + 2s + 2 = 0$이 되어 극점이 -2,-2가 되지 않는다. → 오답.
② $k_1 = 2, k_2 = 4$: 특성방정식이 $s^2 + 4s + 2 = 0$이 되어 극점이 -2,-2와 일치하지 않는다. → 오답.
③ $k_1 = 4, k_2 = 2$: 특성방정식이 $s^2 + 2s + 4 = 0$이 되어 극점이 -2,-2와 일치하지 않는다. → 오답.
④ $k_1 = 4, k_2 = 4$: 특성방정식이 $s^2 + 4s + 4 = (s + 2)^2 = 0$이 되어 극점이 정확히 -2, -2(중근)이 된다. → 정답.

오답 포인트

이 문제의 함정은 k_1과 k_2가 특성방정식의 어느 계수에 대응하는지를 뒤바꾸는 데 있다. $u = -k_1x_1 - k_2x_2$에서 x_1에 곱해지는 이득 k_1은 특성방정식의 상수항(0차항)으로, $x_2 = \dot{x}_1$에 곱해지는 이득 k_2는 1차항 계수로 들어간다는 대응관계를 정확히 잡아야 한다. 이를 반대로 놓으면 ②나 ③처럼 값이 뒤바뀐 오답을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

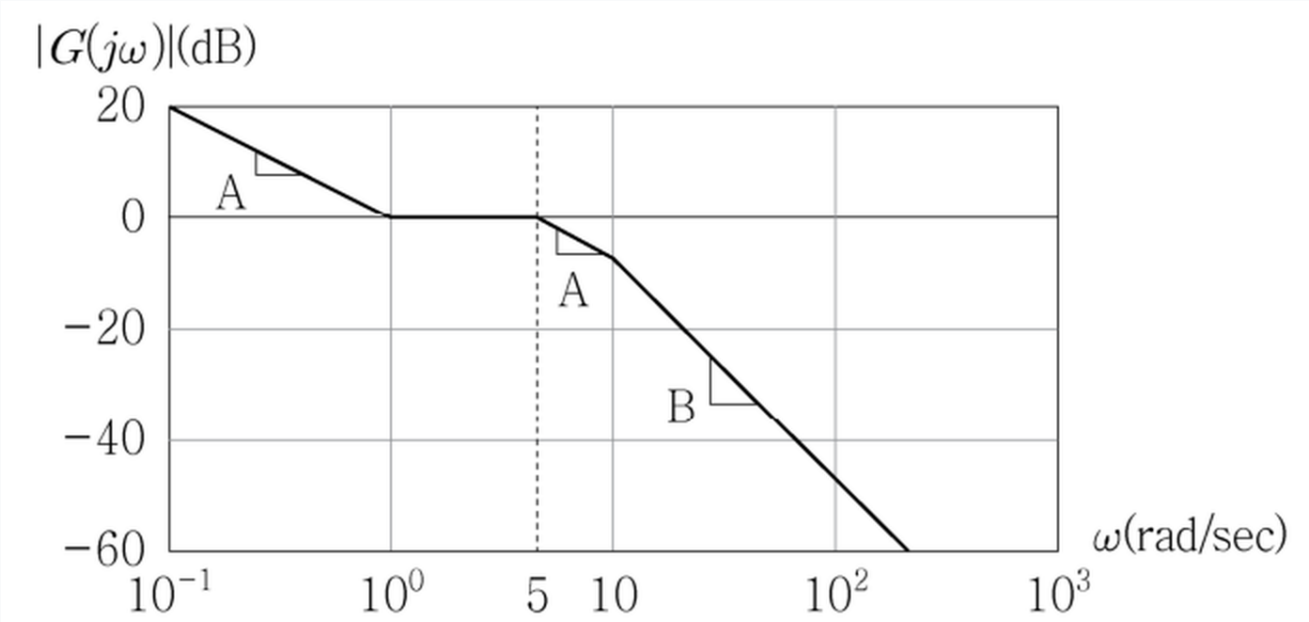
상태궤환 문제가 나오면 먼저 상태방정식들을 결합해 하나의 고계 미분방정식(또는 특성방정식)으로 만든 뒤, 목표 극점으로부터 만든 다항식과 계수를 하나씩 비교하는 순서로 접근한다. 극점이 중근으로 주어지면 $(s + p)^2$ 형태로 전개해 상수항과 1차항 계수를 각각 확인한다.

암기 포인트

2차 상태궤환 시스템 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, u = -k_1x_1 - k_2x_2$의 폐루프 특성방정식은 항상 $s^2 + k_2s + k_1 = 0$ 꼴이 된다는 대응관계를 기억해 둔다.

NoteBase

문 19. 다음 그림은 점근선으로 표시한 보드(Bode) 선도이다. 그림에 가장 적합한 전달함수 $G(s)$는? (단, $\omega < 0.1$rad/sec에서 기울기는 $0.1 \le \omega < 1$에서의 기울기와 같고, A는 -20dB/dec, B는 -40dB/dec의 기울기이다)



① $\frac{10(s+1)}{s(s+5)(s+10)}$
② $\frac{50(s+1)}{s(s+5)(s+10)}$
③ $\frac{10(s+1)}{s(s+0.2)(s+0.1)}$
④ $\frac{50(s+1)}{s(s+0.2)(s+0.1)}$

정답 2번

출제 포인트

점근선으로 그려진 보드 크기선도를 보고 극점과 영점의 위치, 그리고 저주파 이득(상수 이득 K)까지 역으로 구해 전달함수 $G(s)$를 결정하는 문제이다. 꺾임 주파수(코너 주파수)에서 기울기가 어떻게 변하는지와, 각 극점·영점이 기울기에 얼마씩 기여하는지를 정확히 계산할 수 있어야 한다.

조건 정리

그래프의 구간별 기울기는 다음과 같다. $\omega < 1$에서 A(-20 dB/dec), $1 \le \omega < 5$에서 기울기 0(수평), $5 \le \omega < 10$에서 다시 A(-20 dB/dec), $\omega \ge 10$에서 B(-40 dB/dec)이다. 또한 $\omega = 0.1$에서 $|G(j\omega)| = 20$ dB이다. 선택지가 모두 극점 하나는 원점(s)에 있고 영점은 $s = 1$에 있는 형태이므로, 나머지 극점의 위치(5,10 또는 0.2, 0.1)와 이득 K(10 또는 50)만 확인하면 된다.

NoteBase

사용할 공식

극점 $s=-p$는 $\omega=p$부터 기울기를 -20 dB/dec만큼 추가로 꺾고, 영점 $s=-z$는 $\omega=z$부터 기울기를 $+20$ dB/dec만큼 추가로 꺾는다. 원점의 극점 $1/s$는 모든 주파수에서 처음부터 -20 dB/dec를 기여한다. 저주파(코너 주파수보다 한참 작은 ω)에서는 $s+a\approx a$로 근사하여 $|G(j\omega)|\approx\frac{K\cdot a_{\text{zero}}}{\omega\cdot a_{p1}\cdot a_{p2}}$ 형태로 이득을 구한다.

계산 과정

① 코너 주파수 확인: 그래프에서 기울기가 바뀌는 지점이 $\omega=1,\ 5,\ 10$이다. 원점의 극점(처음부터 -20)에 $\omega=1$에서 영점이 붙어 기울기가 $-20+20=0$이 되고($1\le\omega<5$ 구간 수평과 일치), $\omega=5$에서 극점이 붙어 $0-20=-20$이 되며(A 구간과 일치), $\omega=10$에서 극점이 하나 더 붙어 $-20-20=-40$이 된다(B 구간과 일치). 따라서 극점은 원점, $s=-5$, $s=-10$에 있고 영점은 $s=-1$에 있다. 이는 $s(s+5)(s+10)$ 분모, $(s+1)$ 분자 구조와 일치하며, 분모가 $(s+0.2)(s+0.1)$인 선지들은 코너 주파수가 $0.2,\ 0.1$이 되어 그래프의 $5,\ 10$과 맞지 않으므로 제외된다. ② 이득 K 결정: $G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+5)(s+10)}$로 두면, $\omega=0.1$처럼 매우 낮은 주파수에서는 $s+1\approx1,\ s+5\approx5,\ s+10\approx10$이므로 $|G(j\omega)|\approx\frac{K}{\omega\cdot5\cdot10}=\frac{K}{50\omega}$이다. $\omega=0.1$에서 20 dB이므로 $20\log_{10}\left(\frac{K}{50\times0.1}\right)=20$, 즉 $\frac{K}{5}=10$에서 $K=50$이다.

선지 판단

① $K=10$이면 $\omega=0.1$에서 이득이 $20\log_{10}(10/5)=6$ dB로 그래프의 20 dB와 맞지 않는다. X
② $K=50$, 극점 $0,\ -5,\ -10$, 영점 -1로 코너 주파수(1,5,10)와 저주파 이득(20 dB) 모두 일치한다. O
③ 극점이 $-0.2,\ -0.1$에 있어 코너 주파수가 그래프의 5,10이 아니라 0.2, 0.1이 되므로 그래프의 꺾임 위치와 맞지 않는다. X
④ 마찬가지로 극점 위치가 $-0.2,\ -0.1$이라 코너 주파수가 맞지 않는다. X

오답 포인트

가장 흔한 실수는 극점 위치는 맞게 골라도 저주파 이득 K를 확인하지 않고 분자의 숫자만 보고 고르는 것이다. 코너 주파수(꺾이는 지점)와 저주파 점근선의 dB 값(여기서는 $\omega=0.1$에서 20 dB) 두 가지를 모두 맞춰야 한다. 또한 원점에 극점이 있으면 그래프가 처음부터 이미 기울어져 시작한다는 점, 그리고 영점이 붙으면 기울기가 $+20$ dB/dec만큼 완만해진다(수평이 되거나 덜 가팔라짐)는 점을 헷갈리지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

보드 점근선 문제는 먼저 기울기가 바뀌는 주파수들을 모두 표시하고, 각 지점에서 기울기 변화량(±20 또는 ±40 dB/dec)을 계산해 극점(기울기 감소)과 영점(기울기 증가)의 개수와 위치를 확정한다. 그다음 반드시 저주파(혹은 임의의 한 지점)에서 그래프의 dB 값을 이용해 이득 상수 K를 계산으로 검증한다. 극점·영점 위치만 맞고 이득을 확인하지 않으면 오답을 고를 수 있다.

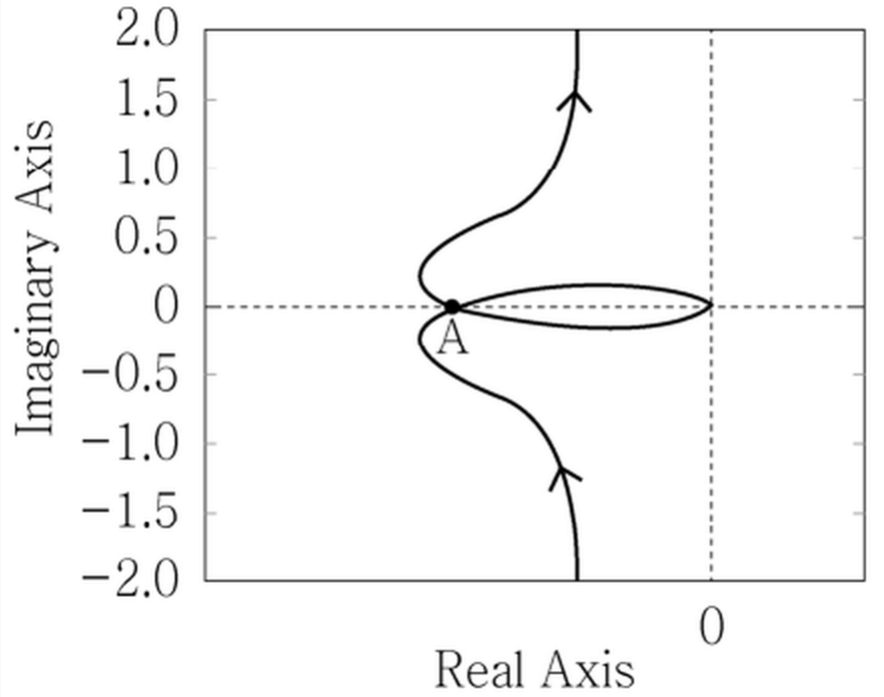
NoteBase

암기 포인트

극점 하나($s=-a, a>0$)는 $\omega=a$부터 -20 dB/dec, 영점 하나는 $\omega=a$부터 $+20$ dB/dec를 더한다. 원점의 극점 $1/s$는 전 구간에서 이미 -20 dB/dec 기울기를 갖고 시작한다. 저주파 이득은 s를 제외한 나머지 항을 상수로 근사한 K×(영점 상수곱)ω×(극점 상수곱)의 dB 값으로 구한다.

NoteBase

문 20. 전달함수 $G(s)=\frac{1}{s(s^2+s+2)}$의 나이퀴스트(Nyquist) 선도가 다음 그림과 같다. A점의 좌표는 $(a, 0)$이고 A점에 해당하는 각주파수는 b[rad/sec]일 때, ab^2의 값은?



① -4

② -3

③ -2

④ -1

정답 4번

출제 포인트

나이퀴스트 선도(주파수 응답 $G(j\omega)$의 궤적)가 실수축과 만나는 점, 즉 허수부가 0이 되는 각주파수를 구하고 그때의 실수부 값을 이용해 ab^2을 계산하는 문제이다. 그림의 A점은 실수축 위(허수부 0)에 위치하는 교차점으로, 이 조건을 식으로 세우면 그래프를 눈으로 읽지 않고도 정확한 값을 구할 수 있다.

조건 정리

전달함수는 $G(s)=\frac{1}{s(s^2+s+2)}$이다. $s=j\omega$를 대입하면 $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(2-\omega^2+j\omega)}$이 된다. A점은 이 궤적이 실수축과 만나는 점이므로 $G(j\omega)$의 허수부가 0이 되는 $\omega=b$를 찾고, 그 점에서의 실수부가 a가 된다.

NoteBase

사용할 공식

분모를 실수부와 허수부로 정리하기 위해 분자·분모에 켤레복소수를 곱한다. 분모 $j\omega(2-\omega^2+j\omega) = -\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)$로 정리되므로 $G(j\omega) = \frac{-\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)}{\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2}$ 이고, 허수부가 0이 되는 조건은 분자의 허수항 $\omega(2-\omega^2) = 0$이다.

계산 과정

$\omega \neq 0$인 교차점을 찾으므로 $2-\omega^2 = 0$, 즉 $\omega^2 = 2$이다. 이때 분모는 $\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2 = \omega^4$이 되고, 실수부는 $a = \frac{-\omega^2}{\omega^4} = -\frac{1}{\omega^2} = -\frac{1}{2}$ 가 된다. 따라서 $b^2 = \omega^2 = 2$이고, $ab^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 = -1$ 이다.

선지 판단

① -4: ab^2의 계산 결과와 맞지 않는 값이다. X
② -3: ab^2의 계산 결과와 맞지 않는 값이다. X
③ -2: $a = -1/2$과 $b^2 = 2$를 각각 값으로 오인하거나 잘못 결합했을 때 나올 수 있는 값이나, $ab^2 = -1$과 다르다. X
④ -1: $\omega^2 = 2$에서 $a = -1/2,\ b^2 = 2$이므로 $ab^2 = -1$로 계산 결과와 정확히 일치한다. O

오답 포인트

이 문제에서 자주 하는 실수는 그래프의 눈금을 보고 A점의 좌표를 대략 $-0.2 \sim -0.3$ 정도로 눈대중해 값을 대입하는 것이다. 그래프는 궤적의 개형(양의 실수축 쪽으로 작은 원 모양의 루프가 생기는 형태)을 확인하는 용도로만 쓰고, 실제 $a,\ b$ 값은 반드시 $G(j\omega)$의 허수부를 0으로 놓는 식으로 계산해야 한다. 또한 허수부 조건 $\omega(2-\omega^2) = 0$에서 $\omega = 0$도 수학적으로는 해가 되지만, 이는 원점(적분기에 의한 무한대 점)에 해당하므로 그림의 A점과는 다른 교차점임에 주의해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

나이퀴스트 선도가 실수축과 만나는 점을 묻는 문제는 항상 $G(j\omega)$를 실수부와 허수부로 분리한 뒤 허수부를 0으로 놓는 방정식을 세우는 것으로 시작한다. 극(pole)이 원점에 있는 $1/s$ 형태의 전달함수는 $s = j\omega$를 대입하면 분모에 j가 남으므로, 분모 전체를 켤레복소수로 유리화한 뒤 실수부·허수부를 분리하는 절차를 그대로 따라가면 실수를 줄일 수 있다.

암기 포인트

나이퀴스트 선도와 실수축의 교차점(허수부=0)은 그림에서 눈대중하지 말고 $G(j\omega)$의 허수부를 0으로 두는 방정식으로 정확히 구한다. $1/(s(s^2+s+2))$ 형태처럼 분모에 2차식이 곱해진 경우, 켤레복소수로 유리화하면 허수부 조건이 2차식의 특정 계수(여기서는 $2-\omega^2$)가 0이 되는 조건으로 단순화된다는 점을 기억해 둔다.

NoteBase

문 21. 다음과 같은 제어시스템과 전차수 상태관측기(full-order state observer)에서 상태관측기의 고윳값(eigenvalue)이 -4, -8일 때, 관측기 이득행렬 K_e와 시스템의 가관측성 행렬(observability matrix) N과의 곱인 NK_e의 값은? (단, $\hat{x}$은 x의 추정 상태변수이고, A=bmatrix0 & 3 \ 1 & 0bmatrix, B=bmatrix0 \ 1bmatrix, C=bmatrix0 & 1bmatrix이다)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x})$$

① bmatrix8 \ 32bmatrix

② bmatrix12 \ 35bmatrix

③ bmatrix32 \ 8bmatrix

④ bmatrix35 \ 12bmatrix

정답 2번

출제 포인트

전차수 상태관측기(full-order observer)의 이득행렬 K_e를 원하는 관측기 고윳값으로부터 극배치(pole placement)로 구한 뒤, 이를 시스템의 가관측성 행렬 N과 곱한 값을 계산하는 문제이다. 관측기 오차 동특성 $A - K_eC$의 특성방정식을 목표 다항식과 계수 비교로 맞추는 절차를 이해하는지 확인한다.

조건 정리

A=bmatrix0&3\\1&0bmatrix, B=bmatrix0\\1bmatrix, C=bmatrix0&1bmatrix이고 관측기의 원하는 고윳값은 -4, -8이다. 구할 값은 관측기 이득행렬 K_e=bmatrixk_1_2bmatrix와 가관측성 행렬 N의 곱 NK_e이다.

사용할 공식

관측 오차의 동특성은 $\dot{e} = (A - K_eC)e$이므로 관측기의 극은 $A - K_eC$의 고윳값이 된다. 원하는 극 -4, -8에 대응하는 목표 특성다항식은 $(s + 4)(s + 8) = s^2 + 12s + 32$이고, 이를 $\det(sI - (A - K_eC)) = 0$의 특성다항식과 계수 비교하여 K_e를 구한다. 2차 시스템의 가관측성 행렬은 N=bmatrixCbmatrix이다.

NoteBase

계산 과정

K_e=bmatrixk_1_2bmatrix라 하면 K_eC=bmatrix0&k_1\\0&k_2bmatrix이므로 A-K_eC=bmatrix0&3-k_1\\1&-k_2bmatrix이다.
특성다항식은 (sI-(A-K_eC))=bmatrixs&-(3-k_1)\\-1&s+k_2bmatrix=s(s+k_2)-(3-k_1)=s^2+k_2s+(k_1-3)이다.
목표 다항식 $s^2 + 12s + 32$와 계수를 비교하면 $k_2 = 12, k_1 - 3 = 32$이므로 $k_1 = 35$이다. 따라서 K_e=bmatrix35\\12bmatrix이다.
한편 CA=bmatrix0&1bmatrixbmatrix0&3\\1&0bmatrix=bmatrix1&0bmatrix이므로 N=bmatrixCbmatrix=bmatrix0&1\\1&0bmatrix이다.
따라서 NK_e=bmatrix0&1\\1&0bmatrixbmatrix35\\12bmatrix=bmatrix12\\35bmatrix이다.

선지 판단

① [8, 32]: NK_e의 두 성분과 값이 모두 맞지 않는 오답이다.
② [12, 35]: 계산 결과 NK_e=bmatrix12\\35bmatrix와 정확히 일치하므로 정답이다.
③ [32, 8]: K_e의 성분 값과도 목표 다항식의 계수와도 맞지 않는 오답이다.
④ [35, 12]: 이는 K_e의 성분 값 [35, 12] 그 자체이다. N을 곱하지 않고 K_e만 답으로 착각한 경우 나올 수 있는 오답이다.

오답 포인트

④는 K_e를 구하는 데까지는 맞게 계산했더라도 N을 곱하는 마지막 단계를 빠뜨리면 나오는 값이다. N=bmatrix0&1\\1&0bmatrix는 두 성분의 순서를 서로 바꾸는 행렬이므로, $K_e = [35, 12]^T$에 N을 곱하면 성분 순서가 뒤집혀 $[12, 35]^T$가 된다는 점을 놓치면 ④를 답으로 고르는 실수를 하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

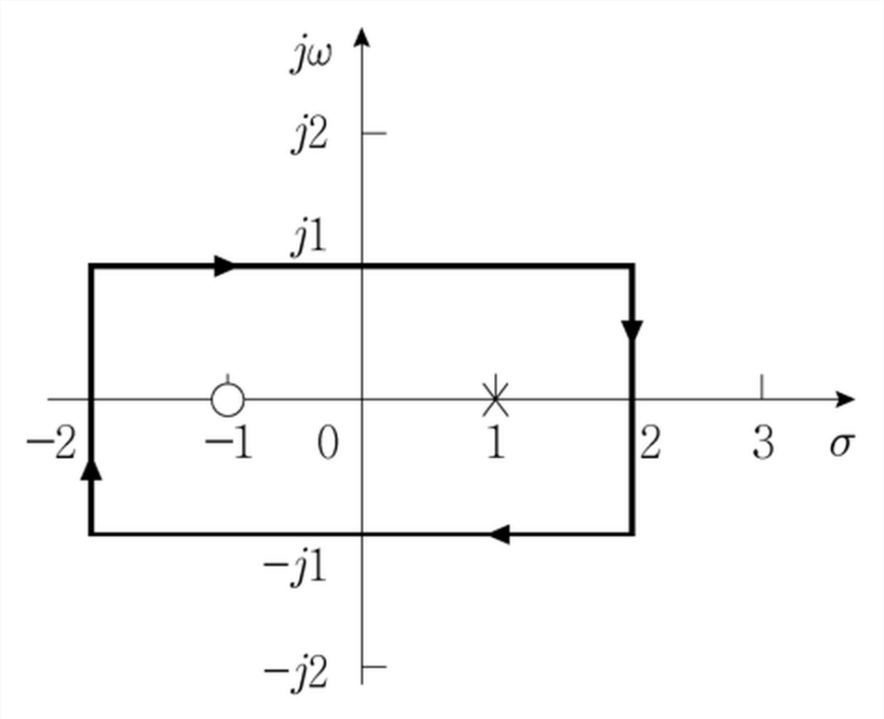
관측기 이득행렬을 묻는 문제는 먼저 $A - K_eC$의 특성다항식을 미지수 k_1, k_2로 세우고, 원하는 극들의 곱으로 만든 목표 다항식과 계수를 비교해 K_e를 구한다. 이어서 문제가 K_e에 다른 행렬(N 등)을 곱한 값을 요구하면, 그 곱셈까지 순서대로 끝까지 계산한 값을 답으로 선택한다.

암기 포인트

가관측성 행렬은 N=bmatrixCbmatrix(2차 시스템 기준)이고, 목표 특성다항식은 원하는 관측기 극 p_1, p_2에 대해 $(s - p_1)(s - p_2)$로 구성한다. $A - K_eC$의 특성다항식과 계수를 비교해 K_e를 구한 뒤, 요구되는 행렬 곱까지 마무리해야 최종 답이 된다는 점을 기억해 둔다.

NoteBase

문 22. 전달함수가 $G(s)=\frac{s+1}{s-1}$이고 s 평면에서 폐경로(closed path)가 다음과 같이 주어질 때, 사상(mapping)은 $G(s)$ 평면에서 폐곡선으로 나타난다. 이때 $G(s)$ 평면으로 사상된 폐곡선에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 원점을 감싸지 않는다.

② 원점을 시계방향으로 1회 감싼다.

③ 원점을 시계방향으로 2회 감싼다.

④ 원점을 반시계방향으로 1회 감싼다.

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 안정도 판별의 근거가 되는 편각의 원리(argument principle)를 묻는다. s 평면에서 그린 폐경로가 G(s)=$\frac{s+1}{s-1}$의 영점과 극점을 각각 몇 개 감싸는지를 파악한 다음, 그 결과가 G(s) 평면에서 원점을 몇 회·어느 방향으로 감싸는 폐곡선으로 사상되는지를 계산으로 결정하는 문항이다.

조건 정리

G(s)=$\frac{s+1}{s-1}$이므로 영점은 s=-1(1개), 극점은 s=1(1개)이다. 그림의 직사각형 폐경로는 네 꼭짓점 (-2, j1), (2, j1), (2, -j1), (-2, -j1)을 지나며, 위쪽 변을 좌→우로, 오른쪽 변을 위→아래로, 아래쪽 변을 우→좌로, 왼쪽 변을 아래→위로 이동하므로 전체적으로 시계방향(clockwise)으로 도는 폐경로이다. 이 경로의 내부는 -2<σ<2, -1<ω<1 영역이므로 s=-1(영점)과 s=1(극점)이 모두 경로 내부에 포함된다.

NoteBase

사용할 공식

편각의 원리에 의해, s 평면의 폐경로를 시계방향으로 한 바퀴 돌 때 G(s) 평면에서 원점을 감싸는 횟수 N은 다음과 같다. $N = Z - P$ 여기서 Z는 경로 내부에 감싸인 G(s)의 영점 개수, P는 경로 내부에 감싸인 G(s)의 극점 개수이다. N>0이면 시계방향 감쌈, N<0이면 반시계방향 감쌈, N=0이면 감싸지 않음을 의미한다.

계산 과정

경로 내부에 감싸인 영점 개수 Z=1(s=-1), 극점 개수 P=1(s=1)이다. 이를 공식에 대입하면 $N = Z - P = 1 - 1 = 0$ 이 된다. 즉 G(s) 평면으로 사상된 폐곡선은 원점을 전혀 감싸지 않는다. 이는 영점과 극점이 하나씩 서로 상쇄되어, 시계방향으로 경로를 한 바퀴 돌아도 G(s)의 편각 변화 총합이 0이 되기 때문이다.

선지 판단

① 원점을 감싸지 않는다 → 옳다. N=Z-P=1-1=0이므로 사상된 폐곡선은 원점을 전혀 감싸지 않는다.
② 원점을 시계방향으로 1회 감싼다 → 틀린 표현이다. N=1이 되려면 감싸인 극점 없이 영점만 1개 있어야 하는데, 이 경로는 극점도 함께 감싸므로 해당하지 않는다.
③ 원점을 시계방향으로 2회 감싼다 → 틀린 표현이다. N=2가 되려면 Z-P=2가 되어야 하는데 실제로는 Z-P=0이다.
④ 원점을 반시계방향으로 1회 감싼다 → 틀린 표현이다. N이 음수(-1)가 되려면 극점만 1개 감싸이고 영점은 감싸이지 않아야 하는데, 이 경로는 영점과 극점을 모두 감싼다.

오답 포인트

이 문제에서 자주 하는 착각은 경로 안에 극점이 있다는 것만 보고 무조건 원점을 감싼다고 판단하는 것이다. 반드시 경로 내부에 영점과 극점이 각각 몇 개 있는지 세어 Z-P를 계산해야 하며, 이 문제처럼 영점 1개와 극점 1개가 함께 감싸이면 서로 상쇄되어 N=0이 된다는 점을 놓치기 쉽다. 또한 방향 판단에서 시계방향 폐경로를 반시계방향으로 착각하면 부호가 반대로 나오므로, 경로에 표시된 화살표 방향을 먼저 정확히 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

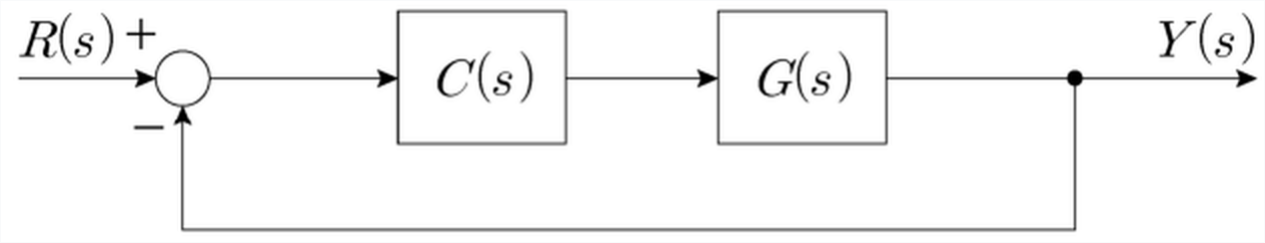
먼저 G(s)의 영점과 극점의 위치를 구하고, 주어진 폐경로 내부에 각각 몇 개가 포함되는지 Z, P로 센다. 그 다음 경로의 회전 방향(시계/반시계)을 확인한 뒤, N=Z-P(시계방향 기준) 공식으로 원점 감쌈 횟수와 방향을 구한다. N>0이면 시계방향, N<0이면 반시계방향, N=0이면 감싸지 않는다는 결론으로 선지와 대조한다.

암기 포인트

편각의 원리 N=Z-P(시계방향 경로 기준, Z=감싸인 영점 수, P=감싸인 극점 수)를 기억해 둔다. 영점과 극점이 같은 개수만큼 경로 안에 함께 감싸이면 N=0이 되어 원점을 감싸지 않는다는 점, 즉 나이퀴스트 판별에서 극점과 영점의 개수 차이가 실제로 감쌈 횟수를 결정한다는 점을 핵심으로 기억해 둔다.

NoteBase

문 23. 전달함수 $G(s)$의 단위계단응답이 $(1-e^{-t})u_s(t)$이고 제어기 $C(s)=K_P\left(1+\frac{T_I}{s}\right)$로 단위 피드백 제어시스템을 구성한다. 폐루프 극점의 감쇠비가 0.5이고 단위경사입력(unit ramp input)에 대한 정상상태오차가 $\frac{1}{9}$일 때, K_P와 T_I의 값은? (단, $u_s(t)$는 단위계단함수이다)



① K_P: 1, T_I: 4.5

② K_P: 1, T_I: 9

③ K_P: 2, T_I: 4.5

④ K_P: 2, T_I: 9

정답 3번

출제 포인트

제어기와 제어대상의 전달함수를 각각 구성한 뒤, 폐루프 특성방정식을 2차 표준형과 비교해 감쇠비 조건을 세우고, 동시에 정상상태오차(속도오차상수) 조건을 세워 두 조건을 연립으로 풀어 K_P와 T_I를 구하는 문제이다.

조건 정리

$G(s)$의 단위계단응답이 $(1-e^{-t})u_s(t)$이므로 $G(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s(s+1)}$이 되어 $G(s)=\frac{1}{s+1}$이다.
제어기는 $C(s)=K_P\left(1+\frac{T_I}{s}\right)=\frac{K_P(s+T_I)}{s}$로 적분기(1/s)를 포함한 PI 제어기이다. 단위 피드백이므로 개루프 전달함수는 $C(s)G(s)=\frac{K_P(s+T_I)}{s(s+1)}$이고, 폐루프 극점 감쇠비 $\zeta=0.5$, 단위경사입력 정상상태오차 $e_{ss}=\frac{1}{9}$라는 두 조건이 주어졌다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식: $s(s+1)+K_P(s+T_I)=0\Rightarrow s^2+(1+K_P)s+K_PT_I=0$. 이를 표준 2차식 $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$과 비교하면 $\omega_n^2=K_PT_I$, $2\zeta\omega_n=1+K_P$이다. 개루프가 적분기(1/s)를 하나 포함한 type-1 시스템이므로 단위경사입력에 대한 정상상태오차는 $e_{ss}=\frac{1}{K_v}$, $K_v=\lim_{s\to0}sC(s)G(s)$이다.

계산 과정

속도오차상수: $K_v=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{K_P(s+T_I)}{s(s+1)}=\lim_{s\to0}\frac{K_P(s+T_I)}{s+1}=K_PT_I$. 정상상태오차 조건 $e_{ss}=\frac{1}{K_PT_I}=\frac{1}{9}$에서 $K_PT_I=9$.
이는 곧 $\omega_n^2=9$이므로 $\omega_n=3$이다. 감쇠비 조건 $2\zeta\omega_n=1+K_P$에 $\zeta=0.5$, $\omega_n=3$을 대입하면 $2\times0.5\times3=3=1+K_P$이므로 $K_P=2$이다. 마지막으로 $K_PT_I=9$에서 $T_I=\frac{9}{2}=4.5$이다.

NoteBase

선지 판단

① $K_P = 1,\ T_I = 4.5$: $K_P T_I = 4.5 \neq 9$이므로 정상상태오차 조건을 만족하지 못한다. X

② $K_P = 1,\ T_I = 9$: $K_P T_I = 9$로 오차 조건은 맞지만, $2\zeta\omega_n = 1 + K_P = 2$가 되어야 하는데 $\omega_n = 3$이면 $2\zeta\omega_n = 3$이 되어 감쇠비 조건과 모순된다. X

③ $K_P = 2,\ T_I = 4.5$: $K_P T_I = 9$로 정상상태오차 조건을 만족하고, $1 + K_P = 3 = 2\zeta\omega_n = 2 \times 0.5 \times 3$으로 감쇠비 조건도 만족한다. O

④ $K_P = 2,\ T_I = 9$: $K_P T_I = 18 \neq 9$이므로 정상상태오차 조건을 만족하지 못한다. X

오답 포인트

가장 흔한 실수는 $G(s)$를 단위계단응답 자체로 착각해 $G(s) = 1 - e^{-t}$류의 시간함수를 그대로 라플라스 변환하지 않고 넘어가거나, 단위계단응답과 $G(s)$ 사이에 있는 $1/s$를 빠뜨려 $G(s)$를 잘못 구하는 것이다. 또한 정상상태오차 조건과 감쇠비 조건을 따로따로만 보고 한쪽만 만족하는 선지를 정답으로 고르지 않도록, 두 조건을 모두 만족하는지 반드시 함께 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

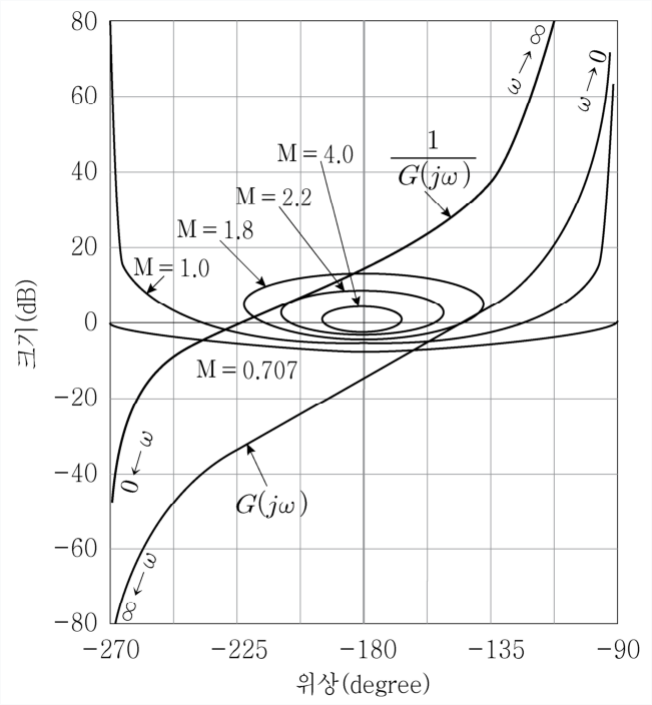
단위계단응답이 주어지면 먼저 라플라스 변환한 뒤 $1/s$로 나누어 $G(s)$를 구하는 절차를 고정한다. 이어서 PI 제어기가 포함된 개루프 전달함수를 세워 폐루프 특성방정식을 표준 2차형과 비교해 ω_n^2와 $2\zeta\omega_n$을 각각 구하고, 동시에 정상상태오차 공식(type-1이면 속도오차상수 K_v)으로 또 하나의 식을 세워 두 식을 연립으로 풀면 빠르게 답을 찾을 수 있다.

암기 포인트

단위계단응답 $y(t)$가 주어지면 $G(s) = s \cdot \mathcal{L}\{y(t)\}$로 구한다는 점, PI 제어기 $K_P(1 + T_I/s)$는 적분기를 포함해 type을 하나 올린다는 점, type-1 시스템의 단위경사입력 정상상태오차는 $1/K_v$이고 $K_v = \lim_{s \to 0} sC(s)G(s)$라는 점, 그리고 2차 특성방정식 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$의 계수 비교법을 함께 기억해 둔다.

NoteBase

문 24. 루프 전달함수 $G(s)$에 대한 단위 피드백 제어시스템에서 니콜스(Nichols) 선도가 다음 그림과 같다. 일정 M 궤적(constant M-loci), $G(j\omega)$ 및 $\frac{1}{G(j\omega)}$이 그림과 같이 표시될 때, 니콜스 선도에서 위상여유(PM)[°], 첨두공진치(M_r) 그리고 감도 최대크기(S_m) 값으로 가장 옳은 것은?



① PM: 34, M_r: 1.8, S_m: 2.2

② PM: 34, M_r: 2.2, S_m: 1.8

③ PM: 146, M_r: 1.8, S_m: 2.2

④ PM: 146, M_r: 2.2, S_m: 1.8

정답 1번

출제 포인트

니콜스 선도(Nichols chart)에서 위상여유(PM), 첨두공진치(M_r), 감도 최대크기(S_m)를 그래프에서 직접 읽어낼 수 있는지를 묻는다. $G(j\omega)$ 곡선은 개루프 주파수응답을 나타내고, 일정 M 궤적(constant M-loci)은 폐루프 크기가 일정한 자취이며, $1/G(j\omega)$ 곡선은 감도함수 $S(j\omega) = 1/(1 + G(j\omega))$의 최대크기를 읽기 위한 보조 곡선이다.

NoteBase

자료 읽는 순서

1) 위상여유(PM)는 $G(j\omega)$ 곡선이 0dB(크기축의 0)를 지나는 점의 위상을 읽고, 그 위상과 -180° 사이의 각도로 구한다. 그래프에서 $G(j\omega)$ 곡선은 0dB선을 위상 약 -146°에서 지나므로, $PM = 180 - 146 = 34$이다.
2) 첨두공진치 M_r은 $G(j\omega)$ 곡선이 일정 M 궤적 중 가장 큰 값을 갖는 궤적에 접하는 지점의 M값이다. 그림에서 $G(j\omega)$ 곡선은 M=1.0, M=0.707 궤적은 그대로 통과하고 안쪽으로 들어가 M=1.8 궤적에 접한 뒤(M=2.2, M=4.0 궤적에는 닿지 않고) 다시 바깥으로 나가므로 $M_r = 1.8$이다.
3) 감도 최대크기 S_m은 $1/G(j\omega)$ 곡선이 일정 M 궤적에 접하는 지점의 M값으로 읽는다. $1/G(j\omega)$) 곡선은 $G(j\omega)$ 보다 한 단계 안쪽인 M=2.2 궤적에 접하므로 $S_m = 2.2$이다.

선지별 해설

① PM=34, M_r=1.8, S_m=2.2 → 그래프에서 읽은 세 값과 정확히 일치한다. (O)
② PM=34, M_r=2.2, S_m=1.8 → 위상여유는 맞지만 M_r과 S_m이 서로 뒤바뀌어 있다. $G(j\omega)$가 접하는 궤적(1.8)과 $1/G(j\omega)$가 접하는 궤적(2.2)을 반대로 읽은 오답이다. (X)
③ PM=146, M_r=1.8, S_m=2.2 → M_r, S_m은 맞지만 PM을 180°에서 빼야 할 것을 위상값 자체(약 146의 절댓값 방향 착오)로 잘못 읽은 오답이다. $0dB$ 교차 위상이 -146°이므로 PM은 34이지 146이 아니다. (X)
④ PM=146, M_r=2.2, S_m=1.8 → PM, M_r, S_m 모두 잘못 읽은 조합이다. (X)

오답 포인트

가장 흔한 실수는 PM을 구할 때 0dB 교차점의 위상 값(-146°)을 그대로 답으로 쓰거나(146), 부호를 착각해 180에서 빼는 대신 더하는 것이다. PM은 항상 $180 + \phi_{gc}$(교차점 위상이 음수)로 계산해야 하며, 이 문제에서는 $180 - 146 = 34$이다. 또한 M_r과 S_m을 혼동하기 쉬운데, M_r은 $G(j\omega)$ 곡선이 접하는 M값이고 S_m은 $1/G(j\omega)$ 곡선이 접하는 M값이라는 점을 구분해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

니콜스 선도 문제가 나오면 먼저 0dB선과 -180° 위상선의 교차점(원점 역할)을 기준으로 잡는다. 그 다음 $G(j\omega)$ 곡선이 0dB선을 지나는 위상을 읽어 PM을 구하고, $G(j\omega)$와 $1/G(j\omega)$ 각 곡선이 일정 M 궤적 중 어느 것에 접하는지(가장 안쪽까지 파고든 궤적)를 찾아 각각 M_r, S_m으로 읽는다.

암기 포인트

위상여유 $PM = 180^\circ + \phi_{gc}$(0dB 교차점 위상 기준). 첨두공진치 M_r은 $G(j\omega)$가 접하는 M 궤적 값, 감도 최대크기 S_m은 $1/G(j\omega)$가 접하는 M 궤적 값으로 구분해 외워 둔다.

NoteBase

문 25. 루프 전달함수 $G_1(s)=\frac{1}{s^3+s^2+3s}$에 대한 단위 피드백 제어시스템의 이득여유는 A이고 위상여유는 B일 때, 루프 전달함수 $G_2(s)=\frac{1}{27s^3+9s^2+9s}$에 대한 단위 피드백 제어시스템의 이득여유와 위상여유는?

① 이득여유: $\frac{A}{3}$, 위상여유: $\frac{B}{3}$

② 이득여유: $\frac{A}{3}$, 위상여유: B

③ 이득여유: A, 위상여유: B

④ 이득여유: $3A$, 위상여유: $3B$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 두 전달함수 $G_1(s)$와 $G_2(s)$가 서로 어떤 관계에 있는지를 먼저 파악하고, 그 관계가 이득여유·위상여유에 어떤 영향을 주는지를 묻는다. 단순히 두 시스템을 각각 처음부터 계산하는 문제가 아니라, $G_2(s)$가 $G_1(s)$의 변수를 스케일링한 것에 불과하다는 점을 알아채는 것이 핵심이다.

조건 정리

$G_1(s)=\frac{1}{s^3+s^2+3s}$, $G_2(s)=\frac{1}{27s^3+9s^2+9s}$이며, 각각 단위 피드백을 구성했을 때 G_1의 이득여유는 A, 위상여유는 B이다. $G_2(s)$에서 s 자리에 $3s$를 대입해 $G_1(s)$와 비교해 본다.

사용할 공식

$G_1(3s)=\frac{1}{(3s)^3+(3s)^2+3(3s)}=\frac{1}{27s^3+9s^2+9s}$. 이것이 $G_2(s)$와 정확히 같은 형태이므로 $G_2(s)=G_1(3s)$가 성립한다. 즉 $G_2(j\omega)=G_1(j3\omega)$로, G_2의 주파수응답은 G_1의 주파수응답을 주파수축에서 1/3로 압축한 것과 같다(같은 크기·위상 값이 1/3 낮은 주파수에서 나타난다). 이득여유는 위상이 -180°가 되는 주파수(위상교차주파수)에서의 이득 감쇠량이고, 위상여유는 이득이 1(0dB)이 되는 주파수(이득교차주파수)에서 위상이 -180°로부터 얼마나 여유가 있는지를 나타낸다.

계산 과정

G_1의 위상교차주파수를 ω_p라 하면 $\angle G_1(j\omega_p)=-180^\circ$이다. $G_2(j\omega)=G_1(j3\omega)$이므로 $\angle G_2(j\omega)=-180^\circ$가 되는 주파수는 $3\omega=\omega_p$, 즉 $\omega=\omega_p/3$이다. 이때 이득 크기는 $|G_2(j\omega_p/3)|=|G_1(j\omega_p)|$로 G_1과 완전히 같은 값이다. 따라서 이득여유는 그대로 A이다.
같은 방식으로 G_1의 이득교차주파수를 ω_g라 하면 $|G_1(j\omega_g)|=1$이다. G_2의 이득교차주파수는 $3\omega=\omega_g$, 즉 $\omega=\omega_g/3$이며 이때 위상은 $\angle G_2(j\omega_g/3)=\angle G_1(j\omega_g)$로 G_1의 이득교차점 위상과 완전히 같다. 따라서 위상여유도 그대로 B이다.
즉 $s\to 3s$와 같은 주파수축 스케일링은 이득여유·위상여유의 값 자체는 바꾸지 않고, 다만 그 값이 나타나는 주파수 위치만 1/3로 이동시킨다.

NoteBase

선지 판단

① 이득여유 A/3, 위상여유 B/3: 이득여유·위상여유는 스케일링에 따라 변하지 않으므로 틀린 표현이다.
② 이득여유 A/3, 위상여유 B: 이득여유가 A/3으로 줄어든다는 부분이 틀린 표현이다.
③ 이득여유 A, 위상여유 B: 두 값 모두 변하지 않으므로 옳다.
④ 이득여유 3A, 위상여유 3B: 이득여유·위상여유가 3배로 커진다는 부분이 틀린 표현이다.

오답 포인트

이 문제에서 가장 흔한 착각은 $G_2(s)$의 계수가 $G_1(s)$보다 커졌으니 이득여유나 위상여유도 그만큼 커지거나 작아질 것이라고 성급하게 판단하는 것이다. 하지만 $G_2(s) = G_1(3s)$라는 관계는 '이득이 커진 것'이 아니라 '주파수축이 압축된 것'이다. 이득여유·위상여유는 특정 조건(위상 -180°, 이득 0dB)을 만족하는 주파수에서의 값이므로, 그 조건을 만족하는 주파수 위치만 이동할 뿐 값 자체는 그대로 유지된다는 점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

전달함수 두 개가 주어지고 한쪽이 다른 쪽의 s에 상수를 곱한 형태($G_2(s) = G_1(as)$)로 변형되는지부터 확인한다. 이 관계가 성립하면 이득여유·위상여유는 두 시스템에서 동일하며, 다만 그 값이 발생하는 주파수만 $1/a$배로 바뀐다고 바로 판단한다.

암기 포인트

$G(s) \to G(as)$와 같은 주파수축 스케일링(시간축을 $1/a$배로 압축·확장하는 것과 대응)은 이득여유·위상여유의 값을 바꾸지 않고 그 값이 나타나는 주파수 위치만 이동시킨다는 성질을 기억해 둔다.

NoteBase