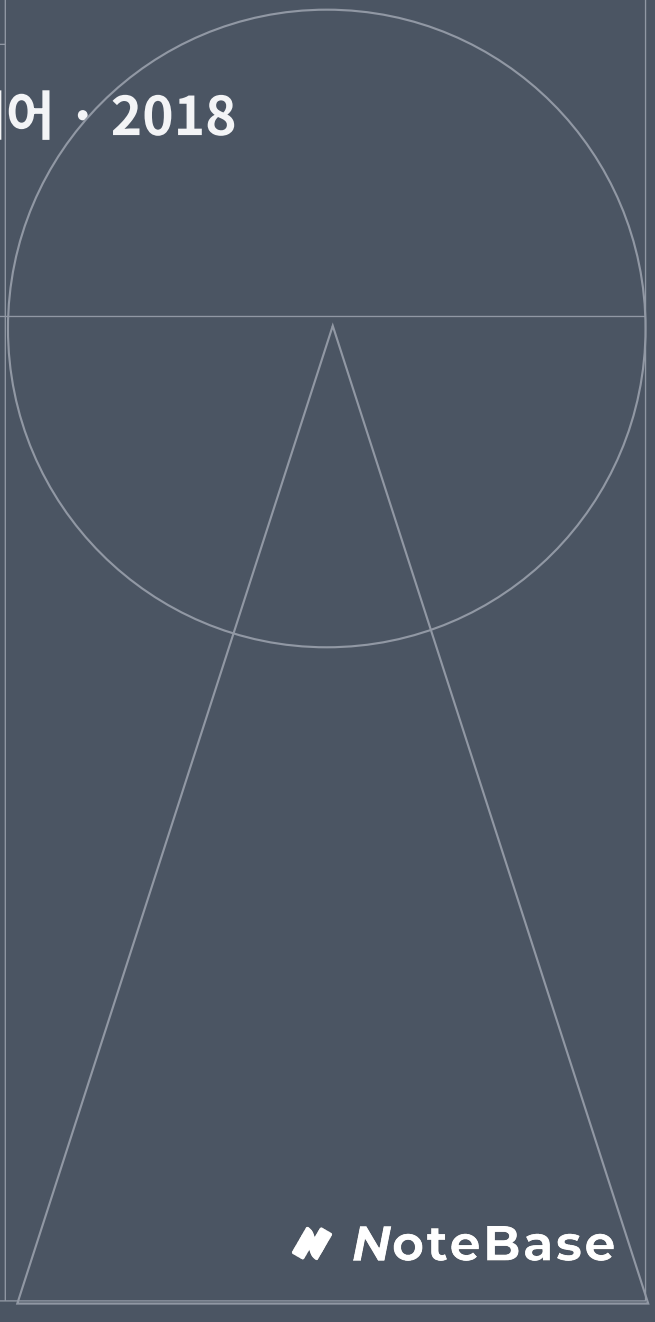
기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2018



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2018

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2018

문 1. 피드백(feedback) 제어시스템에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 상태변수는 제어대상의 상태를 설명하는데 필요한 임의의 최소 변수들의 집합이다.

② 제어대상의 출력은 센서로부터 측정되어야만 하는 상태변수이다.

③ 제어입력은 제어대상의 출력 값을 활용하여 제어대상에 인가되는 제어기의 출력이다.

④ 피드백 제어는 제어대상의 출력과 기준입력의 차이를 감소시킬 수 있는 제어 방법이다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 피드백 제어계에서 상태변수, 출력, 제어입력의 의미를 구별할 수 있는지를 묻는 문제이다.

핵심 개념

상태변수는 제어대상의 현재 상태를 완전히 기술하는 데 필요한 최소 내부변수 집합이다.
출력은 외부로 관측되거나 관심 대상으로 정한 신호로서, 일반적으로 상태변수들의 함수로 표현된다.
제어입력은 제어기가 만들어 제어대상에 가하는 입력 신호이며, 피드백 제어에서는 출력과 기준입력의 차이를 바탕으로 결정된다.

NoteBase

선지별 해설

① O
상태변수는 계의 미래 거동을 현재 시점에서 결정할 수 있도록 잡은 최소 변수 집합이라는 설명이므로 옳다.

② X
틀린 부분은 "출력은 센서로부터 측정되어야만 하는 상태변수"라는 표현이다.
출력은 상태변수 그 자체일 수도 있지만, 상태변수들의 조합이나 입력을 포함한 함수일 수도 있으므로 반드시 상태변수라고 할 수는 없다.
올바르게는 "제어대상의 출력은 외부에서 관측하거나 제어목표로 삼는 신호이며, 필요하면 센서로 측정한다"이다.

③ O
제어입력은 제어기가 생성하여 제어대상에 실제로 인가하는 신호이다. 피드백 제어에서는 제어대상의 출력값을 활용해 이 입력을 결정하므로 설명이 옳다.

④ O
피드백 제어의 목적은 기준입력과 실제 출력 사이의 오차를 줄이는 데 있으므로 옳다.

오답 포인트

출력과 상태변수를 같은 개념으로 묶어 버리면 ②에 속기 쉽다. 상태변수는 계 내부를 기술하는 최소집합이고, 출력은 그 내부상태에서 바깥으로 꺼내 보는 관측량이라는 차이를 구별해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

제어계 문제에서는 먼저 내부 상태를 나타내는 변수인지, 외부로 관측하는 신호인지, 제어기가 만들어 가하는 입력인지부터 구분하면 된다. x는 상태, y는 출력, u는 제어입력이라는 역할을 기준으로 선지를 판별하면 흔들리지 않는다.

암기 포인트

상태 x는 내부 최소집합, 출력 y는 관측 신호, 입력 u는 제어대상에 가하는 신호이다.

NoteBase

문 2. 안정한 선형 시불변(time invariant) 시스템에 대한 설명으로 옳은 것만을 모두 고르면?

ㄱ. 안정한 영점(zero)이 $j\omega$축에 가까울수록 계단(step) 응답의 오버슈트(overshoot)를 증가시키는 경향이 있다.
ㄴ. 극점(pole)의 실수부가 0보다 클 수도 있다.
ㄷ. 전달함수가 $\frac{1}{Ts+1}$로 주어지는 1차 시스템에서 T를 증가시키면 계단응답의 상승시간(rising time)이 줄어든다.
ㄹ. 대역폭(bandwidth)이 크면 일반적으로 응답이 빠르다.

① ㄱ, ㄷ
② ㄱ, ㄹ
③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 안정한 연속시간 선형 시불변 시스템의 극점, 영점, 시정수, 대역폭이 시간응답과 어떤 관계를 가지는지를 묻는 문제이다.

핵심 개념

안정한 연속시간 시스템은 모든 극점이 좌반평면에 있어야 하므로 극점의 실수부는 모두 0보다 작다.
1차 시스템 $\frac{1}{Ts+1}$의 시정수 T가 커지면 응답이 느려지고 상승시간도 길어진다.
안정한 영점이 $j\omega$축에 가까워지면 응답이 더 예민해져 오버슈트가 커지는 경향이 있으며, 대역폭이 클수록 일반적으로 응답 속도는 빨라진다.

NoteBase

선지별 해설

① X: ㄱ은 옳고 ㄷ은 틀리다. ㄱ의 안정한 영점은 좌반평면 영점이며, 이 영점이 $j\omega$축에 가까워질수록 과도응답의 오버슈트가 커지는 경향이 있다. 반면 ㄷ의 "T를 증가시키면 상승시간이 줄어든다"는 표현이 틀리다. 1차 시스템에서는 T가 커질수록 응답이 느려지므로 상승시간은 늘어난다.
② O: ㄱ과 ㄹ이 모두 옳다. 안정한 영점이 $j\omega$축에 가까우면 오버슈트가 증가하는 경향이 있고, 대역폭이 크면 더 높은 주파수 성분까지 따라갈 수 있어 일반적으로 시간응답이 더 빠르다.
③ X: ㄴ과 ㄷ이 모두 틀리다. ㄴ의 "극점의 실수부가 0보다 클 수도 있다"는 표현이 틀리다. 안정한 연속시간 시스템의 극점 실수부는 모두 0보다 작아야 한다. ㄷ도 틀리며, 올바른 표현은 "T를 증가시키면 상승시간이 증가한다"이다.
④ X: ㄹ은 옳지만 ㄴ이 틀리므로 전체 선택지는 틀리다. 잘못된 부분은 ㄴ의 "실수부가 0보다 클 수도 있다"는 표현이며, 올바르게는 "안정한 시스템의 극점 실수부는 모두 0보다 작다"이다.

오답 포인트

ㄷ에서 시정수 T와 응답 속도의 방향을 반대로 기억하면 틀리기 쉽다. 또한 안정조건을 영점과 혼동해 ㄴ처럼 극점의 위치를 느슨하게 판단하면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

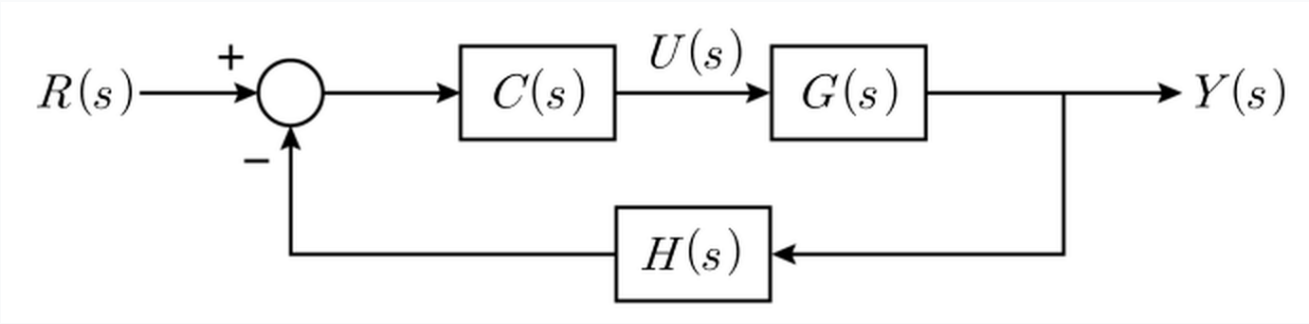
연속시간 안정성 문제는 먼저 극점이 모두 좌반평면인지 확인하고, 1차 시스템은 T가 커질수록 느려진다고 연결한다. 그다음 대역폭이 크면 빠른 응답, $j\omega$축에 가까운 안정한 영점은 오버슈트 증가 경향으로 판단하면 된다.

암기 포인트

안정조건은 극점 좌반평면, 1차 속도는 작은 T, 빠른 응답은 큰 대역폭이다.

NoteBase

문 3. 다음 블록선도에서 입력 $R(s)$와 $U(s)$ 간의 전달함수 $\frac{U(s)}{R(s)}$는?



① $\frac{1}{1+C(s)G(s)H(s)}$
② $\frac{C(s)}{1+C(s)G(s)H(s)}$
③ $\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)H(s)}$
④ $\frac{C(s)G(s)H(s)}{1+C(s)G(s)H(s)}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 음의 되먹임 블록선도에서 제어기 출력 $U(s)$와 입력 $R(s)$의 관계를 폐루프 식으로 유도할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 값: 전진 경로는 $C(s)$ 다음 $G(s)$이고, 출력 $Y(s)$가 $H(s)$를 거쳐 음의 되먹임된다.
구해야 할 값: $U(s)/R(s)$
주의할 조건: $U(s)$는 제어기 $C(s)$의 출력이므로 최종 출력 $Y(s)$와 구분해야 한다.

사용할 공식

음의 되먹임에서 오차는 $e(s) = R(s) - H(s)Y(s)$이고, 제어기 출력은 $U(s) = C(s)e(s)$이다.
이 공식을 쓰는 이유: 문제에서 묻는 $U(s)$가 바로 제어기 출력이므로, 전체 출력 $Y(s)$를 먼저 구하는 식보다 $U(s) = C(s)e(s)$를 세워 직접 정리하는 것이 가장 정확하다.

NoteBase

계산 과정

1. $Y(s) = G(s)U(s)$이므로 되먹임 신호는 $H(s)Y(s) = H(s)G(s)U(s)$이다.
2. 따라서 $U(s) = C(s)\{R(s) - H(s)G(s)U(s)\}$이다.
3. 정리하면 $U(s) = C(s)R(s) - C(s)G(s)H(s)U(s)$이고,

$U(s)\{1 + C(s)G(s)H(s)\} = C(s)R(s)$

이므로

$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$

이다.

선지 판단

1번 X: $\frac{1}{1 + C(s)G(s)H(s)}$은 분자에 $C(s)$가 빠져 있다. 이는 $U(s)/R(s)$가 아니라 오차신호 $e(s)/R(s)$에 해당하는 형태이다. 올바르게는 $\frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$이다.

2번 O: 계산 결과가 바로 $\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$이므로 맞다.

3번 X: $\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$은 제어기 출력 $U(s)$가 아니라 최종 출력 $Y(s)$에 대한 전달함수 $Y(s)/R(s)$이다. 문제에서 묻는 것은 $U(s)/R(s)$이므로 분자에 $G(s)$가 들어가면 안 된다. 올바르게는 $\frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$이다.

4번 X: $\frac{C(s)G(s)H(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$은 되먹임 경로 신호 $H(s)Y(s)$를 $R(s)$에 대해 나타낸 식이다. 제어기 출력 $U(s)$에는 $G(s)H(s)$가 추가로 곱해지지 않는다. 올바르게는 $\frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 $U(s)$와 $Y(s)$를 같은 것으로 보는 데 있다. 3번은 폐루프 출력 $Y(s)/R(s)$, 4번은 되먹임 신호 $H(s)Y(s)/R(s)$, 1번은 오차신호 $e(s)/R(s)$에 해당하므로 블록선도 안의 신호 위치를 구분하지 못하면 쉽게 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

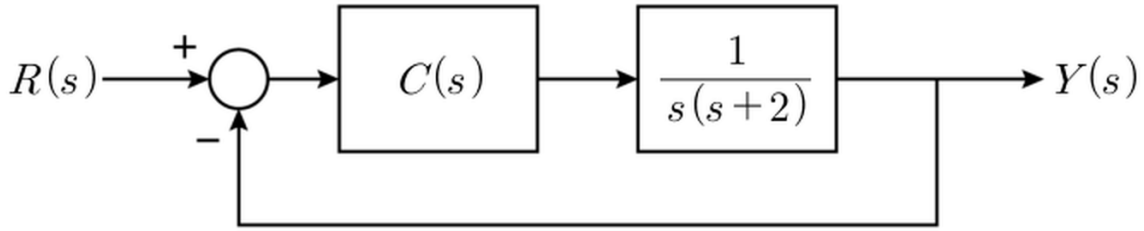
블록선도 문제는 먼저 각 문자 R, e, U, Y가 어느 지점의 신호인지 표시한 뒤, $Y = GU$, $U = C(R - HY)$처럼 인접 블록 관계식부터 세운 다음 마지막에 원하는 비 U/R, Y/R, e/R만 골라 정리하면 된다.

암기 포인트

음의 되먹임에서 제어기 출력은 $U/R = C/(1 + CGH)$, 전체 출력은 $Y/R = CG/(1 + CGH)$로 구분된다.

NoteBase

문 4. 다음 피드백 제어시스템에서 제어기를 $C(s) = 9$로 사용하다가 $C(s) = 4s + 9$로 변경하였을 때, 단위계단(unit step) 응답의 변화에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 정상상태오차(steady state error)가 작아진다.

② 오버슈트가 사라진다.

③ 정착시간(settling time)이 짧아진다.

④ 발산한다.

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 PD 성분이 추가될 때 폐루프 전달함수와 단위계단응답의 정상상태오차, 오버슈트, 정착시간이 어떻게 바뀌는지를 비교하는 문제이다.

조건 정리

기존 제어기는 $C(s) = 9$이고, 변경 후 제어기는 $C(s) = 4s + 9$이다.
플랜트는 $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$이고 단위 피드백 시스템이다.
비교 대상은 단위계단응답의 정상상태오차, 오버슈트, 정착시간, 안정성이다.

사용할 공식

폐루프 전달함수는 $T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$이다.
기존 제어기에서는 $T_1(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 9}$이므로 표준 2차계 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 비교하면 $\omega_n = 3$, $\zeta = \frac{1}{3}$이다.
변경 후에는 $T_2(s) = \frac{4s + 9}{s^2 + 6s + 9} = \frac{4s + 9}{(s + 3)^2}$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 제어기 변경이 폐루프 극점과 영점을 바꾸고, 그 변화가 과도응답과 정상상태오차를 직접 결정하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 기존 제어기 $C(s)=9$일 때 폐루프 전달함수는 $T_1(s)=\frac{9}{s^2+2s+9}$이다. 따라서 $\zeta=\frac{1}{3}$, $\omega_n=3$이고, 2% 정착시간은 $T_s\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}=4$초이다. 오버슈트는 $M_p=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\approx 0.329$이므로 약 32.9%이다.
2. 변경 후 제어기 $C(s)=4s+9$일 때 폐루프 전달함수는 $T_2(s)=\frac{4s+9}{(s+3)^2}$이다. 단위계단입력에 대한 출력은 $Y(s)=\frac{4s+9}{s(s+3)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}+\frac{1}{(s+3)^2}$이고, 시간응답은 $y(t)=1+(t-1)e^{-3t}$이다.
3. $y'(t)=(4-3t)e^{-3t}$이므로 최대값은 $t=\frac{4}{3}$에서 생기고, 그때 $y_{max}=1+\frac{1}{3}e^{-4}\approx 1.006$이다. 오버슈트는 0이 아니라 약 0.6%이다.
4. $y(t)$는 약 $t=0.788$초부터 2% 오차대 안에 들어가고 이후 계속 유지된다. 따라서 정착시간은 기존 4초보다 짧아진다.
5. 두 경우 모두 개루프에 적분기 $\frac{1}{s}$가 있으므로 단위계단입력에 대한 정상상태오차는 둘 다 0이다. 또한 변경 후 폐루프 극점은 $-3,\ -3$이므로 안정하다.

선지별 해설

① X
정상상태오차가 작아지는 것이 아니다. 두 경우 모두 형식 1형 시스템이므로 단위계단입력 정상상태오차는 0이다.
틀린 표현은 "작아진다"이다. 올바르게는 "정상상태오차는 변하지 않고 0이다"이다.

② X
오버슈트가 완전히 사라지지는 않는다. 변경 후 응답의 최대값이 약 1.006이므로 매우 작지만 양의 오버슈트가 남아 있다.
틀린 표현은 "사라진다"이다. 올바르게는 "오버슈트는 크게 감소하지만 완전히 0이 되지는 않는다"이다.

③ O
기존에는 T_s□pprox 4초이고, 변경 후에는 약 0.788초부터 2% 오차대 안에 머문다. PD 성분이 추가되면서 폐루프 극점이 더 왼쪽으로 이동하여 응답이 빨라진다.

④ X
발산하지 않는다. 변경 후 특성방정식은 $(s+3)^2=0$이므로 폐루프 극점이 모두 좌반평면에 있어 안정적으로 수렴한다.
틀린 표현은 "발산한다"이다. 올바르게는 "반복극이 -3에 있어 안정적으로 수렴한다"이다.

오답 포인트

미분제어가 추가되면 오버슈트가 줄어드는 경향이 있으므로 이를 곧바로 "오버슈트 0"으로 단정하기 쉽다. 이 문항은 그 함정을 이용한다. 또 적분기가 남아 있는지를 보지 않고 정상상태오차가 개선된다고 판단하면 ①에 걸리기 쉽다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

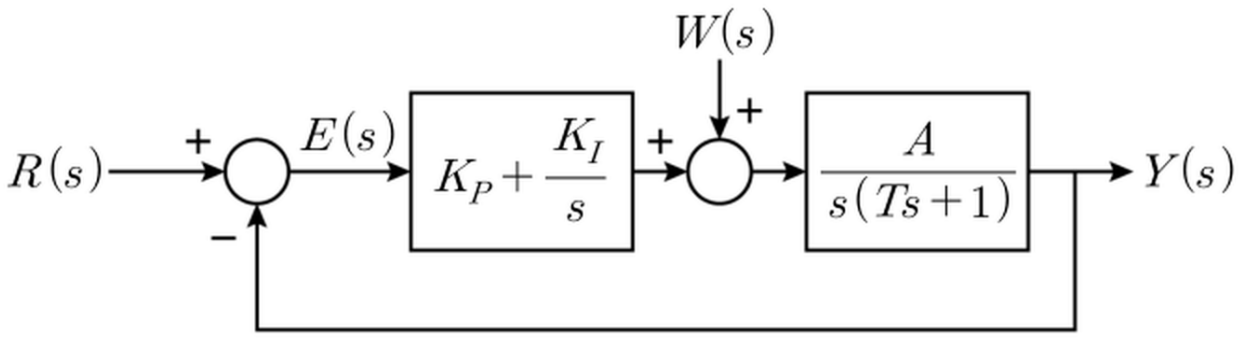
제어기 변경 문제는 먼저 $T(s)=\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$로 폐루프 전달함수를 만든 뒤, 극점 위치로 안정성과 속도를 보고, 적분기 유무로 정상상태오차를 판단하면 된다. 오버슈트는 "감소"와 "완전 소멸"을 구분해서 본다.

암기 포인트

PD 제어는 보통 응답을 빠르게 하고 감쇠를 키우지만, 적분기가 그대로면 계단입력 정상상태오차 0은 그대로 유지된다.

NoteBase

문 5. 다음 선형 제어시스템에서 단위계단 입력 $R(s)$에 대한 ($W(s)=0$로 가정) 정상상태오차 e_{ssR}와 단위램프(unit ramp) 외란 $W(s)$에 대한 ($R(s)=0$로 가정) 정상상태오차 e_{ssW}는? (단, K_P, K_I, A, T는 양수이다)



① e_{ssR}: 0, e_{ssW}: 0

② e_{ssR}: 0, e_{ssW}: $-\frac{1}{K_I}$

③ e_{ssR}: ∞, e_{ssW}: 0

④ e_{ssR}: ∞, e_{ssW}: $-\frac{1}{K_I}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 PI 제어기와 적분 요소를 가진 플랜트에서 기준입력에 대한 정상상태오차와 입력 외란에 대한 정상상태오차를 각각 전달함수로 구분하여 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 제어기와 플랜트는 각각 $C(s)=K_P+\frac{K_I}{s}$, $G(s)=\frac{A}{s(Ts+1)}$이다.
기준입력에 대한 정상상태오차는 $W(s)=0$에서의 e_{ssR}이다.
외란에 대한 정상상태오차는 $R(s)=0$에서 단위램프 외란 $W(s)=\frac{1}{s^2}$를 넣었을 때의 e_{ssW}이다.
개루프 전달함수는 $L(s)=C(s)G(s)=\frac{A(K_Ps+K_I)}{s^2(Ts+1)}$이므로 기준입력 기준으로는 2형 시스템이다.

사용할 공식

기준입력만 있을 때는 $E(s)=\frac{R(s)}{1+L(s)}$를 쓴다.
외란이 플랜트 입력에 가산될 때는 $Y(s)=G(s)\{C(s)E(s)+W(s)\}$, $E(s)=R(s)-Y(s)$에서 출발하여 $\frac{E(s)}{W(s)}=-\frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}$를 쓴다.
이 공식을 쓰는 이유는 기준입력과 외란의 유입 위치가 다르므로 오차 전달함수도 서로 달라지기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 기준입력에 대한 오차를 구하면 단위계단 입력은 $R(s)=\frac{1}{s}$이므로
$e_{ssR}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)}$
이다.
2. $L(s)=\frac{A(K_Ps+K_I)}{s^2(Ts+1)}$는 $s\to 0$에서 무한대로 가므로 $e_{ssR}=0$이다.
3. 외란에 대해서는 $R(s)=0$, $W(s)=\frac{1}{s^2}$이므로
$E(s)=-\frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}W(s)=-\frac{\frac{A}{s(Ts+1)}}{1+\frac{A(K_Ps+K_I)}{s^2(Ts+1)}}\cdot\frac{1}{s^2}=-\frac{A}{s\{s^2(Ts+1)+A(K_Ps+K_I)\}}$
가 된다.
4. 최종값정리를 적용하면
$e_{ssW}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\left(-\frac{A}{s^2(Ts+1)+A(K_Ps+K_I)}\right)=-\frac{1}{K_I}$
이다.
5. 따라서 $e_{ssR}=0$, $e_{ssW}=-\frac{1}{K_I}$이므로 정답은 2번이다.

선지별 해설

① X
$e_{ssR}=0$은 맞지만 $e_{ssW}=0$은 틀리다. 단위램프 외란이 플랜트 입력에 들어가면 정상상태오차는 $-\frac{1}{K_I}$가 된다. 틀린 표현은 $e_{ssW}=0$이고, 올바르게는 $e_{ssW}=-\frac{1}{K_I}$이다.

② O
$e_{ssR}=0$, $e_{ssW}=-\frac{1}{K_I}$가 계산 결과와 일치한다. 기준입력에 대해서는 2형 시스템이라 계단 오차가 0이고, 입력 외란에 대해서는 음의 부호를 가진 $-\frac{1}{K_I}$가 남는다.

③ X
$e_{ssR}=\infty$가 틀리고 $e_{ssW}=0$도 틀리다. 틀린 표현은 $e_{ssR}=\infty$, $e_{ssW}=0$이고, 올바르게는 $e_{ssR}=0$, $e_{ssW}=-\frac{1}{K_I}$이다. 이 오답은 시스템 형수를 보지 않거나 외란 경로를 기준입력 경로와 같은 방식으로 처리할 때 나온다.

④ X
$e_{ssW}=-\frac{1}{K_I}$는 맞지만 $e_{ssR}=\infty$가 틀리다. 틀린 표현은 $e_{ssR}=\infty$이고, 올바르게는 $e_{ssR}=0$이다. 이 오답은 적분기가 두 개 있다는 점을 놓쳐 계단입력 오차를 잘못 판단한 경우에 해당한다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 기준입력에 대한 오차 전달함수와 외란에 대한 오차 전달함수를 같은 식으로 놓는 것이다. 또 외란이 플랜트 입력에 가산되므로 부호가 음수로 나온다는 점을 놓치기 쉽다. ③, ④처럼 e_{ssR}를 ∞로 보는 오답은 개루프에 적분기가 두 개 있다는 사실을 놓친 경우이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

정상상태오차 문제는 먼저 무엇이 입력이고 무엇이 외란인지 유입 위치를 구분한 다음, 기준입력이면 $E/R = 1/(1+L)$, 플랜트 입력 외란이면 $E/W = -G/(1+CG)$를 세운다. 그다음 입력 종류를 $1/s$, $1/s^2$로 놓고 최종값정리로 $\lim_{s\to 0} sE(s)$를 계산하면 된다.

암기 포인트

PI 제어기와 적분 플랜트가 직렬이면 기준입력 기준 2형 시스템이므로 단위계단 오차는 0이다. 플랜트 입력의 단위램프 외란에 대한 정상상태오차는 $-\frac{1}{K_I}$로 정리된다.

NoteBase

문 6. 다음 폐루프(closed loop) 전달함수 $T(s)$를 갖는 제어시스템에서 입력 $r(t)=20\sin(3t+30^\circ)$에 대한 정상상태 출력 $y(t)$는?

$T(s)=\frac{6(s+3\sqrt{3})}{(s+3)(s+\sqrt{3})}$

① $120\sin(3t-45^\circ)$

② $20\sqrt{6}\sin(3t-15^\circ)$

③ $120\sin(3t-15^\circ)$

④ $20\sqrt{6}\sin(3t-45^\circ)$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 주파수 $\omega=3$에서 폐루프 전달함수 $T(j\omega)$의 크기와 위상을 구해 정상상태 사인 출력의 진폭과 위상을 결정하는 문제이다.

조건 정리

입력은 $r(t)=20\sin(3t+30^\circ)$이다. 정상상태 출력은 $y(t)=20|T(j3)|\sin(3t+30^\circ+\angle T(j3))$ 꼴이다. 따라서 $T(j3)$의 크기와 위상만 정확히 구하면 된다.

사용할 공식

사용할 공식은 $r(t)=A\sin(\omega t+\phi)$일 때 $y_{ss}(t)=A|T(j\omega)|\sin(\omega t+\phi+\angle T(j\omega))$이다. 이 공식을 쓰는 이유는 선형 시불변 폐루프 시스템의 정상상태 사인응답이 입력 주파수에서의 주파수응답으로 바로 결정되기 때문이다.

계산 과정

$s=j3$을 대입하면 $T(j3)=\frac{6(j3+3\sqrt{3})}{(j3+3)(j3+\sqrt{3})}$이다. 분자 $j3+3\sqrt{3}$의 크기는 6, 위상은 30°이므로 분자 전체의 크기는 36, 위상은 30°이다. 분모에서 $j3+3=3\sqrt{2}\angle 45^\circ$, $j3+\sqrt{3}=2\sqrt{3}\angle 60^\circ$이므로 분모 전체는 $6\sqrt{6}\angle 105^\circ$이다. 따라서 $|T(j3)|=\frac{36}{6\sqrt{6}}=\sqrt{6}$, $\angle T(j3)=30^\circ-105^\circ=-75^\circ$이다. 그러므로 $y(t)=20\sqrt{6}\sin(3t+30^\circ-75^\circ)=20\sqrt{6}\sin(3t-45^\circ)$이다.

NoteBase

선지별 해설

① X. 진폭 120이 틀렸다. $|T(j3)| = \sqrt{6}$이므로 출력 진폭은 $20\sqrt{6}$이다. 올바르게는 $20\sqrt{6}\sin(3t - 45^\circ)$이다.
② X. 진폭 $20\sqrt{6}$은 맞지만 위상 -15°가 틀렸다. 전달함수의 위상은 -75°이므로 입력 위상 30°를 더한 최종 위상은 -45°이다. 올바르게는 $20\sqrt{6}\sin(3t - 45^\circ)$이다.
③ X. 진폭 120도 틀리고 위상 -15°도 틀렸다. 이는 크기를 $\sqrt{6}$ 대신 6으로 잘못 계산하고 위상도 -75° 대신 -45°로 오판한 경우에 해당한다. 올바르게는 $20\sqrt{6}\sin(3t - 45^\circ)$이다.
④ O. $|T(j3)| = \sqrt{6}$, $\angle T(j3) = -75^\circ$이므로 정상상태 출력은 $20\sqrt{6}\sin(3t - 45^\circ)$가 된다.

오답 포인트

전달함수의 크기와 위상을 따로 구한 뒤 입력의 진폭과 위상에 각각 반영해야 한다는 점이 함정이다. 특히 최종 위상은 $\angle T(j3)$만 쓰는 값이 아니라 입력의 30°까지 더한 값이며, 분자와 분모의 크기 계산을 단순한 계수 곱으로 오해하면 120 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

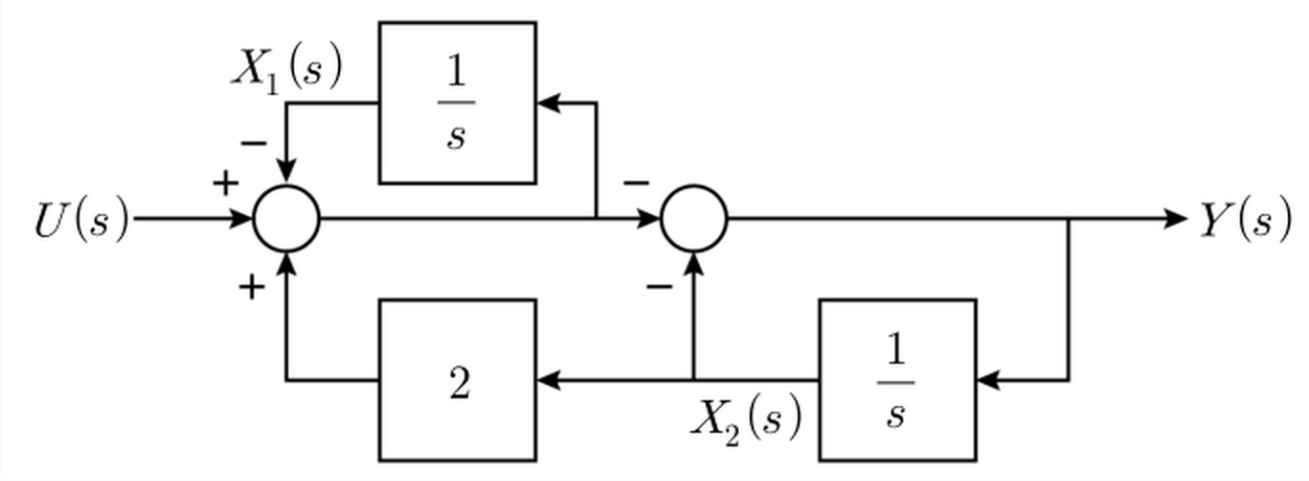
사인 정상상태 응답 문제는 먼저 $T(j\omega)$를 구하고, 다음에 크기는 입력 진폭에 $|T(j\omega)|$를 곱하며, 위상은 입력 위상에 $\angle T(j\omega)$를 더하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

정상상태 사인응답은 진폭에 $|T(j\omega)|$를 곱하고 위상에 $\angle T(j\omega)$를 더한 형태이다.

NoteBase

문 7. 다음 제어시스템에서 가제어성(controllability)과 가관측성(observability)에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, $X_1(s)$, $X_2(s)$는 상태변수의 라플라스 변환이다)



① 가제어하고 가관측하다.

② 가제어하나 가관측하지 않는다.

③ 가제어하지 않으나 가관측하다.

④ 가제어하지 않고 가관측하지 않는다.

정답 1번

출제 포인트

블록선도에서 적분기 출력을 상태변수로 잡아 상태방정식을 만든 뒤, 가제어행렬과 가관측행렬의 랭크가 모두 2인지 판정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $X_1(s)$, $X_2(s)$는 상태변수의 라플라스 변환이고, 두 개의 $\frac{1}{s}$ 블록 출력이 각각 상태이다.
구해야 할 값: 이 시스템이 가제어인지, 가관측인지의 여부이다.
주의할 조건: 적분기 출력이 상태이므로 적분기 입력이 각각 $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$가 된다. 직접전달항 D는 가제어성·가관측성 판정에 쓰이지 않는다.

사용할 공식

상태방정식을 $\dot{x} = Ax + Bu$, 출력방정식을 $y = Cx + Du$로 두면,
가제어행렬은 $\mathcal{C} = [B\ AB]$, 가관측행렬은 O=bmatrixC \ CAbmatrix이다.
이 공식을 쓰는 이유: 가제어성은 입력 u가 모든 상태를 움직일 수 있는지, 가관측성은 출력 y로 모든 상태를 복원할 수 있는지를 각각 행렬의 랭크로 판정하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

각 합점에서 화살표 방향과 부호를 하나씩 따라간다.
첫 번째(왼쪽) 합점에는 입력 u가 $+$로, 위쪽 적분기 출력 x_1이 되먹임되어 $-$로, 아래쪽 2 블록을 지난 $2x_2$가 $+$로 들어온다. 이 합점의 출력을 v라 하면
$v = u - x_1 + 2x_2$
이다.
두 번째(오른쪽) 합점에는 첫 번째 합점 출력 v가 $-$로, 아래쪽 적분기 출력 x_2가 되먹임되어 $-$로 들어온다. 이 합점의 출력이 곧 $y = Y(s)$이므로
$y = -v - x_2 = -(u - x_1 + 2x_2) - x_2 = -u + x_1 - 3x_2$
가 된다.
왼쪽 적분기는 입력이 v, 출력이 x_1이므로 $\dot{x}_1 = v$이고, 오른쪽 적분기는 입력이 두 번째 합점 출력 y, 출력이 x_2이므로 $\dot{x}_2 = y$이다. 즉 출력 $Y(s)$가 그대로 두 번째 적분기의 입력으로 되먹임되는 구조이다. 따라서
$\dot{x}_1 = v = -x_1 + 2x_2 + u$
$\dot{x}_2 = y = x_1 - 3x_2 - u$
이므로
A=bmatrix-1&2\\1&-3bmatrix, B=bmatrix1\\-1bmatrix, C=bmatrix1&-3bmatrix
이다. 출력식 $y = x_1 - 3x_2 - u$에는 직접전달항 $D = -1$이 실제로 존재하지만, 가관측성은 A와 C만으로 판정하므로 D는 결과에 영향을 주지 않는다.
따라서
AB=bmatrix-3\\4bmatrix, C=[B AB]=bmatrix1&-3\\-1&4bmatrix
이고, $\det \mathcal{C} = 1 \neq 0$이므로 가제어이다.
또
CA=bmatrix-4&11bmatrix, O=bmatrix1&-3\\-4&11bmatrix
이고, $\det \mathcal{O} = -1 \neq 0$이므로 가관측이다.

선지별 해설

① O: 가제어행렬 $\mathcal{C}$의 랭크가 2이고 가관측행렬 $\mathcal{O}$의 랭크도 2이므로, 이 시스템은 가제어하고 가관측한다.
② X: $\mathcal{O}$의 랭크가 2이므로 "가관측하지 않는다"는 표현이 틀리다. 올바르게는 "가제어하고 가관측한다"이다.
③ X: $\mathcal{C}$의 랭크가 2이므로 "가제어하지 않으나"라는 표현이 틀리다. 올바르게는 "가제어하고 가관측한다"이다.
④ X: 가제어행렬과 가관측행렬이 모두 full rank이므로 둘 다 아니라고 볼 수 없다. 올바르게는 "가제어하고 가관측한다"이다.

오답 포인트

적분기 블록이 보이면 그 출력이 상태라는 점을 놓치면 상태방정식을 잘못 세우기 쉽다. 또 출력식에 직접전달항이 보여도 가관측성 판정은 D가 아니라 A, C로 한다는 점을 놓치면 ② 같은 선지에 흔들리기 쉽다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

블록선도 문제는 먼저 적분기 출력부터 상태로 잡고, 각 합점의 부호를 따라 A, B, C를 만든 뒤, $\mathcal{C} = [B\ AB]$와 O=bmatrixC \ CAbmatrix의 랭크가 상태차수와 같은지만 확인하면 된다.

암기 포인트

적분기 출력이 상태이고, 2차 시스템은 $\det \mathcal{C} \neq 0$, $\det \mathcal{O} \neq 0$이면 각각 가제어, 가관측이다.

NoteBase

문 8. 선형 시불변 시스템에서 단위임펄스(unit impulse) 입력과 단위계단 입력이 동시에 적용되었을 때, 제어시스템의 출력 $y_i(t) + y_u(t) = e^{-2t}(t \geq 0)$을 얻기 위한 전달함수는? (단, 모든 초기조건은 0이고, $y_i(t)$는 단위임펄스 입력에 대한 출력, $y_u(t)$는 단위계단 입력에 대한 출력을 나타낸다)

① $\frac{s}{(s+1)(s+2)}$
② $\frac{1}{s+2}$
③ $\frac{s+1}{s(s+2)}$
④ $\frac{1}{s(s+2)}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위임펄스 응답과 단위계단 응답의 라플라스 표현을 연결하여 전달함수 $G(s)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
- 단위임펄스 입력에 대한 출력은 $y_i(t)$이다.
- 단위계단 입력에 대한 출력은 $y_u(t)$이다.
- $y_i(t) + y_u(t) = e^{-2t}$ $(t \geq 0)$이다.

구해야 할 값:
- 전달함수 $G(s)$이다.

주의할 조건:
- 영초기조건이므로 라플라스 변환을 바로 적용할 수 있다.
- 단위임펄스의 라플라스 변환은 1, 단위계단의 라플라스 변환은 $1/s$이다.

사용할 공식

전달함수를 $G(s)$라 두면
$Y_i(s) = G(s), \quad Y_u(s) = \frac{G(s)}{s}$
또한
$\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$
이다.
이 공식을 쓰는 이유:
단위임펄스 입력은 입력의 라플라스 값이 1이므로 출력이 그대로 $G(s)$가 되고, 단위계단 입력은 입력의 라플라스 값이 $1/s$이므로 출력이 $G(s)/s$가 되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 주어진 식을 라플라스 변환하면
$Y_i(s) + Y_u(s) = G(s) + \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s+2}$
이다.
2. 좌변을 정리하면
$G(s)(1 + \frac{1}{s}) = G(s)\frac{s+1}{s} = \frac{1}{s+2}$
이다.
3. 따라서 전달함수는
$G(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{s}{s+1} = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$
이다.

선지별 해설

① O
- $G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$를 대입하면 $G(s) + G(s)/s = \frac{1}{s+2}$가 되어 주어진 e^{-2t}와 일치한다.

② X
- $G(s) = \frac{1}{s+2}$이면 $G(s) + G(s)/s = \frac{s+1}{s(s+2)}$가 되어 $\frac{1}{s+2}$가 되지 않는다.
- 틀린 표현은 분자에 있어야 할 s가 빠진 점이다. 올바르게는 $G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$이다.

③ X
- $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$이면 $G(s) + G(s)/s = \frac{(s+1)^2}{s^2(s+2)}$가 되어 조건을 만족하지 않는다.
- 틀린 표현은 계단응답의 $1/s$를 전달함수 안에 한 번 더 남겨 둔 형태라는 점이다. 올바르게는 $G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$이다.

④ X
- $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$이면 $G(s) + G(s)/s = \frac{s+1}{s^2(s+2)}$가 되어 조건식과 다르다.
- 틀린 표현은 분모에 불필요한 s가 들어간 점이다. 올바르게는 $G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 단위임펄스 응답과 단위계단 응답의 라플라스 표현을 뒤섞는 데 있다. 특히 계단응답에서만 $1/s$가 곱해진다는 점을 놓치면 ②, ③, ④처럼 분자나 분모에 s를 잘못 남기기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

선형 시불변 시스템에서 입력 종류가 바뀌는 문제는 먼저 입력의 라플라스 변환을 적고, 출력식을 $Y(s) = G(s)X(s)$로 바꾼 뒤 $G(s)$만 남도록 정리하면 된다. 임펄스는 1, 계단은 $1/s$라는 순서로 대입하면 빠르게 판단할 수 있다.

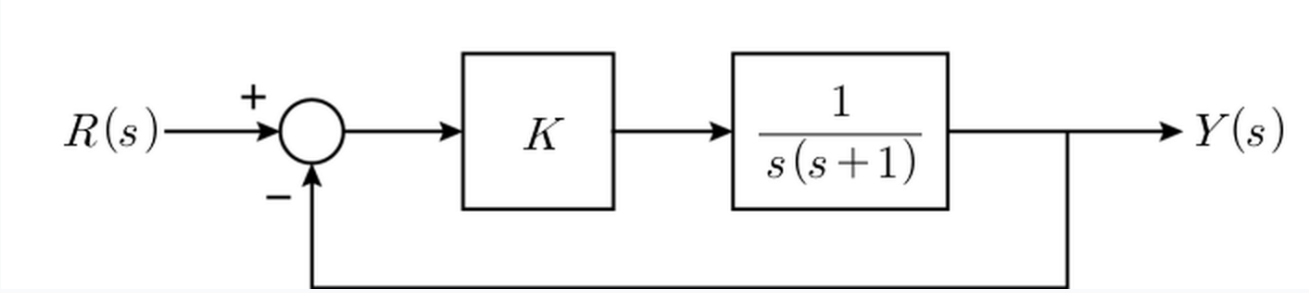
NoteBase

암기 포인트

단위임펄스는 $X(s) = 1$, 단위계단은 $X(s) = 1/s$이므로 응답 비교 문제는 $G(s)$와 $G(s)/s$를 바로 연결하면 된다.

NoteBase

문 9. 다음 피드백 제어시스템에서 단위램프 입력에 대한 정상상태오차 $e_{ss} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이 되는 K와 위상여유(phase margin)는?



① K: 1, 위상여유: 30°

② K: 1, 위상여유: 45°

③ K: $\sqrt{2}$, 위상여유: 45°

④ K: $\sqrt{2}$, 위상여유: 60°

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 단위램프 입력의 정상상태오차와 개루프 전달함수의 주파수응답을 이용해 K와 위상여유를 함께 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 개루프 전달함수는 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$이다.
단위피드백계에서 단위램프 입력에 대한 정상상태오차가 $e_{ss} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.
구해야 할 값은 K와 위상여유이다.

사용할 공식

단위램프 입력의 정상상태오차는 $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$, 속도오차정수는 $K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$이다.
위상여유는 이득교차주파수 ω_{gc}에서 $PM = 180^\circ + \angle G(j\omega_{gc})$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 이 계가 개루프에 적분기 $1/s$를 하나 가진 1형 시스템이므로 램프 입력 오차가 K_v로 바로 결정되고, 위상여유는 개루프 주파수응답의 이득교차점 위상으로 정해지기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. $K_v = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{K}{s(s+1)} = K$이므로 $e_{ss} = \frac{1}{K}$이다.
2. $\frac{1}{K} = \frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $K = \sqrt{2}$이다.
3. 이득교차조건 $\left|\frac{K}{j\omega(j\omega+1)}\right| = 1$에 $K = \sqrt{2}$를 대입하면 $\frac{\sqrt{2}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} = 1$이다.
4. 양변을 제곱하면 $2 = \omega^2(\omega^2+1)$, 즉 $\omega^4 + \omega^2 - 2 = 0$이다. $x = \omega^2$로 두면 $x^2 + x - 2 = 0$이므로 $x = 1$, 따라서 $\omega_{gc} = 1$이다.
5. $\angle G(j\omega_{gc}) = -90^\circ - \tan^{-1}(1) = -135^\circ$이므로 위상여유는 $PM = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$이다.

선지별 해설

① X: $K = 1$이면 $e_{ss} = 1$이므로 조건 $\frac{1}{\sqrt{2}}$를 만족하지 못한다. 틀린 표현은 "$K = 1$"이며, 올바르게는 "$K = \sqrt{2}$"이다. 또한 $K = 1$일 때 위상여유도 30°가 아니다.

② X: 위상여유 45° 자체는 맞지만 $K = 1$이 틀려서 선지 전체가 성립하지 않는다. 틀린 표현은 "$K = 1$"이며, 올바르게는 "$K = \sqrt{2}$"이다.

③ O: $K_v = K$, $e_{ss} = 1/K$이므로 $K = \sqrt{2}$이다. 이때 이득교차주파수는 $\omega_{gc} = 1$이고 위상은 -135°이므로 위상여유는 45°가 된다.

④ X: $K = \sqrt{2}$까지는 맞지만 위상여유가 틀리다. 틀린 표현은 "위상여유 60°"이며, 올바르게는 "위상여유 45°"이다.

오답 포인트

단위램프 입력에서 $e_{ss} = 1/K$ 관계를 놓치고 위치오차정수처럼 처리하면 K를 잘못 잡기 쉽다. 또 위상여유를 구할 때 -90°와 $-\tan^{-1}\omega$를 따로 더하지 않으면 60°나 30° 같은 오답으로 흐르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

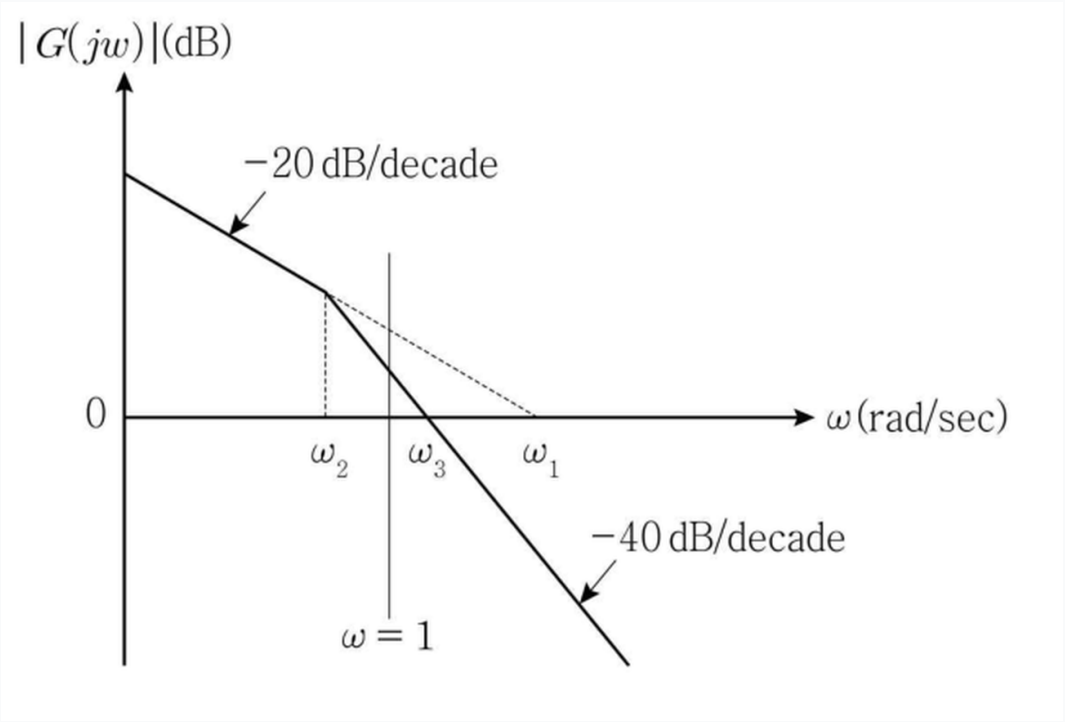
1형 단위피드백계에서 램프 정상상태오차가 보이면 먼저 $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)$를 계산해 K를 정한다. 그다음 $|G(j\omega)| = 1$로 이득교차주파수를 구하고, 그 주파수에서의 위상으로 위상여유를 계산하면 된다.

암기 포인트

1형 계의 단위램프 오차는 $e_{ss} = 1/K_v$, 위상여유는 이득교차점 위상에서 180°를 보태어 구한다.

NoteBase

문 10. 다음의 보드선도(bode diagram)를 갖는 단위 피드백 제어시스템에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① 정적속도오차상수(static velocity error constant) $K_v = \omega_1$이다.

② 개루프 전달함수 $G(s) = \frac{\omega_1}{s(s+\omega_2)}$이다.

③ 폐루프 전달함수의 고유주파수(undamped natural frequency) $\omega_n = \sqrt{\omega_1\omega_2}$이다.

④ 폐루프 전달함수의 감쇠비(damping ratio) $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$이다.

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 보드선도의 기울기 변화로 개루프 전달함수를 읽고, 이를 표준 2차 폐루프 식과 비교해 K_v, ω_n, ζ를 판단하는 문제이다.

조건 정리

- 저주파 기울기가 $-20dB/decade$이므로 적분요소 $1/s$가 1개 있다.
- ω_2에서 기울기가 $-40dB/decade$로 바뀌므로 $s+\omega_2$ 형태의 1차 극이 추가된다.
- 저주파 점근선의 $0dB$ 교점이 ω_1이므로 저주파에서 $|G(j\omega)| \approx \omega_1/\omega$가 된다.

NoteBase

사용할 공식

개루프 전달함수는
$G(s) = \frac{K}{s(1+\frac{s}{\omega_2})} = \frac{K\omega_2}{s(s+\omega_2)}$
이다.
정적속도오차상수는 $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = K$ 이다.
폐루프 특성방정식은
$s^2 + \omega_2 s + K\omega_2 = 0$
이고, 이를 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$와 비교한다.
이 공식을 쓰는 이유는 보드선도의 기울기가 적분요소와 극의 개수를 직접 보여 주고, 선지 ③, ④는 폐루프 2차 표준형 비교로 바로 판별되기 때문이다.

계산 과정

1. 저주파 점근선이 $-20dB/decade$이므로 저주파에서 $|G(j\omega)| \approx K/\omega$이다.
2. 이 점근선의 $0dB$ 교점이 ω_1이므로 $K = \omega_1$이고, 따라서
$G(s) = \frac{\omega_1\omega_2}{s(s+\omega_2)}$
이다.
3. 단위 피드백 폐루프 전달함수의 분모는
$s^2 + \omega_2 s + \omega_1\omega_2$
이므로
$\omega_n = \sqrt{\omega_1\omega_2}, \quad 2\zeta\omega_n = \omega_2$
이다. 따라서
$\zeta = \frac{\omega_2}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$
이다.

NoteBase

선지별 해설

① O
- 타입 1 시스템에서 $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = K$이다.
- 저주파 점근선의 $0dB$ 교점이 ω_1이므로 $K = \omega_1$이고, 따라서 $K_v = \omega_1$이다.

② X
- 보드선도에서 읽히는 개루프 전달함수는 $G(s) = \frac{\omega_1\omega_2}{s(s+\omega_2)}$이다.
- 제시식 $\frac{\omega_1}{s(s+\omega_2)}$는 분자에 ω_2가 빠져 있다.
- 틀린 표현은 "$G(s) = \frac{\omega_1}{s(s+\omega_2)}$"이고, 올바르게는 "$G(s) = \frac{\omega_1\omega_2}{s(s+\omega_2)}$"이다.

③ O
- 폐루프 특성방정식이 $s^2 + \omega_2 s + \omega_1\omega_2 = 0$이므로 표준형 비교에서 $\omega_n^2 = \omega_1\omega_2$이다.
- 따라서 $\omega_n = \sqrt{\omega_1\omega_2}$가 맞다.

④ O
- 표준형 비교에서 $2\zeta\omega_n = \omega_2$이다.
- ③의 $\omega_n = \sqrt{\omega_1\omega_2}$를 대입하면 $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$가 된다.
- 따라서 ④의 식은 맞다.

오답 포인트

②는 저주파 점근선의 $0dB$ 교점을 읽어 놓고도 $s + \omega_2$를 $1 + \frac{s}{\omega_2}$로 바꿀 때 분자 ω_2를 빠뜨리는 실수를 노린 선지이다. 보드선도의 기울기만 보고 극 개수만 맞추고 상수항 환산을 놓치면 ②를 옳다고 보기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

보드선도 문제는 먼저 저주파 기울기로 적분요소 개수를 확인하고, 절곡 주파수에서 추가 극·영점을 읽은 다음, 저주파 $0dB$ 교점으로 이득 K를 정한다. 그 뒤 개루프 전달함수를 표준형으로 정리해 폐루프 계수와 ω_n, ζ를 비교하면 된다.

암기 포인트

타입 1 보드선도에서 저주파 점근선의 $0dB$ 교점은 K_v와 연결되고, $G(s) = \frac{K\omega_2}{s(s+\omega_2)}$이면 폐루프에서 $\omega_n^2 = K\omega_2$, $2\zeta\omega_n = \omega_2$가 된다.

NoteBase

문 11. 다음 미분방정식으로 표현된 시스템에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

$\dot{y}(t) + 30y(t) = 20x(t)$

① 시스템의 극점은 -30이며 안정하다.

② 크기가 유한(bounded)한 입력신호에 대하여 출력신호는 유한하다.

③ 선형 시불변 시스템이다.

④ 단위계단 입력에 대한 정상상태 출력은 1이며 과도응답(transient response)에 진동파형을 포함한다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 미분방정식으로부터 전달함수, 극점, 안정도, 단위계단응답의 정상상태값과 과도응답 형태를 판별할 수 있는지를 묻는다.

핵심 개념

영초기조건에서 전달함수는 $G(s) = Y(s)/X(s) = 20/(s + 30)$이다. 따라서 극점은 $s = -30$ 하나이고, 좌반평면 극점만 가지므로 안정하다. 단위계단 입력 $x(t) = u(t)$에 대한 응답은 $y(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-30t})u(t)$이므로 정상상태값은 2/3이고 진동성분은 없다.

선지별 해설

1번 O: 특성방정식은 $s + 30 = 0$이므로 극점은 -30이다. 극점이 좌반평면에 있으므로 이 시스템은 안정하다.
2번 O: 전달함수의 모든 극점이 좌반평면에 있으므로 BIBO 안정이다. 따라서 유한한 입력에 대해 출력도 유한하다.
3번 O: 식 $\dot{y}(t) + 30y(t) = 20x(t)$는 입력과 출력 및 그 미분이 1차로만 나타나는 선형 미분방정식이고 계수가 시간에 따라 변하지 않으므로 선형 시불변 시스템이다.
4번 X: 틀린 표현은 '정상상태 출력은 1'과 '과도응답에 진동파형을 포함한다'이다. 실제로는 단위계단응답의 정상상태 출력이 $\lim_{t\to\infty} y(t) = 20/30 = 2/3$이고, 응답은 실수 극점 1개에 의한 지수감쇠형이므로 진동파형을 포함하지 않는다.

오답 포인트

4번은 정상상태값과 응답 형태를 동시에 틀리게 섞어 놓은 선지이다. 학생이 '계단입력이면 출력도 1에 수렴한다'고 단순화하거나, 과도응답이면 무조건 진동한다고 오해하면 쉽게 걸린다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

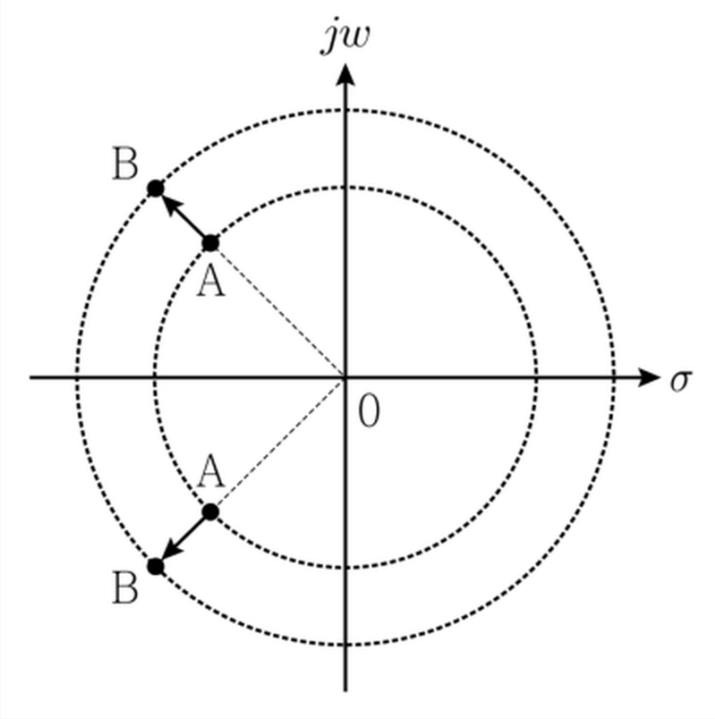
1차 선형 시스템이 보이면 먼저 전달함수 $G(s)$를 구하고, 그다음 극점 위치로 안정도를 판단하며, 마지막으로 최종값정리 또는 표준응답식으로 정상상태값과 진동 여부를 확인하면 된다.

암기 포인트

1차계 $20/(s+30)$는 극점 -30, 정상상태값 2/3, 과도응답은 비진동 지수감쇠형이다.

NoteBase

문 12. 공액 복소수(complex conjugate) 형태를 갖는 2차 폐루프 시스템에서 극점이 제어를 통해 A에서 B로 이동할 때, 동특성의 변화로 적합하지 않은 것은?



① 감쇠비가 감소한다.

② 상승시간이 단축된다.

③ 정착시간이 단축된다.

④ 지연시간(delay time)이 단축된다.

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 s평면에서 공액복소극이 같은 각도를 유지한 채 A에서 B로 이동할 때 감쇠비 ζ와 자연진동수 ω_n가 어떻게 바뀌고, 그 결과 과도응답 특성이 어떻게 변하는지를 묻는다.

NoteBase

선지별 해설

① X: A와 B는 원점에서 본 각도가 같은 반직선 위에 있으므로 감쇠비 $\zeta = \cos\theta = -\sigma/\omega_n$는 감소하지 않고 거의 일정하다. 틀린 표현은 '감쇠비가 감소한다'이며, 올바르게는 '감쇠비는 일정하다'이다.
② O: B가 A보다 원점에서 더 멀어 반경이 커지므로 자연진동수 ω_n가 증가한다. 일반적인 2차계에서 ω_n가 커지면 응답이 빨라져 상승시간은 단축된다.
③ O: 같은 각도에서 바깥쪽으로 이동하면 실수부의 절댓값 $|\sigma|$도 커진다. 따라서 정착시간은 $T_s \approx 4/(\zeta\omega_n) = 4/|\sigma|$ 관계에 따라 짧아진다.
④ O: 자연진동수가 증가하면 초기 응답 구간도 빨라지므로 지연시간도 단축된다. 그림의 이동은 전체 과도응답을 빠르게 만드는 방향이다.

오답 포인트

동심원은 ω_n, 원점에서 나가는 직선의 각도는 감쇠비를 나타낸다는 점을 혼동하면 ①에 속기 쉽다. 이 그림은 감쇠비 변화가 아니라 같은 감쇠비에서 속도만 빨라지는 경우이다.

다시 나오면 이렇게 판단

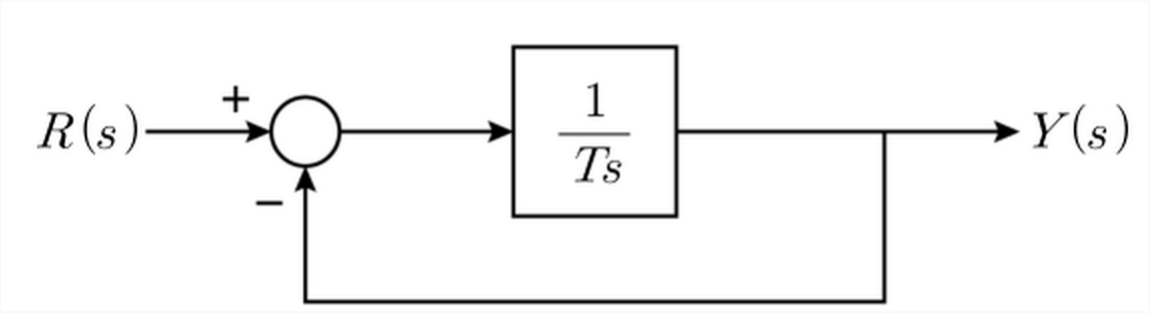
복소극이 같은 각도를 유지하면 먼저 감쇠비 일정으로 판단한다. 그다음 원점에서 멀어졌는지 가까워졌는지를 보고 ω_n 증가 또는 감소를 정한 뒤, 시간응답 지표가 그 반대로 짧아지거나 길어진다고 연결하면 된다.

암기 포인트

같은 각도 바깥 이동은 감쇠비 일정, ω_n 증가, 시간응답 단축이다.

NoteBase

문 13. 다음 피드백 제어시스템의 상대안정도에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (단, $T > 0$이다)



① 이득여유(gain margin)는 ∞이다.

② 위상여유는 90 °이다.

③ 위상교차 주파수(phase crossover frequency)는 존재하지 않는다.

④ 이득교차 주파수(gain crossover frequency)는 T[rad/sec]이다.

정답 4번

출제 포인트

개루프 전달함수 $L(s) = 1/(Ts)$의 크기와 위상으로 이득교차 주파수, 위상여유, 위상교차 주파수, 이득여유를 연결하는 문제이다.

조건 정리

단위 음의 되먹임이므로 루프전달함수는 $L(s) = 1/(Ts)$이다.
크기는 $|L(j\omega)| = 1/(T\omega)$이고 위상은 모든 주파수에서 $-90\,^\circ$이다.
발문은 '옳지 않은 것'이므로 틀린 선지 하나를 찾으면 된다.

사용할 공식

이득교차 주파수는 $|L(j\omega_{gc})| = 1$을 만족하는 ω_{gc}이다.
위상교차 주파수는 $\angle L(j\omega_{pc}) = -180\,^\circ$를 만족하는 ω_{pc}이다.
위상여유는 $PM = 180\,^\circ + \angle L(j\omega_{gc})$이고, 위상교차 주파수가 없으면 이득여유는 ∞이다.
이 공식을 쓰는 이유는 상대안정도 지표가 모두 개루프 주파수응답의 크기 1 교차와 위상 $-180\,^\circ$ 교차로 정의되기 때문이다.

계산 과정

1. $|L(j\omega)| = 1/(T\omega)$이므로 $|L(j\omega)| = 1$에서 $1/(T\omega_{gc}) = 1 \Rightarrow \omega_{gc} = 1/T$이다.
2. 위상은 항상 $-90\,^\circ$이므로 $PM = 180\,^\circ + (-90\,^\circ) = 90\,^\circ$이다.
3. $\angle L(j\omega)$가 $-180\,^\circ$가 되는 주파수는 없으므로 ω_{pc}는 존재하지 않고, 따라서 이득여유는 ∞이다.

NoteBase

선지별 해설

① O

이득여유는 위상교차 주파수에서의 추가 이득 허용량이다. 이 계는 위상이 항상 -90°라서 -180°에 도달하지 않으므로 위상교차 주파수가 없다. 따라서 이득여유는 ∞가 되어 ①은 옳다.

② O

$\omega_{gc} = 1/T$에서 위상은 여전히 -90°이다. 따라서 위상여유는 $180^\circ + (-90^\circ) = 90^\circ$가 되어 ②는 옳다.

③ O

위상교차 주파수는 위상이 -180°가 되는 주파수이다. 적분요소 1개인 $1/(Ts)$는 모든 주파수에서 위상이 -90°이므로 위상교차 주파수는 존재하지 않는다. ③은 옳다.

④ X

이득교차 주파수는 $|L(j\omega)| = 1$에서 정해지므로 $1/(T\omega) = 1 \Rightarrow \omega = 1/T$이다. ④의 틀린 표현은 "$T$"이고, 올바르게는 "$1/T$"이다. 따라서 ④는 옳지 않다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 T와 $1/T$를 뒤집는 실수와, 위상여유를 위상값 -90° 자체로 착각하는 실수이다. 또 위상교차 주파수가 없으면 이득여유도 정해지지 않는다고 오해하기 쉬운데, 이 경우는 ∞로 본다.

다시 나오면 이렇게 판단

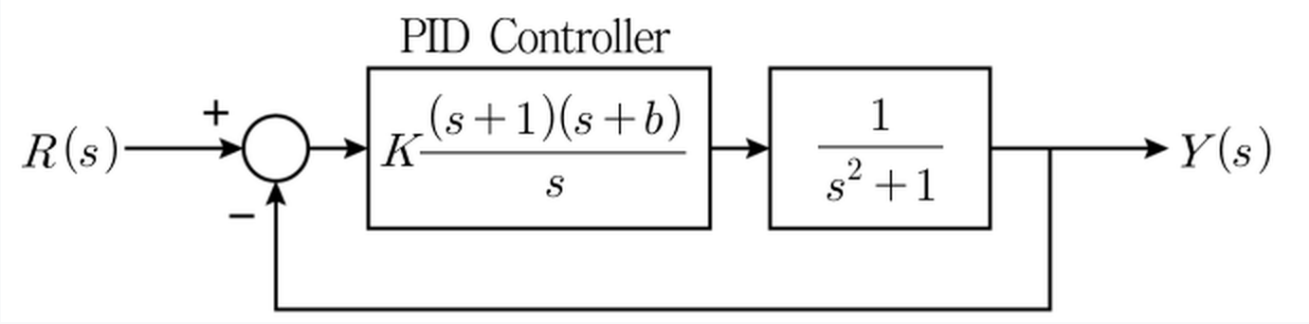
먼저 개루프 전달함수의 크기 $|L(j\omega)|$와 위상 $\angle L(j\omega)$를 적는다. 그다음 $|L| = 1$에서 ω_{gc}, $\angle L = -180^\circ$에서 ω_{pc}를 찾고, PM과 GM을 순서대로 연결하면 상대안정도 선지를 판별할 수 있다.

암기 포인트

적분요소 1개 $1/s$의 위상은 항상 -90°이고, $|1/(Tj\omega)| = 1$이면 $\omega = 1/T$이다.

NoteBase

문 14. PID(Proportional Integral Derivative) 제어기가 사용된 제어시스템에서 제어대상의 주요 폐루프 극점이 $s=-1\pm j\sqrt{3}$이 되기 위한 K와 b의 관계는?



① $K=\frac{1}{1-b}$
② $K=\frac{b}{1-b}$
③ $K=\frac{1}{1+b}$
④ $K=\frac{b}{1+b}$

정답 1번

출제 포인트

단위 음의 되먹임계의 폐루프 특성방정식을 세우고, 주어진 복소극점 $-1\pm j\sqrt{3}$에 대응하는 2차 인자를 이용해 계수를 비교하는 문제이다.

조건 정리

주어진 개루프 전달함수는 $G(s)=K\frac{(s+1)(s+b)}{s(s^2+1)}$이다.
폐루프는 단위 음의 되먹임이므로 특성방정식은 $1+G(s)=0$이다.
주요 폐루프 극점이 $-1\pm j\sqrt{3}$이므로 해당 2차 인자는 s^2+2s+4이다.

사용할 공식

$1+G(s)=0$
$s(s^2+1)+K(s+1)(s+b)=0$
복소극점 $-1\pm j\sqrt{3}$에 대한 2차 인자는 $(s+1-j\sqrt{3})(s+1+j\sqrt{3})=s^2+2s+4$ 이다.
이 공식을 쓰는 이유는 폐루프 극점 조건이 곧 특성방정식의 인수 조건이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 특성방정식을 전개하면 $s^3 + s + K(s^2 + (1+b)s + b) = 0$ 이므로
$s^3 + Ks^2 + \{1 + K(1+b)\}s + Kb = 0$ 이다.
2. 주어진 복소극점을 포함하는 3차식은 $(s^2 + 2s + 4)(s + a) = s^3 + (a+2)s^2 + (2a+4)s + 4a$ 로 둘 수 있다.
3. 계수 비교를 하면 $K = a + 2$, $1 + K(1+b) = 2a + 4$, $Kb = 4a$이다.
4. $a = K - 2$를 두 번째 식에 대입하면 $1 + K(1+b) = 2K$이고, 정리하면 $Kb = K - 1$이다.
5. 따라서 $K - Kb = 1$, 즉 $K(1-b) = 1$ 이므로 $K = \frac{1}{1-b}$ 이다.
6. 세 번째 식까지 대입하면 $K = \frac{7}{3}$, $b = \frac{4}{7}$로 일관되게 확인된다.

선지별 해설

① O
계수 비교에서 바로 $K(1-b) = 1$이 나오므로 $K = \frac{1}{1-b}$가 된다.

② X
틀린 표현은 분자 b이다. 두 번째 계수식에서 나온 관계는 $Kb = K - 1$이므로 K를 풀면 분자는 1이어야 한다.
올바르게는 $K = \frac{1}{1-b}$이다.

③ X
틀린 표현은 분모의 부호 $1 + b$이다. $Kb = K - 1$를 정리하면 $K - Kb = 1$이지 $K + Kb = 1$이 아니다.
올바르게는 $K = \frac{1}{1-b}$이다.

④ X
분자 b와 분모의 부호 $1 + b$가 모두 틀렸다. 계수 비교 결과는 $K(1-b) = 1$이므로 올바르게는 $K = \frac{1}{1-b}$이다.

오답 포인트

복소극점에서 만든 2차 인자 $s^2 + 2s + 4$는 맞게 세워도, 계수 비교 후 $Kb = K - 1$를 정리하는 과정에서 부호를 바꾸거나 분자를 b로 착각하기 쉽다. 특히 $K - Kb = 1$을 $K + Kb = 1$로 잘못 옮기면 ③, ④ 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

폐루프 극점을 주는 문제는 먼저 $1 + G(s) = 0$로 특성방정식을 만든 뒤, 주어진 극점에서 2차 인자를 구성하고 나머지 1차 인자를 곱해 계수를 비교하는 순서로 판단한다. 마지막에는 계수식 정리에서 부호를 다시 검산하면 된다.

NoteBase

암기 포인트

복소극점 $-\sigma \pm j\omega$는 2차 인자 $s^2 + 2\sigma s + (\sigma^2 + \omega^2)$로 바뀌고, 폐루프 조건은 특성방정식의 계수 비교로 연결된다.

문 15. 다음 2차 제어시스템에서 PD 제어기의 제어입력 $u(t) = -K_P y(t) - K_D \dot{y}(t)$를 이용하여 시스템을 안정시키려 한다. 피드백 제어시스템의 근의 실수부를 항상 -1보다 작게 하는 이득 K_P, K_D의 범위는? (단, $y(t)$는 출력, $x_1(t)$, $x_2(t)$는 상태변수이다)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

① $K_P > 1,\ K_D > 0$

② $K_P > 0,\ K_D > 0$

③ $K_P > K_D > 0$

④ $K_P > 0,\ K_D > -0.5$

정답 3번

출제 포인트

폐루프 특성방정식을 만든 뒤, 모든 근의 실수부가 항상 -1보다 작도록 $s = z - 1$ 치환으로 Hurwitz 조건을 적용하는 문제이다.

조건 정리

주어진 상태방정식은 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u, y = x_1$이다.
PD 제어입력은 $u = -K_P y - K_D \dot{y} = -K_P x_1 - K_D x_2$이다.
구해야 할 것은 폐루프 극점이 항상 $\Re(s) < -1$이 되게 하는 K_P, K_D의 조건이다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식은 $s^2 + (2 + K_D)s + (1 + K_P) = 0$이다.
근의 실수부를 모두 -1보다 작게 하려면 $z = s + 1$, 즉 $s = z - 1$로 옮겨서 얻는 2차식이 좌반평면에 오도록 본다.
2차식 $z^2 + a_1 z + a_0$가 좌반평면에 있으려면 $a_1 > 0, a_0 > 0$이면 충분하다.

NoteBase

계산 과정

1. $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$이므로 $u = -K_P x_1 - K_D x_2$이다.
2. 이를 $\dot{x}_2$ 식에 대입하면 $\dot{x}_2 = -(1 + K_P)x_1 - (2 + K_D)x_2$이다.
3. 따라서 폐루프 행렬은 A=bmatrix0&1; -(1+K_P)&-(2+K_D)bmatrix이고, 특성방정식은 $s^2 + (2 + K_D)s + (1 + K_P) = 0$이다.
4. $s = z - 1$를 대입하면 $z^2 + K_D z + (K_P - K_D) = 0$가 된다.
5. 모든 근이 $\Re(z) < 0$이려면 $K_D > 0$, $K_P - K_D > 0$이어야 하므로 최종 조건은 $K_P > K_D > 0$이다.

선지별 해설

① X. $K_P > 1$, $K_D > 0$만으로는 부족하다. 핵심은 $K_P - K_D > 0$인데 이 관계가 빠져 있다. 예를 들어 $K_P = 1.5$, $K_D = 2$이면 $K_P - K_D < 0$가 되어 조건을 만족하지 못한다. 틀린 표현은 "$K_P > 1$이면 충분하다"는 부분이고, 올바르게는 "$K_P > K_D > 0$이어야 한다"이다.
② X. $K_P > 0$, $K_D > 0$도 부족하다. 둘 다 양수여도 $K_P \le K_D$이면 $K_P - K_D > 0$ 조건이 깨진다. 틀린 표현은 "양수 조건만으로 충분하다"는 부분이고, 올바르게는 "$K_P > K_D > 0$이어야 한다"이다.
③ O. $K_D > 0$와 $K_P - K_D > 0$를 함께 쓰면 바로 $K_P > K_D > 0$가 된다. 이동된 특성방정식 $z^2 + K_D z + (K_P - K_D) = 0$의 Hurwitz 조건과 정확히 일치한다.
④ X. $K_D > -0.5$는 너무 약한 조건이다. 예를 들어 $K_D = -0.2$, $K_P = 1$이면 특성방정식은 $s^2 + 1.8s + 2 = 0$이고 두 근의 실수부는 -0.9이므로 -1보다 작지 않다. 틀린 표현은 "$K_D > -0.5$면 된다"는 부분이고, 올바르게는 "$K_D > 0$이면서 $K_P > K_D$이어야 한다"이다.

오답 포인트

단순 안정조건과 "실수부가 항상 -1보다 작다"는 강화된 조건을 혼동하기 쉽다. 원래 특성방정식에서 안정만 보면 $(2 + K_D) > 0$, $(1 + K_P) > 0$ 같은 조건에 멈추기 쉬운데, 이 문항은 경계선이 -1이므로 반드시 $s = z - 1$ 치환을 한 뒤 판단해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

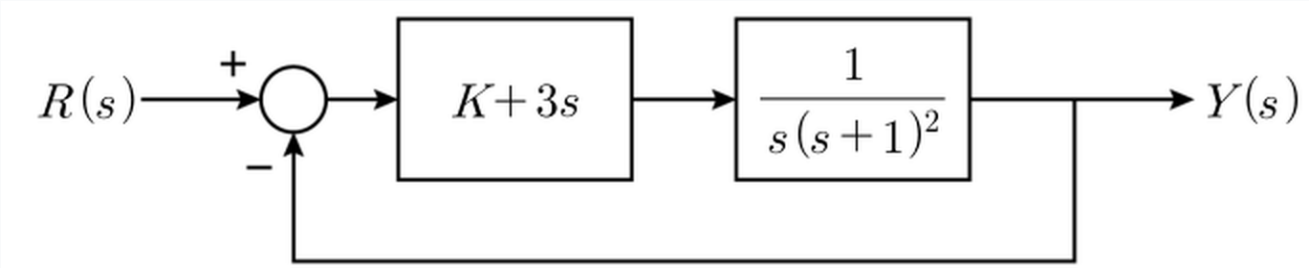
극점이 모두 $-a$보다 왼쪽에 있어야 하면 먼저 폐루프 특성방정식을 만든다. 그다음 $s = z - a$로 평행이동해서 새 다항식이 Hurwitz가 되는지 본다. 2차식이면 이동 후 계수 두 개가 모두 양수인지 확인하면 빠르게 판단할 수 있다.

암기 포인트

$\Re(s) < -a$ 조건은 $s = z - a$로 옮겨 Hurwitz를 적용하는 문제이다. 이 문항은 $K_D > 0$, $K_P - K_D > 0$, 즉 $K_P > K_D > 0$로 정리된다.

NoteBase

문 16. 다음 피드백 제어시스템에서 이득 K값이 0에서 $+\infty$로 변할 때, 시간응답이 지속적인 무감쇠 정현파 형태로 진동하는 주파수 ω[rad/sec]는?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 단위 음의 피드백계의 특성방정식을 세운 뒤 Routh 판별법으로 경계안정 조건을 찾아 지속진동 주파수 ω를 구하는 문제이다.

조건 정리

전달함수는 $G(s) = \frac{K+3s}{s(s+1)^2}$이다.
피드백은 단위 음의 피드백이다.
K를 변화시킬 때 시간응답이 지속적인 무감쇠 정현파가 되려면 폐루프 극이 허수축 위의 $\pm j\omega$가 되어야 한다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식은 $1 + G(s) = 0$이다.
3차식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$에서 경계안정은 Routh 표의 한 행 첫 원소가 0이 되는 조건으로 찾을 수 있다.
이 문제는 K가 변하는 매개변수이므로 특성방정식을 K에 대한 3차 다항식으로 만든 뒤 Routh 표를 세우면 지속진동 조건과 진동 주파수를 바로 구할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

1. 특성방정식을 세우면
$1 + \frac{K+3s}{s(s+1)^2} = 0$
이므로
$s(s+1)^2 + K + 3s = 0$
이다.
2. 전개하면
$s(s^2 + 2s + 1) + K + 3s = 0$
$s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0$
이다.
3. 이 식의 Routh 표는 다음과 같다.
arrayc|cc s^3 & 1 & 4 ; s^2 & 2 & K ; s^1 & (8-K)/(2) & 0 ; s^0 & K & array
지속적인 무감쇠 진동은 경계안정 상태이므로 s^1행 첫 항이 0이어야 한다. 따라서
$\frac{8-K}{2} = 0 \Rightarrow K = 8$
이다.
4. 이때 바로 윗행인 s^2행의 보조방정식은
$2s^2 + 8 = 0$
이고, 정리하면
$s^2 + 4 = 0$
이므로 허수축 근은 $s = \pm j2$이다. 따라서 지속진동 주파수는
$\omega = 2rad/sec$
이다.

선지별 해설

① X: 계산된 지속진동 주파수는 $1rad/sec$가 아니라 $2rad/sec$이다. 1번은 특성방정식을 잘못 전개하거나 보조방정식 $2s^2 + 8 = 0$에서 $s^2 + 4 = 0$를 읽지 못했을 때 나오는 값이다. 틀린 표현은 "$\omega = 1$"이고, 올바르게는 "$\omega = 2rad/sec$"이다.
② O: Routh 표에서 경계안정 조건으로 $K = 8$을 구하면 보조방정식이 $s^2 + 4 = 0$가 되고, 여기서 $\omega = 2rad/sec$가 바로 나온다.
③ X: $3rad/sec$는 블록의 분자에 있는 $3s$를 그대로 진동수로 오해한 값이다. 분자의 계수 3은 폐루프 허수축 근의 주파수와 직접 같지 않다. 틀린 표현은 "$\omega = 3$"이고, 올바르게는 "$\omega = 2rad/sec$"이다.
④ X: $4rad/sec$는 특성방정식의 $4s$ 항 계수를 주파수로 착각한 값이다. 특성방정식의 계수와 지속진동 주파수는 같지 않고, 보조방정식에서 $\omega^2 = 4$를 읽어 $\omega = 2$로 구해야 한다. 틀린 표현은 "$\omega = 4$"이고, 올바르게는 "$\omega = 2rad/sec$"이다.

NoteBase

오답 포인트

지속진동 조건을 단순히 분자 $K+3s$나 특성방정식의 계수만 보고 판단하면 오답이 된다. 이 문제의 함정은 "경계안정일 때 Routh 표의 어느 행이 0이 되는가"와 "보조방정식에서 ω를 읽어야 한다"는 두 단계를 건너뛰게 만드는 데 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

피드백계에서 지속적인 무감쇠 진동을 묻는 문제는 먼저 폐루프 특성방정식을 만든다. 그다음 Routh 표로 경계안정이 되는 매개변수 값을 찾고, 0이 된 행의 바로 윗행에서 보조방정식을 세워 $s=\pm j\omega$를 읽으면 된다.

암기 포인트

지속진동 주파수는 특성방정식의 계수가 아니라 경계안정 시 보조방정식 $s^2+\omega^2=0$에서 읽는 값이다.

NoteBase

문 17. 다음 시스템에서 s평면의 좌반면과 우반면, 그리고 $j\omega$축 상에 존재하는 극점의 수는?

bmatrix x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) bmatrix = bmatrix 0 & 3 & 1 \ 2 & 8 & 1 \ -10 & -5 & -2 bmatrix bmatrix x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) bmatrix + bmatrix 2 \ 1 \ 0 bmatrix u(t)
y(t) = bmatrix 0 & 0 & 1 bmatrix bmatrix x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) bmatrix

① 좌반면: 3, 우반면: 0, $j\omega$축: 0

② 좌반면: 2, 우반면: 1, $j\omega$축: 0

③ 좌반면: 1, 우반면: 1, $j\omega$축: 1

④ 좌반면: 0, 우반면: 2, $j\omega$축: 1

정답 2번

출제 포인트

상태행렬의 특성방정식을 구한 뒤 Routh-Hurwitz 판별법으로 s평면의 좌반면, 우반면, $j\omega$축 위 극점 개수를 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 상태행렬은 A=bmatrix0&3&1; 2&8&1; -10&-5&-2bmatrix이다.
극점은 상태행렬 A의 고유값과 같다.
구해야 할 값은 특성방정식의 근이 좌반면, 우반면, $j\omega$축에 각각 몇 개 있는지이다.

사용할 공식

특성방정식은 $\det(sI - A) = 0$이다.
Routh 배열 첫 열의 부호 변화 수는 우반면 극점 수이다.
Routh 배열에서 첫 열의 0이나 전행 0이 없으면 $j\omega$축 위 극점은 없다.
이 공식을 쓰는 이유는 극점 위치를 근을 직접 구하지 않고도 특성방정식 계수만으로 판별할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. sI-A=bmatrixs&-3&-1; -2&s-8&-1; 10&5&s+2bmatrix이므로 특성방정식은 $\det(sI - A) = 0$이다.
2. 행렬식을 전개하면 $\det(sI - A) = s^3 - 6s^2 - 7s - 52$이다.
3. 이에 대한 Routh 배열의 첫 열은 $1,\ -6,\ -47/3,\ -52$이다.
4. 첫 열의 부호 변화는 $+ \to -$ 한 번뿐이므로 우반면 극점은 1개이다.
5. 첫 열에 0이 없고 전행 0도 없으므로 $j\omega$축 위 극점은 0개이다.
6. 전체 극점 수는 3개이므로 나머지 2개는 좌반면에 있다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 좌반면 3개, 우반면 0개, $j\omega$축 0개라는 판단이 틀리다. Routh 첫 열의 부호 변화가 1번이므로 우반면 극점은 1개이다. 올바르게는 좌반면 2개, 우반면 1개, $j\omega$축 0개이다.
② O: 좌반면 2개, 우반면 1개, $j\omega$축 0개이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X: $j\omega$축 1개라는 표현이 틀리다. Routh 배열에 첫 열 0이나 전행 0이 없으므로 $j\omega$축 극점은 없다. 올바르게는 좌반면 2개, 우반면 1개, $j\omega$축 0개이다.
④ X: 좌반면 0개, 우반면 2개, $j\omega$축 1개라는 세 값이 모두 틀리다. 우반면 극점은 1개이고 $j\omega$축 극점은 0개이므로 올바른 개수는 좌반면 2개, 우반면 1개, $j\omega$축 0개이다.

오답 포인트

Routh 배열 첫 열의 부호 변화 수를 좌반면 개수로 잘못 읽으면 ①처럼 틀리기 쉽다. 또 $j\omega$축 극점은 전행 0 또는 첫 열 0 같은 특수 경우가 있을 때 따로 점검해야 하는데, 이를 무시하면 ③, ④처럼 $j\omega$축 극점을 임의로 넣는 실수가 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

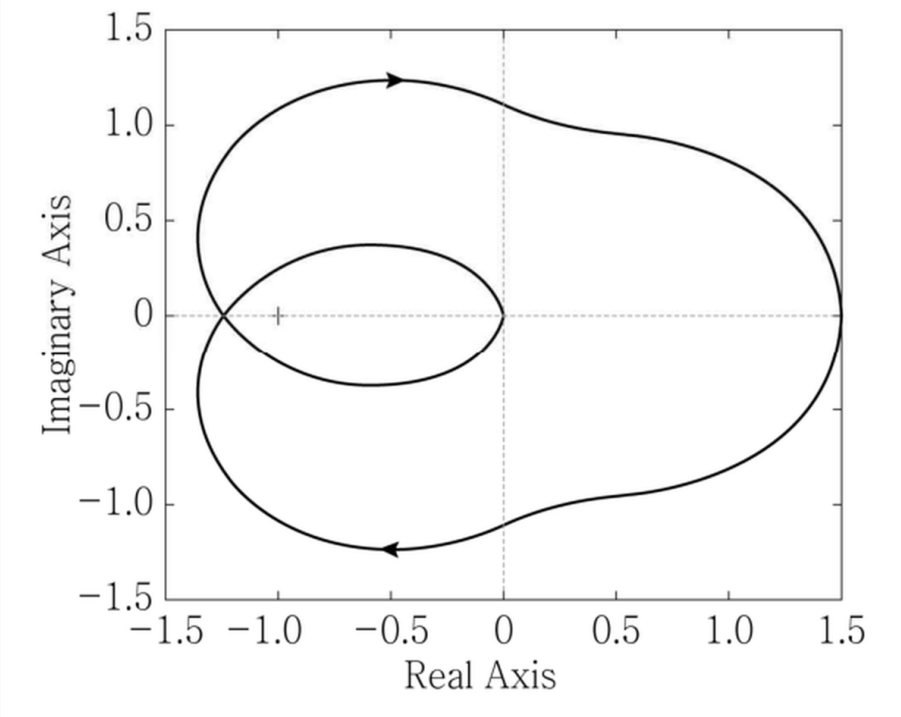
상태방정식 문제가 나오면 먼저 $\det(sI - A) = 0$으로 특성방정식을 만든다. 그다음 Routh 배열 첫 열의 부호 변화 수로 우반면 극점 개수를 정하고, $j\omega$축 특수 경우가 없으면 전체 차수에서 나머지를 좌반면 개수로 계산한다.

암기 포인트

Routh 첫 열 부호 변화 수는 우반면 극점 수이고, $j\omega$축 극점은 0행이나 첫 열 0이 있을 때만 별도로 점검한다.

NoteBase

문 18. 다음은 음의 단위 피드백을 갖는 제어시스템의 나이퀴스트(Nyquist) 선도이다. 적합한 개루프 전달함수 $G(s)$는?



① $\frac{6}{(s+2)^2}$
② $\frac{15}{s^2+s+10}$
③ $\frac{15}{(s+1)(s^2+s+10)}$
④ $\frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 선도의 시작점 $G(0)$, 추가 실수축 교점, 원점 접근 방향을 보고 전달함수를 판별하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

1번 X: $G(s)=\frac{6}{(s+2)^2}$이면 $G(0)=1.5$는 맞지만, $G(j\omega)=\frac{6}{(4-\omega^2)+j4\omega}$이다. 분모의 허수부 4ω가 $\omega>0$에서 양수이므로, 분모를 유리화하면 $G(j\omega)=\frac{6[(4-\omega^2)-j4\omega]}{(4-\omega^2)^2+(4\omega)^2}$가 되어 허수부가 항상 음수이다. 즉 분모의 허수부가 양수이면 $G(j\omega)$ 전체의 허수부는 그 반대인 음수가 된다. 따라서 양의 주파수 가지가 계속 아래쪽 반평면에만 있고, 2차계라 위상이 최대 -180°까지만 지연되어 실수축을 다시 가로지르지 못하므로, 그림처럼 다시 위쪽으로 올라와 안쪽 내부 루프를 만드는 형태가 나오지 않는다. 틀린 표현은 '주어진 나이퀴스트 선도와 일치한다'이다. 고쳐 쓰면 아래쪽으로만 처지는 2차계 선도이다.
2번 X: $G(s)=\frac{15}{s^2+s+10}$도 $G(0)=1.5$는 같지만, $G(j\omega)=\frac{15}{(10-\omega^2)+j\omega}$라서 분모 허수부 ω가 양수이고, 같은 부호 관계로 $\omega>0$에서 $G(j\omega)$의 허수부가 항상 음수이다. 2차계라 위상이 -180°까지만 지연되므로 실수축을 한 번 더 가로질러 좌측 내부 루프를 만들 수 없다. 내부 루프가 생기려면 위상이 -180°를 넘어 더 지연되는 구간이 있어야 하는데 2차계에는 그 구간이 없다. 틀린 표현은 '그림의 좌측 내부 루프를 만들 수 있다'이다. 고쳐 쓰면 위상은 180도까지만 늦어져 단순한 한 개의 궤적이 된다.
3번 O: $G(0)=\frac{15}{1\cdot 10}=1.5$이어서 선도의 시작점이 그림의 오른쪽 실수축 교점과 일치한다. 분모를 전개하면 $(s+1)(s^2+s+10)=s^3+2s^2+11s+10$이고, 여기에 $s=j\omega$를 대입하면 $(j\omega)^3+2(j\omega)^2+11(j\omega)+10=(10-2\omega^2)+j\omega(11-\omega^2)$이 된다. 따라서 $G(j\omega)=\frac{15}{(10-2\omega^2)+j\omega(11-\omega^2)}$이고, 분모의 허수부 $\omega(11-\omega^2)$이 0이 되는 $\omega=\sqrt{11}$에서 궤적이 실수축을 다시 지난다. 이때 분모의 실수부는 $10-2\times 11=-12$이므로 $G=\frac{15}{-12}=-1.25$가 되어, 그림의 좌측 실수축 교점(약 -1.25)과 맞는다. 또한 분모가 3차식이라 $\omega\to\infty$에서 위상이 -270°까지 지연되고, $-270^\circ\equiv+90^\circ$이므로 궤적이 원점에 위쪽(양의 허수축 방향)에서 접근한다. 이처럼 위상이 -180°를 넘어 더 지연되는 구간이 있어야 실수축을 재교차하며 그림 같은 안쪽 내부 루프가 만들어진다.
4번 X: $G(s)=\frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$이면 $G(0)=\frac{30}{6}=5$이다. 그러나 그림의 시작점은 실수축 1.5 부근이므로 처음부터 맞지 않는다. 틀린 표현은 '정적 이득이 그림과 맞는다'이다. 고쳐 쓰면 이 전달함수의 나이퀴스트 선도는 실수축 5에서 시작한다.

오답 포인트

정적 이득 $G(0)$만 보고 1번, 2번, 3번을 함께 남기면 틀린다. 이 문제는 시작점 1.5 다음에 실수축을 다시 어디서 가로지르는지와 원점에 어느 사분면에서 접근하는지를 함께 봐야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 $\omega=0$에서의 값으로 시작점을 확인한다. 다음으로 분모의 허수부를 0으로 두어 추가 실수축 교점이 있는지 확인한다. 마지막으로 분자와 분모의 차수 차이로 원점 접근 방향을 판단하면 선도 형태를 빠르게 걸러낼 수 있다.

암기 포인트

나이퀴스트 판별의 첫 단서는 $G(0)$이고, 좌측 실수축 재교차와 원점 접근 방향이 차수를 가른다.

NoteBase

문 19. 다음 제어시스템에서 추정오차 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$에 대한 특성방정식의 근이 -1, -2가 되기 위한 이득벡터 L의 값은? (단, A=bmatrix0&1\\-1&4bmatrix, B=bmatrix0\\1bmatrix, C=bmatrix1&0bmatrix, L=bmatrixl_1_2bmatrix이다)

◯ 제어시스템: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(t)$
◯ 상태관측기: $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$

① l_1: 1, l_2: 5

② l_1: 1, l_2: 29

③ l_1: 7, l_2: 5

④ l_1: 7, l_2: 29

정답 4번

출제 포인트

상태관측기의 오차동특성 행렬 $A - LC$의 특성방정식을 목표극 $-1,\ -2$에 맞추는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: A=bmatrix0&1; -1&4bmatrix, C=bmatrix1&0bmatrix, L=bmatrixl_1_2bmatrix이다.
구해야 할 값: 관측오차 특성방정식의 근이 $-1,\ -2$가 되게 하는 l_1, l_2이다.
주의할 조건: $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$이므로 오차방정식은 $\dot{e} = (A - LC)e$이다.

사용할 공식

관측오차는 $\dot{e} = (A - LC)e$를 따른다.
목표극이 $-1,\ -2$이면 목표 특성다항식은 $(s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$이다.
이 공식을 쓰는 이유: 관측기 이득벡터 L는 오차동특성 행렬 $A - LC$의 고유값을 원하는 위치로 배치하도록 정해지기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. LC=bmatrixl_1_2bmatrixbmatrix1&0bmatrix=bmatrixl_1&0_2&0bmatrix이다.
2. 따라서 A-LC=bmatrix-l_1&1; -1-l_2&4bmatrix이다.
3. 특성다항식은
(sI-(A-LC))=vmatrixs+l_1&-1; 1+l_2&s-4vmatrix=(s+l_1)(s-4)+(1+l_2)
이므로
$s^2 + (l_1 - 4)s + (-4l_1 + 1 + l_2)$
이다.
4. 이를 목표 특성다항식 $s^2 + 3s + 2$와 계수비교하면
$l_1 - 4 = 3 \Rightarrow l_1 = 7$
$-4l_1 + 1 + l_2 = 2 \Rightarrow -28 + 1 + l_2 = 2 \Rightarrow l_2 = 29$
이다.

선지별 해설

① X
- $l_1 = 1, l_2 = 5$를 대입하면 특성다항식은 $s^2 - 3s + 2$가 되어 근은 1, 2이다. 선지의 값이 틀렸고, 올바르게는 $l_1 = 7, l_2 = 29$이다.

② X
- $l_1 = 1, l_2 = 29$를 대입하면 특성다항식은 $s^2 - 3s + 26$이다. s의 계수가 목표값 3이 아니라 -3이므로 목표극 $-1, -2$를 만들지 못한다. 선지의 값이 틀렸고, 올바르게는 $l_1 = 7, l_2 = 29$이다.

③ X
- $l_1 = 7, l_2 = 5$를 대입하면 특성다항식은 $s^2 + 3s - 22$이다. l_1은 맞지만 상수항이 2가 아니라 -22가 되어 목표 특성다항식과 다르다. 선지의 $l_2 = 5$가 틀렸고, 올바르게는 $l_2 = 29$이다.

④ O
- $l_1 = 7, l_2 = 29$이면 특성다항식이 $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$가 된다. 따라서 근은 정확히 $-1, -2$이고 정답이다.

오답 포인트

관측기 문제에서 $A + LC$로 잘못 쓰거나, $e = x - \hat{x}$의 부호를 놓쳐 s의 계수를 반대로 만드는 경우가 많다. 또한 l_1만 맞추고 상수항 비교를 빠뜨리면 ③처럼 l_2를 틀리기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

관측기 이득을 묻는 문제는 먼저 $e = x - \hat{x}$에서 $\dot{e} = (A - LC)e$를 만든다. 그다음 $A - LC$의 특성다항식을 구해 목표극에서 만든 다항식과 계수비교하면 된다.

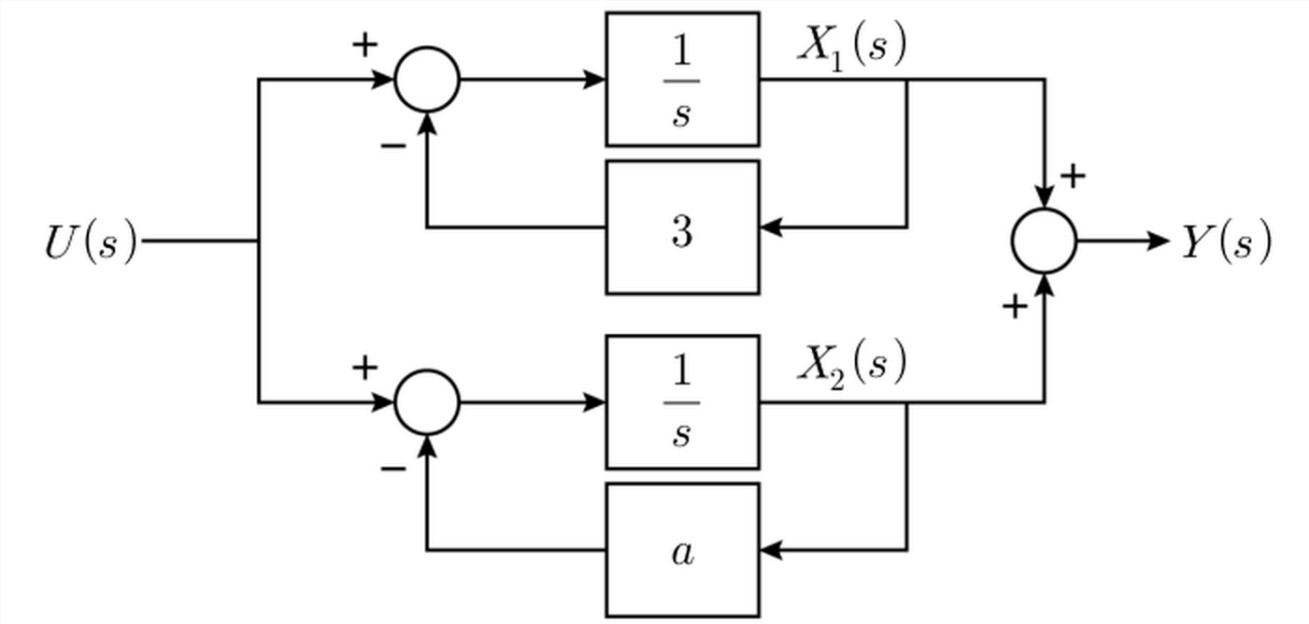
NoteBase

암기 포인트

관측오차 극은 $A - LC$가 결정하고, 목표극 배치는 특성다항식 계수비교로 마무리된다.

NoteBase

문 20. 다음 시스템을 제어가능하게 설계하기 위한 상수 a의 값은? (단, $X_1(s)$, $X_2(s)$는 상태변수의 라플라스 변환이다)



① $a \neq 1$인 모든 상수

② $a \neq 2$인 모든 상수

③ $a \neq 3$인 모든 상수

④ $a \neq 4$인 모든 상수

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 블록선도에서 상태방정식을 읽어 A, B를 구한 뒤 가제어행렬의 행렬식으로 제어가능 조건을 판정하는 문제이다.

조건 정리

상태변수는 $X_1(s), X_2(s)$이다.
위쪽 적분기 입력은 $U(s) - 3X_1(s)$이므로 $\dot{x}_1 = u - 3x_1$이다.
아래쪽 적분기 입력은 $U(s) - aX_2(s)$이므로 $\dot{x}_2 = u - ax_2$이다.
따라서 상태방정식은 $\dot{x} = Ax + Bu$, A=bmatrix-3&0; 0&-abmatrix, B=bmatrix1; 1bmatrix이다.

NoteBase

기출OX 해설집 · 공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2018

사용할 공식

가제어성 판정은 가제어행렬 $\mathcal{C} = [B\ AB]$의 rank로 본다.
2차 시스템에서는 $\det \mathcal{C} \neq 0$이면 제어가능하다.
이 공식을 쓰는 이유는 상태방정식이 바로 주어지는 블록선도이므로 A, B를 곧바로 읽어 가제어조건을 계산할 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. AB=bmatrix-3&0; 0&-abmatrixbmatrix1; 1bmatrix=bmatrix-3; -abmatrix이다.
2. 가제어행렬은 C=[B AB]=bmatrix1&-3; 1&-abmatrix이다.
3. $\det \mathcal{C} = 1 \cdot (-a) - 1 \cdot (-3) = 3 - a$이다.
4. 제어가능 조건은 $3 - a \neq 0$이므로 $a \neq 3$이다.

선지별 해설

① X
- 이 선지는 $a \neq 1$이면 제어가능하다고 보지만 실제 조건은 $a \neq 3$이다.
- 틀린 표현은 "$a \neq 1$"이다. 올바르게는 "$a \neq 3$"이다.

② X
- 이 선지는 $a \neq 2$를 조건으로 제시하지만 가제어행렬식 $3 - a$에는 2가 아니라 3이 걸린다.
- 틀린 표현은 "$a \neq 2$"이다. 올바르게는 "$a \neq 3$"이다.

③ O
- $\det \mathcal{C} = 3 - a$이므로 $a = 3$일 때만 가제어행렬식이 0이 되어 제어불가능하다.
- 따라서 $a \neq 3$인 모든 상수에서 제어가능하므로 옳다.

④ X
- 이 선지는 $a \neq 4$를 조건으로 제시하지만 $a = 4$를 대입하면 $\det \mathcal{C} = -1 \neq 0$이어서 여전히 제어가능하다.
- 틀린 표현은 "$a \neq 4$"이다. 올바르게는 "$a \neq 3$"이다.

오답 포인트

블록선도에서 피드백 이득 3과 a를 보고 곧바로 보기 숫자와 연결하면 오답이 된다. 핵심은 각 루프의 고유값이 아니라 가제어행렬 bmatrix1&-3; 1&-abmatrix의 두 행이 언제 일치 계열이 되는지를 보는 데 있다. $a = 3$일 때만 두 행의 차이가 사라져 제어불가능해진다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

상태공간 블록선도에서 제어가능 여부를 묻으면 먼저 적분기 입력으로 A, B를 읽고, 다음에 $[B\ AB]$를 만든 뒤 행렬식이나 rank를 확인하는 순서로 판단한다. 보기의 숫자와 피드백 계수를 직접 대조하지 않고 반드시 가제어행렬까지 전개해야 한다.

암기 포인트

2차 시스템은 $[B\ AB]$의 행렬식이 0이 되는 값 하나만 찾으면 된다. 이 문제는 $\det[B\ AB] = 3 - a$이므로 $a = 3$만 배제하면 된다.

NoteBase