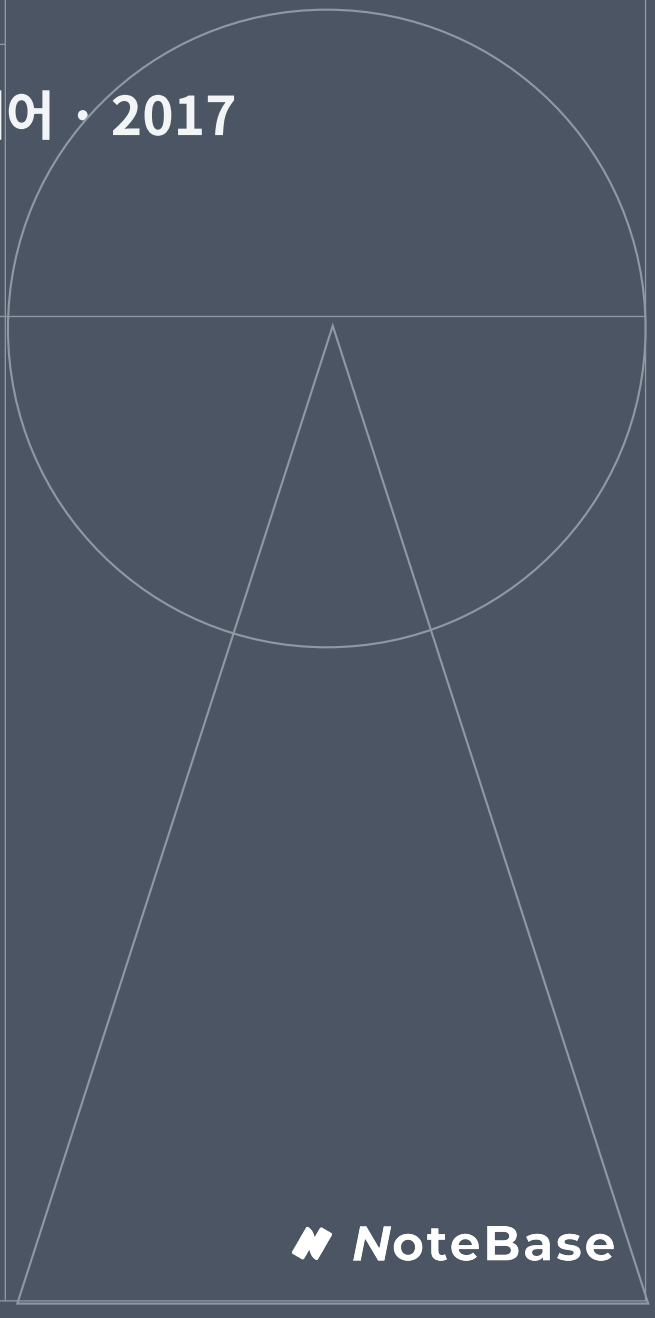
기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2017



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2017

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2017

문 1. 다음 시스템의 전달함수 $\frac{Y(s)}{U(s)}$로 옳은 것은?

$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$
$\dot{x}_2(t) = ax_1(t) + bu(t)$
$y(t) = x_1(t)$

① $\frac{b}{s^2 + a}$
② $\frac{b}{s^2 - a}$
③ $\frac{a}{s^2 + b}$
④ $\frac{-b}{s^2 - a}$

정답 2번

출제 포인트

상태방정식으로 주어진 시스템을 라플라스 변환해 전달함수 $Y(s)/U(s)$를 유도하는 문제이다. 초기조건을 0으로 두고 미분방정식을 s-도메인으로 옮긴 뒤 대수적으로 정리하는 과정이 핵심이다.

조건 정리

주어진 상태방정식은 $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = ax_1(t) + bu(t)$, $y(t) = x_1(t)$이다. 입력은 $u(t)$, 출력은 $y(t) = x_1(t)$이며 초기조건은 0으로 가정한다.

사용할 공식

미분의 라플라스 변환 $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s)$ (초기조건 0)를 각 식에 적용한다.

계산 과정

첫째 식을 변환하면 $sX_1(s) = X_2(s)$이므로 $X_2(s) = sX_1(s)$이다.
둘째 식을 변환하면 $sX_2(s) = aX_1(s) + bU(s)$이다.
여기에 $X_2(s) = sX_1(s)$를 대입하면 $s \cdot sX_1(s) = aX_1(s) + bU(s)$, 즉 $s^2X_1(s) = aX_1(s) + bU(s)$이다.
좌변으로 $X_1(s)$ 항을 모으면 $(s^2 - a)X_1(s) = bU(s)$이다.
$Y(s) = X_1(s)$이므로 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^2 - a}$이다.

NoteBase

선지 판단

① $\frac{b}{s^2+a}$: X → 분모 부호가 틀리다. a 항은 좌변으로 넘길 때 빼는 부호가 되어 $s^2 - a$가 되어야 한다.
② $\frac{b}{s^2-a}$: O → 계산 과정과 정확히 일치한다.
③ $\frac{a}{s^2+b}$: X → 분자에 들어가야 할 것은 b이고 분모에 들어가야 할 것은 a인데 서로 뒤바뀌어 있다.
④ $\frac{-b}{s^2-a}$: X → 분모는 맞지만 분자 부호가 틀리다. $bu(t)$는 부호 변화 없이 그대로 분자로 넘어가야 한다.

오답 포인트

이 문제에서 틀리기 쉬운 지점은 두 가지이다. 첫째, $ax_1(t)$ 항을 좌변으로 이항할 때 부호가 바뀌어 $(s^2 - a)$가 됨을 놓치고 $(s^2 + a)$로 쓰는 경우이다. 둘째, $X_2(s) = sX_1(s)$를 대입하지 않고 a와 b의 위치를 서로 바꿔 쓰는 경우이다.

다시 나오면 이렇게 판단

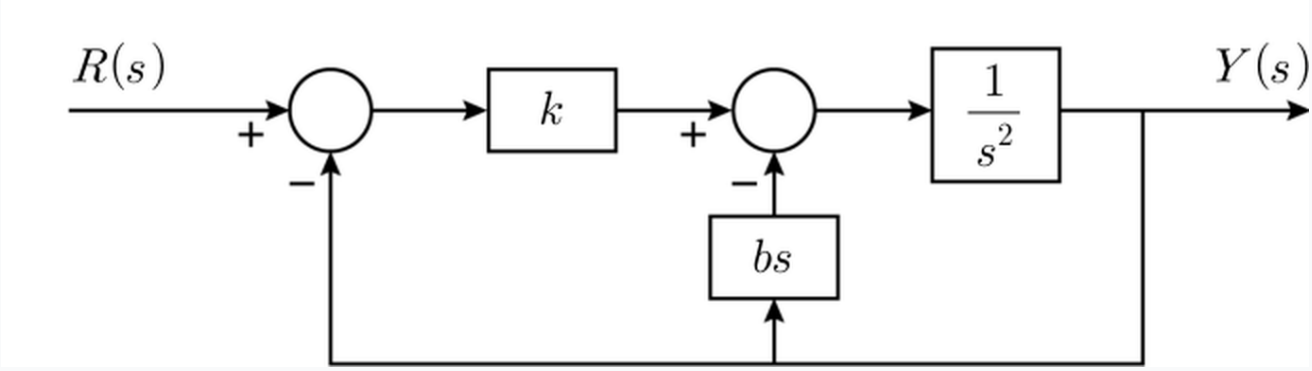
상태방정식이 주어지면 가장 먼저 각 식을 초기조건 0으로 라플라스 변환하여 $sX_1 = X_2$, $sX_2 = aX_1 + bU$ 형태로 정리한다. 그다음 X_2를 소거해 X_1만 남기는 대수적 치환을 순서대로 진행하면 부호 실수를 줄일 수 있다.

암기 포인트

2차 상태방정식 $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = ax_1 + bu,\ y = x_1$ 꼴은 전달함수가 $\frac{b}{s^2-a}$ 형태로 정리된다는 패턴을 기억해 둔다.

NoteBase

문 2. 다음과 같은 블록선도를 갖는 시스템의 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)}$는?



① $\frac{1}{s^2+bs+k}$
② $\frac{k}{s^2+bs+k}$
③ $\frac{bs+k}{s^2+bs+k}$
④ $\frac{bs}{s^2+bs+k}$

정답 2번

출제 포인트

내부에 되먹임(피드백)이 두 군데 있는 블록선도에서 전체 폐루프 전달함수 $Y(s)/R(s)$를 구하는 문제이다. 합산점의 부호를 정확히 읽고, 안쪽 루프(속도 되먹임 bs)와 바깥쪽 루프(위치 되먹임)를 순서대로 정리하는 능력을 묻는다.

조건 정리

첫 번째 합산점: 입력 $R(s)$는 (+), 되먹임 신호 $Y(s)$는 (-)로 들어가 오차 $E(s) = R(s) - Y(s)$를 만든다. 이 오차가 이득 k 블록을 통과해 $kE(s)$가 된다. 두 번째 합산점: $kE(s)$는 (+), bs 블록을 통과한 $bsY(s)$는 (-)로 들어간다. 그 결과가 $1/s^2$ 블록을 통과해 출력 $Y(s)$가 된다.

사용할 공식

두 번째 합산점 이후: $Y(s) = \frac{1}{s^2}[kE(s) - bsY(s)]$. 여기에 $E(s) = R(s) - Y(s)$를 대입하여 $Y(s)$에 대해 정리한 뒤 $Y(s)/R(s)$로 나눈다.

NoteBase

계산 과정

$Y(s) = \frac{1}{s^2}[k\{R(s) - Y(s)\} - bsY(s)]$

$s^2Y(s) = kR(s) - kY(s) - bsY(s)$

$s^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = kR(s)$

$Y(s)(s^2 + bs + k) = kR(s)$

$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + bs + k}$

선지 판단

① $\frac{1}{s^2 + bs + k}$: X. 분모의 되먹임 항 $bs + k$는 맞지만, 분자에서 이득 k가 빠져 있어 틀리다.

② $\frac{k}{s^2 + bs + k}$: O. 계산 과정에서 유도한 결과와 정확히 일치한다.

③ $\frac{bs + k}{s^2 + bs + k}$: X. 분자가 k가 아니라 $bs + k$로 되어 있는데, 이는 되먹임 경로의 신호를 분자에 잘못 넣은 형태이다.

④ $\frac{bs}{s^2 + bs + k}$: X. 분자에 k 대신 bs만 남아 있어 순방향 이득 k가 사라진 형태이다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 되먹임이 두 겹이라는 점이다. 안쪽 루프(bs)만 먼저 닫고 바깥쪽 루프(전체 되먹임 $Y(s)$)를 잊으면 분모에서 k항이 빠지거나 부호가 틀리기 쉽다. 또한 순방향 경로에 있는 이득 k를 분자에 반영하지 않고 되먹임 경로의 식(bs, $bs + k$)을 분자에 넣는 실수가 흔하다. 분자는 항상 '입력에서 출력까지 거친 순방향 블록들의 곱'이라는 원칙을 지켜야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

중첩된 되먹임 블록선도는 안쪽 루프부터 하나의 등가 블록으로 축소한 뒤 바깥쪽 루프를 처리하거나, 이 문제처럼 각 합산점에서 신호 관계식을 직접 세워 대수적으로 정리하는 방법 중 편한 쪽을 쓴다. 마지막에 항상 '분자=순방향 이득의 곱', '분모=1+(모든 루프의 이득)의 조합'이 되는지 형태를 검산한다.

암기 포인트

폐루프 전달함수의 분자는 순방향 경로의 곱, 분모는 각 루프를 반영한 특성방정식이 된다는 원칙을 기억해 둔다. 이 문제에서는 순방향 경로가 $k \cdot \frac{1}{s^2}$이고, 두 되먹임(1과 bs)이 각각 분모에 k와 bs로 반영되어 $s^2 + bs + k$라는 표준 2차 특성방정식 형태로 정리된다는 점을 익혀 둔다.

NoteBase

문 3. 다음 시스템의 $t \geq 0$일 때의 출력 $y(t)$는? (단, 초기 조건은 0이고, $u(t)$는 단위 계단(unit step) 함수이다)

bmatrix x_1(t) \ x_2(t) bmatrix = bmatrix -4 & 4 \ -2 & 0 bmatrix bmatrix x_1(t) \ x_2(t) bmatrix + bmatrix 0 \ 2 bmatrix u(t)
y(t) = bmatrix 1 & 0 bmatrix bmatrix x_1(t) \ x_2(t) bmatrix

① $1 - e^{-2t}(\cos(2t) + \sin(2t))$
② $1 - \frac{1}{2}e^{-2t}(\cos(2t) + \sin(2t))$
③ $1 - e^{-5t}(\cos(2t) + \sin(2t))$
④ $1 - \frac{1}{2}e^{-2t}(\cos(5t) + \sin(5t))$

정답 1번

출제 포인트

상태공간 모델 $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx$에서 전달함수 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$를 구하고, 단위계단 입력에 대한 시간응답 $y(t)$를 라플라스 역변환으로 구하는 문제이다. 2차 시스템의 특성방정식이 복소근을 가질 때 감쇠 지수함수와 삼각함수 형태로 정리하는 능력을 확인한다.

조건 정리

A=bmatrix-4 & 4\ -2 & 0bmatrix, B=bmatrix0\ 2bmatrix, C=bmatrix1 & 0bmatrix이고 초기조건은 0이며 입력은 단위계단 $u(t)$이다. $t \geq 0$에서의 $y(t)$를 구한다.

사용할 공식

전달함수 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, 여기서 $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)}\text{adj}(sI - A)$이다. 단위계단 입력 $U(s) = \frac{1}{s}$에 대해 $Y(s) = G(s)U(s)$를 부분분수 전개한 뒤 라플라스 역변환 공식 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\cos(\omega t)$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\sin(\omega t)$를 사용한다.

NoteBase

계산 과정

sI-A=bmatrixs+4 & -4\ 2 & sbmatrix이므로 $\det(sI-A)=s(s+4)+8=s^2+4s+8$이다.
(sI-A)^-1=(1)/(s^2+4s+8)bmatrixs & 4\ -2 & s+4bmatrix이므로 C(sI-A)^-1=(1)/(s^2+4s+8)bmatrixs & 4bmatrix이다.
여기에 B=bmatrix0\\2bmatrix를 곱하면 $G(s)=\frac{4\times 2}{s^2+4s+8}=\frac{8}{s^2+4s+8}$이다.
단위계단 입력이므로 $Y(s)=\frac{8}{s(s^2+4s+8)}$이다.
부분분수로 $Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4s+8}$로 놓으면 $8=A(s^2+4s+8)+(Bs+C)s$이다.
$s=0$을 대입하면 $A=1$이고, s^2 계수 비교로 $0=A+B$이므로 $B=-1$, s^1 계수 비교로 $0=4A+C$이므로 $C=-4$이다.
따라서 $Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+4}{s^2+4s+8}=\frac{1}{s}-\frac{s+4}{(s+2)^2+4}$이다.
분자를 $(s+4)=(s+2)+2$로 나누면 $Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}-\frac{2}{(s+2)^2+2^2}$가 된다.
역라플라스 변환하면 $y(t)=1-e^{-2t}\cos(2t)-e^{-2t}\sin(2t)=1-e^{-2t}(\cos(2t)+\sin(2t))$이다.

선지 판단

① $1-e^{-2t}(\cos(2t)+\sin(2t))$: O. 계산 결과와 정확히 일치한다.
② $1-\frac{1}{2}e^{-2t}(\cos(2t)+\sin(2t))$: X. 감쇠항 앞의 계수는 $\frac{1}{2}$이 아니라 1이다. 이는 $G(s)$의 분자 상수를 8이 아닌 4로 잘못 계산했을 때 나오는 값이다.
③ $1-e^{-5t}(\cos(2t)+\sin(2t))$: X. 감쇠 지수는 e^{-2t}이어야 하며 e^{-5t}가 아니다. 특성방정식 $s^2+4s+8=(s+2)^2+4$에서 실수부는 -2이다.
④ $1-\frac{1}{2}e^{-2t}(\cos(5t)+\sin(5t))$: X. 진동 각주파수는 2이어야 하며 5가 아니다. $(s+2)^2+2^2$ 형태에서 허수부 크기가 2이므로 $\cos(2t)$, $\sin(2t)$가 되어야 한다.

오답 포인트

이 문제의 핵심 실수는 두 가지이다. 하나는 $C(sI-A)^{-1}B$를 계산할 때 분자 상수를 잘못 구하는 것(②처럼 계수가 절반이 되는 오류)이고, 다른 하나는 특성방정식 s^2+4s+8을 완전제곱 형태 $(s+2)^2+2^2$로 바꾸는 과정에서 감쇠율과 각주파수를 혼동하는 것(③, ④)이다. $(s+2)^2+4$에서 실수부 2는 감쇠 지수 e^{-2t}의 지수로, 허수부 2는 $\cos(2t)$, $\sin(2t)$의 각주파수로 각각 정확히 대응시켜야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태공간 모델의 시간응답 문제는 먼저 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$로 전달함수를 구하고, 입력의 라플라스 변환을 곱한 뒤 부분분수 전개로 $1/s$항과 2차항으로 분리한다. 2차항의 분모가 복소근을 가지면 $(s+a)^2+\omega^2$ 꼴로 완전제곱화하고, 분자도 $(s+a)$와 상수항으로 분리해 $e^{-at}\cos(\omega t)$와 $e^{-at}\sin(\omega t)$로 각각 대응시킨다.

암기 포인트

$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{C\,\mathrm{adj}(sI-A)B}{\det(sI-A)}$이고, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\right]=e^{-at}\cos(\omega t)$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\right]=e^{-at}\sin(\omega t)$이다.

NoteBase

문 4. 다음 미분 방정식으로 표현된 시스템에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

$\dot{x}(t) + 20x(t) = 20r(t)$

① 시스템의 전달함수 $\frac{X(s)}{R(s)}$는 $\frac{20}{s+20}$이다.

② 크기가 유한한(bounded) 입력신호에 대하여 이 시스템의 출력신호는 유한하다.

③ 이 시스템은 고주파통과필터(high-pass filter)의 형태를 취한다.

④ 단위 계단(unit step) 입력에 대한 정상상태 출력값은 1이다.

정답 3번

출제 포인트

1차 미분방정식으로 주어진 시스템을 라플라스 변환해 전달함수를 구하고, 그 전달함수의 형태(저역통과인지 고역통과인지)와 안정성(BIBO 안정), 정상상태 응답까지 한 번에 판단할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

주어진 미분방정식은 $\dot{x}(t) + 20x(t) = 20r(t)$이다. 여기서 $r(t)$는 입력, $x(t)$는 출력이다. 초기조건은 0으로 둔다(전달함수를 구하는 표준 가정).

사용할 공식

라플라스 변환의 미분 성질 $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s)$(영초기조건)를 이용한다. 또한 극점이 음의 실수부를 가지면 시스템은 BIBO 안정이며, 단위계단 입력에 대한 정상상태값은 최종값 정리 $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$로 구한다.

계산 과정

미분방정식 양변을 라플라스 변환하면 $sX(s) + 20X(s) = 20R(s)$이므로 $(s+20)X(s) = 20R(s)$가 되어 전달함수는 $\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{20}{s+20}$이다.

이 전달함수에서 극점은 $s = -20$으로 음의 실수부를 가지므로 시스템은 안정하고, 안정한 시스템은 크기가 유한한 입력에 대해 항상 유한한 출력을 낸다(BIBO 안정성).

주파수 응답 관점에서 $s = j\omega$를 대입하면 $\frac{20}{j\omega+20}$이 되는데, $\omega = 0$(직류)일 때 크기는 $\frac{20}{20} = 1$로 최대이고 $\omega \to \infty$로 갈수록 크기는 0에 가까워진다. 즉 낮은 주파수는 잘 통과시키고 높은 주파수는 감쇠시키는 저주파통과필터(low-pass filter) 형태이지, 고주파통과필터(high-pass filter)가 아니다.

단위계단 입력 $R(s) = \frac{1}{s}$에 대해 $X(s) = \frac{20}{s+20} \cdot \frac{1}{s}$이므로 최종값 정리를 적용하면 $\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{20}{s+20} = \frac{20}{20} = 1$이 되어 정상상태 출력값은 1이다.

NoteBase

선지 판단

① 전달함수 $\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{20}{s+20}$이다 → O, 계산 과정에서 도출한 결과와 정확히 일치한다.
② 크기가 유한한 입력신호에 대하여 출력신호가 유한하다 → O, 극점이 $s = -20$으로 안정하므로 BIBO 안정성이 성립해 유한 입력에 유한 출력이 보장된다.
③ 이 시스템은 고주파통과필터의 형태를 취한다 → X, 틀린 표현이다. 직류($\omega = 0$)에서 이득이 최대(1)이고 고주파($\omega \to \infty$)로 갈수록 이득이 0에 가까워지므로 실제로는 저주파통과필터(low-pass filter)의 형태를 취한다.
④ 단위계단 입력에 대한 정상상태 출력값은 1이다 → O, 최종값 정리로 계산한 값과 일치한다.

오답 포인트

전달함수의 분모에 s가 있고 분자가 상수라는 형태만 보고 고주파를 통과시킨다고 착각하기 쉽다. 하지만 이득의 크기 변화는 반드시 $s = j\omega$를 대입해 ω가 0에서 무한대로 변할 때 크기가 어떻게 변하는지로 판단해야 한다. 이 시스템은 $\omega = 0$일 때 이득이 가장 크고 ω가 커질수록 이득이 작아지므로 저주파통과필터이다.

다시 나오면 이렇게 판단

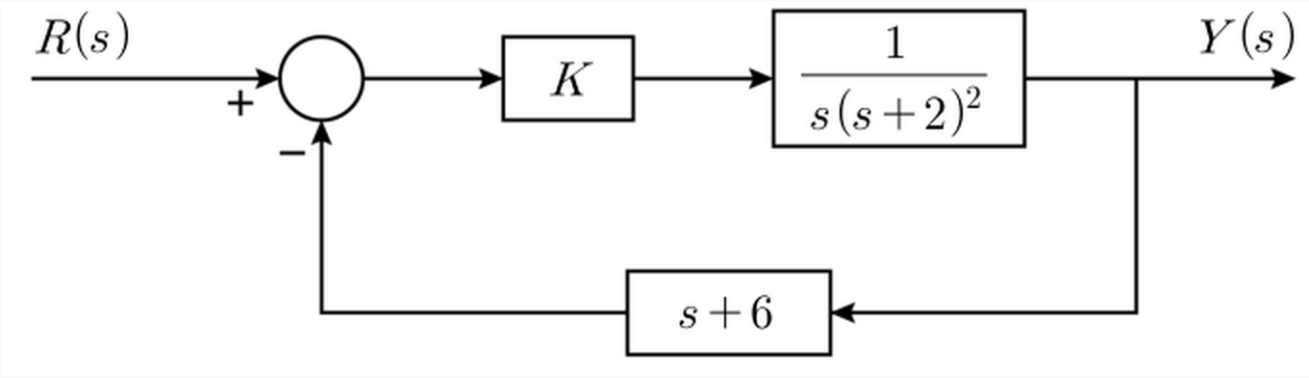
1차 시스템 전달함수 $\frac{K}{s+a}$ 형태가 나오면 $\omega = 0$에서의 이득 $\frac{K}{a}$과 $\omega \to \infty$에서의 이득 0을 비교한다. 저주파에서 이득이 크고 고주파에서 이득이 작아지면 저주파통과필터, 반대로 저주파에서 이득이 작고 고주파에서 커지면 고주파통과필터이다. 또한 극점의 실수부 부호로 안정성을, 최종값 정리로 정상상태값을 빠르게 확인한다.

암기 포인트

$\frac{K}{s+a}$ 형태(분모 1차, 분자 상수)는 저주파통과필터, 극이 음의 실수부이면 BIBO 안정, 단위계단 응답의 정상상태값은 $\lim_{s \to 0} sX(s)$로 구한다는 세 가지를 함께 묶어 기억한다.

NoteBase

문 5. 다음 시스템에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① 시스템이 안정하기 위한 K의 범위는 $0 < K < 8$이다.

② 특성방정식은 $s^3 + 4s^2 + (K+4)s + 6K = 0$이다.

③ 단위 계단(unit step) 입력에 대한 정상상태오차는 $\frac{2}{3}$이다.

④ 단위 경사(unit ramp) 입력에 대한 정상상태오차는 ∞이다.

정답 3번

출제 포인트

비단위 피드백(H(s)=s+6)을 갖는 제어계에서 특성방정식과 Routh-Hurwitz 안정 범위, 그리고 실제 출력 오차 $e(t) = r(t) - y(t)$ 기준의 정상상태오차를 정확히 구분해 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다. 피드백이 1이 아니므로 정상상태오차를 단순히 개루프 전달함수의 형(type)만으로 판단하면 틀린다.

조건 정리

블록선도에서 전향경로 이득은 $KG(s) = \frac{K}{s(s+2)^2}$이고 피드백 전달함수는 $H(s) = s + 6$이다. 폐루프 전달함수는 $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$이며, 실제 출력 오차는 $E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)[1 - T(s)]$로 정의된다.

사용할 공식

특성방정식: $1 + KG(s)H(s) = 0$, 즉 $s(s+2)^2 + K(s+6) = 0$. Routh-Hurwitz 배열의 제1열이 모두 양수이면 안정이다. 정상상태오차는 최종값 정리 $e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$로 구한다.

NoteBase

계산 과정

① 특성방정식:
$s(s+2)^2 + K(s+6) = s(s^2+4s+4) + Ks + 6K = s^3 + 4s^2 + 4s + Ks + 6K = s^3 + 4s^2 + (K+4)s + 6K = 0$
이 되어 ②의 식과 일치한다.
② 안정 조건(Routh 배열): s^3행 $[1, K+4]$, s^2행 $[4, 6K]$, s^1행 $\left[\frac{4(K+4)-6K}{4}, 0\right] = \left[4 - \frac{K}{2}, 0\right]$, s^0행 $[6K]$.
제1열이 모두 양수이려면 $6K > 0$에서 $K > 0$, $4 - \frac{K}{2} > 0$에서 $K < 8$이므로 $0 < K < 8$이다.
③ 폐루프 전달함수: $T(s) = \frac{K}{s(s+2)^2 + K(s+6)} = \frac{K}{s^3 + 4s^2 + (K+4)s + 6K}$. 단위 계단 입력 $R(s) = \frac{1}{s}$에 대한 실제 출력 오차는 $E(s) = R(s)[1 - T(s)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^3 + 4s^2 + (K+4)s + 5K}{s^3 + 4s^2 + (K+4)s + 6K}$이므로, $e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{5K}{6K} = \frac{5}{6}$이다. 이 값은 K값과 무관하게 항상 $\frac{5}{6}$이며 $\frac{2}{3}$이 아니다.
④ 단위 경사 입력 $R(s) = \frac{1}{s^2}$에 대해서는 $e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{s^3 + 4s^2 + (K+4)s + 5K}{s^3 + 4s^2 + (K+4)s + 6K}$로, 분자가 $s \to 0$에서 $5K$(0이 아닌 상수)로 수렴하고 앞에 $\frac{1}{s}$가 곱해지므로 $e_{ss} \to \infty$이다.

선지 판단

① O: Routh-Hurwitz 계산 결과 안정 범위는 정확히 $0 < K < 8$이다.
② O: 특성방정식을 전개하면 $s^3 + 4s^2 + (K+4)s + 6K = 0$이 되어 제시된 식과 일치한다.
③ X: 단위 계단 입력에 대한 실제 정상상태오차는 $\frac{5}{6}$이며 제시된 $\frac{2}{3}$와 다르다. 틀린 표현 $\frac{2}{3}$ → 올바른 표현 $\frac{5}{6}$.
④ O: 단위 경사 입력에 대한 정상상태오차는 무한대로 발산하며 제시된 설명과 일치한다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 피드백이 단위(1)가 아니라 $H(s) = s + 6$이라는 점이다. 개루프 전달함수 $KG(s)H(s)$만 보고 극점이 원점에 1개 있으니(type 1) 계단 입력 오차가 0이라고 단정하면 안 된다. 실제로 학생이 원하는 오차는 피드백 신호와의 차가 아니라 실제 출력 $y(t)$와 목표값 $r(t)$의 차이므로, 반드시
$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)[1 - T(s)]$ 식을 세워 최종값 정리를 적용해야 한다. 이 계산을 생략하고 표준 공식(단위 피드백 기준 정상상태오차 공식)을 그대로 적용하면 $\frac{2}{3}$ 같은 잘못된 값에 속기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

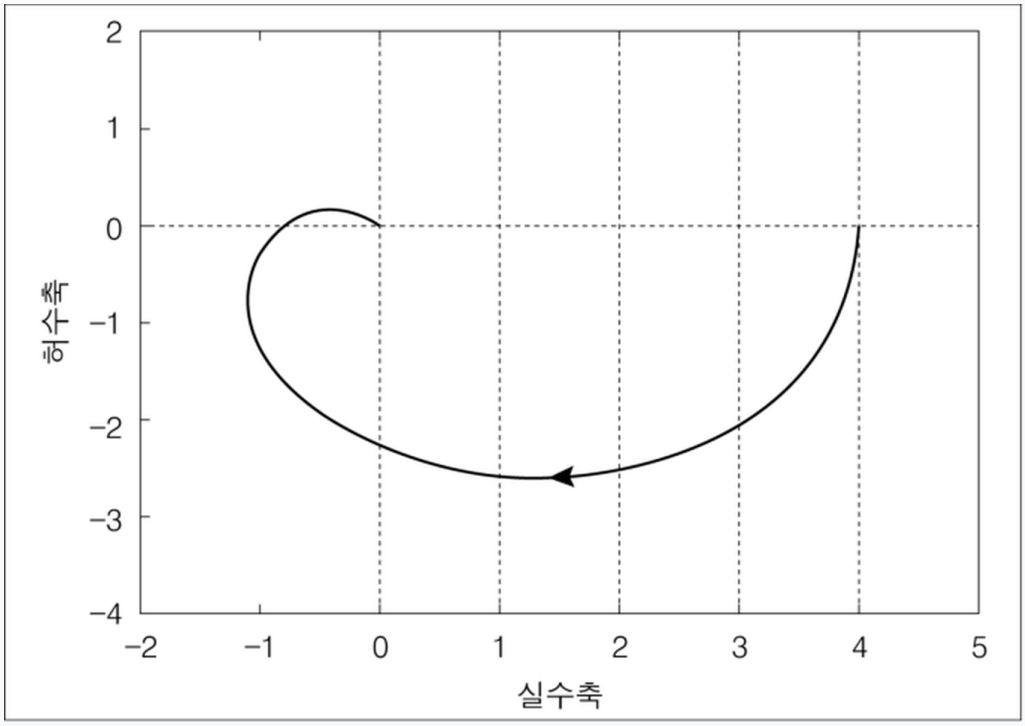
피드백 블록에 상수 1이 아닌 별도의 전달함수(예: $s + 6$)가 있으면, 정상상태오차는 항상
$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)[1 - T(s)]$를 먼저 세운 뒤 최종값 정리 $\lim_{s \to 0} sE(s)$로 직접 계산한다. 특성방정식은 $1 + KG(s)H(s) = 0$의 분자를 정리해서 구하고, 안정 범위는 Routh-Hurwitz 배열 제1열 부호로 판단한다.

암기 포인트

비단위 피드백계의 정상상태오차는 개루프 type만으로 판단하지 않고 $E(s) = R(s)[1 - T(s)]$로 직접 유도한다. Routh 배열 제1열 부호 전부 양수 = 안정, 부호 변화 횟수 = 우반평면 불안정 근의 개수라는 것도 함께 기억해 둔다.

NoteBase

문 6. 그림과 같은 나이퀴스트(Nyquist) 선도를 갖는 시스템의 단위계단(unit step) 입력에 대한 정상상태 출력값은?



① 0

② 1

③ 4

④ ∞

정답 3번

출제 포인트

나이퀴스트 선도는 시스템의 주파수응답 $G(j\omega)$를 주파수 ω를 매개변수로 복소평면에 그린 궤적이다. 이 문제는 그 궤적에서 $\omega = 0$에 해당하는 점(직류이득)을 읽어내고, 최종값 정리를 이용해 단위계단 입력에 대한 정상상태 출력값을 구하는 문제이다.

조건 정리

시스템의 전달함수를 $G(s)$라 하면 단위계단 입력 $R(s) = \frac{1}{s}$에 대한 출력은 $Y(s) = G(s)R(s) = \frac{G(s)}{s}$이다.
나이퀴스트 선도에서 곡선은 실수축 위 (4, 0) 지점에서 출발하여, 화살표 방향(주파수 증가 방향)을 따라 아래로 내려갔다가 원점 쪽으로 수렴해 간다. 즉 ω가 0에서 커질수록 궤적이 (4,0)에서 출발해 점차 원점 방향으로 향하므로, $\omega = 0$일 때의 값이 바로 (4,0), 즉 $G(j0) = 4$이다.

NoteBase

사용할 공식

최종값 정리(final value theorem)에 의해 정상상태 출력값은 다음과 같다.
$y(\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{G(s)}{s}=\lim_{s\to 0} G(s)=G(j0)$ 즉 정상상태 출력값은 나이퀴스트 선도에서 $\omega=0$일 때의 점(직류이득)과 같다.

계산 과정

나이퀴스트 선도에서 $\omega=0$에 대응하는 점은 실수축 위의 (4, 0)이므로 $G(j0)=4$이다. 최종값 정리에 의해 $y(\infty)=G(j0)=4$ 따라서 단위계단 입력에 대한 정상상태 출력값은 4이다.

선지 판단

① 0: 정상상태 출력값이 0이 되려면 $\omega=0$에서 $G(j0)=0$이어야 하는데, 그림에서 $\omega=0$에 해당하는 점은 원점이 아니라 (4,0)이므로 틀린 표현이다.
② 1: 그림 어디에도 $\omega=0$일 때 실수축 값이 1이 되는 지점이 없으므로 틀린 표현이다.
③ 4: $\omega=0$에서의 나이퀴스트 선도 값이 (4, 0)이고 최종값 정리에 의해 정상상태 출력값이 이 값과 같으므로 옳은 표현이다.
④ ∞: 곡선이 유한한 범위 내에 그려져 있고 (4,0)이라는 유한한 값에서 시작하므로 정상상태 출력값이 무한대가 아니어서 틀린 표현이다.

오답 포인트

이 유형에서 가장 흔한 실수는 나이퀴스트 선도에서 원점 부근의 값(고주파, $\omega\to\infty$)을 정상상태 값으로 착각하는 것이다. 정상상태 출력은 시간이 충분히 지난 뒤의 값으로, 주파수영역에서는 $\omega\to\infty$가 아니라 $\omega=0$ (직류성분)에 대응한다는 점을 혼동하지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

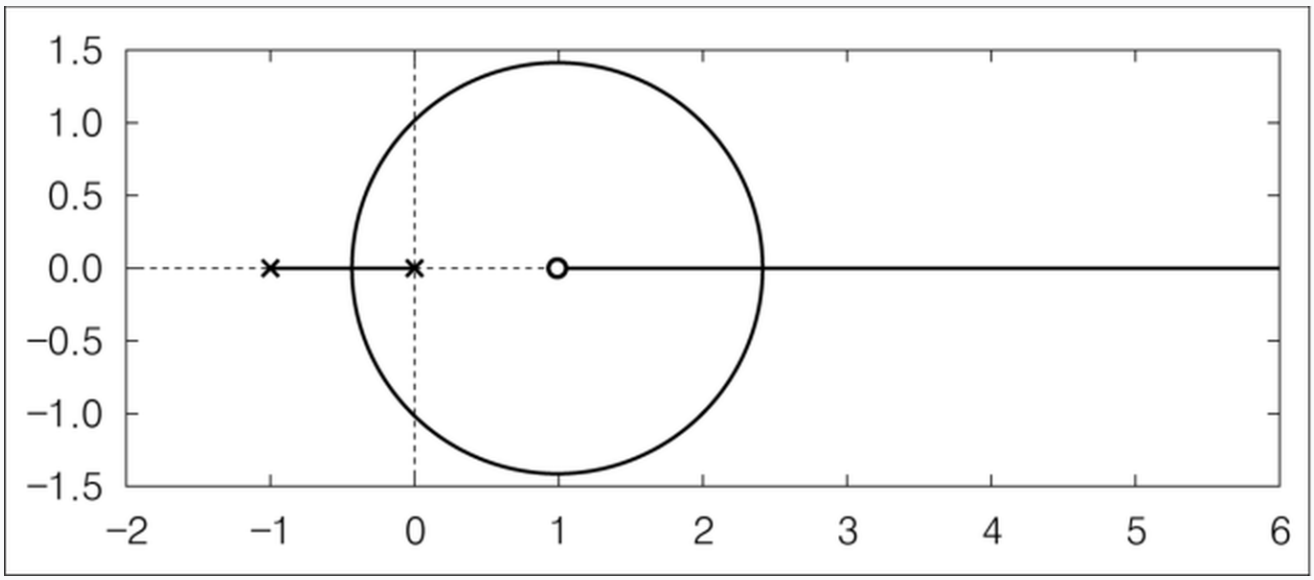
나이퀴스트 선도가 주어지고 계단입력에 대한 정상상태 출력값을 묻는 문제는, 항상 곡선에서 $\omega=0$에 해당하는 점(보통 실수축 위, 곡선이 출발하거나 가장 바깥쪽에 있는 점)을 먼저 찾은 뒤 최종값 정리 $y(\infty)=G(j0)$를 적용하면 바로 풀린다.

암기 포인트

정상상태(시간이 충분히 지난 뒤)는 주파수영역에서 $\omega=0$(직류)에 대응하고, 단위계단 입력에 대한 정상상태 출력값은 나이퀴스트 선도에서 $\omega=0$일 때의 실수축 값, 즉 $G(j0)$와 같다.

NoteBase

문 7. 개루프 전달함수 $KG(s)$를 갖는 음의 단위 피드백 시스템(negative unity-feedback system)의 근궤적(root locus)이 그림과 같다. $G(s)$로 가장 적합한 것은? (단, K는 양의 제어 이득이고, 그림에서 ○는 영점을, ×는 극점을 의미한다)



① $\frac{s(s+1)}{s-1}$
② $\frac{s-1}{s(s+1)}$
③ $\frac{s(s+1)}{-s+1}$
④ $\frac{-s+1}{s(s+1)}$

정답 4번

출제 포인트

근궤적 그래프에 표시된 극점(×)과 영점(○)의 실수축 위치, 실수축 구간의 실선/점선 여부, 원형 궤적의 이탈점(breakaway point) 위치를 근거로 개루프 전달함수 $G(s)$를 역으로 판정하는 문제이다. 극점·영점의 위치만 맞히는 것으로는 부족하고, 분자의 부호(+ 또는 -)까지 실수축 규칙으로 확정해야 한다.

조건 정리

그래프에서 극점은 $s=-1$과 $s=0$ 두 개이고, 영점은 $s=1$ 한 개이다. 음의 단위 피드백이고 $K>0$이다. 실수축에서 $-1<s<0$ 구간과 영점보다 오른쪽인 $s\approx 2.414$ 이후 구간은 굵은 실선(궤적)이며, $s=-1$보다 왼쪽 구간은 점선(궤적 아님)이다. 원형 궤적은 중심 $(1,0)$, 반지름 약 $1.414(=\sqrt{2})$로 그려져 있다.

NoteBase

사용할 공식

특성방정식 $1 + KG(s) = 0$의 실수축 존재 규칙: $G(s)$의 분자·분모를 $(s - p)$, $(s - z)$ 형태(계수 +1)로 놓았을 때, $K > 0$이면 시험점의 오른쪽에 있는 개루프 극점과 영점 개수의 합이 홀수인 구간이 궤적이다. 분자를 $-(s - z)$ 형태로 써서 부호가 반대이면 유효 이득의 부호가 바뀌어 이 홀/짝 판정이 정반대로 뒤집힌다. 이탈점은 $K(s) = -D(s)/N(s)$로 두고 $dK/ds = 0$을 만족하는 s에서 구한다.

계산 과정

네 선지 모두 극점·영점이 $s = 0,\ -1, 1$ 조합으로만 이루어져 있으므로, 우선 실수축 구간으로 분자 부호를 가린다. $s = -0.5$(극점 -1과 0 사이) 오른쪽에는 극점 0과 영점 1이 있어 개수 합이 2(짝수)이다. 분자가 $(s - 1)$인 표준부호라면 이 구간은 궤적이 아니어야 하는데, 그래프에서는 실선(궤적)으로 나타나 있으므로 분자 부호가 $(-s + 1)$로 반전되어 있어야 한다. 같은 방식으로 $s = 3$(영점보다 오른쪽) 오른쪽에는 극점·영점이 하나도 없어 개수 0(짝수)인데 이 구간도 실선이므로 역시 부호 반전과 일치한다. 반대로 $s = -2$(극점 -1보다 왼쪽) 오른쪽에는 극점 2개와 영점 1개, 합 3(홀수)인데 그래프에서는 이 구간이 점선(궤적 아님)이며, 부호가 반전된 형태에서는 홀수 구간이 궤적이 아니므로 정확히 일치한다. 이탈점도 확인하면, $G(s) = (s - 1)/(s(s + 1))$ 기준으로 특성방정식은 $s(s + 1) + K(s - 1) = 0$, 즉 $K = -s(s + 1)/(s - 1)$이고 $dK/ds = 0$을 정리하면 $s^2 - 2s - 1 = 0$이므로 $s = 1 \pm \sqrt{2}$이다. 이는 그래프의 원형 궤적이 실수축과 만나는 두 점(약 -0.414, 2.414)과 정확히 일치하고, 원의 중심이 영점 위치 $s = 1$, 반지름이 $\sqrt{2}$인 것과도 부합한다. 따라서 극점은 $s(s + 1)$, 분자는 부호가 반전된 $(-s + 1)$인 $G(s) = (-s + 1)/(s(s + 1))$이 그래프와 일치한다.

선지 판단

① $s(s + 1)/(s - 1)$: X. 이 식은 영점이 $s = 0,\ -1$, 극점이 $s = 1$인 형태로, 그래프의 극점(0, -1)·영점(1) 위치와 서로 뒤바뀌어 있어 틀리다.

② $(s - 1)/(s(s + 1))$: X. 극점(0, -1)과 영점(1)의 위치는 그래프와 같지만 분자가 $(s - 1)$ 표준부호여서, 실수축 규칙을 적용하면 -1과 0 사이 구간 및 영점보다 오른쪽 구간이 궤적이 아니어야 하는데, 그래프에서는 이 구간들이 실선(궤적)이므로 부호가 맞지 않는다.

③ $s(s + 1)/(-s + 1)$: X. 극점이 $s = 1$(분모=0), 영점이 $s = 0,\ -1$로 극점·영점 위치가 그래프와 반대이며 부호도 실수축 궤적과 맞지 않는다.

④ $(-s + 1)/(s(s + 1))$: O. 극점 $s = 0,\ -1$, 영점 $s = 1$로 위치가 그래프와 일치하고, 분자 부호가 반전되어 있어 실수축 구간(짝수 개수 구간이 궤적)과 이탈점 위치(원 중심 1, 반지름 $\sqrt{2}$)까지 그래프와 정확히 들어맞는다.

NoteBase

오답 포인트

극점·영점의 위치만 확인하고 표준부호인 $(s-1)/(s(s+1))$(②)을 정답으로 고르는 실수가 가장 흔하다. 그러나 근궤적에서 어느 실수축 구간이 실선(궤적)인지까지 확인해야 분자의 부호를 확정할 수 있으며, 이 문제는 실선 구간이 표준부호와 반대로 나타나 있어 분자가 부호 반전된 $(-s+1)$ 형태인 ④가 정답이다. ①·③처럼 극점과 영점의 위치 자체를 분모·분자에서 서로 바꿔 놓은 선지도 혼동하기 쉬우므로, ×(극점)와 ○(영점) 표시를 분모·분자 인수에 정확히 대응시켜야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적 그림에서 $G(s)$를 역추정할 때는 먼저 ×(극점)와 ○(영점)의 실수축 위치를 분모·분자 인수에 대응시키고, 다음으로 실수축의 각 구간이 실선인지 점선인지를 확인해 분자 부호를 정한다. 표준(+)형에서는 시험점 오른쪽의 극점·영점 개수 합이 홀수인 구간이 궤적이지만, 그래프의 실선 구간이 이와 반대(짝수 구간이 궤적)로 나타나면 분자 부호가 반전된 $-(s-z)$ 형태가 정답임을 판단한다.

암기 포인트

실수축 근궤적 규칙($K>0$): 시험점 오른쪽의 극점+영점 개수 합이 홀수이면 그 구간은 궤적이다. 분자 부호가 반전되면 이 홀/짝 조건도 반전된다. 이탈점은 $dK/ds=0$에서 구하며, 극점 2개·영점 1개 배치에서 원형 궤적이 나타나면 중심은 영점 위치, 반지름은 두 극점까지 거리의 곱의 제곱근과 관련된다(본 문제는 $\sqrt{1\times 2}=\sqrt{2}$).

NoteBase

문 8. 특성 방정식(characteristic equation)이 다음과 같이 주어진 3차 시스템의 근궤적(root locus)이 허수축과 만날 때의 허수축의 좌표와 그때의 K의 값은?

$s(s+1)(s+2)+K(s+4)=0$

① 허수축의 좌표: $\pm j2$, K: 3

② 허수축의 좌표: $\pm j2\sqrt{2}$, K: 3

③ 허수축의 좌표: $\pm j2$, K: 6

④ 허수축의 좌표: $\pm j2\sqrt{2}$, K: 6

정답 4번

출제 포인트

근궤적이 허수축과 교차하는 지점을 구하는 문제이다. 특성방정식에 $s=j\omega$를 대입해 실수부와 허수부를 각각 0으로 놓고 연립하면, 허수축과의 교차점(임계 안정 경계)에서의 주파수 ω와 그때의 이득 K를 동시에 구할 수 있다.

조건 정리

주어진 특성방정식은 $s(s+1)(s+2)+K(s+4)=0$이다. 이를 전개하면 $s^3+3s^2+2s+K(s+4)=0$, 즉 $s^3+3s^2+(2+K)s+4K=0$이 된다. 근궤적이 허수축과 만난다는 것은 이 3차방정식이 순허근 $s=j\omega$를 갖는다는 뜻이므로, 이를 대입하여 실수부·허수부 조건을 각각 정리한다.

사용할 공식

$s=j\omega$를 대입하면 $s^3=-j\omega^3$, $s^2=-\omega^2$이므로 특성방정식은 다음과 같이 나뉜다. 실수부: $-3\omega^2+4K=0$. 허수부: $-\omega^3+(2+K)\omega=0$.

계산 과정

허수부 조건 $-\omega^3+(2+K)\omega=0$에서 $\omega\neq 0$이므로 양변을 ω로 나누면 $\omega^2=2+K$를 얻는다. 실수부 조건 $-3\omega^2+4K=0$에서 $K=\frac{3\omega^2}{4}$이다. 이를 $\omega^2=2+K$에 대입하면 $\omega^2=2+\frac{3\omega^2}{4}$이 되고, 정리하면 $\frac{\omega^2}{4}=2$, 즉 $\omega^2=8$이다. 따라서 $\omega=\pm 2\sqrt{2}$이고 허수축의 좌표는 ± j22이다. 이 값을 $K=\frac{3\omega^2}{4}$에 대입하면 $K=\frac{3\times 8}{4}=6$이 된다.

NoteBase

선지 판단

① 허수축 좌표 ±j2, K=3 → X. $\omega^2 = 8$이므로 ±j2는 틀렸고, 그에 대응하는 K값도 6이 아닌 3으로 잘못 짝지어져 있다.
② 허수축 좌표 ±j2$\sqrt{2}$, K=3 → X. 좌표는 맞지만 K값이 틀렸다. $\omega^2 = 8$일 때 K는 6이어야 한다.
③ 허수축 좌표 ±j2, K=6 → X. K값은 맞지만 좌표가 틀렸다. K=6일 때 $\omega^2 = 2 + 6 = 8$이므로 좌표는 ±j2$\sqrt{2}$가 되어야 한다.
④ 허수축 좌표 ±j2$\sqrt{2}$, K=6 → O. 계산 과정에서 구한 ω=±22, $K = 6$과 정확히 일치한다.

오답 포인트

이 문제는 실수부·허수부 두 식을 세우는 것까지는 맞게 해도, 두 식을 연립하지 않고 각각 따로 어림짐작해 답을 고르면 ①이나 ③처럼 좌표와 K값이 서로 어긋나는 조합을 고르게 된다. 반드시 $\omega^2 = 2 + K$와 $K = \frac{3\omega^2}{4}$ 두 식을 함께 풀어 하나의 ω와 K의 짝을 구해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

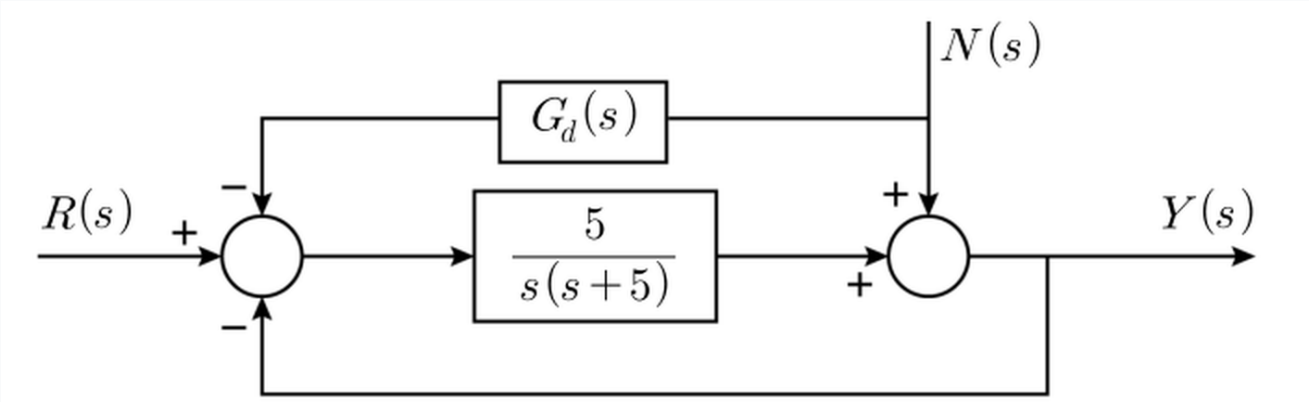
근궤적과 허수축의 교차점을 묻는 문제는 항상 특성방정식에 $s = j\omega$를 대입해 실수부와 허수부를 분리하는 것에서 시작한다. 두 식을 세운 뒤에는 반드시 연립하여 ω와 K를 동시에 구해야 하며, 선지에 나온 좌표와 K값을 따로따로 확인하지 말고 한 쌍으로 검산한다.

암기 포인트

$s = j\omega$ 대입 시 $s^2 = -\omega^2$(실수), $s^3 = -j\omega^3$(허수)이 되어 홀수차항은 허수부, 짝수차항(상수항 포함)은 실수부를 이룬다는 점을 기억해 둔다. 이 성질을 이용하면 임의의 3차 특성방정식에서도 허수축 교차 조건을 빠르게 실수부/허수부 두 식으로 분리할 수 있다.

NoteBase

문 9. 다음 블록선도에서 신호 $N(s)$는 시스템에 작용하는 외란을 나타내고, $G_d(s)$는 $N(s)$의 영향을 줄이기 위한 전달함수이다. $R(s)=0$일 때, $N(s)$의 영향이 출력 $Y(s)$에서 완전히 제거되도록 하는 $G_d(s)$로 적합한 것은?



① $\frac{s(s+5)}{5}$
② $\frac{5}{s(s+5)}$
③ $-\frac{s(s+5)}{5}$
④ $-\frac{5}{s(s+5)}$

정답 1번

출제 포인트

블록선도에서 외란 $N(s)$가 출력 $Y(s)$에 미치는 영향을 완전히 상쇄시키는 보상 전달함수 $G_d(s)$를 구하는 문제이다. 그림 자체를 식별하는 것이 아니라, 그림이 나타내는 신호 흐름을 식으로 옮겨 대수적으로 풀어야 하는 계산형 문제이다.

조건 정리

플랜트 전달함수를 $G(s)=\frac{5}{s(s+5)}$로 둔다. 첫 번째 합산점에는 $R(s)$가 +로, 출력 $Y(s)$의 피드백이 -로, 그리고 $N(s)$에서 분기되어 $G_d(s)$를 통과한 신호 $G_d(s)N(s)$가 -로 들어온다. 이 합산점의 출력이 $G(s)$를 지난 뒤, 두 번째 합산점에서 $N(s)$와 +로 더해져 $Y(s)$가 된다. 조건은 $R(s)=0$이며, 이때 $N(s)$가 아무리 변해도 $Y(s)=0$이 되도록 하는 $G_d(s)$를 찾는 것이다.

사용할 공식

첫 번째 합산점의 출력을 $E(s)$라 하면 $R(s)=0$에서 $E(s)=-Y(s)-G_d(s)N(s)$이고, 플랜트를 지난 신호는 $E(s)G(s)$이므로 $Y(s)=E(s)G(s)+N(s)$가 된다. 이 두 식을 연립하여 $Y(s)$를 $N(s)$에 대해 정리한 뒤, $N(s)$의 계수를 0으로 만드는 조건에서 $G_d(s)$를 구한다.

NoteBase

계산 과정

$E(s) = -Y(s) - G_d(s)N(s)$를 $Y(s) = E(s)G(s) + N(s)$에 대입하면
$Y(s) = [-Y(s) - G_d(s)N(s)]G(s) + N(s)$이다.
정리하면 $Y(s)(1 + G(s)) = N(s)(1 - G(s)G_d(s))$이므로 $Y(s) = \frac{1 - G(s)G_d(s)}{1 + G(s)}N(s)$이다.
임의의 $N(s)$에 대해 $Y(s) = 0$이 되려면 분자가 0이어야 하므로 $1 - G(s)G_d(s) = 0$, 즉 $G_d(s) = \frac{1}{G(s)}$이다.
$G(s) = \frac{5}{s(s+5)}$이므로 $G_d(s) = \frac{s(s+5)}{5}$이다.

선지 판단

① $\frac{s(s+5)}{5}$: O. 계산 결과 $G_d(s) = \frac{1}{G(s)} = \frac{s(s+5)}{5}$와 정확히 일치한다.
② $\frac{5}{s(s+5)}$: X. 이는 $G(s)$ 자신이다 → 올바른 값은 $G(s)$의 역수인 $\frac{s(s+5)}{5}$이다.
③ $-\frac{s(s+5)}{5}$: X. 크기는 맞으나 부호가 반대이다 → $G_d(s)$는 음수가 아니라 양의 $\frac{s(s+5)}{5}$이어야 한다.
④ $-\frac{5}{s(s+5)}$: X. $G(s)$에 부호만 바꾼 값이며 역수 관계를 만족하지 못한다 → 올바른 값은 $\frac{s(s+5)}{5}$이다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 $G_d(s)$를 $G(s)$와 혼동하거나 그 부호를 반대로 잡는 것이다. 이 문제의 핵심은 $G_d(s)$가 $N(s)$를 되먹임하여 플랜트 앞단에서 미리 상쇄시키는 피드포워드 보상기이므로, $Y(s)$의 $N(s)$ 계수인 $1 - G(s)G_d(s)$를 0으로 만드는 조건에서 정확히 역수 관계 $G_d(s) = 1/G(s)$가 나온다는 점을 놓치지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

외란 제거형 블록선도 문제는 먼저 각 합산점에서의 신호 관계식을 부호까지 정확히 세운 뒤, 구하고자 하는 출력을 외란 $N(s)$에 대한 식으로 정리하고 그 계수를 0으로 놓는 방식으로 접근한다. 이때 되먹임 경로의 +, - 부호를 그림에서 정확히 확인하는 것이 계산의 출발점이다.

암기 포인트

외란 보상기 $G_d(s)$가 플랜트 $G(s)$ 앞단에서 외란을 상쇄하도록 되먹임되는 구조에서는, 외란의 영향을 완전히 제거하는 조건이 $G_d(s) = 1/G(s)$로 귀결되는 경우가 많다는 것을 기억해 둔다.

NoteBase

문 10. 다음과 같은 진상보상기(lead compensator)의 위상이 최대가 되는 주파수(ω_m)와 그때의 위상값(Φ_m)은?

$H(s) = \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts},\ \alpha > 1$

① ω_m: $\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$, Φ_m: $\sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$
② ω_m: $\frac{1}{\alpha\sqrt{T}}$, Φ_m: $\sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$
③ ω_m: $\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$, Φ_m: $\sin^{-1}\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$
④ ω_m: $\frac{1}{\alpha\sqrt{T}}$, Φ_m: $\sin^{-1}\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$

정답 1번

출제 포인트

진상보상기 $H(s) = \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$ $(\alpha > 1)$의 주파수응답에서 위상이 최대가 되는 주파수 ω_m과 그때의 최대 위상 Φ_m을 유도할 수 있는지를 묻는다. 진상보상기의 최대 위상 공식을 암기하고 있는지, 또는 위상함수를 직접 미분해 극값을 구할 수 있는지가 핵심이다.

조건 정리

$\alpha > 1$인 진상보상기이므로 위상은 항상 양(진상)이며 특정 주파수 ω_m에서 최댓값 Φ_m을 가진다. 전달함수의 분자 시상수는 αT, 분모 시상수는 T이다.

사용할 공식

$j\omega$를 대입하면 위상은 $\phi(\omega) = \tan^{-1}(\alpha T\omega) - \tan^{-1}(T\omega)$이다. $\frac{d\phi}{d\omega} = 0$을 풀면 최대 위상 주파수는 $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$이고, 이때 최대 위상은 $\sin\Phi_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$, 즉 $\Phi_m = \sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$이다.

계산 과정

$\phi(\omega) = \tan^{-1}(\alpha T\omega) - \tan^{-1}(T\omega)$를 ω에 대해 미분하면 $\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{\alpha T}{1+(\alpha T\omega)^2} - \frac{T}{1+(T\omega)^2}$이다. 이를 0으로 놓고 정리하면 $\alpha T\{1+(T\omega)^2\} = T\{1+(\alpha T\omega)^2\}$가 되고, 양변을 전개해 $\alpha - 1 = T^2\omega^2(\alpha - \alpha^2) = -\alpha(\alpha-1)T^2\omega^2$의 관계를 정리하면 $\omega^2 = \frac{1}{\alpha T^2}$, 즉 $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$를 얻는다. 이 값을 $\phi(\omega)$에 대입해 $\tan\Phi_m = \tan\{\tan^{-1}(\sqrt{\alpha}) - \tan^{-1}(1/\sqrt{\alpha})\} = \frac{\sqrt{\alpha}-1/\sqrt{\alpha}}{1+1} = \frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}$를 구하고, 이를 삼각비 관계로 변환하면 $\sin\Phi_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$이 되어 $\Phi_m = \sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$이 도출된다.

NoteBase

선지 판단

① $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$, $\Phi_m = \sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$: O, 유도한 결과와 정확히 일치한다.
② $\omega_m = \frac{1}{\alpha\sqrt{T}}$, $\Phi_m = \sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$: X, 위상값은 맞지만 주파수 식에서 α와 T의 위치가 뒤바뀌어 있다 → 올바른 식은 $\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$이다.
③ $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$, $\Phi_m = \sin^{-1}\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$: X, 주파수 식은 맞지만 위상값의 분자·분모가 뒤바뀌어 있다 → 올바른 식은 $\sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$이다(참고로 $\alpha > 1$이면 $\frac{\alpha+1}{\alpha-1} > 1$이 되어 $\sin^{-1}$의 정의역을 벗어나므로 애초에 성립할 수 없는 식이다).
④ $\omega_m = \frac{1}{\alpha\sqrt{T}}$, $\Phi_m = \sin^{-1}\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$: X, 주파수식과 위상식 모두 잘못되어 있다.

오답 포인트

이 문제는 ω_m의 분모에서 α와 T의 결합 방식($\sqrt{\alpha}T$ vs $\alpha\sqrt{T}$)과, Φ_m의 $\sin^{-1}$ 안 분수의 분자·분모 순서($\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ vs $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$)를 헷갈리게 만드는 함정으로 구성되어 있다. $\alpha > 1$이므로 $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$은 항상 1보다 커서 $\sin^{-1}$의 정의역($[-1, 1]$)을 벗어난다는 점을 이용하면 계산 없이도 ③, ④를 즉시 소거할 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

진상보상기 문제가 나오면 Φ_m이 들어간 선지의 $\sin^{-1}$ 값이 1을 넘지 않는지부터 확인한다($\alpha > 1$이면 분자가 분모보다 작아야 하므로 $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ 형태만 유효). 그다음 ω_m이 기하평균 형태인 $\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$로 되어 있는지(=영점과 극점 주파수의 기하평균) 확인하면 빠르게 정답을 가려낼 수 있다.

암기 포인트

진상보상기 $H(s) = \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$ $(\alpha > 1)$의 최대 위상 주파수는 $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$로 영점 주파수 $\frac{1}{\alpha T}$와 극점 주파수 $\frac{1}{T}$의 기하평균이며, 이때의 최대 위상은 $\Phi_m = \sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$로 정리해 둔다.

NoteBase

문 11. 개루프 전달함수가 다음과 같이 주어진 음의 단위 피드백 시스템의 근궤적에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

$KG(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)},\ K>0$

① 실수축에서의 근궤적은 $s=0$과 $s=-4$ 사이에서만 존재한다.

② 점근선은 실수축과 -3에서 만난다.

③ 점근선의 개수는 4개이고, 점근선이 실수축과 만나는 각도는 실수축을 기준으로 $\pm 45^\circ$, $\pm 135^\circ$이다.

④ 복소극점 $s=-4+j4$에서의 근궤적의 출발각은 -90°이다.

정답 4번

출제 포인트

개루프 전달함수의 극점 배치로부터 근궤적의 실수축 구간, 점근선의 개수·교차점·각도, 그리고 복소극점에서의 출발각(departure angle)을 계산할 수 있는지를 묻는다.

조건 정리

$KG(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)}$, $K>0$이다. 분모를 인수분해하면 극점은 $s=0$, $s=-4$, $s=-4+j4$, $s=-4-j4$의 4개이고 유한 영점은 없다($n=4$, $m=0$).

사용할 공식

실수축 근궤적 규칙: 실수축상의 한 점의 오른쪽에 위치한 실수 극점·영점의 개수의 합이 홀수이면 그 구간은 근궤적에 포함된다.

점근선 교차점: $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$.

점근선 각도: $\theta_a = \frac{(2k+1)\times 180^\circ}{n-m}$, $k=0,1,\ \dots,n-m-1$.

복소극점에서의 출발각: 근궤적이 존재하려면 관심 극점을 포함한 모든 극점에서 후보점까지의 각의 합이 $180^\circ \pmod{360^\circ}$가 되어야 하므로, _dep = 180^ - Σ(다른 극점에서 본 각도)로 구한다.

NoteBase

계산 과정

① 실수축 구간: 실수 극점은 $s=0$과 $s=-4$뿐이다. 0과 -4 사이의 한 점 오른쪽에는 극점이 1개(=0에 있는 극점)로 홀수이므로 근궤적이 존재한다. -4보다 왼쪽 구간은 오른쪽에 극점이 2개(0, -4)로 짝수이므로 근궤적이 존재하지 않는다. 따라서 실수축 근궤적은 0과 -4 사이에만 존재한다.
② 점근선 교차점: $\sigma_a = \frac{0+(-4)+(-4+j4)+(-4-j4)}{4} = \frac{-12}{4} = -3$이다.
③ 점근선 개수와 각도: $n-m=4-0=4$이므로 점근선은 4개이다. 각도는 $k=0, 1, 2, 3$에 대해 $\theta_a = \frac{(2k+1)180^\circ}{4}$로 $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$이며, 이는 실수축 기준 $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$와 같다.
④ 복소극점 $s=-4+j4$에서의 출발각: 다른 세 극점에서 이 점까지의 각도를 구하면, $s=0$에서 본 각도는 $-4+j4$의 편각인 135°이고, $s=-4$에서 본 각도는 $0+j4$의 편각인 90°이며, $s=-4-j4$에서 본 각도는 $0+j8$의 편각인 90°이다. 이 세 각의 합은 $135^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 315^\circ$이다. 출발각을 θ_{dep}라 하면 네 각의 총합이 $180^\circ \pmod{360^\circ}$가 되어야 하므로 $315^\circ + \theta_{dep} = 180^\circ + 360^\circ$에서 $\theta_{dep} = 225^\circ$, 즉 -135°이다. 따라서 출발각은 -90°가 아니라 -135°(또는 동일하게 225°)이다.

선지 판단

① 실수축에서의 근궤적은 $s=0$과 $s=-4$ 사이에서만 존재한다 → O. 위 계산대로 이 구간에서만 오른쪽 극점 개수가 홀수가 되어 근궤적이 존재한다.
② 점근선은 실수축과 -3에서 만난다 → O. 점근선 교차점 계산 결과와 일치한다.
③ 점근선의 개수는 4개이고, 각도는 $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$이다 → O. $n-m=4$이므로 점근선이 4개이며 각도 계산 결과와 일치한다.
④ 복소극점 $s=-4+j4$에서의 근궤적 출발각은 -90°이다 → X. 계산 결과 출발각은 -135°(= 225°)이므로 틀린 표현이다. 틀린 표현 -90° → 올바른 표현 -135°.

오답 포인트

출발각을 구할 때 가장 가까운 켤레 극점이나 원점 극점만 고려하고 나머지 극점의 각을 빠뜨리면 -90° 같은 단순한 값으로 오인하기 쉽다. 반드시 관심 극점을 제외한 모든 극점에서 본 편각을 빠짐없이 더한 뒤, 전체 각의 합이 $180^\circ \pmod{360^\circ}$가 되도록 출발각을 역산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 극점을 모두 인수분해로 구하고 실수 극점과 복소 켤레 극점을 구분한다. 실수축 구간은 오른쪽 극점·영점 개수의 홀짝으로, 점근선 교차점과 각도는 공식에 대입해 기계적으로 구한다. 복소극점에서의 출발각은 그 점을 제외한 모든 극점에서의 편각을 각각 구해 합산한 뒤 180°에서 빼서 구한다는 절차를 그대로 적용한다.

암기 포인트

점근선 교차점 $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$, 점근선 각도 $\theta_a = \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}$, 출발각(또는 도착각) 계산 시 '모든 극점(자신 포함)에서 후보점까지의 각의 합 = $180^\circ \pmod{360^\circ}$'라는 각 조건을 기억해 둔다.

NoteBase

문 12. 다음 함수 $f(t)$의 라플라스 변환으로 옳은 것은?



① $F(s)=\frac{1}{s}(5-3e^{-s}+3e^{-3s}-5e^{-4s})$

② $F(s)=\frac{1}{s}(5-2e^{-2s}+2e^{-4s}-5e^{-5s})$

③ $F(s)=5-3e^{-s}+3e^{-3s}-5e^{-4s}$

④ $F(s)=5-2e^{-s}+2e^{-3s}-5e^{-4s}$

정답 1번

출제 포인트

그래프로 주어진 계단형(사각파) 함수 $f(t)$를 단위계단함수 $u(t)$의 합으로 분해한 뒤 라플라스 변환 공식 $\mathcal{L}[u(t-a)]=\frac{1}{s}e^{-as}$를 적용해 $F(s)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

그래프를 구간별로 읽으면 다음과 같다. $0<t<1$에서 $f(t)=5$, $1<t<3$에서 $f(t)=2$, $3<t<4$에서 $f(t)=5$, $t>4$에서 $f(t)=0$이다. 즉 값이 바뀌는 지점은 $t=1$, 3, 4이고 각 지점에서의 변화량(도약폭)은 $t=1$에서 $5\to2$로 -3, $t=3$에서 $2\to5$로 $+3$, $t=4$에서 $5\to0$으로 -5이다.

사용할 공식

계단형 함수는 $f(t)=A_0u(t)+A_1u(t-t_1)+A_2u(t-t_2)+\cdots$의 형태로 분해할 수 있으며, 여기서 A_0는 $t=0$에서의 초기값이고 각 A_k는 $t=t_k$에서의 도약(계단) 크기이다. 라플라스 변환은 $\mathcal{L}[u(t-a)]=\frac{1}{s}e^{-as}$이므로 $F(s)=\frac{1}{s}(A_0+A_1e^{-t_1s}+A_2e^{-t_2s}+\cdots)$이 된다.

NoteBase

계산 과정

초기값은 $t=0$에서 $f(t)=5$이므로 $A_0=5$이다. $t=1$에서 $5\to2$로 떨어지므로 도약폭은 -3, 즉 $-3u(t-1)$이 더해진다. $t=3$에서 $2\to5$로 올라가므로 도약폭은 $+3$, 즉 $+3u(t-3)$이 더해진다. $t=4$에서 $5\to0$으로 떨어지므로 도약폭은 -5, 즉 $-5u(t-4)$가 더해진다. 따라서
$f(t)=5u(t)-3u(t-1)+3u(t-3)-5u(t-4)$이다. 검산하면 $0<t<1$: 5(일치), $1<t<3$: $5-3=2$(일치), $3<t<4$: $2+3=5$(일치), $t>4$: $5-5=0$(일치)로 모두 그래프와 맞는다. 이를 라플라스 변환하면 $F(s)=\frac{1}{s}(5-3e^{-s}+3e^{-3s}-5e^{-4s})$이다.

선지 판단

① O: $F(s)=\frac{1}{s}(5-3e^{-s}+3e^{-3s}-5e^{-4s})$로 계산 결과와 정확히 일치한다.
② X: 지수의 시간 이동량이 2,4,5로 되어 있으나 실제 도약 시점은 1,3,4이다 → 틀린 시간이동 $e^{-2s}, e^{-4s}, e^{-5s}$ → 올바른 시간이동 e^{-s}, e^{-3s}, e^{-4s}.
③ X: 계수(도약폭)는 $5,\ -3,\ 3,\ -5$로 맞으나 공통인수 $\frac{1}{s}$가 빠져 있다 → 단위계단함수의 변환에는 반드시 $\frac{1}{s}$가 곱해져야 한다.
④ X: 계수도 2,2로 틀리고(실제 도약폭은 3,3) 공통인수 $\frac{1}{s}$도 빠져 있다 → 도약폭 오류와 $\frac{1}{s}$ 누락이 함께 있는 이중 오류이다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 그래프의 시간축 눈금(1,3,4)이 아니라 임의의 다른 값(2,4,5)을 도약 시점으로 착각하는 것과, 단위계단함수 자체는 상수값을 갖는 신호일 뿐이므로 라플라스 변환 시 반드시 $\frac{1}{s}$를 곱해야 한다는 점을 빠뜨리는 것이다. 또한 도약폭을 구할 때 이전 구간 값에서 다음 구간 값을 빼는 방향(다음값-이전값)을 헷갈리면 부호가 반대로 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

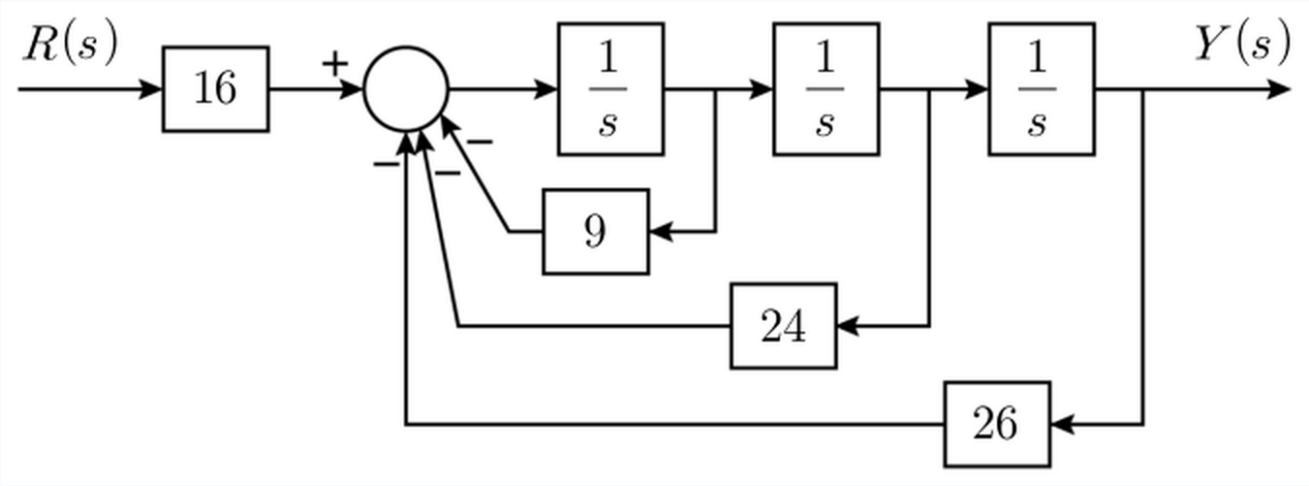
계단형 그래프가 나오면 먼저 값이 바뀌는 시각들을 눈금에서 정확히 읽고, 각 시각에서의 도약폭을 (다음 구간값 − 이전 구간값)으로 계산한 뒤 $f(t)=A_0u(t)+\sum A_ku(t-t_k)$로 분해한다. 마지막으로 라플라스 변환할 때 $\frac{1}{s}$를 빠뜨리지 않았는지, 시간이동량이 그래프의 실제 눈금과 일치하는지 두 가지를 반드시 재확인한다.

암기 포인트

단위계단함수의 라플라스 변환은 $\mathcal{L}[u(t-a)]=\frac{1}{s}e^{-as}$이며, 계단형 함수는 도약이 일어나는 각 시각에서의 변화량을 그대로 계수로 사용해 $u(t-a)$ 항을 하나씩 더해가며 분해한다.

NoteBase

문 13. 다음 블록선도의 전달함수 $\frac{Y(s)}{R(s)}$는?



① $\frac{16}{s^3+26s^2+24s+9}$
② $\frac{1}{s^3+26s^2+24s+9}$
③ $\frac{16}{s^3+9s^2+24s+26}$
④ $\frac{1}{s^3+9s^2+24s+26}$

정답 3번

출제 포인트

여러 개의 되먹임(피드백) 경로가 서로 다른 지점에서 나오는 다중 내부 루프 블록선도의 전달함수를 구하는 문제이다. 블록선도를 직접 등가변환하기보다, 합산점의 출력을 변수로 놓고 각 적분기 출력을 대수적으로 연결하는 방식이 더 빠르고 실수가 적다.

조건 정리

R(s)는 이득 16을 거친 뒤 합산점에 (+)로 들어간다. 합산점의 출력을 $E(s)$라 하면, $E(s)$가 적분기 $1/s$ 세 개를 순서대로 통과하며 각각 $X_1(s)$, $X_2(s)$, $Y(s)$를 만든다. 즉 $X_1 = E/s$, $X_2 = X_1/s = E/s^2$, $Y = X_2/s = E/s^3$이다. 되먹임은 세 갈래이며 모두 합산점에 (−)로 들어간다: X_1에서 이득 9, X_2에서 이득 24, Y에서 이득 26이다.

사용할 공식

합산점 방정식: $E = 16R - 9X_1 - 24X_2 - 26Y$. 여기에 $X_1 = E/s$, $X_2 = E/s^2$, $Y = E/s^3$를 대입하여 E에 대해 정리한 뒤, 다시 $Y = E/s^3$ 관계로 Y/R를 구한다.

NoteBase

계산 과정

$E = 16R - \frac{9E}{s} - \frac{24E}{s^2} - \frac{26E}{s^3}$
$E\left(1 + \frac{9}{s} + \frac{24}{s^2} + \frac{26}{s^3}\right) = 16R$
$E \cdot \frac{s^3 + 9s^2 + 24s + 26}{s^3} = 16R$
$E = \frac{16Rs^3}{s^3 + 9s^2 + 24s + 26}$
$Y = \frac{E}{s^3} = \frac{16R}{s^3 + 9s^2 + 24s + 26}$
따라서 $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{16}{s^3 + 9s^2 + 24s + 26}$이다.

선지 판단

① $\frac{16}{s^3 + 26s^2 + 24s + 9}$ — X. 분모의 계수 9와 26의 위치가 뒤바뀌었다(되먹임 이득은 신호가 지나온 적분기 개수가 적을수록, 즉 합산점에 가까운 되먹임일수록 분모의 낮은 차수 항에 붙는다).
② $\frac{1}{s^3 + 26s^2 + 24s + 9}$ — X. 분자에 전향 이득 16이 빠졌고 분모 계수 배치도 잘못되었다.
③ $\frac{16}{s^3 + 9s^2 + 24s + 26}$ — O. 계산 과정에서 도출한 결과와 정확히 일치한다.
④ $\frac{1}{s^3 + 9s^2 + 24s + 26}$ — X. 분모는 맞지만 전향 경로의 이득 16이 분자에서 누락되었다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 되먹임 이득 9, 24, 26을 분모에 배치할 때 순서를 헷갈리는 것이다. 되먹임이 나오는 지점(적분기를 몇 개 지났는지)에 따라 s의 차수가 정해진다: 적분기 1개를 지난 지점(9)은 s^2 항, 적분기 2개를 지난 지점(24)은 s^1 항, 적분기 3개(출력, 26)는 s^0 항에 대응한다. 또한 전향 경로의 이득 16을 분자에 반영하는 것을 잊지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

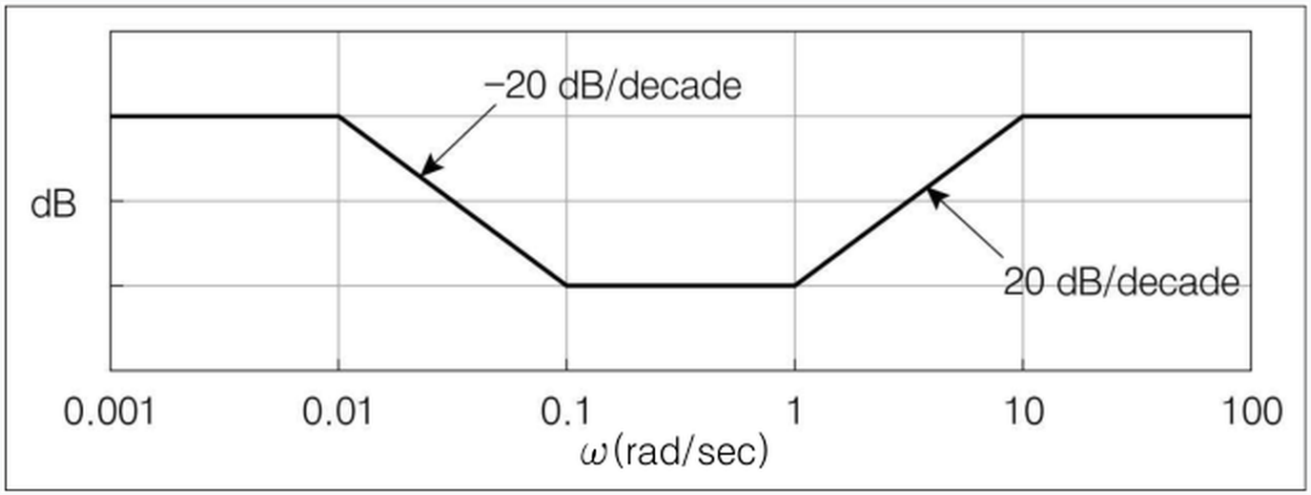
여러 지점에서 되먹임이 나오는 복잡한 블록선도는 등가변환보다 합산점 출력을 $E(s)$로 놓고 각 적분기 출력을 $E(s)/s^k$ 형태로 표현한 뒤 대수적으로 정리하는 방법이 빠르고 오류가 적다. 답을 구한 뒤에는 분모의 각 s차수 계수가 되먹임이 나오는 위치(적분기 통과 개수)와 대응하는지 다시 확인한다.

암기 포인트

합산점 출력을 E로 두고 E=(전향입력)-Σ(되먹임 이득× E/s^k)로 정리하면, 되먹임 이득은 적분기를 k개 지난 지점일수록 분모에서 s^{n-k} 항의 계수가 된다(n은 전체 적분기 개수).

NoteBase

문 14. 직류이득(DC gain)이 20 [dB]이면서 그림과 같은 보드선도로 표현되는 전달함수로 가장 적합한 것은?



① $\frac{10(s+0.01)(s+10)}{(s+0.1)(s+1)}$
② $\frac{(s+0.01)(s+10)}{10(s+0.1)(s+1)}$
③ $\frac{10(s+0.1)(s+1)}{(s+0.01)(s+10)}$
④ $\frac{(s+0.1)(s+1)}{10(s+0.01)(s+10)}$

정답 3번

출제 포인트

직선근사(점근선) 보드선도의 절점주파수와 기울기 변화만 보고 전달함수의 극점·영점 위치와 이득상수를 역으로 구성하는 문제이다. 각 절점에서 기울기가 어떻게 바뀌는지를 보고 그 지점이 극점인지 영점인지를 판단하는 것이 핵심이다.

조건 정리

그래프의 구간별 기울기는 다음과 같다. $\omega = 0.001 \sim 0.01$: 기울기 0(수평). $\omega = 0.01 \sim 0.1$: 기울기 -20 dB/decade. $\omega = 0.1 \sim 1$: 기울기 0(수평, 처음보다 낮은 레벨). $\omega = 1 \sim 10$: 기울기 $+20$ dB/decade. $\omega = 10 \sim 100$: 기울기 0(수평, 처음과 같은 레벨). 또한 직류이득(가장 낮은 주파수 영역의 이득)이 20 dB로 주어져 있다.

사용할 공식

직선근사 보드선도에서 극점(분모 인자 $s+p$)을 지나면 기울기가 -20 dB/decade만큼 감소하고, 영점(분자 인자 $s+z$)을 지나면 기울기가 $+20$ dB/decade만큼 증가한다. 절점주파수는 각 인자의 값(예: $s+0.01$이면 $\omega = 0.01$)이다. 또한 1차 인자로 이루어진 전달함수 $G(s) = K\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)}$의 직류이득($s=0$)은 $G(0) = K\frac{z_1 z_2}{p_1 p_2}$이고, 이를 dB로 환산하면 $20\log_{10}|G(0)|$이다.

NoteBase

계산 과정

기울기 변화를 절점별로 정리하면 다음과 같다. $\omega = 0.01$에서 기울기가 $0 \to -20$으로 감소하므로 이 지점은 극점, 즉 분모에 $(s + 0.01)$이 있다. $\omega = 0.1$에서 기울기가 $-20 \to 0$으로 다시 증가(+20 변화)하므로 이 지점은 영점, 즉 분자에 $(s + 0.1)$이 있다. $\omega = 1$에서 기울기가 $0 \to +20$으로 증가하므로 이 지점도 영점, 분자에 $(s + 1)$이 있다. $\omega = 10$에서 기울기가 $+20 \to 0$으로 감소하므로 이 지점은 극점, 분모에 $(s + 10)$이 있다. 따라서 전달함수의 형태는 $G(s) = K\frac{(s+0.1)(s+1)}{(s+0.01)(s+10)}$이다. 이제 직류이득 조건을 적용한다.
$G(0) = K\frac{(0.1)(1)}{(0.01)(10)} = K\frac{0.1}{0.1} = K$이므로, $G(0)$의 dB 값은 $20\log_{10} K$이다. 문제에서 직류이득이 20 dB이므로 $20\log_{10} K = 20$, 즉 $K = 10$이다. 따라서 $G(s) = 10\frac{(s+0.1)(s+1)}{(s+0.01)(s+10)}$이다. 검산하면 $\omega \to 0$일 때 이득이 20 dB로 시작하여 0.01에서 극점을 만나 -20 dB/decade로 한 구간$(0.01 \to 0.1)$ 하강해 0 dB가 되고, $0.1 \sim 1$ 구간은 영점·극점이 없어 평탄하다가, 1에서 영점을 만나 $+20$ dB/decade로 한 구간$(1 \to 10)$ 상승해 다시 20 dB가 되고, 10 이후는 극점을 만나 평탄해지므로 그래프와 정확히 일치한다.

선지 판단

① $\frac{10(s+0.01)(s+10)}{(s+0.1)(s+1)}$: X → 극점·영점 위치가 서로 뒤바뀌었다(0.01과 10이 극점이어야 하는데 영점 자리에 있음). 이대로면 0.01에서 기울기가 증가(+20)하고 10에서 감소(-20)하게 되어 그래프의 하강·상승 방향과 반대가 된다.
② $\frac{(s+0.01)(s+10)}{10(s+0.1)(s+1)}$: X → ①과 마찬가지로 극점·영점 자리가 뒤바뀌었고, 직류이득도 $G(0) = \frac{(0.01)(10)}{10(0.1)(1)} = \frac{0.1}{1} = 0.1$로 -20 dB가 되어 조건과 맞지 않는다.
③ $\frac{10(s+0.1)(s+1)}{(s+0.01)(s+10)}$: O → 절점 0.01, 10은 극점(분모), 0.1, 1은 영점(분자)으로 그래프의 기울기 변화 순서(감소-증가-증가-감소)와 정확히 일치하고, $G(0) = 10$으로 직류이득 20 dB 조건도 만족한다.
④ $\frac{(s+0.1)(s+1)}{10(s+0.01)(s+10)}$: X → 극점·영점 배치는 ③과 같아 그래프 모양은 맞지만, 직류이득이 $G(0) = \frac{(0.1)(1)}{10(0.01)(10)} = \frac{0.1}{1} = 0.1$로 -20 dB가 되어 20 dB 조건에 어긋난다.

오답 포인트

① · ②는 절점 0.01과 10을 극점이 아닌 영점 자리에 놓아 그래프의 기울기 증감 방향을 반대로 만든 오답이고, ④는 극점·영점 배치는 맞지만 앞의 상수(이득) K를 분모에 넣어 직류이득이 20 dB가 아닌 -20 dB가 되게 만든 오답이다. 그래프의 '모양'(기울기 변화 순서)과 그래프의 '높이'(직류이득 값)를 모두 따로 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

직선근사 보드선도 문제는 항상 두 단계로 나눠 푼다. 먼저 각 절점에서 기울기가 감소하면 극점(분모), 증가하면 영점(분자)으로 배치해 전달함수의 형태를 만들고, 그다음 가장 낮은(또는 가장 높은) 주파수 구간의 dB 값을 이용해 $G(0) = K$(또는 K를 포함한 비율)를 계산해 이득상수 K를 확정한다. 형태만 맞고 이득상수를 확인하지 않으면 ④와 같은 함정에 걸린다.

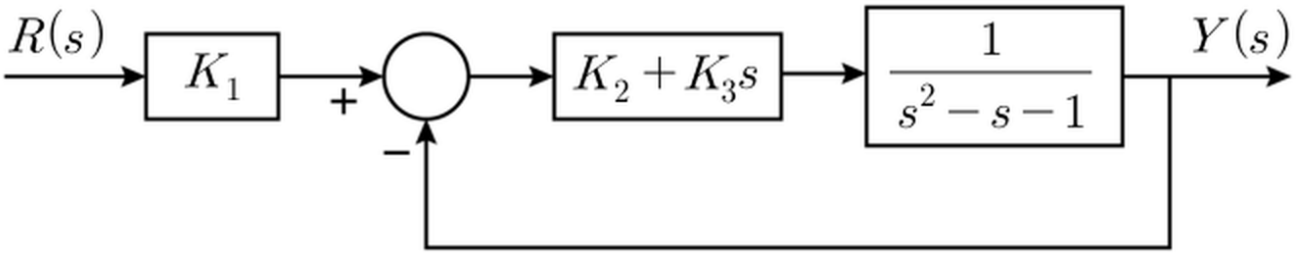
NoteBase

암기 포인트

극점을 지나면 기울기 -20 dB/decade 추가, 영점을 지나면 기울기 $+20$ dB/decade 추가. 직류이득(dB) $= 20\log_{10}|G(0)|$이고 1차 인자로만 구성된 경우 $G(0) = K\frac{\prod z_i}{\prod p_i}$로 계산한다.

NoteBase

문 15. 다음의 피드백 제어 시스템에서 단위 계단(unit step) 입력에 대한 정상상태오차가 0이고, 폐루프 시스템의 극점을 $s=-1+j$와 $s=-1-j$에 위치시키는 K_1, K_2, K_3의 값은?



① K_1: $\frac{3}{2}$, K_2: 2, K_3: 3

② K_1: $\frac{3}{2}$, K_2: 3, K_3: 3

③ K_1: $\frac{2}{3}$, K_2: 2, K_3: 3

④ K_1: $\frac{2}{3}$, K_2: 3, K_3: 3

정답 4번

출제 포인트

블록선도의 폐루프 전달함수를 세운 뒤, 특성방정식의 근(극점) 위치 조건과 단위 계단 입력에 대한 정상상태오차 0 조건을 동시에 만족하는 K_1, K_2, K_3를 구하는 문제이다. 이 블록선도는 표준 단일피드백 구조가 아니라 K_1이 입력 쪽에 전향경로로 곱해진 뒤 출력이 그대로(이득 1) 음으로 되먹임되는 구조이므로, 정상상태오차를 단순히 개루프 전달함수의 형식(type)만으로 판단하면 안 되고 최종값 정리로 직접 계산해야 한다.

조건 정리

합산점 출력을 $E(s)$라 하면 $E(s)=K_1R(s)-Y(s)$이고, $Y(s)=\frac{K_2+K_3s}{s^2-s-1}E(s)$이다. 폐루프 극점은 $s=-1+j,\ s=-1-j$로 지정되어 있고, 입력 $R(s)$는 단위 계단 $\frac{1}{s}$이며 이때 정상상태오차(=$R(\infty)-Y(\infty)$)가 0이 되어야 한다.

사용할 공식

폐루프 전달함수는 $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_1(K_2+K_3s)}{s^2-s-1+K_2+K_3s}=\frac{K_1(K_2+K_3s)}{s^2+(K_3-1)s+(K_2-1)}$이다. 특성방정식 $s^2+(K_3-1)s+(K_2-1)=0$의 두 근이 $-1\pm j$이므로, 근과 계수의 관계에서 두 근의 합은 $-(K_3-1)$, 두 근의 곱은 K_2-1과 같다. 정상상태오차는 최종값 정리 $Y(\infty)=\lim_{s\to 0}sY(s)$로 계산한다.

NoteBase

계산 과정

두 근의 합: $(-1+j)+(-1-j)=-2$이고 이는 $-(K_3-1)$과 같으므로 $-(K_3-1)=-2$, 즉 $K_3=3$이다.
두 근의 곱: $(-1+j)(-1-j)=1-j^2=1+1=2$이고 이는 K_2-1과 같으므로 $K_2-1=2$, 즉 $K_2=3$이다.
단위 계단 입력에서 정상상태값: $Y(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{K_1(K_2+K_3 s)}{s^2+(K_3-1)s+(K_2-1)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{K_1K_2}{K_2-1}$이다. $K_2=3$을 대입하면 $Y(\infty)=\frac{3K_1}{2}$이다.
정상상태오차가 0이려면 $Y(\infty)=R(\infty)=1$이어야 하므로 $\frac{3K_1}{2}=1$, 즉 $K_1=\frac{2}{3}$이다.

선지 판단

① $K_1=3/2,\ K_2=2,\ K_3=3$: X. 극점 조건에서 두 근의 곱이 2가 되어야 하므로 $K_2=3$이어야 하는데 여기서는 $K_2=2$로 틀렸다.
② $K_1=3/2,\ K_2=3,\ K_3=3$: X. $K_2=3, K_3=3$은 맞지만, 이때 정상상태오차 0 조건은 $K_1=2/3$을 요구하므로 $K_1=3/2$는 틀렸다.
③ $K_1=2/3,\ K_2=2,\ K_3=3$: X. $K_1=2/3$은 맞지만 $K_2=2$는 극점 조건(두 근의 곱=2 → $K_2=3$)에 어긋난다.
④ $K_1=2/3,\ K_2=3,\ K_3=3$: O. 극점 조건으로 구한 $K_2=3,\ K_3=3$과 정상상태오차 0 조건으로 구한 $K_1=2/3$이 모두 일치한다.

오답 포인트

가장 흔한 실수는 이 블록선도를 표준 단일피드백 구조로 착각해 K_1을 전향이득에 그대로 곱해 넣고 개루프 전달함수의 극(type) 개수만으로 정상상태오차 0을 판단하는 것이다. 실제로는 K_1이 입력에만 곱해지고 출력은 이득 1로 그대로 되먹임되는 구조이므로, 최종값 정리로 $Y(\infty)=R(\infty)$를 직접 맞춰야 K_1값이 정확히 나온다. 또한 특성방정식에서 부호를 놓쳐 K_3-1의 부호를 반대로 두면 K_3값이 뒤집히므로 근과 계수의 관계식을 세울 때 부호에 주의해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

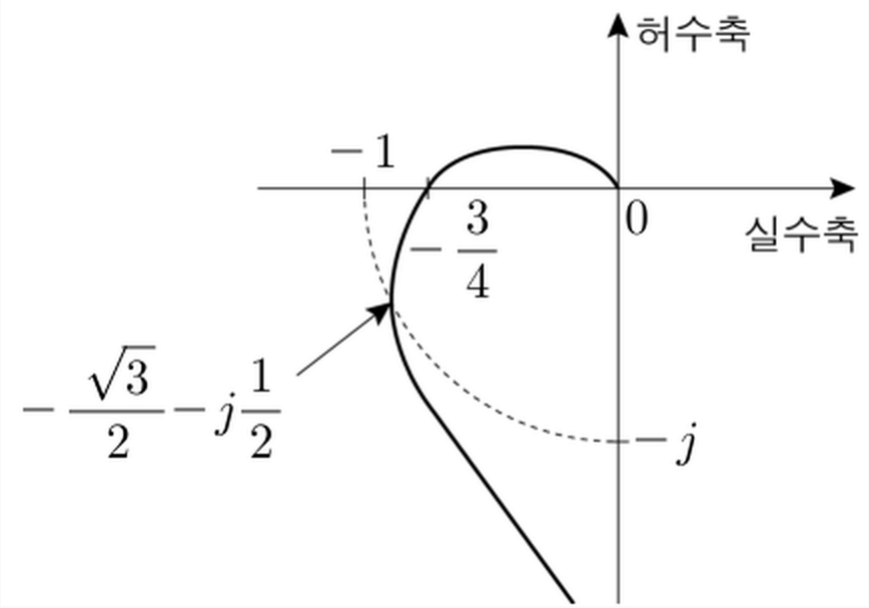
블록선도에서 폐루프 전달함수를 세운 뒤 분모(특성방정식)의 근과 계수 관계로 극점 조건을 처리하고, 정상상태오차나 정상상태값 조건은 반드시 최종값 정리 $\lim_{s\to 0} sY(s)$로 별도 계산한다. 두 조건(극점 위치, 정상상태오차)을 각각 독립적인 방정식으로 풀어 얻은 값들이 어느 한 선지와 정확히 일치하는지 대조한다.

암기 포인트

두 근의 합 $=-b/a$, 두 근의 곱 $=c/a$(특성방정식 $as^2+bs+c=0$ 기준)를 이용하면 복소극점 위치로부터 계수를 빠르게 구할 수 있다. 단위 계단 입력의 정상상태값은 $\lim_{s\to 0} sY(s)$이며, 정상상태오차 0은 이 값이 입력의 정상상태값과 같아지는 조건임을 기억해 둔다.

NoteBase

문 16. 다음과 같은 나이퀴스트(Nyquist) 선도를 갖는 시스템의 이득 여유가 $20\log\alpha$ [dB]이고, 위상여유가 β [deg]일 때 $\alpha\beta$의 값은?



① 20

② 30

③ 40

④ 60

정답 3번

출제 포인트

나이퀴스트 선도에서 이득여유(GM)와 위상여유(PM)를 읽어내는 문제이다. 이득여유는 위상교차점(선도가 실수축과 만나는 점, 허수부=0인 점)에서의 크기로부터, 위상여유는 이득교차점(선도가 단위원과 만나는 점, 즉 크기가 1인 점)에서의 위상으로부터 구한다는 원리를 알고 있는지를 확인한다.

조건 정리

그래프에서 나이퀴스트 선도(실선)가 실수축과 만나는 점, 즉 위상교차점에서의 값은 $-\frac{3}{4}$이다. 또한 선도가 단위원(점선, 반지름 1)과 만나는 점, 즉 이득교차점에서의 값은 $-\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}$이다. 이 값의 크기는 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$로 단위원 위의 점임이 확인된다.

NoteBase

사용할 공식

이득여유 $GM = 20\log\frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$ (여기서 ω_{pc}는 위상교차주파수, 선도가 실수축과 만나는 점의 크기가 $|G(j\omega_{pc})|$이다). 위상여유 $PM = 180^\circ + \angle G(j\omega_{gc})$ (여기서 ω_{gc}는 이득교차주파수, 즉 $|G(j\omega_{gc})| = 1$이 되는 점의 위상각이다). 문제에서 $GM = 20\log\alpha$, $PM = \beta$로 주어졌으므로 두 식을 비교하면 $\alpha = \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$, $\beta = PM$이 된다.

계산 과정

위상교차점에서 $|G(j\omega_{pc})| = \frac{3}{4}$이므로 $\alpha = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$이다.
이득교차점 $-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$의 위상각을 구하면, 실수부가 음수이고 허수부도 음수이므로 3사분면에 위치한 점이며 각도는 $180^\circ + \tan^{-1}\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$인데, 이를 -180°를 기준으로 표시하면 $210^\circ - 360^\circ = -150^\circ$가 된다.
따라서 위상여유는 $\beta = 180^\circ + (-150^\circ) = 30^\circ$이다.
그러므로 $\alpha\beta = \frac{4}{3} \times 30 = 40$이다.

선지 판단

① 20: $\alpha\beta$ 계산값과 다르다. X
② 30: 위상여유 β의 값과 같지만 $\alpha\beta$의 값은 아니다. X
③ 40: $\alpha = \frac{4}{3}$, $\beta = 30$이므로 $\alpha\beta = \frac{4}{3} \times 30 = 40$이다. O
④ 60: $\alpha\beta$ 계산값과 다르다. X

오답 포인트

이득여유와 위상여유를 구하는 기준점을 혼동하기 쉽다. 이득여유는 선도가 실수축과 만나는 점(위상교차점)에서 구하고, 위상여유는 선도가 단위원과 만나는 점(이득교차점)에서 구한다. 두 점을 반대로 사용하면 오답이 나온다. 또한 이득여유 공식이 $20\log\frac{1}{|G|}$ 형태이므로, 문제에서 이미 $GM = 20\log\alpha$ 형태로 주어졌을 때 α는 크기 값의 역수임을 놓치지 않아야 한다. 위상각을 구할 때도 3사분면 각도를 그냥 210°로 두지 않고 -180°부터 180°까지의 범위로 환산(-150°)해야 위상여유 공식에 맞게 부호가 맞는다.

다시 나오면 이렇게 판단

나이퀴스트 선도 문제에서는 먼저 실수축과 만나는 점(허수부 0)을 찾아 이득여유를, 단위원과 만나는 점(크기 1)을 찾아 위상여유를 구분해서 계산한다. 이득여유는 그 점의 크기의 역수에 20log를 취한 값이고, 위상여유는 180도에 그 점의 위상각(−180°~180° 범위)을 더한 값이다.

암기 포인트

이득여유(GM)는 위상교차점(실수축과의 교점)에서, 위상여유(PM)는 이득교차점(단위원과의 교점)에서 구한다. $GM = 20\log\frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$, $PM = 180^\circ + \angle G(j\omega_{gc})$로 암기해 둔다.

NoteBase

문 17. 다음 시스템이 단위 계단(unit step) 입력에 대하여 안정하면서 감쇠비 $\zeta = 0.8$, 정착시간(settling time) $t_s = 0.5$초를 만족하게 하는 상태 피드백 제어기 $u(t)$의 제어이득 k_1, k_2의 값은? (단, $b \neq 0$이고, $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$로 정의하며, 여기서 ω_n은 비감쇠 고유진동수를 나타낸다)

bmatrixx_1(t)\ x_2(t)bmatrix = bmatrix0 & 1\ a & 0bmatrixbmatrixx_1(t)\ x_2(t)bmatrix + bmatrix0\ bbmatrixu(t)
u(t) = -bmatrixk_1 & k_2bmatrixbmatrixx_1(t)\ x_2(t)bmatrix

① $k_1 = \frac{100+a}{b}, k_2 = \frac{16}{b}$
② $k_1 = \frac{100-a}{b}, k_2 = \frac{16}{b}$
③ $k_1 = \frac{100+a}{b}, k_2 = -\frac{16}{b}$
④ $k_1 = \frac{100-a}{b}, k_2 = -\frac{16}{b}$

정답 1번

출제 포인트

상태 피드백으로 폐루프 특성방정식을 구성한 뒤, 원하는 감쇠비와 정착시간으로부터 표준 2차 특성방정식의 계수를 얻어 제어이득 k_1, k_2를 결정하는 문제이다. 상태공간 표현에서 폐루프 시스템 행렬을 세우는 과정과 표준형 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$과의 계수 비교가 핵심이다.

조건 정리

시스템 행렬은 A=bmatrix0&1\ a&0bmatrix, B=bmatrix0\ bbmatrix이고 상태 피드백은 u(t)=-bmatrixk_1&k_2bmatrixx(t)이다. 요구 성능은 감쇠비 $\zeta = 0.8$, 정착시간 $t_s = 0.5$초이며 $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$로 정의된다.

사용할 공식

폐루프 상태행렬은 A-BK=bmatrix0&1\ a-bk_1&-bk_2bmatrix이며, 이때 특성방정식은 $s^2 + bk_2 s + (bk_1 - a) = 0$이다. 이를 표준 2차 형태 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$과 계수 비교하여 $bk_2 = 2\zeta\omega_n$, $bk_1 - a = \omega_n^2$을 얻는다.

계산 과정

정착시간 조건 $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.5$로부터 $\zeta\omega_n = 8$이다. $\zeta = 0.8$이므로 $\omega_n = 10$이 되고, 따라서 $\omega_n^2 = 100$, $2\zeta\omega_n = 16$이다.
계수 비교식 $bk_2 = 16$에서 $k_2 = \frac{16}{b}$를 얻는다.
계수 비교식 $bk_1 - a = 100$에서 $bk_1 = 100 + a$, 즉 $k_1 = \frac{100+a}{b}$를 얻는다.

NoteBase

선지 판단

① k1=(100+a)/b, k2=16/b: 계산 결과와 정확히 일치한다. (O)
② k1=(100-a)/b, k2=16/b: k1의 부호가 틀린 표현이다. bk1-a=100에서 bk1=100+a이므로 분자는 100-a가 아니라 100+a가 되어야 한다. → 100-a/b가 아니라 (100+a)/b (X)
③ k1=(100+a)/b, k2=-16/b: k2의 부호가 틀린 표현이다. bk2=2\zeta\omega_n=16>0이므로 k2는 음수가 아니라 양수 16/b가 되어야 한다. → -16/b가 아니라 16/b (X)
④ k1=(100-a)/b, k2=-16/b: k1, k2 모두 부호가 틀린 표현이다. 위와 같은 이유로 k1은 (100+a)/b, k2는 16/b가 되어야 한다. (X)

오답 포인트

가장 흔한 실수는 폐루프 특성방정식을 세울 때 $u = -Kx$의 부호를 놓쳐 $a - bk_1$과 $-bk_2$의 부호를 반대로 적는 것이다. 상태행렬 $A - BK$를 직접 전개해 특성방정식 $\det(sI - (A - BK)) = 0$을 정확히 유도해야 하며, 이를 건너뛰고 공식만 암기하면 부호 오류가 생기기 쉽다. 또한 $t_s = 4/(\zeta\omega_n)$에서 $\zeta\omega_n$을 구한 뒤 이를 그대로 ω_n^2으로 착각하지 않도록 주의해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

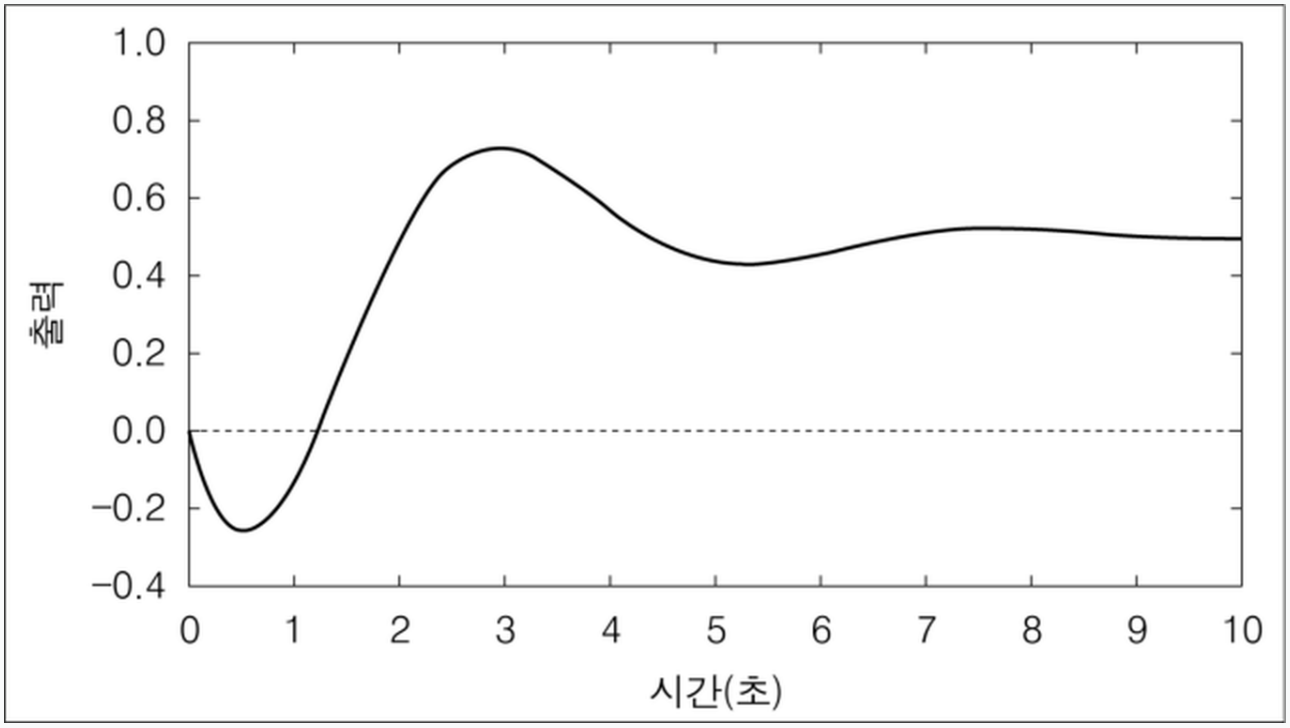
상태 피드백 문제는 항상 (1) 폐루프 행렬 $A - BK$ 전개, (2) 특성방정식 $\det(sI - (A - BK)) = 0$ 유도, (3) 표준 2차식 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$과 계수 비교, 이 세 단계를 순서대로 밟아 부호 실수를 방지한다. 정착시간 공식이 문제에서 주어지면 그 정의식을 그대로 사용해 $\zeta\omega_n$부터 구하고, ω_n을 별도로 구해 ω_n^2을 계산한다.

암기 포인트

2차 표준형의 두 핵심 계수는 $2\zeta\omega_n$(감쇠항, s의 1차 계수)과 ω_n^2(고유진동수 제곱, 상수항)이다. 상태 피드백 폐루프 특성방정식 $s^2 + bk_2 s + (bk_1 - a) = 0$에서 s의 1차 계수는 k_2 관련 항, 상수항은 k_1 관련 항임을 기억해 둔다.

NoteBase

문 18. 그림과 같은 단위 계단(unit step) 응답을 갖는 선형 시불변(time-invariant) 시스템의 전달함수로 가장 적합한 것은?



① $\frac{s+1}{s^2+s+2}$
② $\frac{1-s}{s^2+s+2}$
③ $\frac{s+1}{s^2+s+1}$
④ $\frac{1-s}{s^2+s+1}$

정답 2번

출제 포인트

그래프로 주어진 단위 계단 응답의 두 가지 특징 — (1) 응답이 시작하자마자 잠시 음(-)의 값으로 내려갔다가(언더슈트) 뒤늦게 양(+)의 방향으로 올라가는 모양과, (2) 진동이 잦아든 뒤 수렴하는 정상상태 값 — 을 전달함수의 분자·분모 구조와 최종값 정리로 연결하는 문제이다. 초기에 반대 방향으로 움직이는 응답은 우반평면(right-half plane) 영점을 가진 비최소위상(non-minimum phase) 시스템의 전형적인 특징이고, 정상상태 값은 최종값 정리로 계산한다.

조건 정리

그래프에서 읽을 수 있는 조건은 두 가지이다. 첫째, 입력이 단위 계단(1/s)으로 걸리자마자 t=0 부근에서 응답 y(t)가 즉시 음의 값(약 -0.25)으로 내려갔다가 이후에야 양의 값으로 올라간다. 둘째, 진동이 잦아든 이후 y(t)는 약 0.5 부근의 값으로 수렴한다(정상상태값 ≈ 0.5).

NoteBase

사용할 공식

정상상태값은 최종값 정리로 구한다. 입력이 단위 계단이므로 $Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$이고, $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$ 즉 정상상태값은 전달함수에 $s = 0$을 대입한 값과 같다. 한편 응답이 초반에 입력과 반대 방향으로 움직이는 현상(언더슈트 후 반전)은 전달함수 분자가 $s = 1$에서 영(우반평면 영점, 즉 $(1 - s)$ 꼴)을 가질 때 나타나는 비최소위상 시스템의 특징이다.

계산 과정

① $G(0) = \frac{0+1}{0+0+2} = \frac{1}{2} = 0.5$, 정상상태값은 그래프와 일치하지만 분자가 $(s + 1)$로 우반평면 영점이 없어 초기에 음의 값으로 내려가는 언더슈트를 만들 수 없다.
② $G(0) = \frac{1-0}{0+0+2} = \frac{1}{2} = 0.5$, 정상상태값이 그래프의 약 0.5와 일치하고, 분자가 $(1 - s)$로 $s = 1$에 우반평면 영점을 가져 초기 응답이 반대 방향(음의 값)으로 움직인 뒤 상승하는 그래프의 모양과 부합한다.
③ $G(0) = \frac{0+1}{0+0+1} = 1$, 정상상태값이 1이 되어 그래프의 약 0.5와 맞지 않는다.
④ $G(0) = \frac{1-0}{0+0+1} = 1$, 분자는 우반평면 영점을 가져 초기 언더슈트 모양은 설명되지만 정상상태값이 1이 되어 그래프의 약 0.5와 맞지 않는다.

선지 판단

① X: 정상상태값 0.5는 맞으나 분자가 $(s + 1)$이라 우반평면 영점이 없어 초반 언더슈트(음의 응답)를 설명하지 못한다.
② O: 정상상태값 0.5와 초반 언더슈트(비최소위상 특성) 두 가지 모두 그래프와 일치한다.
③ X: 정상상태값이 1이 되어 그래프의 약 0.5와 맞지 않고, 분자에도 우반평면 영점이 없다.
④ X: 초반 언더슈트는 설명되지만 정상상태값이 1이 되어 그래프의 약 0.5와 맞지 않는다.

오답 포인트

①과 ③처럼 분자가 $(s + 1)$ 꼴이면 정답 후보에서 먼저 제외해야 한다 — 좌반평면 영점만 있는 시스템은 계단 입력에 대해 처음부터 입력과 같은 방향(양의 방향)으로 반응하지, 그래프처럼 잠시 음의 값으로 내려가지 않는다. 그리고 ③, ④처럼 분모가 $s^2 + s + 1$이면 $G(0) = 1$이 되어 그래프가 보여주는 0.5 부근의 정상상태값과 어긋난다. 최종값과 초기 거동(언더슈트 유무) 두 조건을 모두 만족하는 선지를 골라야 실수를 피할 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위 계단 응답 그래프가 주어지고 전달함수를 고르는 문제는 (1) 그래프의 정상상태값을 눈으로 읽고 각 선지에 $s = 0$을 대입해 $G(0)$과 비교하고, (2) 그래프가 t=0 부근에서 입력과 반대 방향으로 움직이는지(언더슈트 후 반전)를 확인해 분자에 우반평면 영점, 즉 $(1 - s)$와 같은 항이 있는지 확인하는 두 단계로 접근한다. 두 조건을 모두 만족하는 선지가 정답이다.

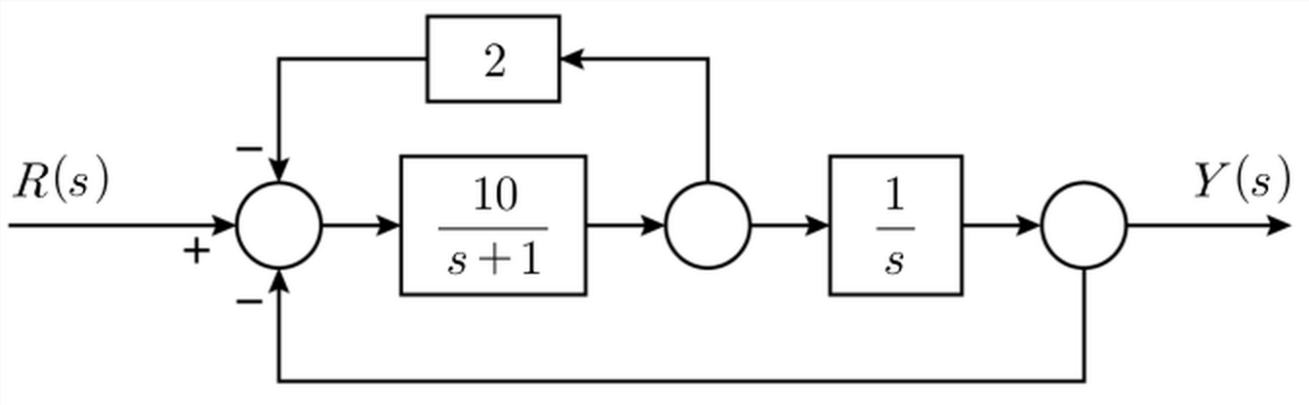
NoteBase

암기 포인트

최종값 정리: 단위 계단 입력에 대한 정상상태값은 $G(0)$과 같다. 비최소위상 시스템(전달함수 분자에 우반평면 영점, 즉 $(1 - s)$ 꼴 존재)은 계단 응답 초반에 입력과 반대 방향으로 움직였다가(언더슈트) 뒤늦게 정상 방향으로 상승하는 특징을 보인다.

NoteBase

문 19. 다음 시스템을 상태공간모델로 바르게 표현한 것은?



① x(t): bmatrix0&1\\-21&-10bmatrixx(t)+bmatrix0\\1bmatrixu(t) y(t): bmatrix10&0bmatrixx(t)

② x(t): bmatrix0&-21\\1&-10bmatrixx(t)+bmatrix0\\10bmatrixu(t) y(t): bmatrix0&1bmatrixx(t)

③ x(t): bmatrix-21&-10\\1&0bmatrixx(t)+bmatrix1\\0bmatrixu(t) y(t): bmatrix0&10bmatrixx(t)

④ x(t): bmatrix0&-21\\1&-10bmatrixx(t)+bmatrix10\\0bmatrixu(t) y(t): bmatrix0&1bmatrixx(t)

정답 3번

출제 포인트

되먹임이 두 군데(이득 2 경로, 단위 되먹임)로 걸린 블록선도를 보고 폐루프 전달함수 $Y(s)/R(s)$를 구한 뒤, 이를 실제로 만들어 내는 상태공간 모델 (A, B, C)를 골라내는 문제이다. 상태변수를 어떻게 잡느냐에 따라 A, B, C의 형태는 여러 가지로 나올 수 있으므로, 결국 $C(sI - A)^{-1}B$가 원래 전달함수와 같아지는 보기만이 정답이 된다.

조건 정리

블록선도의 구성은 다음과 같다. 첫 번째 합산점에는 $+R(s)$, 이득 2 블록에서 오는 신호의 음(-)의 되먹임, $Y(s)$의 음(-)의 되먹임이 들어온다. 합산점의 출력은 $G_1(s) = 10/(s+1)$ 블록을 지나 $v(s)$가 되고, 이 $v(s)$는 별도의 덧셈 없이 그대로 분기되어 한 갈래는 이득 2 블록으로 올라가 첫 합산점의 되먹임이 되고, 다른 갈래는 $G_2(s) = 1/s$ 블록으로 들어가 출력 $Y(s)$가 된다. $Y(s)$는 다시 첫 합산점으로 음의 되먹임을 이룬다.

사용할 공식

$e(s) = R(s) - 2v(s) - Y(s)$, $v(s) = G_1(s)e(s)$, $Y(s) = G_2(s)v(s)$이며, 이로부터 폐루프 전달함수는 $Y(s)/R(s) = \frac{G_1G_2}{1 + 2G_1 + G_1G_2}$이다. 상태공간 모델의 타당성은 $Y(s)/R(s) = C(sI - A)^{-1}B$로 확인한다.

NoteBase

계산 과정

$G_1G_2 = \frac{10}{s(s+1)}$, $2G_1 = \frac{20}{s+1}$이므로
$1 + 2G_1 + G_1G_2 = \frac{s(s+1) + 20s + 10}{s(s+1)} = \frac{s^2 + 21s + 10}{s(s+1)}$
따라서 $Y(s)/R(s) = \frac{10/(s(s+1))}{(s^2 + 21s + 10)/(s(s+1))} = \frac{10}{s^2 + 21s + 10}$이 시스템이 실제로 가져야 할 전달함수이다.
이제 3번 보기를 검증한다. A=bmatrix-21&-10\\1&0bmatrix에서
sI-A=bmatrixs+21&10\\-1&sbmatrix이고 $\det(sI - A) = s(s + 21) + 10 = s^2 + 21s + 10$으로 목표 전달함수의 분모와 정확히 일치한다.
(sI-A)^-1=(1)/(s^2+21s+10)bmatrixs&-10\\1&s+21bmatrix이고 B=bmatrix1\\0bmatrix를 곱하면
(sI-A)^-1B=(1)/(s^2+21s+10)bmatrixs\\1bmatrix이다.
여기에 C=bmatrix0&10bmatrix를 곱하면 $C(sI - A)^{-1}B = \frac{10}{s^2 + 21s + 10}$이 되어 목표 전달함수와 완전히 일치한다.
반면 ①과 ④의 A=bmatrix0&1\\-21&-10bmatrix 또는 A=bmatrix0&-21\\1&-10bmatrix는 특성방정식이 $s^2 + 10s + 21$이 되어 s의 계수 21과 상수항 10의 위치가 뒤바뀌므로 분모부터 다르다.

선지 판단

① X: A=bmatrix0&1\\-21&-10bmatrix의 특성방정식은 $s^2 + 10s + 21$이 되어, 시스템이 실제로 가져야 하는 $s^2 + 21s + 10$과 계수 위치가 뒤바뀌어 다르다.
② X: A=bmatrix0&-21\\1&-10bmatrix도 특성방정식이 $s^2 + 10s + 21$로 ①과 같이 틀리고, $C(sI - A)^{-1}B$를 계산하면 분자에 s가 남아 $10s/(s^2 + 10s + 21)$가 되어 형태 자체가 원래 전달함수(분자가 상수 10)와 다르다.
③ O: A=bmatrix-21&-10\\1&0bmatrix의 특성방정식이 $s^2 + 21s + 10$으로 목표와 일치하고, B=bmatrix1\\0bmatrix, C=bmatrix0&10bmatrix로 계산한 $C(sI - A)^{-1}B = 10/(s^2 + 21s + 10)$이 시스템의 전달함수와 완전히 일치한다.
④ X: A가 ②와 같은 bmatrix0&-21\\1&-10bmatrix이라 특성방정식이 $s^2 + 10s + 21$로 틀리고, B=bmatrix10\\0bmatrix, C=bmatrix0&1bmatrix로 계산해도 $10/(s^2 + 10s + 21)$이 되어 분모가 맞지 않는다.

오답 포인트

이득 2 경로가 $1/s$ 블록의 출력이 아니라 입력 쪽인 $v(s)$ 지점에서 분기된다는 것을 놓치면 되먹임 구조를 잘못 세워 특성방정식의 계수 21과 10의 자리를 서로 바꿔 쓰는 실수가 흔하다. 또한 상태공간 표현은 상태변수를 어떻게 정의하느냐에 따라 A, B, C의 겉모습이 달라질 수 있으므로, 보기들의 형태가 비슷하다고 곧바로 판단하지 말고 반드시 $C(sI - A)^{-1}B$를 계산해 실제 전달함수와 비교해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

되먹임이 여러 군데 있는 블록선도가 나오면 먼저 각 합산점의 부호와 분기점의 정확한 위치를 표시한 뒤, 전방향 경로와 되먹임 경로를 대수적으로 정리해 폐루프 전달함수부터 구한다. 이후 상태공간 보기들이 여러 개 주어지면 각 보기의 $\det(sI - A)$로 분모부터 걸러낸 다음, 남은 보기에 대해 $C(sI - A)^{-1}B$를 끝까지 계산해 분자까지 정확히 일치하는 보기를 최종 정답으로 고른다.

암기 포인트

폐루프 전달함수 Y(s)/R(s)=(G_1G_2)/(1+(되먹임 이득의 합)); 상태공간 검증식 $Y(s)/R(s) = C(sI - A)^{-1}B$; 특성방정식은 $\det(sI - A)$로 구하며 이는 폐루프 전달함수의 분모와 반드시 일치해야 한다.

NoteBase

문 20. 폐루프 전달함수 $T(s)$가 다음과 같이 주어진 음의 단위 피드백 시스템에서 정적속도오차상수(static velocity error constant) K_v가 5일 때, 상수 a와 K값은?

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s^2 + 20s + 200)(s + a)}$$

① a: 10, K: 2,000

② a: 10, K: 200

③ a: 0, K: 1,000

④ a: 0, K: 40

정답 1번

출제 포인트

폐루프 전달함수 $T(s)$만 주어진 상태에서 단위 음의 피드백 관계식을 이용해 개루프 전달함수 $G(s)$를 역산하고, 정적속도오차상수 K_v 조건을 적용해 미지수 a, K를 동시에 구하는 문제이다. 핵심은 K_v가 유한한 값(0도 무한대도 아닌 5)으로 주어졌으므로 개루프 전달함수가 원점에 정확히 극 하나를 가지는 형(type-1) 시스템이어야 한다는 조건을 이끌어내는 것이다.

조건 정리

단위 음의 피드백 시스템이므로 $T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$의 관계가 성립한다. 주어진 폐루프 전달함수는 $T(s) = \frac{K}{(s^2 + 20s + 200)(s + a)}$이고, 정적속도오차상수 $K_v = 5$이다. 구해야 할 값은 상수 a와 K이다.

사용할 공식

단위 피드백에서 개루프 전달함수는 $G(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)}$로 역산할 수 있다. 정적속도오차상수는 $K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$로 정의되며, 이 극한이 0이 아닌 유한값을 가지려면 $G(s)$가 원점에 정확히 하나의 극(적분기 1개, type-1)을 가져야 한다.

계산 과정

분모를 $D(s) = (s^2 + 20s + 200)(s + a)$라 하면 $T(s) = \frac{K}{D(s)}$이므로$G(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} = \frac{K}{D(s) - K}$이다. $D(s)$를 전개하면 $D(s) = s^3 + (20 + a)s^2 + (200 + 20a)s + 200a$이므로
$D(s) - K = s^3 + (20 + a)s^2 + (200 + 20a)s + (200a - K)$가 된다. $G(s)$가 원점에 극을 가지려면(상수항이 0이 되어 s로 묶여야 하므로) $200a - K = 0$, 즉 $K = 200a$가 성립해야 한다. 이때
$D(s) - K = s[s^2 + (20 + a)s + (200 + 20a)]$이므로$G(s) = \frac{K}{s[s^2 + (20 + a)s + (200 + 20a)]}$이고
$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{K}{200 + 20a}$이다. $K = 200a$를 대입하면$K_v = \frac{200a}{200 + 20a} = 5200a = 1000 + 100a$
$100a = 1000 \Rightarrow a = 10$따라서 $K = 200a = 200 \times 10 = 2{,}000$이다.

NoteBase

선지 판단

① a=10, K=2,000: $K = 200a$ 조건(2,000=200×10)을 만족해 원점에 극이 생기고, $K_v = 2000/(200 + 200) = 2000/400 = 5$로 조건과 정확히 일치한다. (O, 정답)
② a=10, K=200: $200a = 2{,}000 \neq 200$이므로 $200a - K = 1{,}800 \neq 0$이 되어 $G(s)$에 원점 극이 생기지 않는다. 이 경우 시스템은 type-0이 되어 $K_v = 0$이 되므로 $K_v = 5$ 조건과 맞지 않는다. (X)
③ a=0, K=1,000: $200a = 0 \neq 1{,}000$이므로 마찬가지로 $200a - K \neq 0$이 되어 원점 극이 생기지 않고 $K_v = 0$이 된다. (X)
④ a=0, K=40: $200a = 0 \neq 40$이므로 역시 원점 극 조건이 깨져 $K_v = 0$이 된다. (X)

오답 포인트

이 문제의 함정은 K_v가 유한하고 0이 아닌 값(5)으로 주어졌다는 사실 자체가 $G(s)$의 극 구조를 제약한다는 점을 놓치는 것이다. $200a = K$ 조건을 세우지 않고 $D(s) - K$의 상수항을 그대로 둔 채 $s \to 0$ 극한을 취하면 K_v가 0으로 계산되어 문제의 조건과 모순되는데도, 이를 알아채지 못하고 아무 선지나 대입해 어림짐작으로 고르면 ②·③·④처럼 $K = 200a$를 만족하지 않는 오답에 빠지기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

폐루프 전달함수만 주어지고 개루프 전달함수를 묻거나 오차상수 조건이 함께 나오면, 먼저 $G(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)}$로 변환한다. 그다음 정적위치오차상수($K_p$)·정적속도오차상수($K_v$)·정적가속도오차상수($K_a$) 중 어느 것이 유한값으로 주어졌는지를 보고, 그 값이 유한하고 0이 아니려면 개루프 전달함수가 정확히 그에 대응하는 개수의 원점 극(적분기)을 가져야 한다는 조건식(분모 상수항=0)을 먼저 세운 뒤 나머지 변수를 구한다.

암기 포인트

단위 피드백 변환 공식 $G(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)}$와 오차상수 정의 $K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$, $K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$, $K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$를 기억해 둔다. K_v가 유한하고 0이 아닌 값을 가지려면 개루프 전달함수는 반드시 type-1(원점 극 1개) 시스템이어야 하며, 이는 분모다항식의 상수항이 0이 되는 조건으로 나타난다.

NoteBase