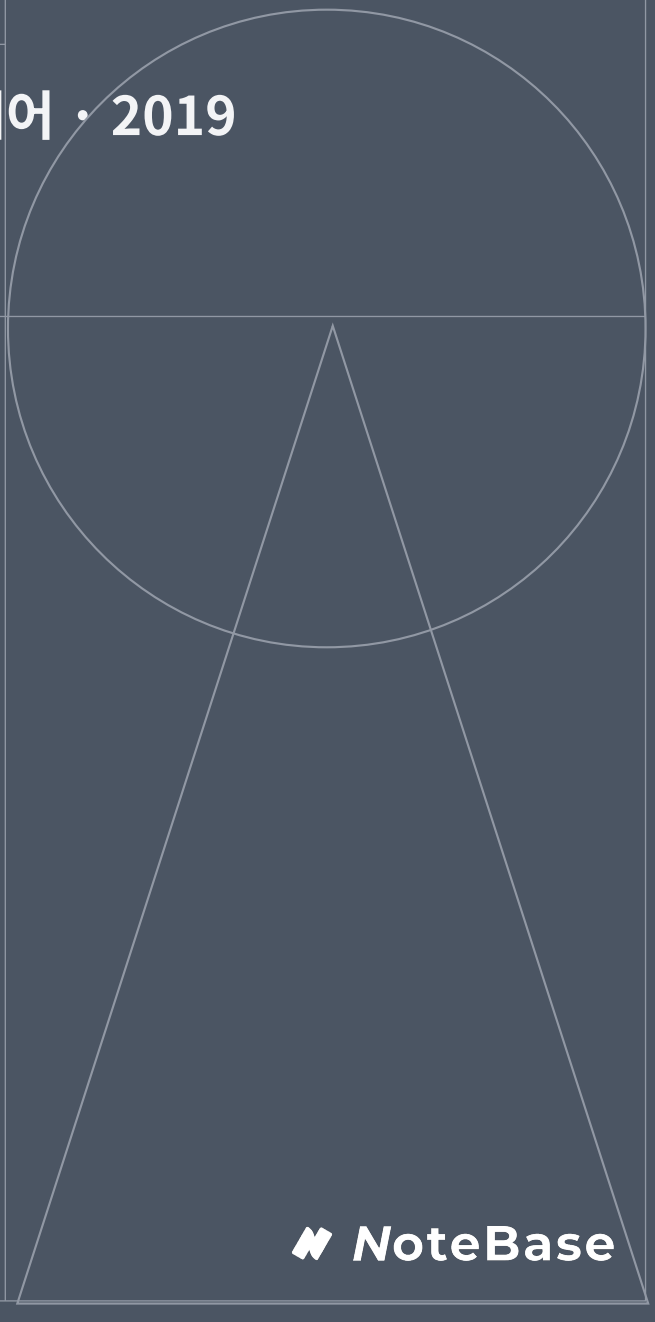
기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2019



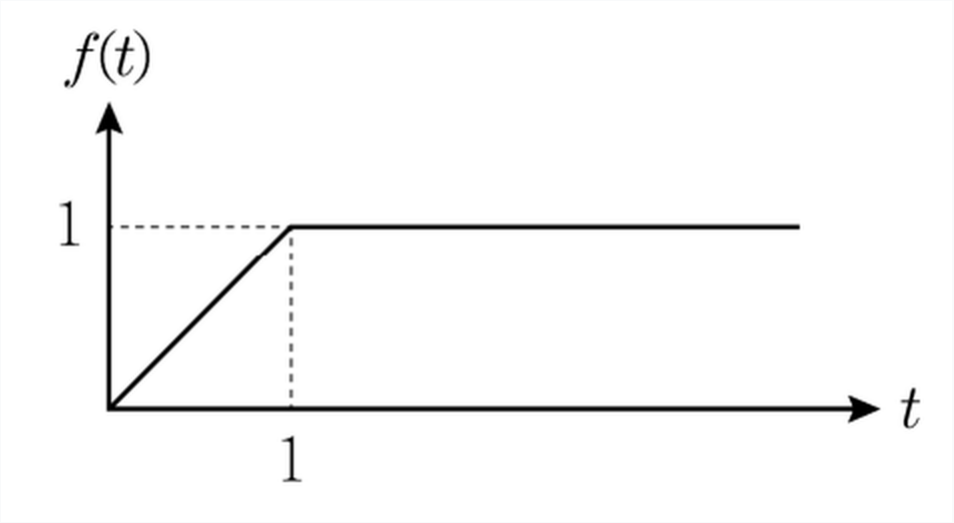
NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2019

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2019

문 1. 다음 함수 $f(t)$의 라플라스(Laplace) 변환으로 옳은 것은?



① $\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}e^{-s}$
② $\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}e^{-s}$
③ $\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}e^{-s}$
④ $\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 그래프를 계단함수를 포함한 식으로 바꾼 뒤 시프트 정리를 이용해 라플라스 변환을 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 함수는 $0 \le t \le 1$에서 $f(t)=t$이고, $t \ge 1$에서 $f(t)=1$이다.
그래프를 한 식으로 쓰면 $f(t)=t-(t-1)u(t-1)$이다.
구해야 할 값은 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$이다.

NoteBase

사용할 공식

기본식은 $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$이고, 시프트 정리는 $\mathcal{L}\{u(t-a)g(t-a)\} = e^{-as}G(s)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 그래프가 $t = 1$ 이후부터 증가분 $(t-1)$을 잘라낸 형태이기 때문이다.

계산 과정

1. 그래프를 식으로 정리하면 $f(t) = t - (t-1)u(t-1)$이다.
2. 따라서 $F(s) = \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\}$이다.
3. $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$이고, $\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{t\} = e^{-s}/s^2$이다.
4. 따라서 $F(s) = 1/s^2 - e^{-s}/s^2$이다.

선지 판단

1번: X. $1/s^2 + e^{-s}/s$는 뒤 구간을 더한 식이다. 이 그래프는 $t = 1$ 이후에 값을 더하는 것이 아니라 증가분 $(t-1)$을 빼서 1로 고정한다. 틀린 표현은 부호와 변환 대상이며, 올바르게는 $+e^{-s}/s$가 아니라 $-e^{-s}/s^2$이다.
2번: X. 부호는 음수로 맞추었지만 $(t-1)u(t-1)$의 라플라스 변환을 e^{-s}/s로 본 점이 틀리다. $(t-1)$은 상수 1이 아니라 램프 함수이므로 올바르게는 e^{-s}/s가 아니라 e^{-s}/s^2이다.
3번: X. 시프트된 램프의 차수 $1/s^2$는 맞지만, 그래프는 $t = 1$ 이후 증가분을 제거하는 형태이므로 더하는 것이 아니라 빼야 한다. 올바르게는 $1/s^2 + e^{-s}/s^2$가 아니라 $1/s^2 - e^{-s}/s^2$이다.
4번: O. $f(t) = t - (t-1)u(t-1)$로 두고 시프트 정리를 적용하면 $F(s) = 1/s^2 - e^{-s}/s^2$가 되어 그래프와 정확히 일치한다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 두 가지이다. 하나는 $t = 1$ 이후를 상수 1의 추가로 보고 $+e^{-s}/s$ 또는 $-e^{-s}/s$로 처리하는 실수이고, 다른 하나는 증가분을 제거하는 구조인데 부호를 반대로 잡는 실수이다. 그래프를 먼저 한 식으로 묶지 않으면 이 함정에 걸리기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

그래프형 라플라스 문항은 먼저 구간함수를 계단함수 형태로 한 식으로 만든 다음, 기본 변환과 시프트 정리를 순서대로 적용하면 된다. 특히 $t = a$ 이후에 값이 유지되면 무엇이 추가된 것이 아니라 무엇이 잘려 나간 것인지부터 판단한다.

암기 포인트

기울기가 멈춘 그래프는 원래 램프에서 멈춘 뒤의 증가분을 뺀 형태로 본다. 즉 $t \to t - (t-a)u(t-a)$ 구조를 떠올리면 된다.

NoteBase

문 2. 표준형 2차 제어시스템에서 단위계단(unit step) 입력을 인가할 때, 시간응답 특성에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 감쇠비(damping ratio)를 증가시키면 최대 오버슈트(maximum overshoot)는 감소한다.

② 감쇠비(damping ratio)를 고정하고 비감쇠 고유진동주파수(undamped natural frequency)를 증가시키면 상승시간(rise time)은 감소한다.

③ 감쇠비(damping ratio)를 고정하고 비감쇠 고유진동주파수(undamped natural frequency)를 증가시키면 정착시간(settling time)은 증가한다.

④ s평면의 좌반평면(left half plane)에 복소극은 부족감쇠(underdamped) 응답을 일으킨다.

정답 3번

출제 포인트

표준형 2차 제어시스템에서 감쇠비 ζ, 비감쇠 고유진동주파수 ω_n 변화가 최대 오버슈트, 상승시간, 정착시간에 어떻게 작용하는지를 묻는 문제이다.

핵심 개념

감쇠비 ζ는 진동의 감쇠 정도를 나타내며, ζ가 커질수록 오버슈트는 줄어든다.
비감쇠 고유진동주파수 ω_n는 응답 속도의 기준이 되는 고유 속도이며, ω_n가 커질수록 상승시간과 정착시간은 대체로 짧아진다.
좌반평면의 복소극은 실수부가 음수인 진동성 극으로, 안정한 부족감쇠 응답을 만든다.

NoteBase

선지별 해설

① O
감쇠비가 증가하면 최대 오버슈트는 감소한다. 최대 오버슈트는 $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$로 표현되므로 ζ가 커질수록 작아진다.

② O
감쇠비를 고정하면 ω_n가 커질수록 시스템 응답이 빨라져 상승시간은 감소한다. 상승시간은 대체로 $1/\omega_n$에 비례하는 경향을 가진다.

③ X
틀린 부분은 정착시간은 증가한다는 표현이다. 감쇠비를 고정하면 정착시간은 보통 $t_s \approx 4/(\zeta\omega_n)$로 보므로 ω_n가 증가할수록 정착시간은 감소한다. 올바르게는 비감쇠 고유진동주파수를 증가시키면 정착시간은 감소한다이다.

④ O
표준형 2차 시스템에서 좌반평면의 복소공액극은 음의 실수부를 가지는 진동성 극이므로 시간이 갈수록 감쇠되는 부족감쇠 응답을 일으킨다.

오답 포인트

③은 ω_n가 커지면 응답이 전반적으로 빨라진다는 점을 거꾸로 바꿔 놓은 선지이다. 수험생은 감쇠비가 오버슈트에 주는 영향과 ω_n이 시간 특성에 주는 영향을 서로 섞을 때 이 함정에 걸리기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

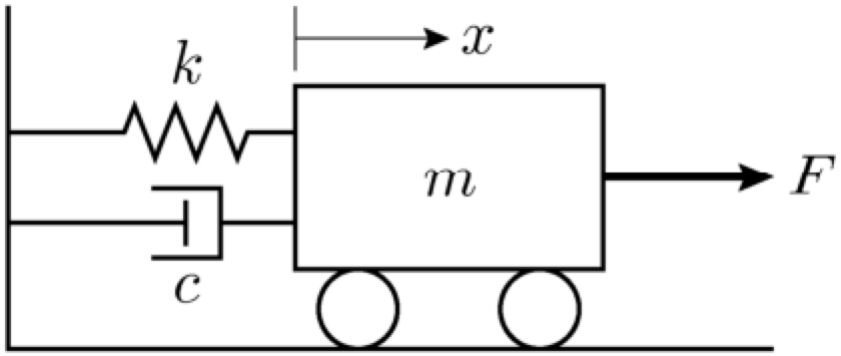
표준형 2차 시스템에서는 먼저 무엇을 고정했는지를 본다. ζ를 고정한 채 ω_n를 키우면 상승시간과 정착시간은 짧아지고, ω_n를 고정한 채 ζ를 키우면 오버슈트는 줄어든다. 또 좌반평면의 복소극은 안정한 부족감쇠 응답으로 연결된다.

암기 포인트

ζ는 진동 크기를 줄이고, ω_n은 응답 시간을 줄인다. 따라서 ω_n ↑이면 t_r, t_s는 내려간다.

NoteBase

문 3. 질량 m, 스프링 상수 k, 댐퍼 c로 구성된 질량-스프링-댐퍼 시스템에서 제어입력 F에 대한 상태공간 모델은? (단, $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$이고, 시스템은 마찰이 없는 평면에서 수평으로 움직인다)



① bmatrixx_1 \ x_2bmatrix=bmatrix0&1\\-(k)/(m)&-(c)/(m)bmatrixbmatrixx_1_2bmatrix+bmatrix0\\(1)/(m)bmatrixF

② bmatrixx_1 \ x_2bmatrix=bmatrix0&1\\-(c)/(m)&-(k)/(m)bmatrixbmatrixx_1_2bmatrix+bmatrix0\\(1)/(m)bmatrixF

③ bmatrixx_1 \ x_2bmatrix=bmatrix-(k)/(m)&-(c)/(m)\\0&1bmatrixbmatrixx_1_2bmatrix+bmatrix(1)/(m)\\1bmatrixF

④ bmatrixx_1 \ x_2bmatrix=bmatrix-(c)/(m)&-(k)/(m)\\0&1bmatrixbmatrixx_1_2bmatrix+bmatrix(1)/(m)\\1bmatrixF

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 질량-스프링-댐퍼의 운동방정식을 세운 뒤 상태변수 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$로 바꾸어 상태공간 모델의 A, B 행렬을 구할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

질량은 m, 스프링 상수는 k, 댐퍼 계수는 c이다.
외력은 제어입력 F로 작용한다.
상태변수는 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$이므로 $\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$가 된다.

NoteBase

사용할 공식

운동방정식은 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$이다.
따라서 $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}F$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 스프링 힘이 변위 x에 비례하고 댐퍼 힘이 속도 $\dot{x}$에 비례하므로, 외력과의 평형식에서 바로 상태방정식을 만들 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 평형식에서 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$를 세운다.
2. $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$를 대입하면 $\dot{x}_1 = x_2$이다.
3. $\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F$이다.
4. 따라서
bmatrixx_1x_2bmatrix=bmatrix0&1;
-(k)/(m)&-(c)/(m)bmatrixbmatrixx_1_2bmatrix+bmatrix0(1)/(m)bmatrixF
가 된다.

선지 판단

1번: O
$\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F$를 그대로 쓴 식이다. 상태행렬의 첫째 행이 [01], 둘째 행이 $[-k/m\ -c/m]$ 계수에 해당하고, 입력은 $\dot{x}_2$에만 들어가므로 맞다.
2번: X
둘째 행의 계수가 뒤바뀌었다. 이 식은 변위 x_1에 $-c/m$, 속도 x_2에 $-k/m$를 곱한 꼴인데, 올바르게는 변위 항이 $-k/m$, 속도 항이 $-c/m$이어야 한다.
3번: X
행의 의미와 입력벡터가 모두 틀렸다. 첫째 행은 반드시 $\dot{x}_1 = x_2$가 되어야 하므로 [01]이어야 하고, 입력 F는 $\dot{x}_1$이 아니라 $\dot{x}_2$에만 작용하므로 입력벡터도 bmatrix0; 1/mbmatrix이어야 한다.
4번: X
3번과 마찬가지로 첫째 행이 $\dot{x}_1 = x_2$를 나타내지 못하고, 둘째 행의 계수도 스프링항과 댐퍼항이 뒤바뀌었다. 또한 입력벡터를 bmatrix1/m; 1bmatrix로 둔 것도 잘못이며, 올바르게는 bmatrix0; 1/mbmatrix이다.

오답 포인트

스프링항 kx와 댐퍼항 $c\dot{x}$의 대응 대상을 바꾸거나, $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ 정의를 놓쳐 첫째 행을 [01]로 쓰지 못하면 틀린다. 입력 F가 가속도식 $\dot{x}_2$에만 들어간다는 점도 자주 놓친다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

기계계 상태방정식 문제는 먼저 스칼라 운동방정식 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$를 세운 뒤, 상태변수 정의에 따라 $\dot{x}_1$을 쓰고 마지막에 $\dot{x}_2$를 x_1, x_2, F의 계수로 정리하면 된다. A 행렬은 $\dot{x}_1, \dot{x}_2$의 계수배열이고 B 벡터는 입력이 들어가는 위치만 남긴다.

암기 포인트

$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$이면 항상 $\dot{x}_1 = x_2$가 먼저 나오고, 질량-스프링-댐퍼의 표준형은 A=bmatrix0&1; -k/m&-c/mbmatrix, B=bmatrix0; 1/mbmatrix이다.

NoteBase

문 4. 다음 시스템에서 단위임펄스(unit impulse) 응답 $y(t)$는? (단, $t \geq 0$이다)

x(t)=bmatrix0 & 1 \ -3 & -4bmatrixx(t)+bmatrix0 \ 1bmatrixu(t)
y(t)=bmatrix1 & 0bmatrixx(t)

① $\frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{-3t})$
② $\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$
③ $\frac{3}{2}(-e^{-t}+e^{-3t})$
④ $\frac{3}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식에서 전달함수 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$를 구한 뒤 역라플라스 변환으로 단위임펄스 응답 $y(t)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
A=bmatrix0&1; -3&-4bmatrix, B=bmatrix0; 1bmatrix, C=bmatrix1&0bmatrix
구해야 할 값: 단위임펄스 입력에 대한 출력 $y(t)$
주의할 조건: 단위임펄스 응답은 전달함수의 역라플라스 변환이며, 부호와 부분분수 분해 계수를 정확히 본다.

사용할 공식

전달함수는 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$이다.
이 문제에서 $D=0$이므로 단위임펄스 응답은 $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 상태공간 표현이 직접 주어졌고, 임펄스 응답은 입력에서 출력까지의 전달함수를 구해 바로 역라플라스 변환하면 되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. $sI - A$를 구하면
sI-A=bmatrixs&-1; 3&s+4bmatrix
이다.
2. 행렬식은 $\det(sI - A) = s(s+4) + 3 = s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$이다.
3. 전달함수는
$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$
이다.
4. 부분분수 분해를 하면
$\frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right)$
이므로,
$y(t) = g(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$
이다.

선지별 해설

① X
$\frac{1}{2}(-e^{-t} + e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$이므로 정답의 부호를 전체적으로 뒤집은 식이다. 틀린 표현은 전체 부호이며, 올바르게는 $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$이다.

② O
부분분수 분해 결과가 $\frac{1}{2}(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3})$이므로 역라플라스 변환하면 $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$가 된다. 계수와 부호가 모두 맞다.

③ X
$\frac{3}{2}(-e^{-t} + e^{-3t})$는 ①의 부호 오류에 더해 계수까지 3배 크게 쓴 식이다. 틀린 표현은 계수 $\frac{3}{2}$와 전체 부호이며, 올바르게는 $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$이다.

④ X
$\frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$는 지수항의 부호 순서는 맞지만 계수가 잘못되었다. 부분분수 분해 계수는 $\frac{1}{2}$여야 하므로, 올바르게는 $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 두 가지이다. 첫째, $(s+1)(s+3)$의 부분분수 분해에서 계수를 $\frac{1}{2}$가 아니라 $\frac{3}{2}$로 잘못 잡기 쉽다. 둘째, $\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$의 순서를 뒤집어 전체 부호를 반대로 쓰기 쉽다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

상태방정식에서 임펄스 응답을 묻는 문제는 먼저 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$로 전달함수를 구하고, 그다음 분모 인수분해와 부분분수 분해를 거쳐 역라플라스 변환으로 마무리하면 된다. 마지막에는 계수와 부호를 한 번 더 검산하면 된다.

암기 포인트

상태공간 임펄스 응답은 전달함수 $G(s)$를 구한 뒤 역라플라스 변환한 결과이며, $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ 꼴은 부분분수 계수와 부호가 정답을 가른다.

NoteBase

문 5. 표준형 2차 시스템에서 극점(pole)과 영점(zero)의 특성에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 극점은 시스템의 안정성을 결정한다.

② 극점이 s평면의 우반평면(right half plane)에 위치하면 불안정하고 허수축으로부터 멀어질수록 발산 속도가 빨라진다.

③ s평면의 우반평면(right half plane)에 영점이 추가되면 비최소위상(nonminimum phase) 시스템이 된다.

④ s평면의 우반평면(right half plane)에 영점이 추가되면 단위계단 입력에 대하여 오버슈트(overshoot) 현상을 일으킨다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 표준형 2차 시스템에서 극점과 영점이 각각 안정성, 과도응답, 위상 특성에 어떤 영향을 주는지를 구분하는 문제이다.

핵심 개념

극점은 전달함수 분모의 근으로서 시스템의 고유응답을 정하며 안정성과 감쇠속도를 좌우한다.
영점은 전달함수 분자의 근으로서 응답의 모양과 위상 특성을 바꾸며, 특히 우반평면 영점은 비최소위상 특성을 만든다.
핵심 구분은 안정성 자체는 극점이 결정하고, 영점은 주로 과도응답의 형태와 위상 특성을 바꾼다는 점이다.

NoteBase

선지별 해설

① O
극점 위치는 시스템의 자연응답을 결정하므로 안정성 판단의 핵심이다. 연속시간 시스템에서는 모든 극점이 좌반평면에 있어야 안정하다.

② O
극점이 s평면 우반평면에 있으면 실수부가 양수이므로 응답에 $e^{\sigma t}$ 형태의 발산 성분이 포함되어 불안정하다. 또한 허수축에서 더 멀수록 실수부 σ가 더 커져 발산 속도도 빨라진다.

③ O
우반평면 영점은 비최소위상 영점이므로 시스템을 비최소위상 시스템으로 만든다. 이는 위상지연을 더 크게 만들고 응답 해석을 까다롭게 한다.

④ X
틀린 부분은 "오버슈트 현상을 일으킨다"이다. 우반평면 영점의 대표적 특징은 단위계단 응답이 처음에 반대 방향으로 움직이는 역응답 또는 언더슈트 경향이지, 오버슈트를 반드시 만든다는 뜻은 아니다. 올바르게는 "우반평면 영점이 추가되면 비최소위상 특성으로 인해 역응답이나 언더슈트가 나타날 수 있다"이다.

오답 포인트

영점이 과도응답을 바꾼다는 사실만 기억하면 ④를 맞는 말처럼 보기 쉽다. 그러나 우반평면 영점의 대표 현상은 일반적인 오버슈트가 아니라 역응답과 비최소위상 특성이라는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

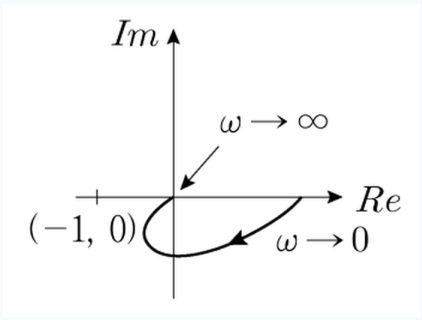
먼저 극점은 안정성, 감쇠, 발산 속도와 연결하고 영점은 응답 형상과 위상 변화로 연결해 판단한다. 특히 우반평면에 있는 것은 극점이면 불안정, 영점이면 비최소위상으로 구분하면 빠르게 정리된다.

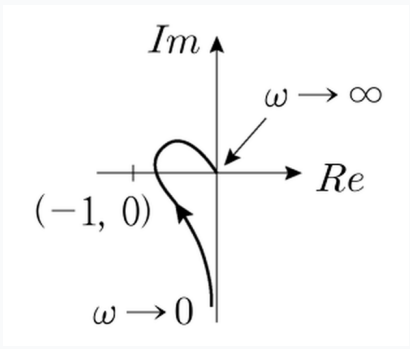
암기 포인트

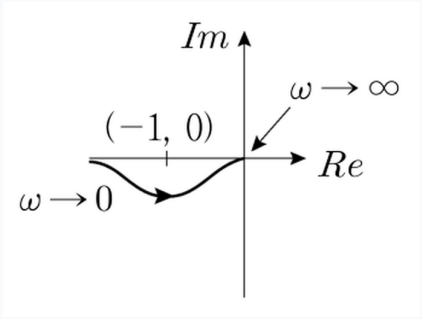
극점은 안정성을 정하고, 우반평면 영점은 비최소위상과 역응답을 만든다.

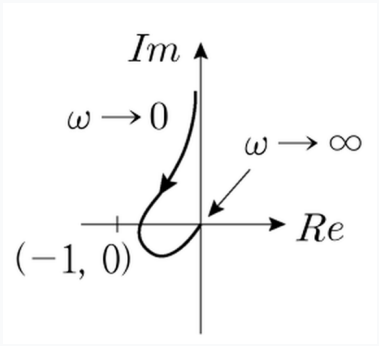
NoteBase

문 6. s평면의 우반평면에 극점을 갖지 않는 루프 전달함수를 포함한 단위 피드백 제어시스템이 불안정한 경우에 해당하는 나이퀴스트(Nyquist) 선도는?

① 

② 

③ 

④ 

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 루프 전달함수의 우반평면 극점 수가 없는 경우 $P = 0$, 나이퀴스트 선도가 점 $(-1, 0)$을 감싸는지로 폐루프 안정도를 판단하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① X
이 선도는 원점 부근에서 아래쪽으로 휘는 루프를 만들지만 $(-1, 0)$을 감싸지 않는다. 따라서 $P = 0$인 경우 폐루프 불안정을 뜻하지 않는다.
틀린 표현은 불안정 선도라는 판단이다. 올바르게는 "$(-1, 0)$을 감싸지 않는 선도이므로 불안정 판정의 근거가 되지 않는다."이다.

② X
작은 고리가 원점의 왼쪽에 있으나 $(-1, 0)$ 바깥에서 형성되어 임계점 $(-1, 0)$을 둘러싸지 않는다. 따라서 불안정 경우에 해당하지 않는다.
틀린 표현은 고리 모양만 보고 불안정이라고 보는 판단이다. 올바르게는 "고리의 존재 자체가 아니라 $(-1, 0)$ 포함 여부가 기준이다."이다.

③ X
곡선이 $(-1, 0)$ 근처의 아래쪽을 지나가지만 닫힌 감김이 없어서 임계점을 포위하지 않는다. 근처를 지나가는 것만으로는 폐루프 불안정을 말할 수 없다.
틀린 표현은 $(-1, 0)$ 근처 통과를 감김과 같은 뜻으로 보는 판단이다. 올바르게는 "임계점을 실제로 둘러싸야 불안정 판정이 가능하다."이다.

④ O
이 선도는 루프가 $(-1, 0)$을 감싸는 형태이다. 루프 전달함수에 우반평면 극점이 없으므로 $P = 0$이고, 이때 $(-1, 0)$ 감김이 생기면 폐루프 우반평면 극점이 발생하여 불안정이 된다.

오답 포인트

나이퀴스트 문제에서는 곡선이 복잡하게 휘는 모양보다 $(-1, 0)$을 실제로 감싸는지가 핵심이다. ②와 ③처럼 임계점 근처를 지나가거나 작은 고리를 만들어도 $(-1, 0)$을 포함하지 않으면 불안정으로 볼 수 없다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 루프 전달함수의 우반평면 극점 수를 확인한다. 이 문항처럼 $P = 0$이면 나이퀴스트 선도가 $(-1, 0)$을 감싸는 도식만 불안정으로 판단한다.

암기 포인트

나이퀴스트 안정판별의 기준점은 원점이 아니라 $(-1, 0)$이며, $P = 0$에서는 $(-1, 0)$ 감김이 곧 불안정 신호이다.

NoteBase

문 7. 단위 피드백(unity feedback) 제어시스템에서 루프(loop) 전달함수 $L(s)$에 대하여 시스템의 이득여유(gain margin)가 $20\log 2\text{dB}$로 주어질 때 K의 값은?

$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 위상교차주파수에서의 크기를 이용해 이득여유를 구하고, 그 조건으로 K를 역산하는 계산형 문제이다.

조건 정리

주어진 루프 전달함수는 $L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$이다.
이득여유가 $20\log 2dB$이므로 이득여유의 비는 2이다.
구해야 할 값은 K이다.

사용할 공식

위상교차주파수 ω_{pc}에서 $\angle L(j\omega_{pc}) = -180^\circ$이고, 이득여유는 $GM = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이득여유가 바로 위상교차주파수에서의 개루프 크기로 결정되기 때문이다.

계산 과정

1. $L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)}$이므로 위상은 $-90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}(\omega/2)$이다.
2. 위상교차 조건 $-90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}(\omega/2) = -180^\circ$에서 $\tan^{-1}\omega + \tan^{-1}(\omega/2) = 90^\circ$이 된다.
두 각의 합이 직각이면 한 각이 다른 각의 여각이므로 두 각의 탄젠트를 곱하면 1이 된다. 즉
$\tan(\tan^{-1}\omega)\cdot\tan(\tan^{-1}(\omega/2)) = \omega\cdot\frac{\omega}{2} = 1$에서 $\omega^2 = 2$이므로 $\omega_{pc} = \sqrt{2}$이다.
3. 이때 $|L(j\omega_{pc})| = \frac{K}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+2}\cdot\sqrt{4+2}} = \frac{K}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{K}{6}$이다.
4. 이득여유가 2이므로 $GM = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|} = \frac{6}{K} = 2$이다.
5. 따라서 $K = 3$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X

'$K=2$'가 틀린 표현이다. $K=2$를 대입하면 $|L(j\omega_{pc})|=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 이득여유는 3이 된다. 올바르게는 '$K=3$'이다.

② O

$K=3$을 대입하면 $|L(j\omega_{pc})|=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이므로 이득여유는 2가 된다. 이는 $20\log 2 dB$와 일치하므로 옳다.

③ X

'$K=4$'가 틀린 표현이다. $K=4$를 대입하면 $|L(j\omega_{pc})|=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로 이득여유는 $\frac{3}{2}$가 된다. 올바르게는 '$K=3$'이다.

④ X

'$K=5$'가 틀린 표현이다. $K=5$를 대입하면 $|L(j\omega_{pc})|=\frac{5}{6}$이므로 이득여유는 $\frac{6}{5}$가 된다. 올바르게는 '$K=3$'이다.

오답 포인트

이득여유의 dB값을 보고 숫자 2를 그대로 더하거나, 위상교차주파수를 구하지 않고 크기만 대입하면 오답이 된다. 이 문제의 핵심 함정은 "이득여유 2배"와 "위상교차주파수에서의 개루프 크기 1/2"를 연결하지 못하는 점이다.

다시 나오면 이렇게 판단

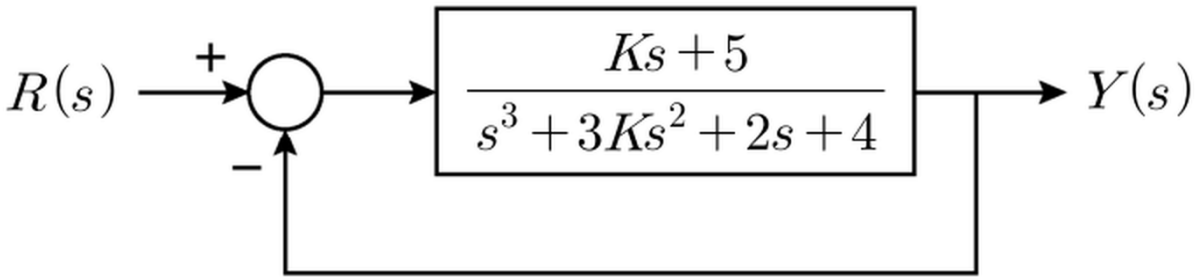
이득여유 문제는 먼저 $\angle L(j\omega)=-180^\circ$에서 위상교차주파수를 구한 다음, 그 주파수에서의 크기로 $GM=1/|L|$를 적용하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

이득여유는 위상교차주파수에서 $GM=1/|L|$로 계산하며, dB값 $20\log M$은 비 M로 다시 바꾸어 쓴다.

NoteBase

문 8. 다음 피드백 제어시스템에서 극점이 s평면의 우반평면(right half plane)에 두 개 존재하도록 하는 K의 범위로 옳지 않은 것은?



① $K < -3$

② $-3 < K < 0$

③ $0 < K < 1$

④ $K > 1$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백계의 폐루프 특성방정식을 만든 뒤 루스 판별법으로 우반평면 극점 수를 구간별로 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s) = \frac{Ks+5}{s^3+3Ks^2+2s+4}$이다.
피드백은 음의 단위 피드백이므로 폐루프 특성방정식은 $1 + G(s) = 0$에서 구한다.
구해야 할 것은 폐루프 극점이 우반평면에 2개 존재하는 K의 범위이다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식은
$s^3 + 3Ks^2 + 2s + 4 + Ks + 5 = 0$
즉
$s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 9 = 0$
이다.
이 식은 3차식이므로 루스 배열의 첫 열 부호 변화 수가 우반평면 극점 수가 된다.
루스 배열 첫 열은 1, $3K$, $\frac{3K(K+2)-9}{3K}$, 9이고, 정리하면 세 번째 항은 $\frac{K^2+2K-3}{K} = \frac{(K+3)(K-1)}{K}$이다.

NoteBase

계산 과정

1. 폐루프 특성방정식을 $s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 9 = 0$로 정리한다.
2. 루스 배열 첫 열을 $1,\ 3K,\ \frac{(K+3)(K-1)}{K},\ 9$로 둔다.
3. 부호가 바뀌는 경계는 $K = -3,\ 0,\ 1$이다.
4. 각 구간에서 첫 열 부호를 조사하면 다음과 같다.

$-\infty < K < -3$: $+,\ -,\ -,\ +$로 부호 변화 2회

$-3 < K < 0$: $+,\ -,\ +,\ +$로 부호 변화 2회

$0 < K < 1$: $+,\ +,\ -,\ +$로 부호 변화 2회

$K > 1$: $+,\ +,\ +,\ +$로 부호 변화 0회

5. 따라서 우반평면 극점이 2개 존재하는 범위는 ①, ②, ③이고, 이에 해당하지 않는 것은 ④이다.

선지별 해설

① O

$K < -3$이면 루스 배열 첫 열 부호가 $+,\ -,\ -,\ +$가 되어 부호 변화가 2번 생긴다. 따라서 우반평면 극점이 2개 존재한다.

② O

$-3 < K < 0$이면 첫 열 부호가 $+,\ -,\ +,\ +$가 되어 부호 변화가 2번 생긴다. 따라서 이 구간도 조건을 만족한다.

③ O

$0 < K < 1$이면 첫 열 부호가 $+,\ +,\ -,\ +$가 되어 부호 변화가 2번 생긴다. 따라서 이 구간도 우반평면 극점이 2개이다.

④ X

$K > 1$이면 첫 열이 모두 양수 $+,\ +,\ +,\ +$가 되어 부호 변화가 0번이다. 따라서 우반평면 극점은 2개가 아니라 0개이다. 틀린 표현은 "$K > 1$에서 우반평면 극점이 2개 존재한다"는 부분이고, 올바르게는 "$K > 1$에서는 우반평면 극점이 존재하지 않는다"이다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 전달함수 분모만 보고 판단하거나, 폐루프 특성방정식을 만들 때 분자 $Ks + 5$를 더하지 않는 실수에 있다. 또 루스 배열의 세 번째 항을 $\frac{(K+3)(K-1)}{K}$로 인수분해하지 않으면 구간 부호 판단이 흐려지기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

피드백계의 극점 개수 문제는 먼저 폐루프 특성방정식을 정확히 만든 뒤, 루스 배열 첫 열의 부호가 바뀌는 경계값을 찾고 각 구간의 부호 변화 횟수를 세어 판단한다.

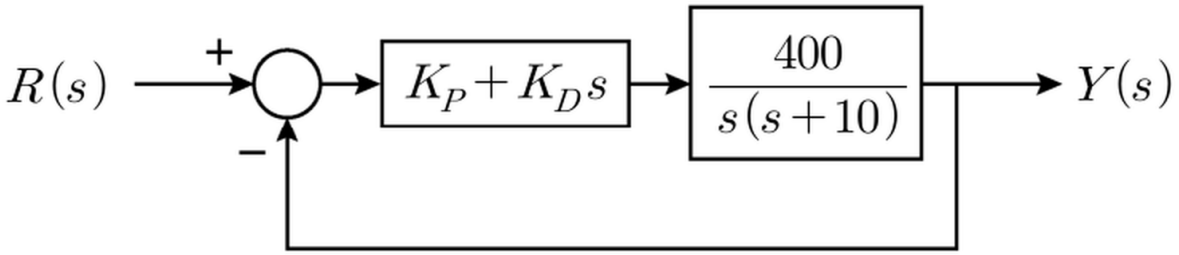
NoteBase

암기 포인트

3차 루스 판별은 첫 열 부호 변화 수가 우반평면 극점 수이며, 경계값은 첫 열 항이 0이 되는 지점에서 갈린다.

NoteBase

문 9. PD 제어기가 사용된 제어시스템에서 단위램프(unit ramp) 입력 $r(t) = tu_s(t)$에 대한 정상상태 오차가 0.025이고, 감쇠비(damping ratio)가 1이 되는 K_P와 K_D의 값은? (단, $u_s(t)$는 단위계단신호이다)



① K_P: 0.1, K_D: 0.075

② K_P: 0.1, K_D: 0.15

③ K_P: 1, K_D: 0.075

④ K_P: 1, K_D: 0.15

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 단위램프 입력의 정상상태 오차로 K_P를 구하고, 폐루프 특성방정식을 표준 2차형과 비교해 감쇠비 1 조건으로 K_D를 구하는 문제이다.

조건 정리

제어기와 플랜트의 개루프 전달함수는 $L(s) = \frac{400(K_P + K_D s)}{s(s+10)}$이다.
단위램프 입력 $r(t) = tu_s(t)$에 대한 정상상태 오차는 0.025이다.
폐루프 감쇠비는 $\zeta = 1$이다.

사용할 공식

단위램프 입력의 정상상태 오차는 $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$, $K_V = \lim_{s\to 0} sL(s)$로 구한다.
유니티 피드백 폐루프 특성방정식은 $1 + L(s) = 0$이고, 이를 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 비교하면 감쇠비 조건을 바로 적용할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

먼저 K_v를 구하면 $K_v = \lim_{s\to 0} \frac{400(K_P + K_D s)}{s+10} = 40K_P$이다.
따라서 $e_{ss} = \frac{1}{40K_P} = 0.025$이므로 $40K_P = 40$, 즉 $K_P = 1$이다.
다음으로 폐루프 특성방정식은 $s(s+10) + 400(K_P + K_D s) = 0$이므로 $s^2 + (10 + 400K_D)s + 400K_P = 0$이다.
여기에 $K_P = 1$을 대입하면 $s^2 + (10 + 400K_D)s + 400 = 0$이다.
표준 2차형 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 비교하면 $\omega_n^2 = 400$이므로 $\omega_n = 20$이다.
또 $\zeta = 1$이므로 $2\zeta\omega_n = 40$이고, 따라서 $10 + 400K_D = 40$가 되어 $K_D = \frac{30}{400} = 0.075$이다.

선지 판단

1번 X: $K_P = 0.1$이면 $e_{ss} = \frac{1}{40 \times 0.1} = 0.25$가 되어 정상상태 오차 0.025를 만족하지 못한다. 틀린 표현은 $K_P = 0.1$이고, 올바르게는 $K_P = 1$이어야 한다. $K_D = 0.075$만 맞는다.
2번 X: $K_P = 0.1$이라서 정상상태 오차가 이미 0.25로 틀리고, $K_D = 0.15$이면 $10 + 400K_D = 70$이므로 $2\zeta\omega_n = 70$이 되어 $\zeta = 1$도 만족하지 못한다. 틀린 표현은 $K_P = 0.1$, $K_D = 0.15$이고, 올바르게는 $K_P = 1$, $K_D = 0.075$이다.
3번 O: $K_P = 1$이면 단위램프 정상상태 오차가 0.025가 되고, $K_D = 0.075$이면 특성방정식의 s항 계수가 40이 되어 $\zeta = 1$을 만족한다.
4번 X: $K_P = 1$은 정상상태 오차 조건에 맞지만 $K_D = 0.15$이면 $10 + 400K_D = 70$이어서 $\zeta = \frac{70}{2 \times 20} = 1.75$가 된다. 틀린 표현은 $K_D = 0.15$이고, 올바르게는 $K_D = 0.075$이다.

오답 포인트

단위램프 정상상태 오차는 K_v로 판단하므로 K_D가 아니라 K_P가 먼저 결정된다. 여기서 K_D까지 함께 넣어 오차를 계산하거나, 감쇠비 조건을 특성방정식의 s항 계수와 연결하지 않으면 4번으로 흐르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

유니티 피드백 PD 문제는 정상상태 오차 조건으로 K_P를 먼저 확정하고, 그다음 폐루프 특성방정식을 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 항별 비교해 K_D를 정하면 된다.

암기 포인트

단위램프 오차는 K_v에서, PD의 감쇠비는 폐루프 특성방정식의 s항 계수에서 결정된다.

NoteBase

문 10. 특성방정식(characteristic equation)이 다음과 같이 주어진 시스템에서 근궤적에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

$s(s+2)(s^2+2s+5)+K=0,\ K\geq 0$

① 점근선의 교차점은 -1이다.

② 실수축 위의 구간 $-2\leq s\leq 0$은 근궤적에 포함된다.

③ 양의 허수부를 갖는 복소 극점에서의 출발각도는 -60°이다.

④ 근궤적이 허수축과 교차한다.

정답 3번

출제 포인트

근궤적의 점근선 교차점, 실수축 구간, 복소극점 출발각, 허수축 교차 여부를 함께 판별하는 문제이다.

조건 정리

개루프 극은 $0,\ -2,\ -1\pm j2$이고 영점은 없다.
따라서 극의 수는 4개, 영점의 수는 0개이므로 점근선은 4개이다.
특성방정식은 $s(s+2)(s^2+2s+5)+K=0$에서 $s^4+4s^3+9s^2+10s+K=0$로 정리된다.

사용할 공식

점근선 교차점은 $\sigma_a=\frac{\sum p-\sum z}{n-m}$이다.
실수축 근궤적은 해당 점의 오른쪽에 있는 실수축상의 극과 영점 개수가 홀수일 때 존재한다.
복소극점 출발각은 $\phi_d=180^\circ+\sum\angle(p-z_i)-\sum\angle(p-p_i)$로 구한다.
허수축 교차 여부는 Routh 배열에서 1열이 0이 되는 조건으로 판별한다.

계산 과정

1. 점근선 교차점은 $\sum p=-4,\sum z=0$이므로 $\sigma_a=\frac{-4}{4}=-1$이다.
2. 실수축상의 개루프 극은 -2와 0뿐이므로 $-2<s<0$에서는 오른쪽의 실수축 극 개수가 1개여서 근궤적이 존재한다.
3. 양의 허수부 극점 $p=-1+j2$에서 다른 극들이 만드는 각은 $\angle(p-0)=116.565^\circ$, $\angle(p+2)=63.435^\circ$, $\angle(p-(-1-j2))=90^\circ$이므로 합은 270°이다. 따라서 출발각은 $180^\circ-270^\circ=-90^\circ$이다.
4. Routh 배열의 s^1행 첫 원소는 $10-\frac{8K}{13}$이므로 0이 되는 값은 $K=\frac{65}{4}$이다. 이때 보조방정식은 $6.5s^2+16.25=0$이어서 $s=\pm j\frac{\sqrt{10}}{2}$가 되고, 근궤적은 허수축과 교차한다.

NoteBase

선지별 해설

① O

- 점근선 교차점은 $\sigma_a = -1$이므로 옳다.

② O

- 실수축 근궤적은 실수축상의 극과 영점만 세어서 판단한다. $-2 < s < 0$에서는 오른쪽에 실수축 극 0 하나만 있으므로 이 구간은 근궤적에 포함된다.

③ X

- 양의 허수부를 갖는 극소극점 $-1 + j2$에서의 출발각은 $-90\,^\circ$이다. 따라서 '-60°'가 틀렸고, 올바르게는 '양의 허수부를 갖는 복소극점에서의 출발각은 $-90\,^\circ$이다'가 된다.

④ O

- $K = \frac{65}{4}$에서 근이 $s = \pm j\frac{\sqrt{10}}{2}$가 되므로 근궤적은 허수축과 교차한다.

오답 포인트

복소극점 출발각을 구할 때 다른 극들이 만드는 각을 빠뜨리면 ③처럼 잘못된 각도가 나온다. 또 실수축 구간 판별에서 복소극점까지 개수에 넣는 실수가 자주 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

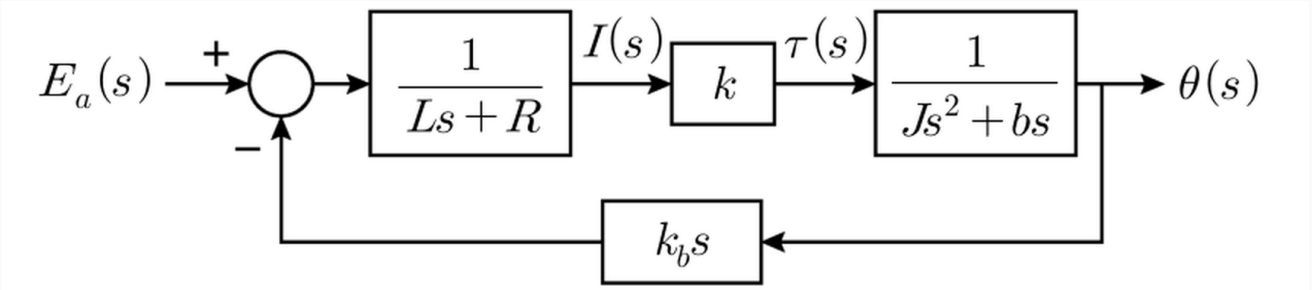
근궤적 문제는 먼저 개루프 극과 영점을 적고, 그다음 점근선 교차점과 실수축 구간을 본 뒤, 복소극점 출발각과 Routh 배열로 허수축 교차를 순서대로 점검하면 된다.

암기 포인트

점근선 교차점은 극의 합을 개수 차로 나눈 값이고, 출발각은 다른 극과 영점이 만드는 각의 합으로 정해진다.

NoteBase

문 11. 다음은 인가전압 E_a와 출력 회전각 θ로 이루어진 DC모터의 블록선도이다. 전달함수로 옳은 것은? (단, L, R, k_b, J, b, k는 모터 상수이고, ω는 출력의 각속도이다)



① $\frac{I(s)}{E_a(s)} = \frac{1}{Ls+R}$
② $\frac{\theta(s)}{I(s)} = \frac{k}{Js+b}$
③ $\frac{\omega(s)}{E_a(s)} = \frac{k}{(Js^2+bs)(Ls+R)+kk_bs}$
④ $\frac{\tau(s)}{E_a(s)} = \frac{k(Js^2+bs)}{(Js^2+bs)(Ls+R)+kk_bs}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 DC모터 블록선도에서 폐루프 전달함수를 정리하고, 요청한 출력 변수가 θ, ω, τ, I 중 무엇인지 구분하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 전기자 블록은 $1/(Ls+R)$, 토크 상수는 k, 기계부 블록은 $1/(Js^2+bs)$이다.
구해야 할 값: 각 선지의 전달함수가 블록선도와 일치하는지 판단하는 것이다.
주의할 조건: 피드백은 $k_bs\theta(s) = k_b\omega(s)$이고, $\omega(s) = s\theta(s)$, $\tau(s) = kI(s)$이다.

사용할 공식

폐루프 전달함수는 $T(s) = G(s)/(1+G(s)H(s))$이다.
이 문제에서 $\theta(s)/E_a(s)$에 대한 전진경로는 $G(s) = k/\{(Ls+R)(Js^2+bs)\}$, 피드백은 $H(s) = k_bs$이다.
따라서
$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{k}{(Ls+R)(Js^2+bs)}}{1+\frac{kk_bs}{(Ls+R)(Js^2+bs)}} = \frac{k}{(Ls+R)(Js^2+bs)+kk_bs}$$
이다.
$\tau(s)$를 구할 때는 $\tau(s) = kI(s)$를 이용해 summing junction에서 τ까지의 전진경로 $k/(Ls+R)$를 같은 방식으로 정리한다.

NoteBase

계산 과정

1. 출력이 $\theta(s)$일 때 전진경로는 $1/(Ls+R) \to k \to 1/(Js^2+bs)$이므로 $G(s) = k/\{(Ls+R)(Js^2+bs)\}$이다.
2. 피드백은 $k_b s$이므로 $\theta(s)/E_a(s) = k/\{(Ls+R)(Js^2+bs) + kk_b s\}$가 된다.
3. $\omega(s) = s\theta(s)$이므로 $\omega(s)/E_a(s) = ks/\{(Ls+R)(Js^2+bs) + kk_b s\}$이다.
4. $\tau(s)$는 기계부 블록 앞의 변수이므로 $\tau(s)/E_a(s) = \{k/(Ls+R)\}/(1 + kk_b s/\{(Ls+R)(Js^2+bs)\})$이고, 정리하면 $\frac{\tau(s)}{E_a(s)} = \frac{k(Js^2+bs)}{(Ls+R)(Js^2+bs)+kk_b s}$이다.

선지별 해설

① X: $1/(Ls+R)$는 합점 출력 $E_a(s) - k_b s\theta(s)$에서 $I(s)$까지의 전달함수이다. 입력 $E_a(s)$에서 바로 $I(s)$까지의 전달함수는 피드백을 포함해야 하므로 $I(s)/E_a(s) = \{Js^2+bs\}/\{(Ls+R)(Js^2+bs) + kk_b s\}$가 된다. 틀린 표현은 $E_a(s)$를 합점 출력과 동일하게 본 부분이고, 올바르게는 $I(s)/(E_a(s) - k_b s\theta(s)) = 1/(Ls+R)$이다.
② X: $I(s)$에서 $\theta(s)$까지는 k와 $1/(Js^2+bs)$를 모두 지나므로 $\theta(s)/I(s) = k/(Js^2+bs)$이다. 제시식 $k/(Js+b)$는 $\omega(s)/I(s)$를 쓴 형태이다. 틀린 표현은 출력을 θ로 두고도 s를 하나 줄인 부분이고, 올바르게는 $\omega(s)/I(s) = k/(Js+b)$, $\theta(s)/I(s) = k/(Js^2+bs)$이다.
③ X: 분모 $(Js^2+bs)(Ls+R) + kk_b s$는 $\theta(s)/E_a(s)$의 분모와 맞지만, $\omega(s) = s\theta(s)$이므로 분자에 s가 추가되어야 한다. 따라서 $\omega(s)/E_a(s) = ks/\{(Js^2+bs)(Ls+R) + kk_b s\}$가 맞다. 틀린 표현은 ω를 θ처럼 적은 부분이다.
④ O: $\tau(s)$는 $I(s)$ 뒤에서 k를 곱한 값이므로 $E_a(s)$에서 $\tau(s)$까지의 전진경로는 $k/(Ls+R)$이다. 여기에 기계부 $1/(Js^2+bs)$와 피드백 $k_b s$가 루프를 이루므로 폐루프 전달함수는 $k(Js^2+bs)/\{(Js^2+bs)(Ls+R) + kk_b s\}$가 되어 제시식과 일치한다.

오답 포인트

①은 블록 하나의 전달함수를 전체 입력 E_a에 그대로 대응시키는 실수를 노린 선지이다. ②와 ③은 θ와 ω의 관계 $\omega = s\theta$를 놓치게 만드는 선지이다. 이 문제의 핵심 함정은 각 블록의 입출력 변수와 폐루프 전체의 입출력 변수를 섞는 데 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

전달함수 선지는 먼저 분자와 분모를 계산하기보다, 합점 뒤 변수, 중간 변수 I, τ, 최종 출력 θ를 차례로 적어 놓고 요구한 출력까지의 전진경로를 정한다. 그다음 $G/(1+GH)$를 적용하고, θ와 ω가 바뀌면 s가 추가되거나 빠지는지만 마지막에 점검하면 된다.

암기 포인트

$\theta \to \omega$로 바뀌면 s가 한 번 붙고, 블록 단독 전달함수는 폐루프 전체 입력 E_a에 바로 대응하지 않는다.

NoteBase

문 12. 다음 미분방정식으로 표현된 시스템에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t-1)$

① 시간지연(time delay)을 갖는 시스템이다.

② 선형시변(linear time-varying) 시스템이다.

③ 모든 유한한 크기의 입력에 대하여 출력도 유한하다.

④ 입력과 출력 관계를 전달함수로 나타낼 수 있다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 미분방정식으로 주어진 시스템의 시간지연, 선형성, 시불변성, 안정성, 전달함수 표현 가능성을 구분하는 문제이다.

핵심 개념

시간지연 시스템은 입력이나 상태가 일정 시간 뒤에 반영되는 시스템이다.
선형시불변 시스템은 계수가 시간에 직접 의존하지 않고, 시간 이동을 시켜도 같은 구조를 유지하는 시스템이다.
주어진 식 $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t-1)$는 계수가 상수이고 지연시간도 1로 고정되어 있으므로 선형시변이 아니라 선형시불변 시스템이다.

NoteBase

선지별 해설

① O

입력항이 $u(t-1)$이므로 입력이 1만큼 지연되어 시스템에 들어간다. 따라서 시간지연을 갖는 시스템이라는 설명은 옳다.

② X

틀린 부분은 '선형시변'이다. 이 식은 y와 u에 대해 선형이고, 계수 1과 지연시간 1이 시간에 따라 변하지 않으므로 시변이 아니라 시불변이다. 올바르게는 '선형시불변 시스템이다'가 된다.

③ O

라플라스 변환으로 전달함수를 구하면 $G(s) = e^{-s}/(s+1)$이다. 분모의 극은 $s=-1$이고 왼반평면에 있으므로 지연항이 있어도 BIBO 안정이다. 따라서 모든 유한한 크기의 입력에 대해 출력도 유한하다.

④ O

입력과 출력의 관계는 $G(s) = e^{-s}/(s+1)$ 같은 전달함수로 나타낼 수 있다. 시간지연이 있으면 유리함수가 아닌 지수항이 포함되지만, 전달함수 표현 자체는 가능하다.

오답 포인트

시간지연이 들어가면 곧바로 시변이라고 착각하기 쉽다. 그러나 '지연이 있는가'와 '계수나 지연시간이 시간에 따라 변하는가'는 다른 판단 기준이다. 이 문항은 $u(t-1)$을 보고 시변으로 잘못 판단하는 함정을 노린다.

다시 나오면 이렇게 판단

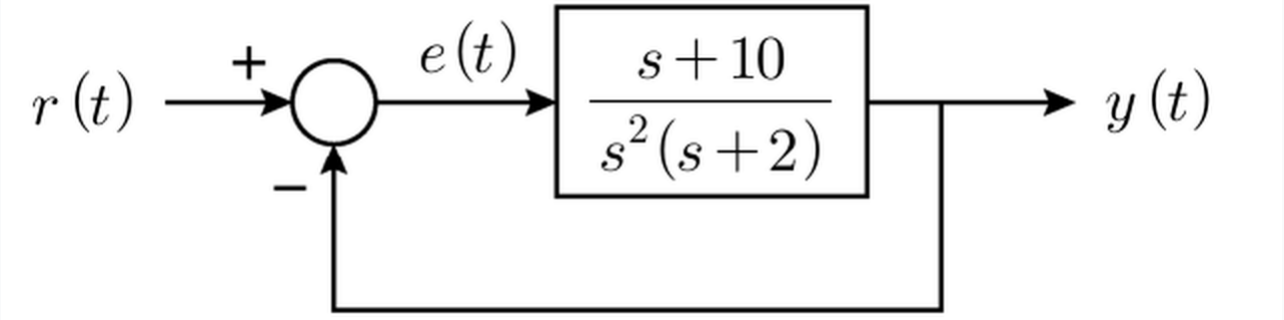
먼저 식이 y와 u에 대해 선형인지 본다. 다음으로 계수나 지연시간이 t의 함수인지 확인한다. 상수 계수이고 지연시간이 고정이면 시간지연이 있어도 선형시불변 시스템으로 판단할 수 있다.

암기 포인트

고정 지연 $u(t-\tau)$는 시변이 아니라 지연이 포함된 시불변 시스템이다. 전달함수에는 $e^{-s\tau}$가 곱해진다.

NoteBase

문 13. 다음 피드백 제어시스템에서 입력 $r(t) = (10 - 2t + 5t^2)u_s(t)$에 대한 정상상태 오차는? (단, $u_s(t)$는 단위계단 신호이다)



① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위피드백 2형 시스템에서 다항식 입력에 대한 정상상태 오차를 최종값 정리와 가속도 오차상수 K_a로 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 $G(s) = \frac{s+10}{s^2(s+2)}$이다.
입력은 $r(t) = (10 - 2t + 5t^2)u_s(t)$이므로
$R(s) = \frac{10}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{10}{s^3}$
이다.
구해야 할 값은 정상상태 오차 e_{ss}이다.
이 시스템은 개루프에 $s = 0$ 극이 2개 있으므로 2형 시스템이다.

NoteBase

사용할 공식

단위피드백 시스템의 오차는 $E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$이고, 정상상태 오차는
$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$
로 구한다.

또한 2형 시스템에서는 계단입력과 램프입력 성분의 정상상태 오차는 0이고, 포물선입력 성분만 유한한 오차를 남긴다.

가속도 오차상수는
$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+10}{s+2} = 5$
이다.

이 공식을 쓰는 이유는 입력이 상수항, 1차항, 2차항의 합으로 이루어져 있고, 정상상태에서는 2형 시스템의 오차 특성으로 각 항의 기여를 바로 분리할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. 입력을 성분별로 보면 $10u_s(t)$, $-2tu_s(t)$, $5t^2u_s(t)$의 합이다.
2. 2형 시스템이므로 상수항과 램프항의 정상상태 오차는 각각 0이다.
3. 남는 것은 $5t^2u_s(t)$ 성분이다. 표준 포물선입력 $\frac{t^2}{2}$의 정상상태 오차는 $\frac{1}{K_a}$이므로, $5t^2 = 10 \cdot \frac{t^2}{2}$에서 계수는 10이다.
4. 따라서 이 성분의 정상상태 오차는 $\frac{10}{K_a} = \frac{10}{5} = 2$이다.
5. 같은 결과를 최종값 정리로 확인하면
$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{\left(\frac{10}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{10}{s^3}\right)}{1 + \frac{s+10}{s^2(s+2)}} = 2$
이다.

따라서 정상상태 오차는 2이다.

NoteBase

선지별 해설

① O
- 계산 결과 정상상태 오차는 2이다. 2형 시스템에서는 계단항과 램프항 오차가 0이 되고, 포물선항 $5t^2$만 남아 $e_{ss} = 10/K_a = 2$가 된다.

② X
- 4는 계산 결과와 다르다. 정상상태 오차는 4가 아니라 2이다.
- 틀린 표현은 최종 오차값을 4로 본 점이다. 올바르게는 $K_a = 5$, 포물선항 계수는 10이므로 $e_{ss} = 10/5 = 2$이다.

③ X
- 6은 계산 결과와 다르다. 정상상태 오차는 6이 아니라 2이다.
- 틀린 표현은 포물선항의 계수를 잘못 반영한 점이다. 올바르게는 $5t^2 = 10 \cdot \frac{t^2}{2}$로 보고 표준 포물선입력 기준 계수 10을 써야 한다.

④ X
- 8은 계산 결과와 다르다. 정상상태 오차는 8이 아니라 2이다.
- 틀린 표현은 2형 시스템의 오차 특성을 무시하고 수치를 과대하게 잡은 점이다. 올바르게는 계단항과 램프항은 정상상태 오차에 기여하지 않고 포물선항만 2를 남긴다.

오답 포인트

많이 틀리는 지점은 $5t^2$를 표준 포물선입력 $\frac{t^2}{2}$와 바로 연결하지 못하는 점이다. $5t^2 = 10 \cdot \frac{t^2}{2}$라는 계수 변환을 놓치면 1, 5, 10 같은 값을 잘못 대입하게 된다. 또 2형 시스템이면 계단항과 램프항 오차가 0이라는 사실을 빼먹으면 상수항과 1차항까지 억지로 계산하는 실수가 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

다항식 입력의 정상상태 오차 문제는 먼저 시스템 형을 본다. 그다음 입력을 계단항, 램프항, 포물선항으로 나누고 형별 오차 특성을 적용한다. 마지막으로 포물선항은 표준형 $\frac{t^2}{2}$의 몇 배인지 맞춘 뒤 e_ss=(계수)/(K_a)로 정리하면 된다.

암기 포인트

2형 시스템은 계단 오차 0, 램프 오차 0, 포물선 오차만 유한값이며 $e_{ss} = \frac{1}{K_a}$를 표준 포물선입력 $\frac{t^2}{2}$ 기준으로 적용한다.

NoteBase

문 14. 다음 시스템에서 제어가능(controllable)하지 않은 a와 관측가능(observable)하지 않은 b의 합 $a+b$의 값이 될 수 없는 것은?

bmatrixx_1 \ x_2bmatrix=bmatrix0 & -8 \ 1 & -6bmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix+bmatrix1 \ abmatrixu,
y=bmatrix1 & bbmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix

① -3.5

② -3.25

③ -1.75

④ -1.5

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태방정식의 제어가능 조건과 관측가능 조건을 각각 행렬식으로 판별해, 제어불능인 a와 관측불능인 b의 가능한 조합에서 $a+b$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 행렬은 A=bmatrix0 & -8 ; 1 & -6bmatrix, B=bmatrix1 ; abmatrix, C=bmatrix1 & bbmatrix이다.
구해야 할 값은 제어가능하지 않은 a와 관측가능하지 않은 b를 각각 구한 뒤 만든 $a+b$이다.
문제는 될 수 없는 값을 묻기 때문에 가능한 $a+b$ 집합을 먼저 모두 구해야 한다.

사용할 공식

제어가능 판별은 제어가능행렬 $\mathcal{C}=[B\ AB]$의 행렬식으로 본다. 관측가능 판별은 관측가능행렬 O=bmatrixC ; CAbmatrix의 행렬식으로 본다.
이 공식을 쓰는 이유는 이 시스템이 2차 시스템이므로 각 행렬의 계수가 2이면 행렬식이 0일 때 각각 제어불능, 관측불능이 바로 판정되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 제어가능성부터 구하면 AB=Abmatrix1 ; abmatrix=bmatrix-8a ; 1-6abmatrix이다.
2. 따라서 C=bmatrix1 & -8a ; a & 1-6abmatrix이고,
$\det(\mathcal{C}) = 1 - 6a + 8a^2 = 8a^2 - 6a + 1 = (4a - 1)(2a - 1)$
이므로 제어가능하지 않은 값은 a=14, 12이다.
3. 관측가능성은 CA=bmatrix1 & bbmatrixbmatrix0 & -8 ; 1 & -6bmatrix=bmatrixb & -8-6bbmatrix이다.
4. 따라서 O=bmatrix1 & b ; b & -8-6bbmatrix이고,
$\det(\mathcal{O}) = -8 - 6b - b^2 = -(b^2 + 6b + 8) = -(b + 2)(b + 4)$
이므로 관측가능하지 않은 값은 $b = -2,\ -4$이다.
5. 가능한 합은 12+(-4)=-3.5, 14+(-4)=-3.75, 14+(-2)=-1.75, 12+(-2)=-1.5이다. 보기 중 여기에 없는 값이 정답이다.

선지별 해설

① X
- -3.5는 a=12, b=-4일 때 나온다. 따라서 될 수 없는 값이 아니다.
- 틀린 표현은 '정답 후보가 된다'는 판단이다. 올바르게는 '가능한 $a + b$ 값이다'이다.

② O
- -3.25는 가능한 네 값 $-3.5,\ -3.75,\ -1.75,\ -1.5$에 들어 있지 않다. 따라서 될 수 없는 값이므로 정답이다.

③ X
- -1.75는 a=14, b=-2일 때 나온다. 따라서 될 수 없는 값이 아니다.
- 틀린 표현은 '불가능한 합이다'라는 판단이다. 올바르게는 '가능한 $a + b$ 값이다'이다.

④ X
- -1.5는 a=12, b=-2일 때 나온다. 따라서 될 수 없는 값이 아니다.
- 틀린 표현은 '나올 수 없는 값이다'라는 판단이다. 올바르게는 '실제로 나올 수 있는 값이다'이다.

오답 포인트

제어가능성과 관측가능성을 한 번에 섞어 계산하면 부호를 자주 틀린다. 특히 AB의 첫 성분이 $-8a$, CA의 둘째 성분이 $-8 - 6b$라는 점을 놓치면 전혀 다른 근이 나온다. 또 가능한 값을 모두 만든 뒤 보기에 대조해야 하는데, 중간에 한 조합만 보고 바로 답을 고르면 ①이나 ④를 잘못 고를 수 있다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

2차 상태방정식에서 제어불능과 관측불능을 묻는 문제는 det[$B\ AB$] = 0, bmatrixC ; CAbmatrix=0을 각각 먼저 풀고, 나온 후보들을 마지막에 조합해 보기와 비교하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

제어불능은 det[$B\ AB$] = 0, 관측불능은 bmatrixC ; CAbmatrix=0으로 분리해서 구한 뒤 마지막에 조합한다.

NoteBase

문 15. 폐루프 전달함수 $T(s)$가 다음과 같이 주어진 시스템에서 입력 $u(t)=\cos\omega t$와 정상상태 출력 $y(t)$의 위상차가 -90°가 되는 주파수 ω와 출력 $y(t)$는? (단, 주파수는 $\omega>0$이다)

$T(s)=\frac{4}{s^2+2s+4}$

① ω: 2[rad/sec], $y(t)$: $\sin 2t$

② ω: 2[rad/sec], $y(t)$: $-\sin 2t$

③ ω: 4[rad/sec], $y(t)$: $\sin 4t$

④ ω: 4[rad/sec], $y(t)$: $-\sin 4t$

정답 1번

출제 포인트

주파수응답 $T(j\omega)$의 위상을 이용해 -90°가 되는 입력 주파수와 정상상태 출력을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $T(s)=\frac{4}{s^2+2s+4}$, $u(t)=\cos\omega t$
구해야 할 값: 위상차가 -90°가 되는 ω와 그때의 정상상태 출력 $y(t)$
주의할 조건: 정상상태 출력은 $T(j\omega)$의 크기와 위상으로 판단한다.

사용할 공식

$T(j\omega)=\frac{4}{(j\omega)^2+2j\omega+4}=\frac{4}{(4-\omega^2)+j2\omega}$
전달함수의 위상은 분모 각도의 음수이므로, $T(j\omega)$의 위상이 -90°가 되려면 분모가 양의 순허수가 되어야 한다.
따라서 실수부 $4-\omega^2$를 0으로 두는 계산이 핵심이다.

계산 과정

1. 위상조건 -90°를 만족하려면 $4-\omega^2=0$이어야 하므로 $\omega=2$이다.
2. $\omega=2$를 대입하면 $T(j2)=\frac{4}{(4-4)+j4}=\frac{4}{j4}=-j$이다.
3. 따라서 크기는 1, 위상은 -90°이므로 정상상태 출력은 $y(t)=\cos(2t-\pi/2)=\sin 2t$이다.

NoteBase

선지별 해설

① O: $\omega = 2$에서만 실수부가 0이 되어 위상이 -90°가 된다. 이때 $T(j2) = -j$이므로 출력은 $y(t) = \sin 2t$이다.

② X: $\omega = 2$까지는 맞지만 $y(t) = -\sin 2t$가 틀리다. $\cos(2t - \pi/2) = \sin 2t$이므로 틀린 표현은 '$-\sin 2t$'이고, 올바르게는 '$\sin 2t$'이다.

③ X: $\omega = 4$가 틀리다. $\omega = 4$이면 $T(j4) = \frac{4}{-12 + j8}$이어서 위상이 -90°가 아니고 크기도 1이 아니다. 틀린 표현은 '$\omega = 4,\ y(t) = \sin 4t$'이고, 올바르게는 '$\omega = 2,\ y(t) = \sin 2t$'이다.

④ X: $\omega = 4$도 틀리고 출력 부호도 틀리다. 위상차 -90° 조건 자체를 만족하지 못하므로 틀린 표현은 '$\omega = 4,\ y(t) = -\sin 4t$'이고, 올바르게는 '$\omega = 2,\ y(t) = \sin 2t$'이다.

오답 포인트

위상조건으로 $\omega = 2$를 찾은 뒤 $\cos(2t - \pi/2)$의 부호를 끝까지 확인하지 않으면 ②로 미끄러진다. 또 $s = j\omega$ 대입 후 실수부 $4 - \omega^2$를 0으로 두지 않으면 ③, ④ 같은 오답을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

위상차를 묻는 전달함수 문제는 먼저 $s = j\omega$를 대입해 실수부와 허수부를 나눈다. 원하는 위상이 -90°이면 실수부가 0인지 확인하고, 그 다음 $T(j\omega)$의 크기와 위상으로 출력의 진폭과 파형을 확정한다.

암기 포인트

위상차가 -90°이면 $T(j\omega)$는 순허수 음수 형태가 된다. 이 문제에서는 $T(j2) = -j$이므로 $y(t) = \sin 2t$가 바로 나온다.

NoteBase

문 16. 다음 시스템에서 단위계단 입력을 인가하였을 때, 시스템의 극점(pole)의 실수부가 모두 -0.5보다 작게 되는 K의 범위와 정상상태 오차 E_{ss}는?

x(t)=bmatrix0 & 1 \ 3-K & -2-Kbmatrixx(t)+bmatrix0 \ 1bmatrixu(t)
y(t)=bmatrix1 & -1bmatrixx(t)

① K: $0 < K < 7.5$, E_{ss}: $\frac{K-4}{K-3}$
② K: $0 < K < 7.5$, E_{ss}: $\frac{K-3}{K-2}$
③ K: $K > 7.5$, E_{ss}: $\frac{K-4}{K-3}$
④ K: $K > 7.5$, E_{ss}: $\frac{K-3}{K-2}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 상태행렬의 극점 조건을 $s = -0.5$ 기준으로 좌측 이동해 판단하고, 단위계단 입력에 대한 정상상태 오차 E_{ss}를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 상태행렬은 A=bmatrix0&1; 3-K&-2-Kbmatrix, B=bmatrix0; 1bmatrix, C=bmatrix1&-1bmatrix이다.
구해야 할 값은 모든 극점의 실수부가 -0.5보다 작아지는 K의 범위와 단위계단 입력에 대한 E_{ss}이다.

사용할 공식

특성방정식은 $\det(sI - A) = 0$이다.
모든 극점이 -0.5보다 좌측에 있으려면 $p(s)$에 $s = z - 0.5$를 대입한 다항식이 Hurwitz가 되어야 한다.
단위계단 입력의 정상상태 출력은 $y_{ss} = G(0)$, 정상상태 오차는 $E_{ss} = 1 - y_{ss}$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 극점 위치 조건과 정상상태 오차 조건이 각각 특성방정식과 직류이득으로 바로 판별되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 특성방정식은
$p(s) = \det(sI - A) = s^2 + (K+2)s + K - 3$
이다.
2. 극점의 실수부가 모두 -0.5보다 작으려면 $s = z - 0.5$로 두어
$p(z - 0.5) = z^2 + (K+1)z + \frac{K-7.5}{2}$
를 얻는다. 2차식이 Hurwitz가 되려면 계수들이 양수이면 되므로 $K+1 > 0$, $\frac{K-7.5}{2} > 0$에서 $K > 7.5$이다.
3. 전달함수는
$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1-s}{s^2 + (K+2)s + K - 3}$
이다. 단위계단 입력에서 $y_{ss} = G(0) = \frac{1}{K-3}$이므로
$E_{ss} = 1 - y_{ss} = 1 - \frac{1}{K-3} = \frac{K-4}{K-3}$
이다.

선지별 해설

① X: $E_{ss} = \frac{K-4}{K-3}$는 맞지만 극점 조건이 틀리다. 잘못된 표현은 '0<K<7.5'이고, 올바르게는 'K>7.5'이다.
② X: 극점 조건도 틀리고 오차식도 틀리다. 잘못된 표현은 '0<K<7.5'와 '$\frac{K-3}{K-2}$'이고, 올바르게는 'K>7.5'와 '$\frac{K-4}{K-3}$'이다.
③ O: 이동된 특성다항식 $z^2 + (K+1)z + \frac{K-7.5}{2}$가 Hurwitz가 되려면 $K > 7.5$이어야 하고,
$E_{ss} = 1 - G(0) = 1 - \frac{1}{K-3} = \frac{K-4}{K-3}$이므로 맞다.
④ X: $K > 7.5$는 맞지만 오차식이 틀리다. 잘못된 표현은 '$\frac{K-3}{K-2}$'이고, 올바르게는 '$\frac{K-4}{K-3}$'이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 안정조건 $K > 3$만 보고 끝내는 데 있다. 이 문제는 단순 안정이 아니라 모든 극점의 실수부가 -0.5보다 작아야 하므로 축 이동이 필요하다. 또 정상상태 오차는 $1 - y_{ss}$인데, $G(0)$를 잘못 계산하면 '$\frac{K-3}{K-2}$' 같은 오답식이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

극점의 실수부가 특정 경계 $-a$보다 작은지를 묻으면 먼저 $s = z - a$로 옮겨 Hurwitz 조건을 적용한다.
정상상태 오차는 전달함수의 직류이득 $G(0)$ 또는 정상상태 벡터 x_{ss}를 구한 뒤 $E_{ss} = r_{ss} - y_{ss}$로 정리하면 된다.

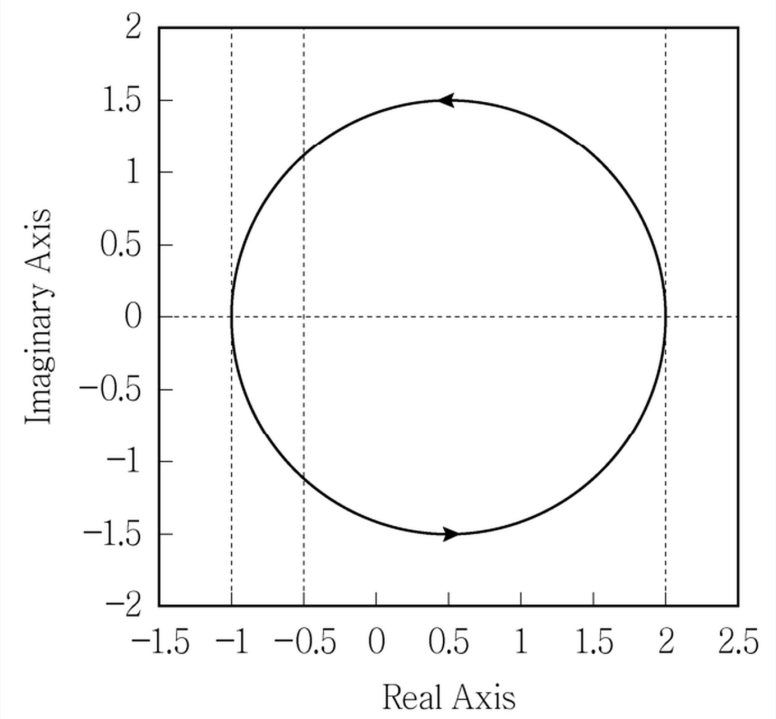
암기 포인트

극점 경계가 -0.5이면 $s = z - 0.5$로 이동하고, 단위계단 정상상태 오차는 $E_{ss} = 1 - G(0)$로 계산한다.

NoteBase

문 17. 전달함수 $G(s)$의 나이퀴스트 선도가 다음과 같이 주어질 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이며 $a>b$이다)

$G(s)=\frac{as+1}{s+b}$



① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 선도가 실수축과 만나는 두 절편이 각각 $\omega=0$일 때의 값 $G(0)=1/b$와 $\omega\to\infty$일 때의 값 $G(\infty)=a$라는 점을 이용하는 문제이다. 두 절편의 크고 작음만으로 a와 $1/b$를 나누는 것이 아니라, 어느 점이 $\omega=0$이고 어느 점이 $\omega\to\infty$인지 정한 뒤 조건 $a>b$로 값을 확정한다.

NoteBase

선지별 해설

① O

- 그림의 원이 실수축과 만나는 점은 -1과 2이다.
- $G(s)=\frac{as+1}{s+b}$에서 $\omega=0$이면 $G(0)=\frac{1}{b}$, $\omega\to\infty$이면 $G(j\omega)\to a$이므로 두 절편은 $1/b$와 a에 해당한다.
- 두 절편을 a와 $1/b$에 배정하는 기준은 절편의 크기가 아니라 조건 $a>b$이다. $a=2$라 두면 $1/b=-1$에서 $b=-1$이 되어 $a>b(2>-1)$를 만족한다. 반대로 $a=-1$이라 두면 $1/b=2$에서 $b=1/2$이 되어 $a>b(-1>1/2)$가 성립하지 않아 배제된다.
- 따라서 $a=2, b=-1$이고 $a+b=1$이다. 그래프의 화살표 방향, 즉 ω가 커질수록 궤적이 $G(0)=-1$에서 출발해 $G(\infty)=2$로 이어지는 것도 이 배정과 일치한다.

② X

- 이 값(합 2)은 오른쪽 절편 2를 a로 옳게 읽었으나 왼쪽 절편 -1의 기여를 빠뜨려 b를 0으로 처리하고 $a+b=2+0=2$로 계산한 경우이다.
- 왼쪽 절편 -1은 $1/b$이므로 $b=-1$이고, 올바른 값은 $a+b=1$이다.

③ X

- 이 값(합 3)은 두 절편의 크기 $|-1|=1$과 2를 그대로 더해 $1+2=3$으로 본 경우, 즉 왼쪽 절편의 음($-$) 부호를 놓친 오류이다.
- $b=-1$의 부호를 살리면 $a+b=2+(-1)=1$이다.

④ X

- 이 값(합 4)은 오른쪽 절편 2를 a와 b 양쪽에 중복 적용하거나($a=2,\ b=2$) 절편을 잘못 읽어 $2+2=4$로 본 경우이다.
- 올바른 배정은 $a=2$, $1/b=-1\Rightarrow b=-1$이므로 정답은 $a+b=1$이다.

오답 포인트

원의 중심과 반지름만 보고 수치를 더하면 오답이 된다. 이 문제의 함정은 왼쪽 절편이 b가 아니라 $1/b$라는 점이며, 이를 $b=-1$로 다시 바꾸는 단계가 빠지기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

이 형태의 1차 전달함수 나이퀴스트 선도가 나오면 먼저 실수축 절편 두 점을 읽는다. 절편의 크고 작음으로 나누지 말고, $\omega=0$에서의 값이 $G(0)=1/b$, $\omega\to\infty$에서의 값이 $G(\infty)=a$라는 수학적 근거로 두 점을 각각 $1/b$와 a에 대응시킨다. 어느 절편이 a인지는 주어진 조건(여기서는 $a>b$)이나 화살표가 가리키는 ω 증가 방향으로 확정하고, 마지막에 $1/b$에서 b를 역수로 복원한다.

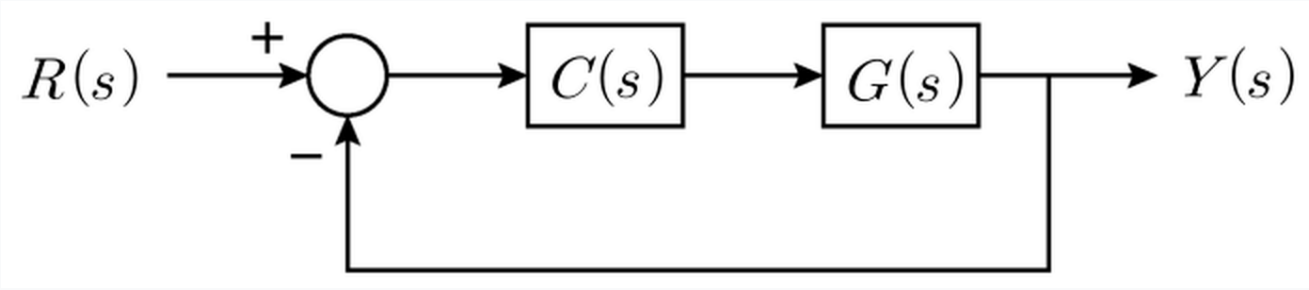
NoteBase

암기 포인트

$\frac{as+1}{s+b}$의 나이퀴스트 실수축 양 끝점은 $\omega = 0$에서 $1/b$, $\omega \to \infty$에서 a이다.

NoteBase

문 18. 다음 피드백 제어시스템에서 $C(s)=K$일 때 단위계단 입력에 대한 정상상태 오차는 0.5이고, 보상기(compensator) $C(s)=K\frac{s+z}{s+p}$를 사용하면 정상상태 오차는 0.1이다. 보상기의 극점을 -0.01에 배치할 때, 보상기에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, $G(s)$는 0형(type 0) 시스템이다)



① 지상보상기(lag compensator)이고, 보상기의 영점은 -0.09이다.

② 지상보상기(lag compensator)이고, 보상기의 영점은 -0.05이다.

③ 진상보상기(lead compensator)이고, 보상기의 영점은 -0.09이다.

④ 진상보상기(lead compensator)이고, 보상기의 영점은 -0.05이다.

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 0형 단위피드백계의 단위계단 정상상태 오차식과 보상기의 극·영점 위치를 이용해 지상보상기인지 진상보상기인지 판단하는 문제이다.

조건 정리

- 보상 전 제어기: $C(s)=K$
- 보상 전 정상상태 오차: 0.5
- 보상 후 제어기: $C(s)=K\frac{s+z}{s+p}$
- 보상 후 정상상태 오차: 0.1
- 보상기 극점: -0.01이므로 $p=0.01$
- $G(s)$는 0형 시스템이고 입력은 단위계단이다.

사용할 공식

0형 단위피드백계의 단위계단 정상상태 오차는 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$, $K_p=\lim_{s\to 0}C(s)G(s)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 문제에서 단위계단 입력에 대한 정상상태 오차를 직접 주었고, 보상 전후의 직류이득 비를 비교하면 보상기의 $\frac{z}{p}$를 바로 구할 수 있기 때문이다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2019

계산 과정

1. 보상 전에는 $K_p = KG(0)$이므로
$0.5 = \frac{1}{1+KG(0)}$
따라서 $1 + KG(0) = 2$, 즉 $KG(0) = 1$이다.
2. 보상 후에는 $K_p = KG(0)\frac{z}{p}$이므로
$0.1 = \frac{1}{1+KG(0)\frac{z}{p}}$
따라서 $1 + KG(0)\frac{z}{p} = 10$, 즉 $KG(0)\frac{z}{p} = 9$이다.
3. 앞에서 $KG(0) = 1$이므로 $\frac{z}{p} = 9$이다.
4. $p = 0.01$이므로 $z = 9p = 0.09$이다. 따라서 보상기의 영점은 -0.09이다.
5. 극점은 -0.01, 영점은 -0.09이므로 극점이 영점보다 원점에 더 가깝다. 이는 지상보상기의 형태이다.

선지별 해설

① O
지상보상기이고 보상기의 영점은 -0.09이므로 옳다. $\frac{z}{p} = 9$, $p = 0.01$에서 $z = 0.09$가 바로 나온다.

② X
지상보상기라는 판단은 맞지만 영점 위치가 틀리다. 틀린 표현은 '보상기의 영점은 -0.05이다'이고, 올바르게는 '보상기의 영점은 -0.09이다'이다.

③ X
영점 -0.09 자체는 맞지만 보상기 종류가 틀리다. 틀린 표현은 '진상보상기'이고, 올바르게는 '지상보상기'이다. 극점 -0.01이 영점 -0.09보다 원점에 가까우면 지상보상기이다.

④ X
보상기 종류와 영점 위치가 모두 틀리다. 틀린 표현은 '진상보상기'와 '영점은 -0.05이다'이고, 올바르게는 '지상보상기'와 '영점은 -0.09이다'이다.

오답 포인트

보상 후 식에서 $0.1 = \frac{1}{1+A}$이면 $A = 9$인데 이를 10으로 착각하기 쉽다. 또 -0.01과 -0.09를 볼 때 절댓값만 비교하지 말고 원점과의 거리를 봐야 한다. 극점이 원점에 더 가까우면 지상보상기이고, 영점이 원점에 더 가까우면 진상보상기이다.

다시 나오면 이렇게 판단

0형 단위계단 오차 문제가 나오면 먼저 $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$로 보상 전 직류루프이득을 구하고, 다음으로 보상 후 오차식에서 $\frac{z}{p}$를 구한다. 마지막으로 극점과 영점 중 어느 쪽이 원점에 더 가까운지 보고 지상보상기인지 진상보상기인지 판단한다.

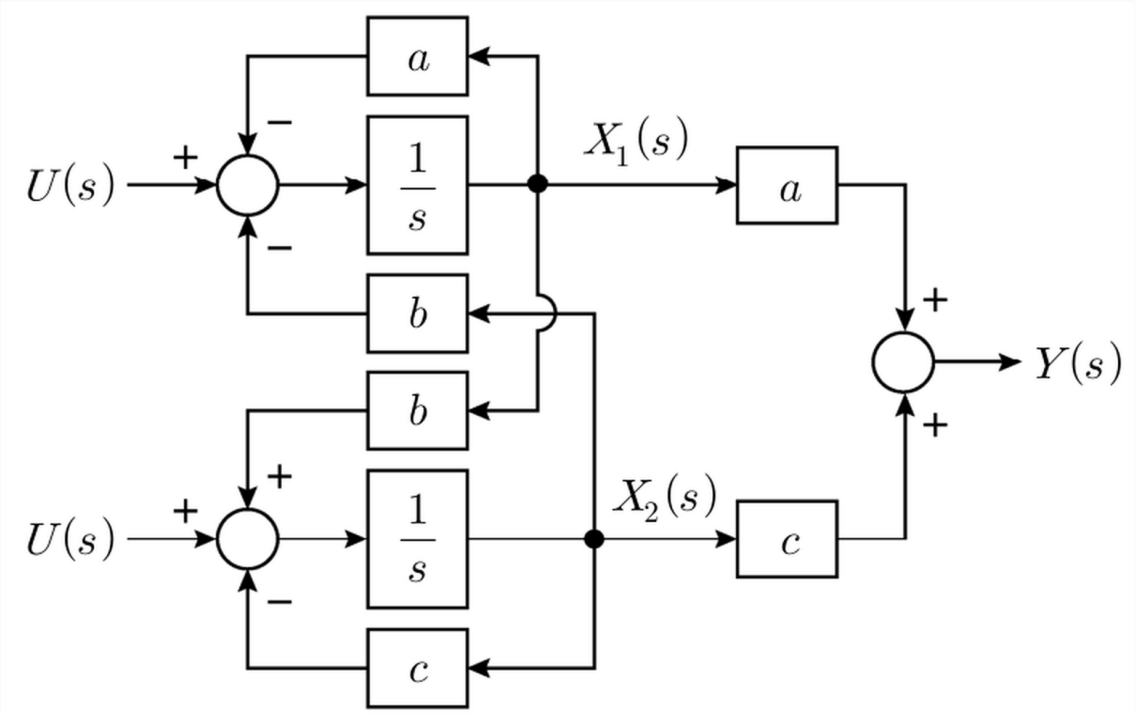
NoteBase

암기 포인트

0형 계단오차는 $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$이고, 지상보상기는 극점이 영점보다 원점에 더 가깝다.

NoteBase

문 19. 다음 시스템이 안정하기 위한 a, b, c의 범위는? (단, $X_1(s)$, $X_2(s)$는 상태변수의 라플라스 변환이다)



① $(a+c)<0, (ac+b^2)<0$

② $(a+c)<0, (ac+b^2)>0$

③ $(a+c)>0, (ac+b^2)<0$

④ $(a+c)>0, (ac+b^2)>0$

정답 4번

출제 포인트

블록선도에서 상태방정식을 읽어 상태행렬 A를 만들고, 특성방정식 $s^2+(a+c)s+(ac+b^2)=0$의 2차 안정조건을 적용하는 문제이다.

조건 정리

상태변수는 적분기 출력 $X_1(s), X_2(s)$이다.
상단 적분기 입력은 $U(s)-aX_1(s)-bX_2(s)$이다.
하단 적분기 입력은 $U(s)+bX_1(s)-cX_2(s)$이다.

NoteBase

사용할 공식

상태방정식은 $\dot{x} = Ax + Bu$이다.
이 문제의 상태행렬은 A=bmatrix-a & -b ; b & -cbmatrix이다.
안정조건은 특성방정식 $\det(sI - A) = s^2 + \alpha s + \beta$에서 $\alpha > 0, \beta > 0$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 연속시간 2차 선형계의 안정성이 상태행렬의 고유값, 즉 특성방정식 계수의 부호로 결정되기 때문이다.

계산 과정

1. 블록선도에서 $sX_1 = U - aX_1 - bX_2$, $sX_2 = U + bX_1 - cX_2$를 읽는다.
2. 따라서 A=bmatrix-a & -b ; b & -cbmatrix이다.
3. 특성방정식은 (sI-A)=vmatrixs+a & b ; -b & s+cvmatrix=(s+a)(s+c)+b^2이다.
4. 정리하면 $s^2 + (a + c)s + (ac + b^2) = 0$이다.
5. 2차 안정조건으로 $a + c > 0$, $ac + b^2 > 0$가 필요충분하다.

선지별 해설

① X: 2차 특성방정식의 안정조건은 일차항 계수와 상수항이 모두 양수인 것이다. $(a + c) < 0$, $(ac + b^2) < 0$이면 두 조건을 모두 어긴다. 틀린 표현은 "$(a + c) < 0$, $(ac + b^2) < 0$"이고, 올바르게는 "$(a + c) > 0$, $(ac + b^2) > 0$"이다.
② X: $(ac + b^2) > 0$는 맞을 수 있어도 $(a + c) < 0$이면 특성방정식의 일차항 계수가 음수가 되어 안정하지 않다. 틀린 표현은 "$(a + c) < 0$"이고, 올바르게는 "$(a + c) > 0$"이다.
③ X: $(a + c) > 0$는 맞을 수 있어도 $(ac + b^2) < 0$이면 상수항이 음수가 되어 한 근이 우반평면으로 가므로 안정하지 않다. 틀린 표현은 "$(ac + b^2) < 0$"이고, 올바르게는 "$(ac + b^2) > 0$"이다.
④ O: 특성방정식이 $s^2 + (a + c)s + (ac + b^2) = 0$이므로 안정조건은 정확히 $(a + c) > 0$, $(ac + b^2) > 0$이다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 두 가지이다.
첫째, 블록선도의 피드백 부호를 반대로 읽어 A의 비대각 원소 부호를 틀리는 실수이다.
둘째, $\det(sI - A)$를 전개할 때 b항을 $-b^2$로 잘못 쓰는 실수이다. 이 문제는 비대각 성분이 $-b$와 $+b$이므로 결과가 $+b^2$가 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 안정문항은 적분기 출력들을 상태변수로 두고, 각 합산점의 부호를 먼저 확정한 뒤 상태행렬 A를 만든다. 그다음 $\det(sI - A)$를 구해 2차식 $s^2 + \alpha s + \beta$의 계수 α, β가 모두 양수인지로 판단한다.

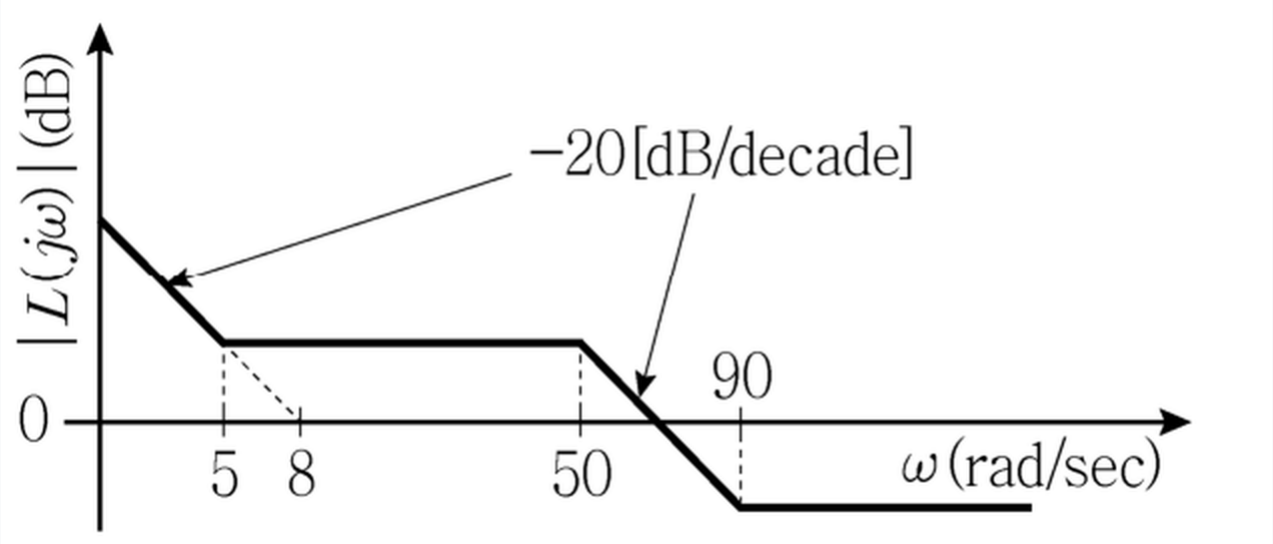
NoteBase

암기 포인트

상태행렬이 A=bmatrix-a & -b ; b & -cbmatrix이면 특성식은 $s^2 + (a + c)s + (ac + b^2)$이고, 2차 안정조건은 두 계수 $(a + c)$, $(ac + b^2)$가 모두 양수인 것이다.

NoteBase

문 20. 단위 피드백 제어시스템에서 1형 루프 전달함수 $L(s)$의 보드(Bode) 선도의 크기가 다음과 같이 주어질 때, 램프오차상수(ramp error constant) K_v는?



① 4

② 8

③ 12

④ 16

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 1형 시스템의 저주파 보드선도에서 램프오차상수 K_v를 읽어내는 원리를 이용해 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

- 주어진 값: 1형 루프전달함수 $L(s)$의 크기 보드선도이다.
- 구해야 할 값: 램프오차상수 K_v이다.
- 주의할 조건: 1형 시스템에서는 저주파에서 $|L(j\omega)| \approx K_v/\omega$ 이므로 크기선도의 기울기는 $-20dB/dec$가 되고, 이 직선이 $0dB$와 만나는 주파수가 K_v가 된다.

사용할 공식

$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s)$

$|L(j\omega)| \approx \frac{K_v}{\omega}, \quad 20\log|L(j\omega)| = 20\log K_v - 20\log\omega$

이 공식을 쓰는 이유는 1형 시스템의 저주파 보드선도 자체가 K_v/ω 형태의 직선으로 표현되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 그림의 맨 왼쪽 구간은 1형 시스템 특유의 $-20dB/dec$ 직선이다.
2. 이 직선을 그대로 연장하면 점선이 $0dB$ 축과 만나는 주파수가 $\omega = 8rad/s$임을 읽을 수 있다.
3. 저주파 점근선에서 $20\log|L(j\omega)| = 20\log K_v - 20\log\omega$ 이므로 $0dB$가 되는 주파수는 $\omega = K_v$이다.
4. 따라서 $K_v = 8$이다.

선지별 해설

① X
- 4는 저주파 $-20dB/dec$ 직선의 $0dB$ 교차점을 잘못 읽은 값이다.
- 틀린 표현은 $K_v = 4$이다. 올바르게는 점선 연장선의 교차 주파수인 $K_v = 8$이다.

② O
- 저주파 $-20dB/dec$ 직선을 연장한 점선이 $0dB$ 축과 만나는 값이 $8rad/s$이므로 $K_v = 8$이다.

③ X
- 12는 두 꺾임점 5와 50, 또는 8과 다른 표기값을 임의로 조합해 얻기 쉬운 값이지만, K_v는 주파수 표기를 더하거나 평균내서 구하는 값이 아니다.
- 틀린 표현은 $K_v = 12$이다. 올바르게는 저주파 점근선의 $0dB$ 교차값인 $K_v = 8$이다.

④ X
- 16은 $-20dB/dec$ 직선의 의미를 모르고 한 decade 변화에 따른 비율만 막연히 적용할 때 나올 수 있는 값이다.
- 틀린 표현은 $K_v = 16$이다. 올바르게는 그림에서 직접 읽히는 $0dB$ 교차 주파수인 $K_v = 8$이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 보드선도의 여러 숫자 5, 8, 50, 90 중에서 무엇이 K_v와 직접 연결되는지 혼동하는 데 있다. 1형 시스템에서는 맨 왼쪽 $-20dB/dec$ 저주파 직선의 $0dB$ 교차점만 보면 되고, 중간 평탄부나 고주파 꺾임점은 K_v를 구하는 직접 정보가 아니다.

다시 나오면 이렇게 판단

1형 시스템의 보드선도에서 램프오차상수를 묻으면 먼저 저주파 기울기가 $-20dB/dec$인지 확인하고, 그 직선을 $0dB$까지 연장해 교차 주파수를 읽는다. 그 교차 주파수가 곧 K_v이다.

암기 포인트

1형 시스템에서는 저주파 보드선도의 $0dB$ 교차 주파수와 K_v가 같다.

NoteBase