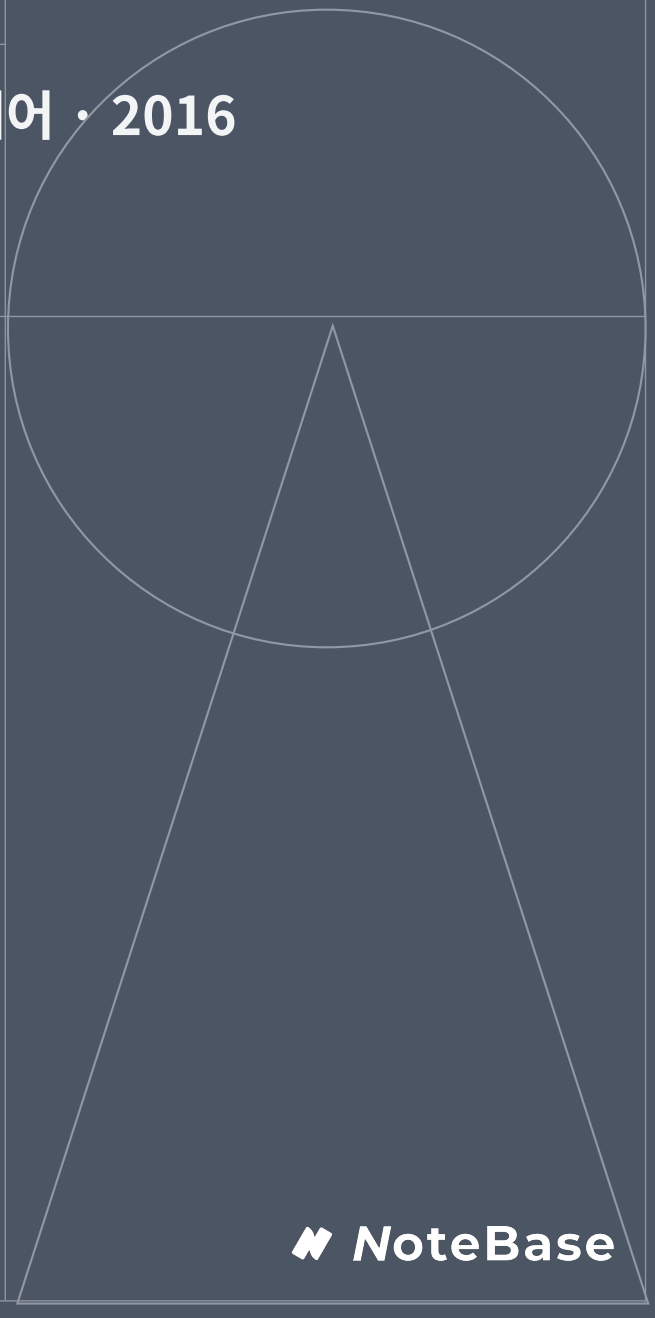
기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2016



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2016

공무원/국가직/7급 · 자동제어 · 2016

문 1. 단위계단(unit step) 입력에 대한 2차 시스템의 시간역 성능에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 시간응답은 과도응답과 정상상태응답으로 나누어진다.

② 시간응답의 최댓값은 감쇠비(damping ratio)에 의존한다.

③ 정착시간을 정상상태응답의 ±2% 이내에 도달하는 시간으로 정의할 때, 정착시간은 시스템 시정수의 약 4배이다.

④ 시간응답은 선형시스템에서만 존재한다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 2차 시스템의 단위계단 시간응답에서 과도응답과 정상상태응답의 구분, 최대오버슈트와 정착시간의 의미, 시간응답이 적용되는 시스템 범위를 묻는 문제이다.

핵심 개념

시간응답은 입력에 대해 출력이 시간에 따라 어떻게 변하는지를 나타내며, 과도응답과 정상상태응답으로 나뉜다.
과도응답은 정상상태에 도달하기 전의 응답이고, 최대오버슈트와 정착시간 같은 시간영역 성능지표가 여기에 속한다.
정상상태응답은 시간이 충분히 지난 뒤의 최종 응답이다.
2차 시스템의 2% 정착시간은 보통 $T_s \approx 4/(\zeta\omega_n) = 4/\sigma$로 두며, 이는 지배극의 시정수 $1/\sigma$의 약 4배에 해당한다.
시간응답은 선형시스템에만 한정되지 않고 모든 동적 시스템에서 정의될 수 있으며, 선형시스템에서는 해석이 더 체계적일 뿐이다.

NoteBase

선지별 해설

① O: 시간응답은 일반적으로 과도응답과 정상상태응답으로 구분한다. 과도응답은 초기 변화 구간이고 정상상태응답은 최종 수렴 구간이므로 진술이 맞다.
② O: 단위계단응답의 최대오버슈트 M_p는 감쇠비 ζ에 의해 결정된다. 따라서 최대값도 최종값에 오버슈트가 더해진 형태가 되어 감쇠비에 의존한다.
③ O: 2% 기준 정착시간은 보통 $T_s \approx 4/\sigma = 4/(\zeta\omega_n)$로 근사한다. 따라서 정착시간이 지배 시정수의 약 4배라는 설명은 맞다.
④ X: 틀린 부분은 "선형시스템에서만"이다. 시간응답은 비선형시스템에도 존재하며, 선형시스템에서는 전달함수와 고전적 성능지표로 해석하기 쉽다는 점만 다르다. 올바르게는 "시간응답은 선형시스템과 비선형시스템 모두에서 존재한다"이다.

오답 포인트

시간응답이라는 개념 자체와 선형시스템 해석도구를 혼동하면 ④를 맞는 설명처럼 보기 쉽다. 또 ③의 "약 4배"는 1차 시스템의 4τ만 떠올리면 막연하게 외운 문장처럼 보이지만, 2차 시스템에서도 $T_s \approx 4/\sigma$라는 형태로 같은 구조가 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

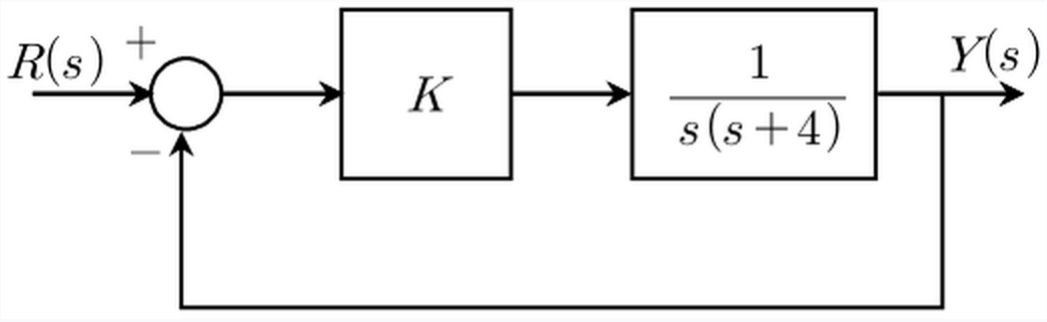
시간응답 관련 선지는 먼저 "응답의 구분", "성능지표의 의미", "적용 대상의 범위"를 분리해서 본다. 개념 자체를 선형시스템에만 한정하면 틀린 설명이고, 2차 시스템의 대표 지표는 최대오버슈트는 감쇠비, 정착시간은 $4/\sigma$ 근사와 연결해 판단한다.

암기 포인트

시간응답은 과도응답+정상상태응답, 최대오버슈트는 감쇠비, 2% 정착시간은 $4/\sigma$, 시간응답은 비선형시스템에도 존재한다.

NoteBase

문 2. 다음 피드백 제어시스템에서 감쇠비를 $\frac{1}{\sqrt{2}}$로 설정하기 위한 제어이득 K의 값은?



① 4

② 6

③ 8

④ 10

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 단위피드백 2차계의 폐루프 특성방정식을 표준 2차형과 비교하여 감쇠비 ζ가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$가 되도록 하는 제어이득 K를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전달함수는 전진경로가 $\frac{K}{s(s+4)}$인 단위피드백계이다.
구해야 할 값은 감쇠비 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$를 만족시키는 K이다.
폐루프 특성방정식을 표준 2차형 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$와 비교하면 된다.

NoteBase

사용할 공식

폐루프 특성방정식은
$1 + \frac{K}{s(s+4)} = 0$
이므로
$s(s+4) + K = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + K = 0$
이다.
표준 2차형
$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$
과 계수를 비교하면
$2\zeta\omega_n = 4, \quad \omega_n^2 = K$
를 얻는다.
이 공식을 쓰는 이유는 폐루프가 2차 특성방정식으로 정리되며, 감쇠비는 표준 2차형의 s항 계수와 고유진동수로 결정되기 때문이다.

계산 과정

1. 폐루프 특성방정식은 $s^2 + 4s + K = 0$이다.
2. 표준 2차형과 비교하면 $2\zeta\omega_n = 4$이므로 $\zeta\omega_n = 2$이다.
3. $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$를 대입하면 $\omega_n = \frac{2}{\zeta} = 2\sqrt{2}$이다.
4. 따라서 $K = \omega_n^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$이다.

선지별 해설

① X
- $K = 4$이면 특성방정식은 $s^2 + 4s + 4 = 0$이고 $\omega_n = 2, \zeta = \frac{4}{2\omega_n} = 1$이므로 과감쇠가 아니라 임계감쇠에 해당한다.
- 틀린 표현은 감쇠비 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 조건에서 $K = 4$라고 본 점이다. 올바르게는 $K = 4$이면 $\zeta = 1$이다.

② X
- $K = 6$이면 $\omega_n = \sqrt{6}$이므로 $\zeta = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$이고 $\frac{1}{\sqrt{2}}$보다 크다.
- 틀린 표현은 감쇠비 조건을 만족하는 값이 6이라는 점이다. 올바르게는 $K = 6$이면 요구 감쇠비보다 감쇠가 더 큰 계가 된다.

③ O
- $K = 8$이면 $\omega_n = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$이고 $\zeta = \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$가 되어 조건을 정확히 만족한다.
- 따라서 계산 결과와 일치하는 정답은 3번이다.

④ X
- $K = 10$이면 $\omega_n = \sqrt{10}$이므로 $\zeta = \frac{4}{2\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$이고 $\frac{1}{\sqrt{2}}$보다 작다.
- 틀린 표현은 감쇠비 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 조건에서 $K = 10$이라고 본 점이다. 올바르게는 $K = 10$이면 오히려 감쇠비가 더 작아져 언더댐프 성향이 더 커진다.

NoteBase

오답 포인트

개루프 전달함수 $\frac{K}{s(s+4)}$를 그대로 보고 감쇠비 공식을 바로 적용하면 오답이 된다. 반드시 단위피드백 폐루프 특성방정식 $s^2+4s+K=0$로 바꾼 뒤 표준 2차형과 계수를 비교해야 한다. 또한 $2\zeta\omega_n=4$에서 $\omega_n=2$로 성급하게 두면 ζ 조건을 빠뜨리는 실수가 생긴다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위피드백 2차계는 먼저 $1+G(s)=0$에서 폐루프 특성방정식을 만든다. 그다음 $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$와 계수를 비교하여 s항에서 $\zeta\omega_n$를, 상수항에서 K를 연결하면 된다.

암기 포인트

단위피드백 2차계는 폐루프 특성방정식을 표준형과 비교하여 $2\zeta\omega_n$와 ω_n^2를 바로 읽어내는 방식으로 푼다.

NoteBase

문 3. 다음 상태공간 방정식으로 표현된 시스템의 전달함수 $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$가 중복극점 $s=-1$을 가질 때 $a+b$의 값은?

bmatrixx_1 \ x_2bmatrix=bmatrixa & b \ 1 & -2bmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix+bmatrix1 \ 0bmatrixu
y=[1 0]bmatrixx_1 \ x_2bmatrix

① -2

② -1

③ 0

④ 1

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태공간식에서 전달함수 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$를 구한 뒤, 분모가 중복극 $s=-1$을 갖도록 계수를 맞추는 문제이다.

조건 정리

상태행렬은 $A=[a, b; 1, -2]$, 입력행렬은 $B=[1; 0]$, 출력행렬은 $C=[1, 0]$이다.
구해야 할 값은 전달함수의 극이 $s=-1$에서 중복될 때의 $a+b$이다.
분자는 $s+2$가 되므로 $s=-1$에서 영점-극 상쇄가 일어나지 않는다.

사용할 공식

전달함수 공식은 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$이다.
중복극 $s=-1$은 전달함수 분모가 $(s+1)^2$을 인수로 갖는다는 뜻이다.
이 시스템은 2차 상태공간식이므로 분모 특성식 전체를 $(s+1)^2$와 계수 비교하면 된다.

NoteBase

계산 과정

$sI-A=[s-a,\ -b;\ -1, s+2]$이다.
따라서 분모는 행렬식
$(s-a)(s+2)-b=s^2+(2-a)s-2a-b$
이다.
전달함수는
$G(s)=\frac{s+2}{(s-a)(s+2)-b}$
가 된다.
중복극이 $s=-1$이므로 분모는
$(s+1)^2=s^2+2s+1$
과 같아야 한다.
계수 비교를 하면 $2-a=2$에서 $a=0$이고, $-2a-b=1$에서 $b=-1$이다.
따라서 $a+b=0+(-1)=-1$이다.

선지 판단

① X: -2는 계산 결과 $a+b=-1$과 다르다. 틀린 값이며, 올바르게는 $a+b=-1$이다.
② O: 계수 비교로 $a=0, b=-1$이 나오므로 $a+b=-1$이다.
③ X: 0은 a의 값만 본 결과와 같고 b를 더하지 않은 값이다. 틀린 값이며, 올바르게는 $a+b=-1$이다.
④ X: 1은 분모 상수항을 $a+b$로 착각할 때 고르기 쉬운 값이다. 틀린 값이며, 올바르게는 $a+b=-1$이다.

오답 포인트

출제자가 노린 함정은 상태행렬의 고유값만 보거나 분모 상수항 $-2a-b$를 $a+b$와 혼동하는 데 있다.
전달함수 분모를 먼저 구하고, $(s+1)^2$와 계수 비교한 뒤 마지막에 $a+b$를 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태공간식에서 극 조건이 나오면 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$의 분모를 구한다. 중복극 $s=-\alpha$는 분모가 $(s+\alpha)^2$가 되도록 계수 비교하는 방식으로 판단한다.

암기 포인트

상태공간 전달함수의 극은 $C(sI-A)^{-1}B$의 분모에서 나오고, 중복극 -1은 분모 $(s+1)^2$로 기억한다.

NoteBase

문 4. 다음 상태공간 방정식으로 주어진 개루프 시스템에 상태 피드백 제어기를 설계한다. 제어시스템의 극점이 $-2 \pm j2$가 되도록 하는 제어기 이득 k_1, k_2의 값은?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$u = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

① k_1: 2, k_2: 4

② k_1: 4, k_2: 2

③ k_1: 2, k_2: 7

④ k_1: 7, k_2: 2

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 상태 피드백 $u = -Kx$를 적용한 닫힌루프 행렬의 특성방정식을 목표 극점의 특성다항식과 계수 비교하여 k_1, k_2를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 시스템은 $A = [0, 1; -1, -2], B = [0; 1], K = [k_1, k_2]$이다.
상태 피드백은 $u = -Kx$이므로 닫힌루프 행렬은 $A - BK$이다.
목표 극점은 $-2 \pm j2$이다.

사용할 공식

상태 피드백 $u = -Kx$에서 닫힌루프 특성방정식은 $\det(sI - (A - BK)) = 0$이다.
목표 극점이 p_1, p_2이면 목표 특성다항식은 $(s - p_1)(s - p_2)$이다.
이 공식을 쓰는 이유는 제어기 이득 K가 $A - BK$의 고유값, 즉 닫힌루프 극점을 정하기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

$BK = [0;1][k_1, k_2] = [0, 0; k_1, k_2]$

따라서

$A - BK = [0, 1;\ -1 - k_1,\ -2 - k_2]$

이고 특성다항식은

$\det[s,\ -1; 1 + k_1, s + 2 + k_2] = s^2 + (2 + k_2)s + (1 + k_1)$

이다.

목표 극점 $-2 \pm j2$의 특성다항식은

$(s + 2 - j2)(s + 2 + j2) = (s + 2)^2 + 2^2 = s^2 + 4s + 8$

이다.

계수 비교를 하면 $2 + k_2 = 4$, $1 + k_1 = 8$이므로 $k_2 = 2$, $k_1 = 7$이다.

선지 판단

① X: $k_1 = 2, k_2 = 4$이면 특성다항식이 $s^2 + 6s + 3$이 되어 목표 다항식 $s^2 + 4s + 8$과 다르다. 올바르게는 $k_1 = 7, k_2 = 2$이다.

② X: $k_1 = 4, k_2 = 2$이면 s의 계수는 맞지만 상수항이 $1 + k_1 = 5$가 되어 목표 상수항 8과 다르다. 올바르게는 $k_1 = 7$이다.

③ X: $k_1 = 2, k_2 = 7$이면 s의 계수가 $2 + k_2 = 9$, 상수항이 $1 + k_1 = 3$이 되어 둘 다 맞지 않는다. 올바르게는 $k_1 = 7, k_2 = 2$이다.

④ O: $k_1 = 7, k_2 = 2$이면 특성다항식이 $s^2 + 4s + 8$이 되어 목표 극점 $-2 \pm j2$와 일치한다.

오답 포인트

출제자가 노린 함정은 $A + BK$가 아니라 $A - BK$를 써야 한다는 부호와, k_1은 상수항 $1 + k_1$, k_2는 s의 계수 $2 + k_2$에 대응한다는 위치 구분이다. ②처럼 k_2만 맞추고 k_1을 상수항 8과 끝까지 비교하지 않으면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

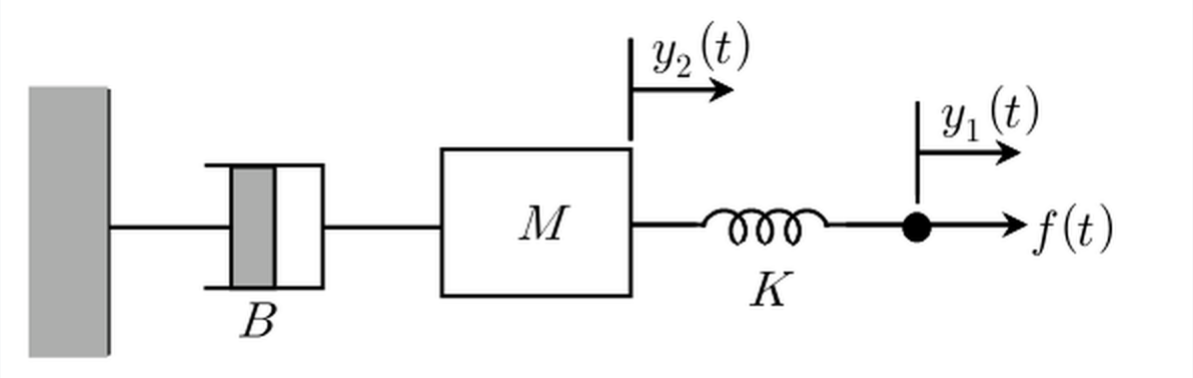
상태 피드백 극점 배치 문제는 먼저 $u = -Kx$의 부호를 반영해 $A - BK$를 만들고, 그다음 $\det(sI - (A - BK))$를 전개한 뒤 목표 극점으로 만든 다항식과 계수 비교한다.

암기 포인트

$u = -Kx$이면 닫힌루프 행렬은 $A - BK$이고, 원하는 극점은 원하는 특성다항식의 계수로 바뀐다.

NoteBase

문 5. 다음 기계진동 시스템에서 전달함수 $\frac{Y_2(s)}{F(s)}$의 극점은? (단, 질량 $M = 5[\text{kg}]$, 점성 마찰계수 $B = 10[\text{N} \cdot \text{s/m}]$, 스프링 상수 $K = 20[\text{N/m}]$이다)



① $s = 0, s = -2$

② $s = 0, s = 2$

③ $s = 2, s = -4$

④ $s = -2, s = 4$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 스프링 오른쪽의 질량이 없는 입력점에 가해진 힘이 그대로 질량에 전달된다는 점을 이용해 $\frac{Y_2(s)}{F(s)}$의 분모와 극점을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $M = 5kg, B = 10N \cdot s/m, K = 20N/m$이다.
출력은 질량의 변위 $Y_2(s)$이고 입력은 외력 $F(s)$이다.
스프링 오른쪽 끝점에는 질량이 없으므로 스프링 힘은 그대로 $F(s)$가 된다.
따라서 K는 변위 입력 문제처럼 분모에 남지 않고 힘 전달 관계를 통해 소거된다.

NoteBase

사용할 공식

질량의 운동방정식은

$M\ddot{y}_2 + B\dot{y}_2 = f(t)$

이다.

라플라스 변환하면

$(Ms^2 + Bs)Y_2(s) = F(s)$

이므로

$\frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs} = \frac{1}{s(Ms + B)}$

이다.

이 공식을 쓰는 이유는 입력이 변위 $y_1(t)$가 아니라 힘 $f(t)$이기 때문이다.

계산 과정

1. 스프링 힘은 $K(y_1 - y_2) = f(t)$이다.
2. 질량에 작용하는 힘은 스프링 힘과 같으므로 $M\ddot{y}_2 + B\dot{y}_2 = f(t)$가 된다.
3. 따라서 전달함수의 분모는 $Ms^2 + Bs$이고, 수치를 대입하면 $5s^2 + 10s = 5s(s + 2)$이다.
4. 극점은 $s = 0, s = -2$이다.

선지별 해설

① O: 분모가 $5s(s + 2)$이므로 극점은 $s = 0, s = -2$이다.

② X: 틀린 표현은 $s = 2$로 본 부분이다. 점성감쇠 $B > 0$인 계의 극점은 우반평면의 $s = 2$가 아니라 $s = -2$가 된다. 올바르게는 $s = 0, s = -2$이다.

③ X: 틀린 표현은 $s = 2, s = -4$로 본 부분이다. $s = 2$는 부호가 반대이고, $s = -4$는 $\frac{B}{M} = 2$를 잘못 계산한 값이다. 올바르게는 $s = 0, s = -2$이다.

④ X: 틀린 표현은 $s = 4$로 본 부분이다. 한 극점 $s = -2$는 맞지만 다른 한 극점은 $s = 4$가 아니라 적분요소에서 나오는 $s = 0$이다. 올바르게는 $s = 0, s = -2$이다.

오답 포인트

스프링 상수 K가 주어졌다고 해서 항상 분모에 K가 들어간다고 보면 오답이 된다. 이 문항은 변위 입력계가 아니라 힘 입력계이므로 스프링은 힘 전달 요소로만 작용한다. 또 $Ms^2 + Bs$를 인수분해할 때 $s + 2$에서 극점이 $s = -2$라는 부호를 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

기계진동 전달함수는 먼저 입력이 변위인지 힘인지부터 구분한다. 힘 입력이면 질량에 직접 작용하는 합력을 써서 운동방정식을 세우고, 마지막에 분모를 인수분해해 극점 부호까지 확인하면 된다.

NoteBase

암기 포인트

힘 입력 질량-댐퍼계는 $\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs}$이고 극점은 $s = 0$과 $s = -\frac{B}{M}$이다.

NoteBase

문 6. 다음 상태공간 방정식에서 가제어성(controllability)을 만족하기 위한 b의 조건은?

bmatrixx_1 \ x_2bmatrix=bmatrix-1 & 2 \ 0 & 1bmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix+bmatrix1 \ bbmatrixu
y=bmatrix1 & 1bmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix

① $b = 0$ 또는 $b = 1$

② $b = 0$ 또는 $b = 2$

③ $b \neq 0$ 이고 $b \neq 1$

④ $b \neq 0$ 이고 $b \neq 2$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 상태공간 모델에서 가제어성 행렬 $Q_c = [B\ AB]$의 계수가 2인지, 즉 행렬식이 0이 아닌지를 판정하는 문제이다.

조건 정리

상태행렬은 $A = [-1, 2; 0, 1]$이고 입력행렬은 $B = [1; b]$이다.
2차 단일입력 시스템이므로 가제어성은 B와 AB가 서로 일차독립인지로 판단된다.

사용할 공식

2차 단일입력 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu$의 가제어성 행렬은 $Q_c = [B\ AB]$이다.
$\det Q_c \neq 0$이면 $\text{rank}(Q_c) = 2$가 되어 가제어성을 만족한다.

계산 과정

$AB = AB = [-1, 2; 0, 1][1; b] = [2b - 1; b]$이다.
따라서 $Q_c = [B\ AB] = [1, 2b - 1; b, b]$이다.
행렬식은 $\det Q_c = 1 \cdot b - b(2b - 1) = 2b - 2b^2 = 2b(1 - b)$이다.
가제어성 조건은 $2b(1 - b) \neq 0$이므로 $b \neq 0$이고 $b \neq 1$이다.

NoteBase

선지 판단

① X: $b=0$ 또는 $b=1$이면 $\det Q_c = 2b(1-b) = 0$이 되어 가제어성을 만족하지 않는다. 틀린 표현은 $b=0$ 또는 $b=1$이고, 올바르게는 $b \neq 0$이고 $b \neq 1$이다.
② X: $b=0$은 가제어성을 깨뜨리는 값이고, $b=2$는 $\det Q_c = -4$가 되어 오히려 가제어성을 만족한다. 틀린 표현은 $b=0$ 또는 $b=2$이고, 올바르게는 $b \neq 0$이고 $b \neq 1$이다.
③ O: $b \neq 0$이고 $b \neq 1$이면 $2b(1-b) \neq 0$이므로 Q_c의 계수가 2가 된다. 따라서 가제어성 조건과 정확히 일치한다.
④ X: $b=2$는 제외할 값이 아니며, 이 선지는 $b=1$을 허용하므로 가제어성 조건을 놓친다. 틀린 표현은 $b \neq 2$이고, 올바르게는 $b \neq 1$이다.

오답 포인트

출제자가 노린 함정은 B의 두 번째 성분 b만 보고 $b=0$만 제외하거나, 계산 중 $1-b$ 인자를 놓쳐 $b=1$도 제외해야 한다는 점을 빠뜨리는 데 있다. 또한 $b=2$는 특이값이 아니라 정상적으로 가제어성을 만족하는 값이다.

다시 나오면 이렇게 판단

상태공간 가제어성 문제는 먼저 $Q_c = [B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B]$를 만들고, 그 계수 또는 행렬식이 최대 차수인지로 판단한다. 2차 단일입력에서는 $[B\ AB]$의 행렬식이 0이 되는 b값만 제외한다.

암기 포인트

2차 단일입력 가제어성은 B와 AB의 일차독립성이고, $\det[B\ AB] \neq 0$이 핵심 조건이다.

NoteBase

문 7. 다음 전방경로(forward path) 전달함수를 갖는 단위 피드백 제어시스템이 안정할 K의 범위와 안정한계(marginally stable)에 놓일 때의 주파수 ω_s[rad/sec]는?

$G(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+20)}$

① $K > 6000,\ \omega_s = \sqrt{200}$

② $0 < K < 6000,\ \omega_s = \sqrt{200}$

③ $K > 6000,\ \omega_s = \sqrt{20}$

④ $0 < K < 6000,\ \omega_s = \sqrt{20}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 단위 피드백 폐루프의 특성방정식을 세운 뒤 Routh 판별법으로 안정한 K의 범위와 안정한계에서의 진동 주파수 ω_s를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 전방경로 전달함수는 $G(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+20)}$이다.
단위 피드백이므로 폐루프 특성방정식은 $1 + G(s) = 0$으로 둔다.
구해야 할 값은 안정 조건을 만족하는 K의 범위와 안정한계일 때의 ω_s이다.

사용할 공식

폐루프 특성방정식은 $1 + \frac{K}{s(s+10)(s+20)} = 0$이므로 $s(s+10)(s+20) + K = 0$이다.
전개하면 $s^3 + 30s^2 + 200s + K = 0$이다.
3차식 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$의 안정조건은 Routh 표 첫 열이 모두 양수인 것이다.
이 문제는 K가 계수에 직접 들어가므로 근을 직접 구하기보다 Routh 판별법을 쓰는 것이 가장 빠르다.

NoteBase

계산 과정

1. 특성방정식을 세우면 $s^3 + 30s^2 + 200s + K = 0$이다.
2. Routh 표를 만들면 첫 두 행은 s^3행이 1, 200, s^2행이 30, K이다.
3. s^1행의 첫 항은 $\frac{30 \cdot 200 - K}{30} = \frac{6000 - K}{30}$이다.
4. 안정하려면 첫 열이 모두 양수여야 하므로 $1 > 0$, $30 > 0$, $\frac{6000 - K}{30} > 0$, $K > 0$를 만족해야 한다.
5. 따라서 안정한 범위는 $0 < K < 6000$이다.
6. 안정한계는 $\frac{6000 - K}{30} = 0$일 때이므로 $K = 6000$이다.
7. 이때 바로 윗행인 s^2행으로 보조방정식을 만들면 $30s^2 + 6000 = 0$이고, $s^2 + 200 = 0$이므로 $s = \pm j\sqrt{200}$이다.
8. 따라서 안정한계에서의 진동 주파수는 $\omega_s = \sqrt{200}\, rad/sec$이다.

선지별 해설

① X

$K > 6000$이면 Routh 표의 s^1행 첫 항 $\frac{6000 - K}{30}$가 음수가 되어 불안정하다. $\omega_s = \sqrt{200}$ 자체는 안정한계에서 맞지만, 안정 범위가 틀렸다. 틀린 표현은 "$K > 6000$"이고, 올바르게는 "$0 < K < 6000$"이다.

② O

Routh 판별 결과 안정 범위는 $0 < K < 6000$이다. 안정한계는 $K = 6000$이고 이때 보조방정식에서 $\omega_s = \sqrt{200}$가 나온다. 안정 범위와 안정한계 주파수를 모두 맞게 쓴 선지이다.

③ X

$K > 6000$가 틀린 것은 ①과 같다. 또한 ω_s는 $s^2 + 200 = 0$에서 나오므로 $\sqrt{20}$가 아니라 $\sqrt{200}$이다. 틀린 표현은 "$K > 6000$, $\omega_s = \sqrt{20}$"이고, 올바르게는 "$0 < K < 6000$, $\omega_s = \sqrt{200}$"이다.

④ X

안정 범위 $0 < K < 6000$는 맞지만, 안정한계 주파수를 잘못 썼다. $\sqrt{20}$는 보조방정식 $s^2 + 200 = 0$의 상수를 잘못 읽거나 200을 20으로 오기했을 때 나오는 값이다. 틀린 표현은 "$\omega_s = \sqrt{20}$"이고, 올바르게는 "$\omega_s = \sqrt{200}$"이다.

오답 포인트

안정 조건 $0 < K < 6000$과 안정한계 조건 $K = 6000$을 섞으면 오답이 된다. 또 안정한계 주파수는 보조방정식의 상수항에서 바로 읽어야 하는데, 200을 20으로 잘못 쓰는 실수가 자주 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위 피드백의 K 범위를 묻는 3차 문제는 먼저 폐루프 특성방정식을 만든다. 그다음 Routh 표 첫 열의 부호로 안정 범위를 구하고, 첫 열이 0이 되는 값을 안정한계로 둔 뒤 바로 윗행 보조방정식에서 ω_s를 읽으면 된다.

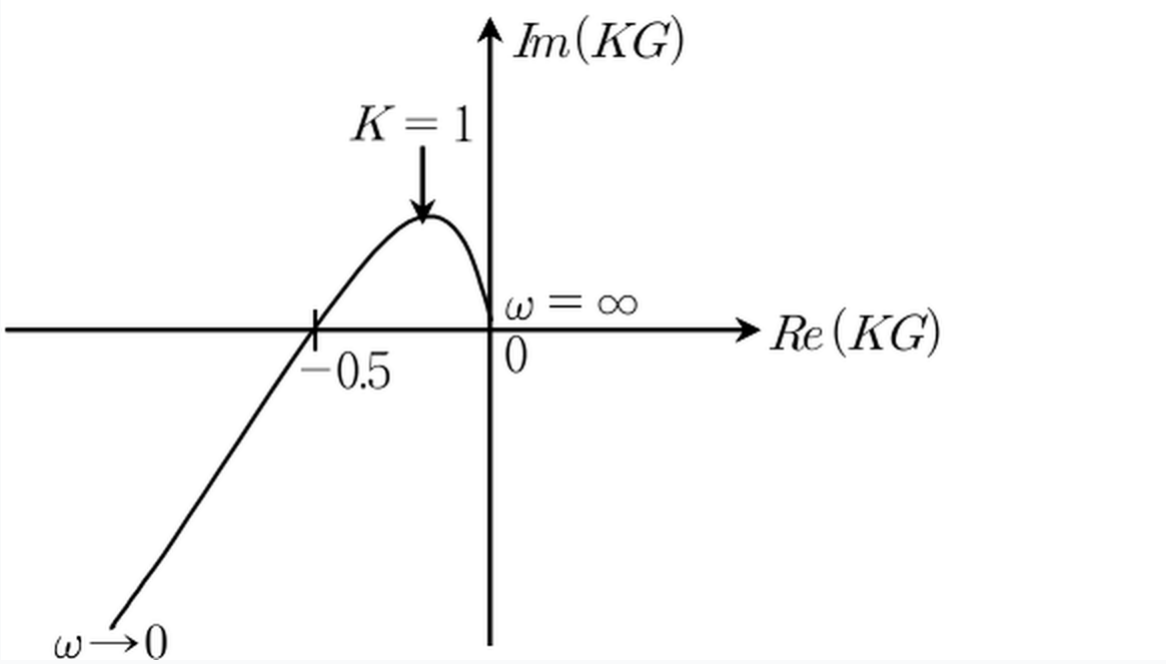
NoteBase

암기 포인트

3차 폐루프 $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$는 Routh 표의 s^1행 첫 항이 핵심이다. 이 값이 0이면 안정한계이고, 바로 윗행 보조방정식에서 진동 주파수를 구한다.

NoteBase

문 8. 단위 피드백 제어시스템의 전달함수가 $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$인 경우, 다음은 안정한 전달함수 $KG(s)$의 나이퀴스트(Nyquist) 선도를 나타낸다. 폐루프 시스템에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (단, $K>0$인 상수이다)



① K가 증가하면 이득여유(gain margin)는 작아진다.

② $K=2$인 경우 허수축에 극점을 갖는다.

③ $K<2$인 경우 안정하다.

④ $K=1$인 경우 이득여유는 0.5이다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 선도에서 음의 실수축 교점과 -1점의 상대 위치를 보고 이득여유와 안정 한계를 판단하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① O

- $K=1$일 때 음의 실수축 교점이 -0.5이므로, K가 커지면 선도 전체가 원점에서 바깥쪽으로 확대되어 -1점에 가까워진다. 따라서 이득여유는 작아진다.

② O

- $K=2$이면 -0.5 교점이 -1로 이동한다. 이는 위상 교차 주파수에서 $|KG(j\omega)|=1$이 되는 경우이므로 폐루프는 한계안정 상태가 되고 허수축 위에 극점을 갖는다.

③ O

- 개루프 전달함수는 안정하다고 주어졌고, $K<2$이면 나이퀴스트 선도가 -1점을 지나거나 감싸지 않는다. 따라서 폐루프는 안정하다.

④ X

- 틀린 표현은 "이득여유는 0.5이다"이다. $K=1$에서 위상 교차점의 크기는 0.5이므로 이득여유는 그 역수인 $1/0.5=2$이다. 올바르게는 "$K=1$인 경우 이득여유는 2이다"이다.

오답 포인트

이득여유를 음의 실수축 교점의 절댓값 자체로 착각하면 ④처럼 0.5라고 판단하기 쉽다. 나이퀴스트 선도에서 교점이 -0.5라는 말은 위상 교차 주파수에서 크기가 0.5라는 뜻이고, 이득여유는 그 역수라는 점이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 $K=1$에서 음의 실수축 교점이 어디인지 본다. 그다음 K 변화는 선도를 원점 기준으로 확대 또는 축소한다고 보고, 교점이 -1에 도달하는 K를 안정 한계로 판단한다.

암기 포인트

나이퀴스트에서 음의 실수축 교점이 $-a$이면 이득여유는 $1/a$이고, 교점이 -1에 닿으면 한계안정이다.

NoteBase

문 9. 전달함수 $G(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$인 시스템의 정현파 입력신호 $\sin\omega t$에 대한 출력진폭이 최대가 되는 주파수 ω와 최댓값 $A(\omega)$은?

① ω: $\sqrt{2}$, $A(\omega)$: $\frac{\sqrt{3}}{2}$
② ω: $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $A(\omega)$: $\frac{2}{\sqrt{3}}$
③ ω: $\sqrt{2}$, $A(\omega)$: $\frac{2}{\sqrt{3}}$
④ ω: $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $A(\omega)$: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 주파수응답의 크기 $A(\omega)=|G(j\omega)|$를 구한 뒤, 그 값이 최대가 되는 ω를 찾는 계산형 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 전달함수는 $G(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$이고 입력은 $\sin\omega t$이다.
구해야 할 값: 정현파 정상상태에서 출력진폭이 최대가 되는 주파수 ω와 그때의 진폭 $A(\omega)$이다.
주의할 조건: 입력 진폭이 1이므로 출력 진폭은 주파수응답의 크기 $|G(j\omega)|$와 같다.

사용할 공식

주파수응답은 $s=j\omega$를 대입해서 구한다.
$G(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+j\omega+1}=\frac{1}{1-\omega^2+j\omega}$
따라서 출력진폭은
$A(\omega)=|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$
이다.
이 공식을 쓰는 이유는 정현파 입력의 정상상태 출력진폭이 전달함수의 주파수응답 크기로 결정되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 진폭의 최대값을 구하려면 분모
$D(\omega) = (1-\omega^2)^2 + \omega^2 = \omega^4 - \omega^2 + 1$
를 최소로 만들면 된다.
2. 미분하면
$\frac{dD}{d\omega} = 4\omega^3 - 2\omega = 2\omega(2\omega^2 - 1)$
이므로 후보는 $\omega = 0$ 또는 $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.
3. $D(0) = 1$이고, $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$일 때
$D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$
이다. 따라서
$A_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
이므로 최대가 되는 주파수는 $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

선지별 해설

① X: $A(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2}$는 $\frac{2}{\sqrt{3}}$의 역수이므로 최대 진폭값을 잘못 쓴 것이다. 또 최대가 되는 주파수도 $\sqrt{2}$가 아니라 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 틀린 표현은 최대 주파수와 최대 진폭을 모두 뒤집어 쓴 점이며, 올바르게는 $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $A_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$이다.
② O: 계산 결과 최대가 되는 주파수는 $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 그때의 출력진폭은 $A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{3}}$이다.
③ X: 최대 진폭 $\frac{2}{\sqrt{3}}$는 맞지만, 최대가 되는 주파수를 $\sqrt{2}$로 잘못 썼다. 틀린 표현은 주파수 값이며, 올바르게는 $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.
④ X: 최대가 되는 주파수 $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$는 맞지만, 진폭을 $\frac{\sqrt{3}}{2}$로 잘못 썼다. 틀린 표현은 최대 진폭값이며, 올바르게는 $A_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$이다.

오답 포인트

분모의 크기 $\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}$를 구한 뒤 그것을 다시 역수로 취해야 한다는 점에서 실수가 많다. 또한 $\omega^2 = \frac{1}{2}$에서 $\omega = \sqrt{2}$로 잘못 넘기는 제곱근 처리 실수도 자주 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

정현파 입력의 정상상태 진폭 문제는 먼저 $s = j\omega$를 대입해 $|G(j\omega)|$를 만든다. 그다음 최대 진폭은 분모 최소 문제로 바꾸고, ω^2 값을 구한 뒤 마지막에 ω를 다시 정리하면 된다.

암기 포인트

정현파 정상상태 출력진폭은 $|G(j\omega)|$이고, 최대값은 분모 최소로 바꿔서 찾는다.

NoteBase

문 10. 다음 상태공간 방정식을 갖는 시스템에서 모든 극점의 실수부가 -2보다 작기 위한 K의 범위는?

bmatrixx_1 \ x_2bmatrix=bmatrix-K & -12 \ 1 & 0bmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix+bmatrix1 \ 0bmatrixu
y=bmatrix1 & 2bmatrixbmatrixx_1 \ x_2bmatrix

① 0 < K < 8

② 4 < K < 8

③ -4 < K < 8

④ -8 < K < 4

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 상태행렬의 특성방정식을 구한 뒤, 모든 극점의 실수부가 -2보다 작아지도록 안정영역을 평행이동해 판단하는 문제이다.

조건 정리

상태행렬은 $A = [-K,\ -12;\ 1,\ 0]$이다.
구해야 할 조건은 A의 모든 고유값, 즉 극점 λ가 $\mathrm{Re}(\lambda) < -2$를 만족하는 K의 범위이다.
입력행렬과 출력행렬은 극점 조건의 핵심이 아니라 상태행렬의 특성방정식이 핵심이다.

사용할 공식

특성방정식은 $\det(\lambda I - A) = 0$으로 구한다.
2차식 $\mu^2 + a_1\mu + a_0$의 모든 근이 좌반평면에 있으려면 Hurwitz 조건 $a_1 > 0, a_0 > 0$이 필요충분조건이다.
이 문제는 기준선이 0이 아니라 -2이므로 $\lambda = \mu - 2$로 놓아 $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ 조건으로 바꾼다.

계산 과정

$\det(\lambda I - A) = \det[\lambda + K, 12;\ -1, \lambda] = \lambda^2 + K\lambda + 12$
$\mathrm{Re}(\lambda) < -2$를 보려면 $\lambda = \mu - 2$를 대입한다.
$(\mu - 2)^2 + K(\mu - 2) + 12 = \mu^2 + (K - 4)\mu + (16 - 2K)$
따라서 μ에 대한 2차식이 안정하려면 $K - 4 > 0$이고 $16 - 2K > 0$이어야 한다.
두 부등식을 합치면 $4 < K < 8$이다.

NoteBase

선지 판단

① X: $0 < K < 8$은 K의 하한을 너무 낮게 잡은 범위이다. $0 < K \le 4$에서는 $K - 4 > 0$ 조건이 성립하지 않거나 경계에 걸리므로 모든 극점의 실수부가 -2보다 작다고 할 수 없다. 틀린 표현은 $0 < K$이고, 올바르게는 $4 < K$이다.
② O: 계산 결과가 $4 < K < 8$이므로 조건을 정확히 만족한다. $K = 4$에서는 실수부가 정확히 -2가 되고, $K = 8$에서는 경계극점 -2가 생기므로 양끝은 모두 제외된다.
③ X: $-4 < K < 8$은 음수 구간과 $K \le 4$ 구간을 포함한다. 이 구간에서는 이동된 특성방정식의 μ 계수 $K - 4$가 양수가 되지 않는 경우가 포함된다. 틀린 표현은 $-4 < K$이고, 올바르게는 $4 < K$이다.
④ X: $-8 < K < 4$는 필요한 하한 $K > 4$와 반대쪽 구간을 고른 것이다. 이 범위에서는 $K - 4 > 0$이 성립하지 않으므로 조건을 만족하지 않는다. 틀린 표현은 $-8 < K < 4$이고, 올바르게는 $4 < K < 8$이다.

오답 포인트

출제자가 노린 함정은 단순 안정조건 $K > 0$, $12 > 0$만 보고 ①처럼 판단하는 것이다. 이 문제는 실수부가 0보다 작은 안정이 아니라 -2보다 더 왼쪽에 있는지를 묻기 때문에 $\lambda = \mu - 2$ 평행이동 후 Hurwitz 조건을 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

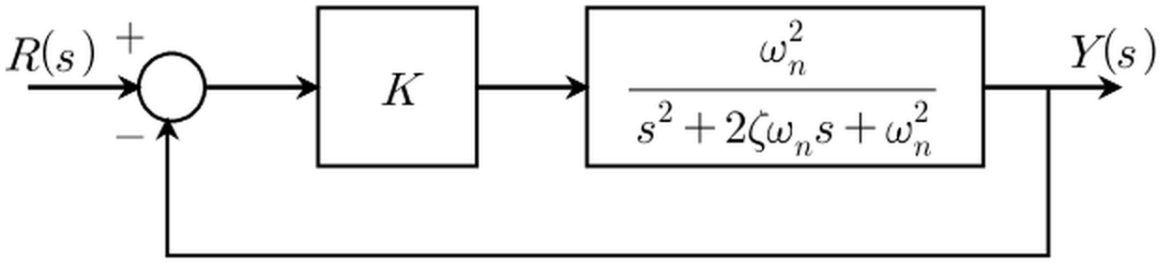
상태공간 문제에서 극점 범위를 물으면 먼저 $\det(\lambda I - A) = 0$으로 특성방정식을 만든다. 기준선이 $\mathrm{Re}(\lambda) < -a$이면 $\lambda = \mu - a$로 치환한 뒤 μ 다항식에 Hurwitz 조건을 적용한다.

암기 포인트

$-a$보다 왼쪽 조건은 $\lambda = \mu - a$ 치환 후 Hurwitz 조건으로 판정한다. 이 문항에서는 $\lambda = \mu - 2$, 결과는 $4 < K < 8$이다.

NoteBase

문 11. 다음 블록선도는 감쇠비 $(0 < \zeta < 1)$, 고유주파수 (ω_n)를 갖는 2차 제어대상에 대한 비례 제어시스템을 나타낸다. 비례제어 영향이 가장 적게 나타나는 성능지수는?



① 2% 정착시간(settling time)

② 상승시간(rising time)

③ 첨두시간(peak time)

④ 최대 오버슈트(maximum overshoot)

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 블록선도에서 닫힌루프 특성방정식을 구한 뒤 비례이득 K가 등가 고유주파수와 감쇠비를 어떻게 바꾸는지로 시간응답 성능지수를 판단하는 문제이다. 닫힌루프 분모는 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + (1 + K)\omega_n^2$이므로 등가 파라미터는 $\omega_n' = \omega_n\sqrt{1 + K}, \zeta' = \zeta/\sqrt{1 + K}$가 된다.

NoteBase

선지별 해설

① O

- 2% 정착시간은 보통 $T_s \approx 4/(\zeta' \omega_n')$로 본다. 여기서는 $\zeta' \omega_n' = \zeta \omega_n$로 일정하므로 비례이득 K가 바뀌어도 2% 정착시간은 거의 변하지 않는다. 따라서 비례제어 영향이 가장 적게 나타나는 성능지수는 ①이다.

② X

- 상승시간은 대체로 응답 속도를 나타내며 ω_n'가 커질수록 짧아진다. 비례이득이 증가하면 전체 응답은 더 빨라지므로 상승시간은 영향을 받는다.
- 틀린 표현은 "상승시간"이다. 올바르게는 가장 영향이 적은 것은 상승시간이 아니라 2% 정착시간이다.

③ X

- 첨두시간은 $T_p = \pi/(\omega_n' \sqrt{1-\zeta'^2}) = \pi/(\omega_n \sqrt{1+K-\zeta^2})$이므로 K가 커질수록 감소한다. 따라서 첨두시간도 비례이득의 영향을 분명히 받는다.
- 틀린 표현은 "첨두시간"이다. 올바르게는 첨두시간은 비례이득이 커질수록 짧아진다.

④ X

- 최대 오버슈트는 $M_p = e^{-\pi\zeta'/\sqrt{1-\zeta'^2}}$이다. K가 커지면 $\zeta' = \zeta/\sqrt{1+K}$가 작아지므로 오버슈트는 커진다. 따라서 최대 오버슈트는 비례제어의 영향을 크게 받는다.
- 틀린 표현은 "최대 오버슈트"이다. 올바르게는 최대 오버슈트는 비례이득 증가에 따라 증가한다.

오답 포인트

응답이 빨라지면 모든 시간지표가 함께 좋아진다고 단순화하면 오답이 된다. 이 문제의 핵심은 닫힌루프 2차표준형으로 바꾸었을 때 $\zeta' \omega_n'$가 일정하다는 점이며, 그래서 2% 정착시간만 거의 그대로 남는다.

다시 나오면 이렇게 판단

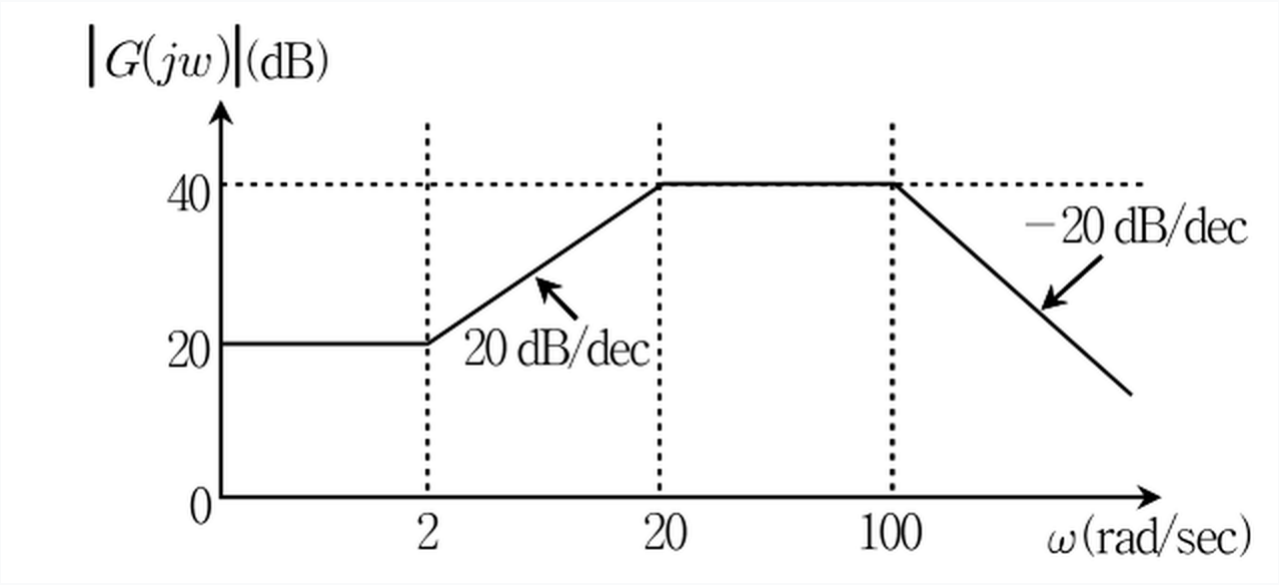
먼저 닫힌루프 분모를 2차 표준형 $s^2 + 2\zeta' \omega_n' s + \omega_n'^2$와 맞춰 ω_n'와 ζ'를 읽는다. 그다음 각 성능지수 공식을 대입해 어느 조합이 일정한지 본다. $\zeta' \omega_n'$가 일정하면 2% 정착시간은 거의 변하지 않는다고 판단할 수 있다.

암기 포인트

비례이득 K ↑이면 ω_n' ↑, ζ' ↓가 되고, T_s(2%)는 거의 일정, T_r ↓, T_p ↓, M_p ↑로 정리된다.

NoteBase

문 12. 다음 보드선도에 알맞은 전달함수 $G(s)$는?



① $G(s)=\frac{10^4(2+s)}{(20+s)(100+s)}$
② $G(s)=\frac{10(2+s)}{(20+s)(100+s)}$
③ $G(s)=\frac{100s}{(20+s)(100+s)}$
④ $G(s)=\frac{10(20+s)}{(2+s)(100+s)}$

정답 1번

출제 포인트

보드선도의 기울기 변화로 영점과 극점의 위치를 찾고, 저주파 구간의 크기에서 상수 이득을 결정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
- 저주파 구간의 크기는 20 dB로 일정하다.
- $\omega=2$에서 기울기가 $+20dB/dec$로 바뀐다.
- $\omega=20$에서 기울기가 0이 된다.
- $\omega=100$에서 기울기가 $-20dB/dec$가 된다.

구해야 할 값:
- 이 보드선도에 해당하는 전달함수 $G(s)$

주의할 조건:
- 영점 1개는 기울기를 $+20dB/dec$, 극점 1개는 $-20dB/dec$만큼 바꾼다.
- 절점 주파수만 맞추지 말고 저주파 이득까지 함께 맞춰야 한다.

NoteBase

사용할 공식

표준형은 $G(s)=K\frac{1+s/\omega_z}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})}$이다.
이 공식을 쓰는 이유:
보드선도에서 기울기 변화는 영점과 극점의 개수와 위치를 바로 보여 주고, 저주파 평탄 구간은 정규화된 상수 이득 K를 정하게 해 준다.

계산 과정

1. $\omega=2$에서 기울기가 0에서 $+20dB/dec$로 증가하므로 $\omega=2$에 영점이 1개 있다.
2. $\omega=20$에서 기울기가 $+20dB/dec$에서 0으로 감소하므로 $\omega=20$에 극점이 1개 있다.
3. $\omega=100$에서 기울기가 0에서 $-20dB/dec$로 감소하므로 $\omega=100$에 극점이 1개 있다.
4. 따라서 정규화 형태는 $G(s)=K\frac{1+s/2}{(1+s/20)(1+s/100)}$이다.
5. 저주파 구간의 크기가 20 dB이므로 $20\log_{10}K=20$, 따라서 $K=10$이다.
6. 이를 정리하면 $G(s)=10\frac{1+s/2}{(1+s/20)(1+s/100)}=10\cdot\frac{(2+s)/2}{[(20+s)/20][(100+s)/100]}=\frac{10^4(2+s)}{(20+s)(100+s)}$가 된다.

선지별 해설

① O: $\frac{10^4(2+s)}{(20+s)(100+s)}$는 $\omega=2$에 영점 1개, $\omega=20, 100$에 극점 2개를 가지며 저주파 이득도 $\frac{10^4\cdot 2}{20\cdot 100}=10$이어서 20 dB가 된다.
② X: 절점 주파수 배치는 같지만 상수 이득이 틀리다. 저주파 이득이 $\frac{10\cdot 2}{20\cdot 100}=0.01$이므로 크기는 -40 dB가 되어 그림의 20 dB와 맞지 않는다. 틀린 표현은 앞의 상수 10이고, 올바르게는 앞의 상수가 10^4이어야 한다.
③ X: 분자에 s가 있으므로 원점 영점이 1개 생긴다. 그러면 저주파부터 기울기가 $+20dB/dec$로 시작해야 하는데, 그림은 처음에 평탄하다. 틀린 표현은 원점 영점의 존재이고, 올바르게는 원점 영점이 아니라 $\omega=2$에서 영점 1개가 있어야 한다.
④ X: $(2+s)$가 분모에 있고 $(20+s)$가 분자에 있어 $\omega=2$에서는 극점, $\omega=20$에서는 영점이 된다. 그러면 기울기가 2에서 $-20dB/dec$로 내려갔다가 20에서 다시 0이 되어 제시된 보드선도와 반대 순서가 된다. 틀린 표현은 $(2+s)$와 $(20+s)$의 위치이고, 올바르게는 분자에 $(2+s)$, 분모에 $(20+s)$가 와야 한다.

오답 포인트

절점 주파수 2, 20, 100만 보고 분자·분모의 위치를 기계적으로 맞추면 ④처럼 기울기 변화의 부호를 거꾸로 읽게 된다. 또한 형상만 맞추고 저주파 이득 20 dB 검산을 빼면 ②처럼 상수배가 틀린 식을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

보드선도 문제는 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으면서 현재 기울기를 기록하고, 절점마다 $+20$이면 영점 1개, -20이면 극점 1개를 배치한 뒤 마지막에 저주파 이득으로 상수배를 검산하는 순서로 판단한다.

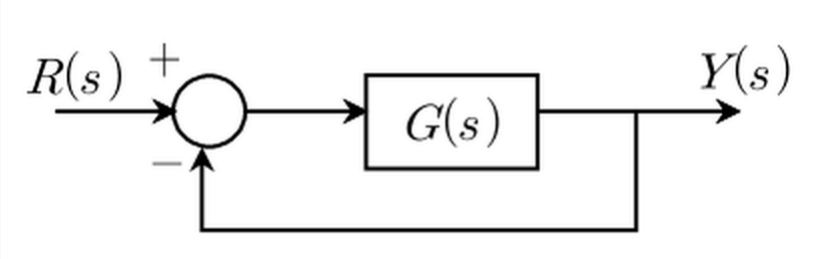
NoteBase

암기 포인트

기울기 +20 증가는 영점 1개, −20 감소는 극점 1개이며, 모양을 맞춘 뒤에는 반드시 $20\log_{10} K$로 저주파 이득을 다시 맞춘다.

NoteBase

문 13. 다음 피드백 제어시스템의 근궤적(root locus) 작도법에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (단, $G(s)$는 개루프 전달함수, $K > 0$는 $G(s)$에 포함된 근궤적 파라미터이다)



① K가 0에서 ∞로 증가함에 따라 근궤적은 개루프 극점에서 출발하여 개루프 영점에 종착한다.

② 근궤적의 개수는 폐루프 극점의 개수와 같다.

③ 점근선의 개수는 개루프 유한극점 n과 유한영점 m의 차, 즉 $(n - m)$개이다.

④ 실수축상의 근궤적은 임의의 구간에서 우측에 있는 실수축상의 개루프 극점의 개수가 홀수이면 그 구간에서 근궤적이 존재한다.

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 음의 단위 피드백에서 근궤적의 출발점, 종착점, 가지 수, 점근선 수, 실수축 존재 조건을 구별하는 문제이다.

핵심 개념

근궤적은 특성방정식 $1 + G(s) = 0$의 폐루프 극점이 근궤적 파라미터 K 변화에 따라 움직이는 자취이다.
$K = 0$에서는 개루프 극점에서 출발하고, $K \to \infty$에서는 개루프 영점으로 종착하며, 유한 영점이 부족한 가지는 무한대 영점으로 향한다.
실수축 위의 한 점은 그 점의 오른쪽에 있는 실수축상의 개루프 극점과 개루프 영점의 총개수가 홀수일 때 근궤적 위에 있다.

NoteBase

선지별 해설

① O: K가 0에서 무한대로 증가하면 근궤적은 개루프 극점에서 출발하여 개루프 영점에 종착한다. 유한 영점이 부족한 경우 일부 가지는 무한대 영점으로 향하므로 근궤적의 기본 출발·종착 규칙과 맞다.
② O: 근궤적은 폐루프 특성방정식의 근, 즉 폐루프 극점의 자취이다. 따라서 근궤적 가지의 개수는 폐루프 극점의 개수와 같고, 보통 개루프 극점의 개수와도 같다.
③ O: 개루프 유한극점 수를 n, 개루프 유한영점 수를 m이라 하면 유한 영점으로 끝나지 못하는 가지가 $n - m$개 생긴다. 이 가지들이 무한대로 향하는 방향이 점근선이므로 점근선 수는 $n - m$개이다.
④ X: 틀린 부분은 "우측에 있는 실수축상의 개루프 극점의 개수"만 센다는 표현이다. 실제로는 해당 실수축 구간의 오른쪽에 있는 실수축상의 개루프 극점과 개루프 영점의 총개수가 홀수일 때 그 구간에 근궤적이 존재한다.

오답 포인트

④는 실수축 근궤적 판정에서 영점을 빼고 극점만 세도록 만든 함정이다. 실수축 존재 조건은 극점만의 홀짝이 아니라 오른쪽에 있는 실수축상의 극점과 영점 전체의 홀짝으로 판단된다.

다시 나오면 이렇게 판단

근궤적 일반 규칙은 출발점은 개루프 극점, 종착점은 개루프 영점, 가지 수는 폐루프 극점 수, 점근선 수는 $n - m$, 실수축 존재 조건은 오른쪽의 실수축 극점과 영점 총개수의 홀수 여부로 판단한다.

암기 포인트

실수축 근궤적은 오른쪽의 극점과 영점을 모두 세고, 총개수가 홀수이면 존재한다.

NoteBase

문 14. 단위 피드백 제어시스템의 루프(loop) 전달함수 $G(s)=\frac{K}{(s+1)(s+a)}$에서 위상이 -180°되는 주파수 ω가 0이라고 할 때, 이득여유(gain margin)가 항상 $40[dB]$이 되기 위한 K와 a의 관계식은? (단, $a>0$인 상수이다)

① $K=0.1a$

② $K=0.01a$

③ $K=0.05a$

④ $K=0.5a$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 문제에서 준 위상교차주파수 조건 $\omega=0$을 이용해 이득여유 GM를 구하고, 그 값이 $40dB$가 되도록 K와 a의 관계를 정리하는 계산형 문제이다.

조건 정리

- 주어진 전달함수: $G(s)=\frac{K}{(s+1)(s+a)}$
- 주어진 조건: 위상이 -180°가 되는 주파수를 문제에서 $\omega=0$으로 둔다.
- 구해야 할 값: 이득여유가 항상 $40dB$가 되도록 하는 K와 a의 관계식이다.

사용할 공식

이득여유는 위상교차주파수에서
$GM(dB)=20\log_{10}\left(\frac{1}{|G(j\omega)|}\right)$
로 계산한다.

이 공식을 쓰는 이유는 이득여유가 위상이 -180°인 주파수에서의 개루프 크기로 정의되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 문제 조건을 그대로 대입하면 위상교차주파수는 $\omega = 0$이다.
2. 따라서
$G(j0) = \frac{K}{(j0+1)(j0+a)} = \frac{K}{a}$
이므로 $|G(j0)| = \frac{K}{a}$이다.
3. 이득여유는
$GM(dB) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{|G(j0)|}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{a}{K}\right)$
이다.
4. 이 값이 $40dB$이므로
$20\log_{10}\left(\frac{a}{K}\right) = 40$
$\log_{10}\left(\frac{a}{K}\right) = 2$
$\frac{a}{K} = 100$
이어서 $K = 0.01a$이다.

선지별 해설

① X이다. $K = 0.1a$를 대입하면 $\frac{a}{K} = 10$이므로 이득여유는 $20\log_{10}(10) = 20dB$이다. 틀린 표현은 $K = 0.1a$이고, 올바르게는 $K = 0.01a$이다.
② O이다. $K = 0.01a$이면 $\frac{a}{K} = 100$이므로 이득여유는 $20\log_{10}(100) = 40dB$가 된다.
③ X이다. $K = 0.05a$를 대입하면 $\frac{a}{K} = 20$이므로 이득여유는 $20\log_{10}(20) \approx 26.02dB$이다. 틀린 표현은 $K = 0.05a$이고, 올바르게는 $K = 0.01a$이다.
④ X이다. $K = 0.5a$를 대입하면 $\frac{a}{K} = 2$이므로 이득여유는 $20\log_{10}(2) \approx 6.02dB$이다. 틀린 표현은 $K = 0.5a$이고, 올바르게는 $K = 0.01a$이다.

오답 포인트

이 문제의 함정은 $40dB$를 40배로 착각하는 데 있다. 데시벨은 로그척도이므로 $40dB$는 크기비 100배에 해당한다. 또 문제에서 준 $\omega = 0$ 조건을 놓치면 $|G(j\omega)|$를 다른 주파수에서 계산하는 실수가 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

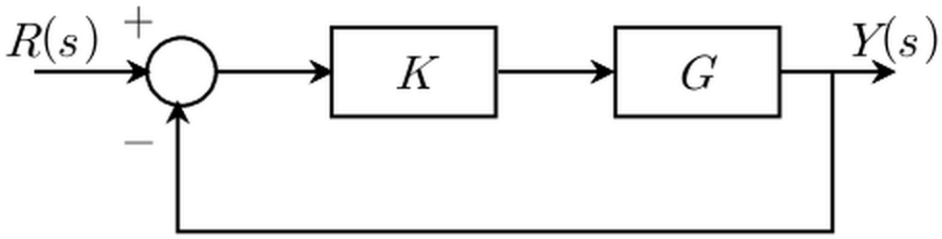
이득여유 문제는 먼저 위상교차주파수에서 $|G(j\omega)|$를 구하고, 다음에 $GM(dB) = 20\log_{10}(1/|G|)$에 대입해 미지수를 정리하는 순서로 판단한다. 마지막에는 $20dB \rightarrow 10$, $40dB \rightarrow 100$처럼 데시벨을 크기비로 다시 확인하면 계산 실수를 줄일 수 있다.

암기 포인트

위상교차주파수에서 $GM(dB) = 20\log_{10}(1/|G|)$이고, $40dB$는 크기비 100배이므로 이 문제에서는 $a/K = 100$이다.

NoteBase

문 15. 제어대상 G가 아래와 같은 상태공간 방정식으로 주어질 때, 피드백 제어시스템의 모든 극점의 실수부가 0보다 작기 위한 K의 범위는?



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

① $0<K<1$

② $K>1$

③ $0<K<2$

④ $K>2$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 단위 음의 피드백에서 폐루프 상태행렬 $A-BKC$를 만들고 2차 Hurwitz 안정조건으로 K의 범위를 구하는 문제이다.

조건 정리

제어대상은 $A=[0,1;\ -1,2], B=[0;1], C=[0,1]$이다.
블록선도는 단위 음의 피드백이고 전향 경로에 이득 K가 있으므로 $u=K(r-y)=K(r-Cx)$이다.
구해야 할 값은 폐루프 극점의 실수부가 모두 0보다 작게 되는 K의 범위이다.

사용할 공식

폐루프 상태방정식은 $\dot{x}=(A-BKC)x+BKr$이고, 폐루프 극점은 $A-BKC$의 고유값으로 결정된다.
2차 다항식 $s^2+a_1s+a_0$의 모든 근의 실수부가 음수이려면 $a_1>0, a_0>0$이어야 한다.

NoteBase

계산 과정

$BKC = [0;1]K[0,1] = [0,0;0,K]$이다.
따라서 폐루프 상태행렬은 $A - BKC = [0,1;\ -1, 2-K]$이다.
특성방정식은 $\det(sI-(A-BKC)) = \det[s,\ -1;1, s-2+K] = s^2 + (K-2)s + 1$이다.
Hurwitz 조건을 적용하면 $K-2>0, 1>0$이므로 안정조건은 $K>2$이다.

선지 판단

① X. $0<K<1$에서는 $K-2<0$이므로 $s^2+(K-2)s+1$의 1차항 계수가 양수가 아니다. 틀린 표현 $0<K<1$은 올바르게는 $K>2$이다.
② X. $K>1$은 $1<K\le 2$를 포함하므로 안정범위보다 넓다. 특히 $K=2$이면 특성방정식이 $s^2+1=0$이 되어 극점이 허수축에 놓이므로 실수부가 0보다 작지 않다. 틀린 표현 $K>1$은 올바르게는 $K>2$이다.
③ X. $0<K<2$에서는 $K-2<0$이므로 Hurwitz 조건 $a_1>0$을 만족하지 못한다. 틀린 표현 $0<K<2$는 올바르게는 $K>2$이다.
④ O. $K>2$이면 특성방정식 $s^2+(K-2)s+1$에서 두 계수 $K-2, 1$이 모두 양수이므로 모든 폐루프 극점의 실수부가 음수이다.

오답 포인트

출제자가 노린 함정은 전향경로의 K를 단순히 개루프 전달함수에 곱하는 데서 멈추고, 폐루프 상태행렬이 $A-BKC$로 바뀐다는 점을 놓치는 것이다. 또한 $K=2$는 s^2+1이 되어 허수축 극점을 만들므로 안정조건에 포함되지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

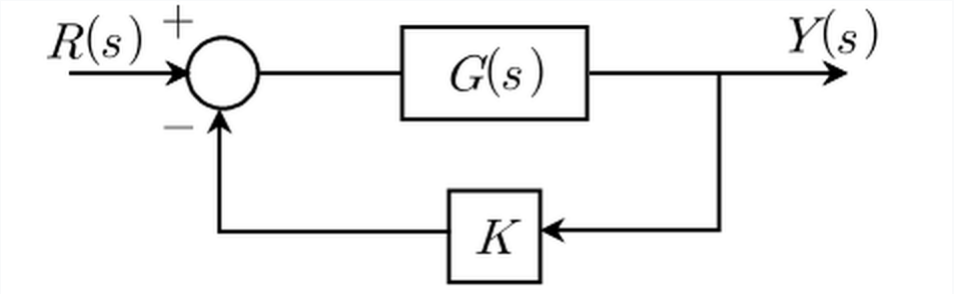
상태공간 피드백 문제가 나오면 입력식 $u=K(r-Cx)$를 먼저 세우고, 기준입력항을 제외한 상태행렬 $A-BKC$의 특성방정식에 안정조건을 적용한다.

암기 포인트

단위 음의 출력 피드백에서 전향 이득 K가 있으면 폐루프 극점은 $A-BKC$로 판단한다. 2차식 $s^2+a_1s+a_0$은 $a_1>0, a_0>0$일 때 안정이다.

NoteBase

문 16. 다음 피드백 제어시스템에서 단위계단(unit step) 입력에 대한 정상상태의 목표 출력값은 1이다. 전달함수 $G(s)=\frac{2}{s+1}$일 때 정상상태 오차가 ± 0.2 이하가 되기 위한 K의 범위는?



① $\frac{1}{5} \le K \le \frac{7}{6}$
② $\frac{1}{4} \le K \le \frac{6}{5}$
③ $\frac{1}{3} \le K \le \frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{2} \le K \le \frac{4}{3}$

정답 3번

출제 포인트

비단위 피드백계에서 폐루프 전달함수와 최종값 정리를 이용해 정상상태 출력 $y(\infty)$를 구하고, 목표 출력값 1과의 오차 조건으로 K의 범위를 정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $G(s)=\frac{2}{s+1}$, 피드백 경로 이득 $H(s)=K$, 입력 $R(s)=\frac{1}{s}$이다.
구해야 할 값은 정상상태 오차가 ± 0.2 이하가 되도록 하는 K의 범위이다.
주의할 조건은 단순히 오차상수 공식을 대입하는 것이 아니라, 목표 출력값 1과 실제 정상상태 출력 $y(\infty)$의 차이로 오차를 잡아야 한다는 점이다.

NoteBase

사용할 공식

폐루프 전달함수는 $T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$이다.

이 문제에서는

$T(s) = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 + \frac{2K}{s+1}} = \frac{2}{s + 1 + 2K}$

이다.

단위계단 입력에 대한 정상상태 출력은 최종값 정리로

$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sT(s)\frac{1}{s} = \frac{2}{1+2K}$

이다.

따라서 목표 출력값 1 기준 정상상태 오차는

$e_{ss} = 1 - y(\infty) = 1 - \frac{2}{1 + 2K} = \frac{2K - 1}{1 + 2K}$

이다.

이 공식을 쓰는 이유는 문제에서 단위계단 입력에 대한 실제 정상상태 출력과 목표 출력값 1의 차이를 직접 제한하고 있기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 폐루프 전달함수로부터 정상상태 출력은 $y(\infty) = \frac{2}{1+2K}$이다.

2. 정상상태 오차 조건은

$\left|1 - \frac{2}{1+2K}\right| \le 0.2$

이다.

3. 이를 정리하면

$\left|\frac{2K-1}{1+2K}\right| \le 0.2$

이다.

4. 선택지 범위처럼 $K > 0$이면 $1 + 2K > 0$이므로

$-0.2 \le \frac{2K-1}{1+2K} \le 0.2$

로 풀 수 있다.

5. 왼쪽 부등식은

$2K - 1 \ge -0.2(1 + 2K)$

이므로

$2.4K \ge 0.8, \quad K \ge \frac{1}{3}$

이다.

6. 오른쪽 부등식은

$2K - 1 \le 0.2(1 + 2K)$

이므로

$1.6K \le 1.2, \quad K \le \frac{3}{4}$

이다.

7. 따라서

$\frac{1}{3} \le K \le \frac{3}{4}$

이므로 정답은 3번이다.

NoteBase

선지별 해설

① X
$\frac{1}{5} \le K \le \frac{7}{6}$는 정답 범위보다 하한이 너무 작고 상한이 너무 크다. $K < \frac{1}{3}$이면 오차가 -0.2보다 작아지고, $K > \frac{3}{4}$이면 오차가 0.2를 넘는다. 틀린 표현은 범위를 너무 넓게 잡은 점이며, 올바르게는 $\frac{1}{3} \le K \le \frac{3}{4}$이다.

② X
$\frac{1}{4} \le K \le \frac{6}{5}$도 하한과 상한이 모두 어긋난다. 특히 $K = 1$이면 $e_{ss} = \frac{1}{3}$이 되어 허용 오차를 넘는다. 틀린 표현은 상한을 $\frac{6}{5}$까지 확대한 점이며, 올바르게는 $\frac{1}{3} \le K \le \frac{3}{4}$이다.

③ O
$\frac{1}{3} \le K \le \frac{3}{4}$는 부등식을 정확히 푼 결과와 일치한다. $K = \frac{1}{3}$일 때 $e_{ss} = -0.2$, $K = \frac{3}{4}$일 때 $e_{ss} = 0.2$가 되어 경계값까지 포함된다.

④ X
$\frac{1}{2} \le K \le \frac{4}{3}$는 하한을 너무 크게, 상한을 너무 크게 잡은 범위이다. 예를 들어 $K = \frac{1}{3}$은 실제로 허용 가능한 경계값인데 이 선지는 제외하고, $K = 1$은 허용 불가인데 포함한다. 틀린 표현은 허용 구간의 양 끝을 모두 잘못 잡은 점이며, 올바르게는 $\frac{1}{3} \le K \le \frac{3}{4}$이다.

오답 포인트

이 문항의 함정은 정상상태 오차를 입력과 오차신호의 일반식으로 기계적으로 외우는 데 있다. 이 문제는 목표 출력값이 1이라고 명시되어 있으므로 실제 정상상태 출력 $y(\infty)$를 먼저 구한 뒤 $e_{ss} = 1 - y(\infty)$로 판단해야 한다. 또한 절댓값 부등식의 경계 포함을 빠뜨리면 $\frac{1}{3}$과 $\frac{3}{4}$를 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

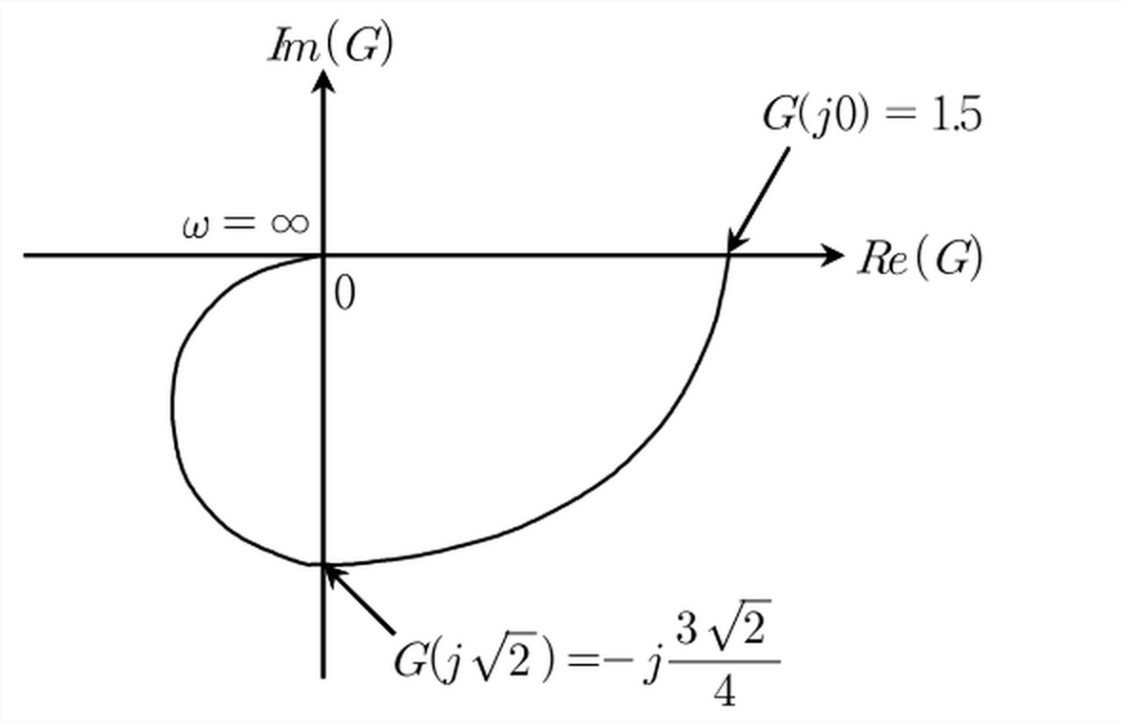
비단위 피드백 정상상태 오차 문제는 폐루프 전달함수 작성, 최종값 정리로 $y(\infty)$ 계산, 목표값과의 차이 e_{ss} 정리, 절댓값 부등식 해석의 순서로 판단한다. 목표 출력값이 따로 제시되면 그 값을 기준으로 오차를 계산한다.

암기 포인트

비단위 피드백에서는 먼저 $y(\infty)$를 구하고, 정상상태 오차는 목표값에서 실제 출력값을 뺀 값으로 정리한다.

NoteBase

문 17. 전달함수 $G(s)=\frac{c}{s^2+as+b}$의 나이퀴스트(Nyquist) 선도가 다음과 같을 때 파라미터 a, b, c의 값은?



① a: 2, b: 2, c: 3

② a: 1, b: 3, c: 2

③ a: 2, b: 3, c: 2

④ a: 1, b: 2, c: 3

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 나이퀴스트 선도에 표시된 $G(j0)$와 $G(j\sqrt{2})$를 식에 대입해 계수 a, b, c를 역으로 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값:
- 전달함수는 $G(s)=\frac{c}{s^2+as+b}$이다.
- $G(j0)=1.5$이다.
- $G(j\sqrt{2})=-j\frac{3\sqrt{2}}{4}$이다.

구해야 할 값:
- a, b, c

주의할 조건:
- $G(j\sqrt{2})$는 순허수이므로 실수부가 0이어야 한다.

NoteBase

사용할 공식

$G(j\omega) = \frac{c}{(j\omega)^2 + aj\omega + b} = \frac{c}{b - \omega^2 + ja\omega}$

이 공식을 쓰는 이유:

나이퀴스트 선도는 $G(j\omega)$의 복소평면 궤적이므로, 그림에 표시된 특정 주파수의 값을 위 식에 직접 대입하면 a, b, c 사이의 조건식을 만들 수 있다.

계산 과정

1. $\omega = 0$을 대입하면

$G(j0) = \frac{c}{b} = 1.5 = \frac{3}{2}$

이므로 $c = \frac{3}{2}b$이다.

2. $\omega = \sqrt{2}$를 대입하면

$G(j\sqrt{2}) = \frac{c}{b - 2 + ja\sqrt{2}}$

이다. 이 값이 순허수이려면 분모의 실수부가 0이어야 하므로 $b - 2 = 0$, 즉 $b = 2$이다.

3. $b = 2$를 1단계에 대입하면 $c = 3$이다.

4. 다시 $\omega = \sqrt{2}$에서

$G(j\sqrt{2}) = \frac{3}{ja\sqrt{2}} = -j\frac{3}{a\sqrt{2}}$

인데, 이것이 $-j\frac{3\sqrt{2}}{4}$와 같아야 하므로

$\frac{3}{a\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

이다. 따라서 $\frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$이고 $a = 2$이다.

5. 최종적으로 $(a, b, c) = (2, 2, 3)$이다.

NoteBase

선지별 해설

① O
- $(a, b, c) = (2, 2, 3)$이면 $G(j0) = \frac{3}{2} = 1.5$이다.
- 또 $G(j\sqrt{2}) = \frac{3}{2 - 2 + j2\sqrt{2}} = \frac{3}{j2\sqrt{2}} = -j\frac{3\sqrt{2}}{4}$가 되어 그림과 정확히 일치한다.

② X
- 틀린 부분은 $(a, b, c) = (1, 3, 2)$라는 조합이다.
- 이 경우 $G(j0) = \frac{2}{3}$이므로 그림의 1.5와 맞지 않는다.
- 올바르게는 $(a, b, c) = (2, 2, 3)$이다.

③ X
- 틀린 부분은 $b = 3, c = 2$라는 값이다.
- 이 경우 역시 $G(j0) = \frac{2}{3}$이므로 시작점이 1.5가 될 수 없다.
- 올바르게는 $b = 2, c = 3$이어야 하고, 전체 조합은 $(2, 2, 3)$이다.

④ X
- $b = 2, c = 3$는 맞지만 $a = 1$이 틀리다.
- 이 경우 $G(j\sqrt{2}) = \frac{3}{j\sqrt{2}} = -j\frac{3\sqrt{2}}{2}$가 되어 그림의 $-j\frac{3\sqrt{2}}{4}$보다 크기가 2배가 된다.
- 올바르게는 $a = 2$여야 하므로 전체 조합은 $(2, 2, 3)$이다.

오답 포인트

많이 틀리는 지점은 $G(j0) = 1.5$만 보고 b와 c만 맞춘 뒤 ①과 ④ 사이에서 멈추는 경우이다. 이 문제의 핵심은 $G(j\sqrt{2})$가 순허수라는 점이므로, 먼저 $b - 2 = 0$에서 $b = 2$를 잡고 그다음 허수부 크기로 a를 정해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

나이퀴스트 선도에서 특정 점의 좌표가 주어지면 먼저 $s = j\omega$를 대입해 실수부 조건과 허수부 조건을 분리해 본다. 순허수점이면 분모나 분자의 실수부를 0으로 두고, 그다음 크기를 맞춰 나머지 계수를 정하면 된다.

암기 포인트

순허수점은 실수부 0 조건부터 잡고, $G(j0) = \frac{c}{b}$로 시작점을 먼저 정리한다.

NoteBase

문 18. 다음 그림 (가)와 같은 피드백 제어시스템에서 $G(s)$의 보드선도가 그림 (나)와 같을 때 단위계단 입력에 대한 정상상태 오차는?

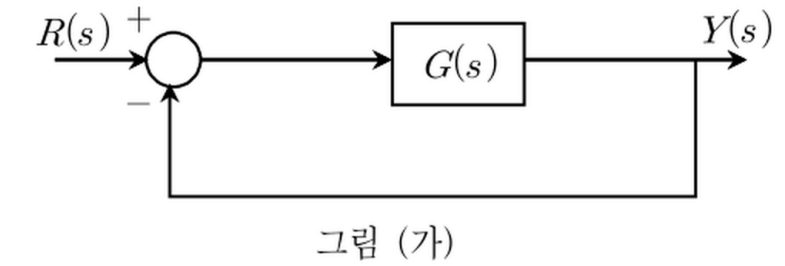


그림 (가)

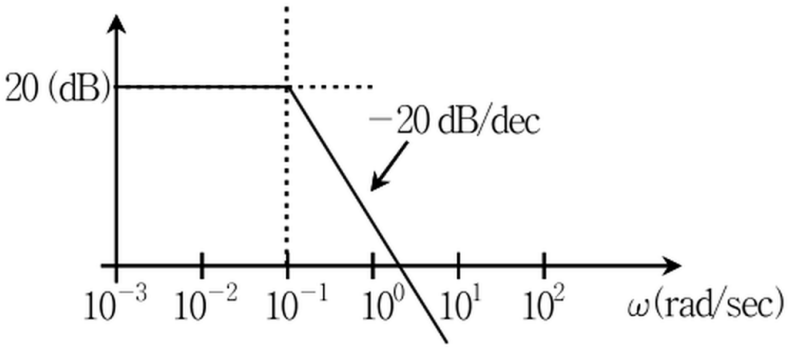


그림 (나)

① $\frac{1}{11}$
② $\frac{1}{21}$
③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{7}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 단위피드백 제어계의 보드선도에서 저주파 이득을 읽어 위치오차상수 K_p를 구하고, 단위계단 입력의 정상상태 오차 e_{ss}를 계산하는 문제이다.

조건 정리

- 단위피드백 계이다.
- 저주파 구간의 크기선도는 20 dB로 평탄하다.
- $\omega = 10^{-1}$ 이후 기울기가 $-20dB/dec$이므로 1차 지연요소가 하나 있는 형상이다.
- 저주파에서 평탄하므로 적분요소가 없고, 계의 형식은 0형이다.

NoteBase

사용할 공식

$K_p = \lim_{s\to 0} G(s), \qquad e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$

이 공식을 쓰는 이유는 단위피드백 0형 시스템의 단위계단 정상상태 오차가 위치오차상수 K_p로 바로 결정되기 때문이다.

계산 과정

1. 저주파 크기선도 20 dB는 $20\log_{10}|G(j\omega)| = 20$을 뜻한다.
2. 따라서 $|G(j\omega)| = 10$이고, $\omega \to 0$에서 $K_p = 10$이다.
3. 단위계단 입력의 정상상태 오차는 $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$이다.

선지별 해설

① O

- 계산 결과 정상상태 오차는 $\frac{1}{11}$이므로 옳다.

② X

- $\frac{1}{21}$가 되려면 $K_p = 20$으로 잘못 읽어야 한다.
- 틀린 표현은 정상상태 오차값이다. 올바르게는 정상상태 오차가 $\frac{1}{11}$이다.

③ X

- $\frac{1}{5}$는 $K_p = 4$일 때의 값으로, 20 dB를 이득 10이 아닌 다른 값으로 잘못 바꾼 경우에 해당한다.
- 틀린 표현은 정상상태 오차값이다. 올바르게는 정상상태 오차가 $\frac{1}{11}$이다.

④ X

- $\frac{1}{7}$은 $K_p = 6$일 때의 값으로, 저주파 이득 20 dB를 정확히 해석하지 못한 오답이다.
- 틀린 표현은 정상상태 오차값이다. 올바르게는 정상상태 오차가 $\frac{1}{11}$이다.

오답 포인트

20 dB를 이득 20으로 바로 읽는 실수가 가장 흔하다. dB값은 $20\log_{10}|G|$로 해석해야 하므로 20 dB는 이득 10이다. 또한 저주파 구간이 평탄하다는 점을 놓치고 적분요소가 있다고 오해하면 정상상태 오차 공식을 잘못 적용하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

단위피드백 정상상태 오차 문제는 먼저 저주파 보드선도의 기울기로 시스템 형식을 판별하고, 다음에 저주파 dB값을 실제 이득으로 바꿔 K_p, K_v, K_a 중 맞는 오차상수를 구한 뒤 해당 정상상태 오차 공식을 적용하면 된다.

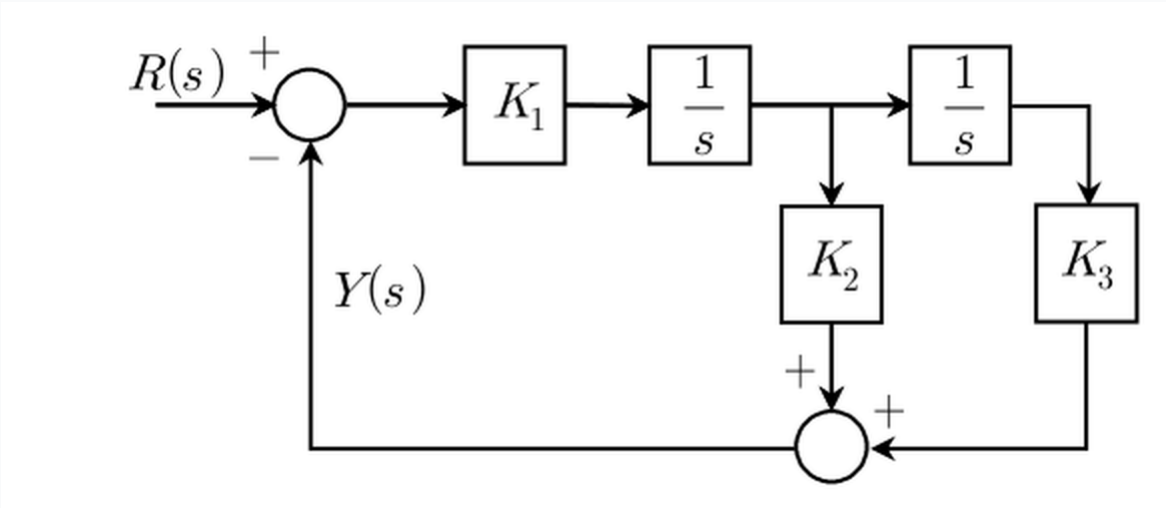
NoteBase

암기 포인트

0형 시스템의 단위계단 오차는 $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$이고, 20 dB는 이득 10이다.

NoteBase

문 19. 다음 블록선도에서 $\frac{Y(s)}{R(s)}$의 전달함수는?



① $\frac{K_1K_2s+K_3}{s^2+K_1K_2s+K_1K_3}$
② $\frac{K_1(K_2s+K_3)}{s^2+K_1K_2s+K_1K_3}$
③ $\frac{K_1(K_2s+K_3)}{s^2+K_1K_2s+K_3}$
④ $\frac{K_1K_2s+K_3}{s^2+K_1K_2s+K_3}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 블록선도에서 첫 적분기 출력과 둘째 적분기 출력을 각각 K_2, K_3로 가중하여 합한 뒤, 그 결과를 음의 되먹임으로 닫아 $Y(s)/R(s)$를 구하는 문제이다.

NoteBase

선지별 해설

① X

- 순방향 전달함수는 $G(s) = Y(s)/E(s) = K_1(K_2s + K_3)/s^2$이다. 따라서 닫힌루프 전달함수의 분자에는 K_1이 K_2s 항뿐 아니라 K_3 항에도 함께 남아야 한다.
- ' $K_1K_2s + K_3$ '가 틀린 표현이다. 올바르게는 ' $K_1(K_2s + K_3)$ ' 또는 ' $K_1K_2s + K_1K_3$ '이다.

② O

- 첫 적분기 출력은 $K_1E(s)/s$, 둘째 적분기 출력은 $K_1E(s)/s^2$이다. 따라서
$Y(s) = K_2 \cdot K_1E(s)/s + K_3 \cdot K_1E(s)/s^2$이다.
- 이를 정리하면 $Y(s) = K_1(K_2s + K_3)E(s)/s^2$이고, $E(s) = R(s) - Y(s)$이므로
$Y(s)/R(s) = K_1(K_2s + K_3)/(s^2 + K_1K_2s + K_1K_3)$가 된다.

③ X

- 분자는 맞지만 분모의 상수항이 틀리다. 음의 되먹임으로 닫으면 분모는 $1 + G(s)$에서 오므로 K_3 항에도 K_1이 포함되어야 한다.
- ' $s^2 + K_1K_2s + K_3$ '가 틀린 표현이다. 올바르게는 ' $s^2 + K_1K_2s + K_1K_3$ '이다.

④ X

- 분자와 분모의 K_3 항에서 모두 K_1이 빠져 있다. 첫 번째 블록 K_1은 두 적분 경로 전체에 공통으로 걸리므로 끝까지 유지되어야 한다.
- ' $K_1K_2s + K_3$ / (s2+K_1K_2s+K_3) '가 틀린 표현이다. 올바르게는 ' $K_1(K_2s + K_3)/(s^2 + K_1K_2s + K_1K_3)$ '이다.

오답 포인트

①과 ④는 분자에서 K_3 앞의 K_1를 빼먹도록 유도하고, ③은 분자는 맞춘 뒤 분모의 닫힌루프 항만 하나 놓치도록 만든 선지이다. 블록선도에서 분기점 뒤에 생긴 두 경로만 보다가, 그 앞에 있는 공통 이득 K_1이 두 경로 모두에 곱해진다는 점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

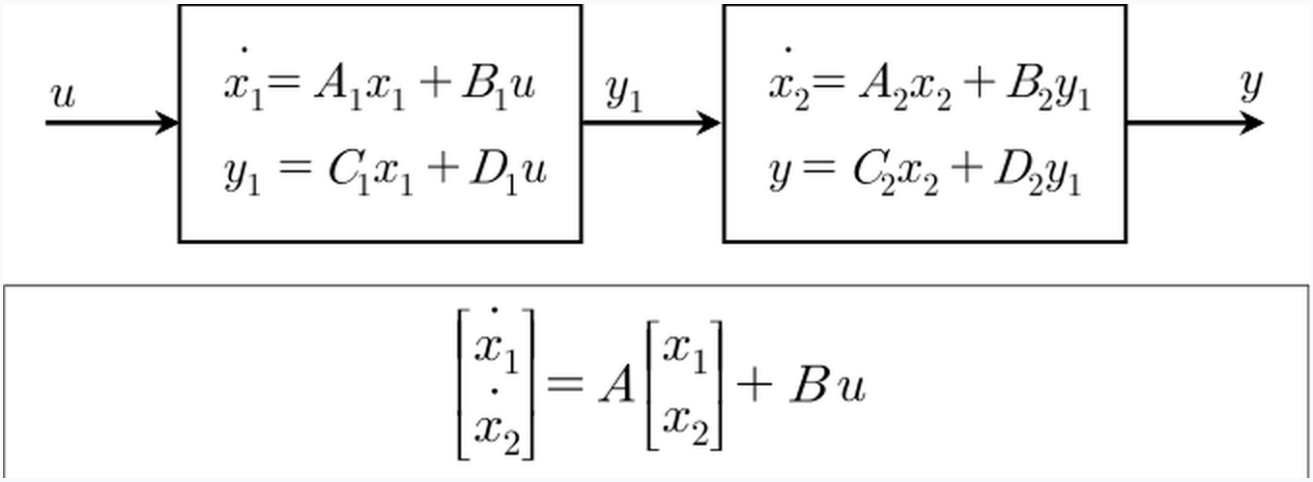
블록선도 문제는 먼저 오차 $E(s)$에 대한 출력 $Y(s)$를 구해 순방향 전달함수 $G(s) = Y(s)/E(s)$를 만든 다음, 음의 되먹임이면 $Y(s)/R(s) = G(s)/(1 + G(s))$로 닫아 판단한다. 이때 합류하는 각 가지 앞에 이미 걸린 공통 이득이 끝까지 남는지 함께 확인하면 된다.

암기 포인트

적분기 두 개와 병렬 피드백 합 구조에서는 먼저 Y/E를 만들고 닫힌루프로 바꾸며, K_3 항에도 공통 이득 K_1이 그대로 붙는다.

NoteBase

문 20. 두 개의 시스템을 직렬로 연결한 전체 시스템이 아래와 같을 때, 다음 상태공간 방정식의 시스템 행렬 A, B는?



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Bu$$

① A=bmatrixA_1 & 0 \ B_2C_1 & A_2bmatrix, B=bmatrixB_2D_1 \ B_1bmatrix

② A=bmatrixA_1 & 0 \ B_2C_1 & A_2bmatrix, B=bmatrixB_1 \ B_2D_1bmatrix

③ A=bmatrixA_1 & B_2C_1 \ 0 & A_2bmatrix, B=bmatrixB_1 \ B_2D_1bmatrix

④ A=bmatrixA_1 & B_2C_1 \ 0 & A_2bmatrix, B=bmatrixB_2D_1 \ B_1bmatrix

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 두 상태공간 시스템을 직렬로 연결할 때 중간 출력 y_1을 두 번째 시스템 입력에 대입하여 전체 상태행렬 A와 입력행렬 B를 구성하는 문제이다.

조건 정리

첫 번째 시스템은 $\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u, y_1 = C_1x_1 + D_1u$이다.
두 번째 시스템은 $\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2y_1, y = C_2x_2 + D_2y_1$이다.
전체 상태벡터는 문제의 식처럼 $[x_1x_2]^T$ 순서로 둔다.

사용할 공식

직렬 연결에서는 앞 시스템의 출력 y_1을 뒤 시스템의 입력에 그대로 대입한다.
$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2(C_1x_1 + D_1u) = B_2C_1x_1 + A_2x_2 + B_2D_1u$
따라서 x_1 방정식에는 x_2 항이 없고, x_2 방정식에는 x_1에서 넘어오는 결합항 $B_2C_1x_1$이 생긴다.

NoteBase

계산 과정

전체 상태방정식은 다음과 같이 정리된다.
bmatrixx_1x_2bmatrix=bmatrixA_1&0_2C_1&A_2bmatrixbmatrixx_1_2bmatrix+bmatrixB_1_2D_1bmatrixu
따라서 A=bmatrixA_1&0_2C_1&A_2bmatrix, B=bmatrixB_1_2D_1bmatrix이다.

선지 판단

① X: A의 아래왼쪽 결합항 B_2C_1은 맞지만 B가 $[B_2D_1B_1]^T$로 뒤바뀌어 있다. 올바르게는 첫 번째 상태식의 입력계수가 B_1, 두 번째 상태식의 입력계수가 B_2D_1이므로 $B = [B_1B_2D_1]^T$이다.
② O: x_1 방정식은 $A_1x_1 + B_1u$이고, x_2 방정식은 $B_2C_1x_1 + A_2x_2 + B_2D_1u$이므로 A=bmatrixA_1&0_2C_1&A_2bmatrix, B=bmatrixB_1_2D_1bmatrix가 된다.
③ X: B는 맞지만 결합항 B_2C_1을 A의 위오른쪽에 둔 점이 틀리다. 이는 x_1 방정식이 x_2의 영향을 받는 형태이므로, 올바르게는 B_2C_1이 아래왼쪽에 있어야 한다.
④ X: A의 결합항 위치가 위오른쪽으로 잘못되어 있고 B도 $[B_2D_1B_1]^T$로 뒤바뀌어 있다. 올바르게는 A의 아래왼쪽이 B_2C_1, B의 위쪽이 B_1, 아래쪽이 B_2D_1이다.

오답 포인트

출제자가 노린 함정은 상태벡터 순서와 신호 방향을 혼동하게 하는 데 있다. 직렬 연결은 $u \to y_1 \to y$ 방향이므로 뒤 시스템의 상태 x_2가 앞 시스템의 상태 x_1 방정식에 들어가지 않는다. 또한 직접전달항 D_1u는 두 번째 시스템 입력행렬 B_2를 거쳐 B_2D_1u로 들어간다.

다시 나오면 이렇게 판단

직렬 상태공간 결합 문제는 먼저 중간 출력식을 뒤 시스템 입력에 대입하고, 그 다음 상태벡터 순서에 맞추어 블록행렬의 위치를 정한다. $[x_1x_2]^T$ 순서에서는 앞 시스템에서 뒤 시스템으로 가는 결합항이 A의 아래왼쪽 블록에 놓인다.

암기 포인트

직렬 연결에서 $[x_1x_2]^T$이면 A는 아래삼각형 형태, B는 $[B_1B_2D_1]^T$ 형태로 기억한다.

NoteBase