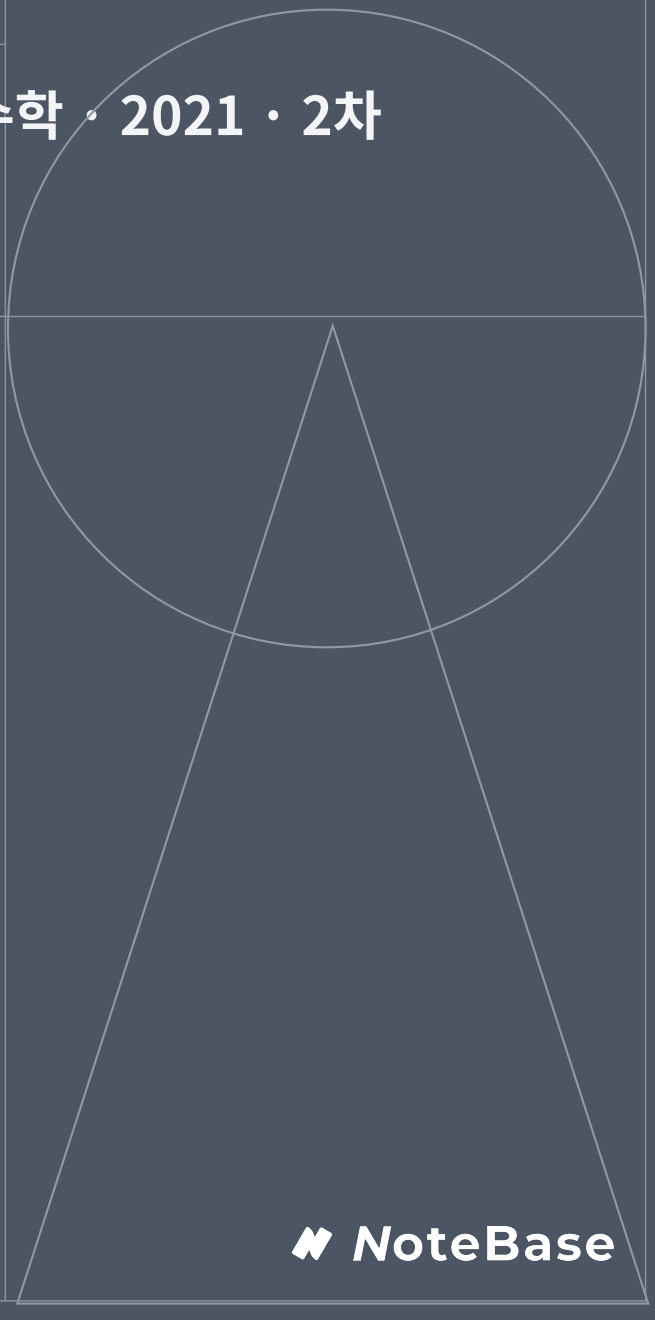
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2021 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2021 · 2차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2021 · 2차

문 1. 세 실수 x, y, z가 $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=-14$, $xyz=-12$를 만족시킬 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값은?

① -40

② -44

③ -48

④ -52

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 대칭식의 항등식 $(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$를 이용해 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=-14$, $xyz=-12$이다.
구해야 할 값: $(x+y)(y+z)(z+x)$이다.
주의할 조건: 마지막 항이 $-xyz$이므로 $xyz=-12$를 대입하면 $-(-12)=12$가 된다.

사용할 공식

$(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$
좌변을 전개하면 $x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2+2xyz$이고, 우변을 전개해도 같은 식이 된다.
문제에서 우변의 세 대칭식 값을 모두 주었으므로 이 항등식을 사용한다.

계산 과정

주어진 값을 항등식에 대입한다.
$(x+y)(y+z)(z+x)=4\cdot(-14)-(-12)$
$=-56+12=-44$
따라서 구하는 값은 -44이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 -40이 아니라 -44이다. 올바른 값은 -44이다.
② O — 항등식에 주어진 값을 대입하면 $-56+12=-44$가 된다.
③ X — 계산 결과는 -48이 아니라 -44이다. 올바른 값은 -44이다.
④ X — 계산 결과는 -52가 아니라 -44이다. 올바른 값은 -44이다.

오답 포인트

$-xyz$에 $xyz=-12$를 대입할 때 부호를 놓치기 쉽다. $-xyz=-(-12)=12$이므로 -56에서 12를 빼는 것이 아니라 12를 더한다.

다시 나오면 이렇게 판단

$x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz가 함께 주어지고 $(x+y)(y+z)(z+x)$를 묻는 경우, 대칭식 항등식으로 바꾼 뒤 각 값을 대입하고 $-xyz$의 부호를 마지막에 검산한다.

암기 포인트

$(x+y)(y+z)(z+x)$는 '세 수의 합 × 두 수씩 곱한 합 − 세 수의 곱'이다.

NoteBase

문 2. 이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(5\alpha^2-\alpha^3-\beta)(5\beta^2-\beta^3-\alpha)$의 값은?

① 40

② 45

③ 50

④ 55

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 이차방정식의 근이 만족하는 식과 근과 계수의 관계를 이용해 고차식을 간단히 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: $x^2-5x+5=0$
두 근: α, β
근과 계수의 관계: $\alpha+\beta=5, \alpha\beta=5$
구해야 할 값: $(5\alpha^2-\alpha^3-\beta)(5\beta^2-\beta^3-\alpha)$

사용할 공식

각 근 r은 원래 방정식을 만족하므로 $r^2-5r+5=0$, 즉 $r^2=5r-5$이다. 따라서 $r^3=5r^2-5r$이고 $5r^2-r^3=5r$이다. 또한 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$를 사용한다. 고차항을 근이 만족하는 식으로 낮춘 뒤 합과 곱으로 정리할 수 있기 때문이다.

계산 과정

$5\alpha^2-\alpha^3=5\alpha, 5\beta^2-\beta^3=5\beta$이므로
$(5\alpha-\beta)(5\beta-\alpha)$
$=25\alpha\beta-5\alpha^2-5\beta^2+\alpha\beta$
$=26\alpha\beta-5(\alpha^2+\beta^2)$
한편 $\alpha^2+\beta^2=5^2-2\cdot5=15$이므로
$26\cdot5-5\cdot15=130-75=55$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 55이므로 40은 틀린 값이다. 올바르게는 55이다.
② X — 계산 결과는 55이므로 45는 틀린 값이다. 올바르게는 55이다.
③ X — 계산 결과는 55이므로 50은 틀린 값이다. 올바르게는 55이다.
④ O — 계산 결과 55와 일치한다.

오답 포인트

$5r^2 - r^3$을 직접 전개하려 하거나 $\alpha^2 + \beta^2$를 $(\alpha + \beta)^2$와 같다고 보면 계산이 길어지거나 오답이 된다.
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$에서 $-2\alpha\beta$를 빠뜨리지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

이차방정식의 근이 들어 있는 고차식은 먼저 각 근이 만족하는 방정식으로 차수를 낮추고, 대칭식은 근의 합과 곱으로 바꾸어 계산한다.

암기 포인트

근의 고차식은 원래 방정식으로 차수를 낮추고, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$로 정리한다.

NoteBase

문 3. 다항식 $(2x+1)^6$을 $4x^2-1$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(-1)$의 값은?

① -32

② -16

③ 16

④ 32

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 나누는 다항식이 0이 되는 값을 대입하여 일차식인 나머지를 결정하는 문제이다.

조건 정리

$4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$이므로 그 근은 x=12, x=-12이다. 나머지 $R(x)$의 차수는 2보다 작으므로 $R(x)=ax+b$로 놓는다. 구해야 할 값은 $R(-1)$이다.

사용할 원리

$(2x+1)^6=(4x^2-1)Q(x)+R(x)$로 놓는다. $4x^2-1=0$이 되는 값을 대입하면 몫이 포함된 항이 0이 되어 $(2x+1)^6=R(x)$가 되므로 나머지의 두 계수를 구할 수 있다.

계산 과정

1. x=-12를 대입하면 R(-12)=0^6=0이므로 - a2+b=0이다.
2. x=12를 대입하면 R(12)=2^6=64이므로 a2+b=64이다.
3. 두 식을 더하면 $2b=64$이므로 $b=32$이고, 첫째 식에서 $a=64$이다. 따라서 $R(x)=64x+32$이다.
4. $R(-1)=-64+32=-32$이다.

선지 판단

① O: 계산한 $R(-1)$의 값이 -32이므로 옳다.
② X: -16은 계산값 -32와 일치하지 않는다. 올바른 값은 -32이다.
③ X: 16은 부호와 크기가 모두 계산값과 다르다. 올바른 값은 -32이다.
④ X: 32는 나머지식의 상수항 b일 뿐 $R(-1)$이 아니다. 올바른 값은 -32이다.

오답 포인트

④의 32는 $R(x)=64x+32$에서 상수항만 보고 고르도록 만든 함정이다. 나머지식을 구한 뒤 반드시 $x=-1$을 대입해야 하며, $R(-1)=64(-1)+32$에서 음의 부호를 빠뜨리지 않는다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

나누는 다항식의 근을 원래 다항식과 나머지식에 각각 대입하고, 얻은 연립방정식으로 나머지식을 결정한 뒤 문제에서 요구한 값을 다시 대입한다.

암기 포인트

이차식으로 나눈 나머지는 일차 이하이고, 나누는 식의 근에서는 원래 다항식의 값과 나머지의 값이 같다.

NoteBase

문 4. 실수 x, y가 $x^2 + y^2 = 25$를 만족시킬 때, $y^2 + 4x$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3

② 6

③ 9

④ 12

정답 3번

출제 포인트

원의 조건에서 한 변수를 소거한 뒤 이차식의 꼭짓점과 정의역의 양 끝점을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $x^2 + y^2 = 25$이다.
구해야 할 값: $y^2 + 4x$의 최댓값과 최솟값의 합이다.
주의할 조건: $y^2 = 25 - x^2 \geq 0$이므로 $-5 \leq x \leq 5$이다.

사용할 공식

$y^2 + 4x = 25 - x^2 + 4x = 29 - (x - 2)^2$
y^2을 $25 - x^2$으로 바꾸면 한 변수의 이차식이 되므로 완전제곱식을 이용할 수 있다. 최댓값은 꼭짓점에서, 최솟값은 제한된 정의역 $[-5, 5]$의 양 끝점을 비교하여 구한다.

계산 과정

1. $x = 2$일 때 $29 - (x - 2)^2 = 29$이므로 최댓값은 29이다. 이때 $y^2 = 21$이므로 조건을 만족하는 실수 y가 존재한다.
2. $[-5, 5]$에서 $x = 2$와 가장 먼 점은 $x = -5$이므로 최솟값은 $29 - (-5 - 2)^2 = 29 - 49 = -20$이다. 이때 $y = 0$이므로 원의 조건을 만족한다.
3. 최댓값과 최솟값의 합은 $29 + (-20) = 9$이다.

선지 판단

① X — 3은 계산 결과 9와 다르다. 1번의 '3'은 올바르게는 '9'이다.
② X — 6은 최댓값 29와 최솟값 -20의 합이 아니다. 2번의 '6'은 올바르게는 '9'이다.
③ O — 최댓값 29와 최솟값 -20을 더하면 9이므로 옳다.
④ X — 12는 계산 결과 9와 다르다. 4번의 '12'는 올바르게는 '9'이다.

NoteBase

오답 포인트

완전제곱식 $29-(x-2)^2$만 보고 최솟값이 없다고 판단하면 안 된다. 원의 조건 때문에 x의 범위가 $[-5, 5]$로 제한되며, 최솟값은 꼭짓점이 아니라 꼭짓점에서 더 먼 끝점 $x=-5$에서 나온다. 또한 최솟값 -20의 음수 부호를 빠뜨리면 합을 잘못 계산하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

원의 식에서 한 변수의 제곱을 소거하고, 남은 이차식을 완전제곱식으로 정리한다. 이어서 원의 조건이 정하는 변수의 범위를 확인한 뒤 꼭짓점과 양 끝점의 함숫값을 비교한다.

암기 포인트

제한된 구간에서 이차식의 최댓값·최솟값은 꼭짓점과 양 끝점을 함께 비교한다.

NoteBase

문 5. 두 점 $A(-3,1)$, $B(2,4)$와 직선 $y=x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은? (단, $\overline{AB}$는 선분 AB의 길이이다.)

① $\sqrt{2}$
② $5\sqrt{2}$
③ $9\sqrt{2}$
④ $13\sqrt{2}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 직선 위의 한 점을 거쳐 두 점까지 이르는 거리의 합을 대칭이동과 삼각부등식으로 최소화하는 문제이다.

조건 정리

주어진 점은 $A(-3,1)$, $B(2,4)$이고, P는 직선 $y=x$ 위에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'라 하면 좌표를 서로 바꾸어 $A'(1,\ -3)$이 된다. 대칭이동에 따라 $AP=A'P$이다.

사용할 공식

삼각부등식에 따라 $A'P+PB\geq A'B$이고, A', P, B가 한 직선 위에 있으며 P가 선분 $A'B$ 위에 있을 때 등호가 성립한다. 따라서 $AP+BP=A'P+PB$의 최솟값은 $A'B$이다.

계산 과정

선분 $A'B$와 $y=x$의 교점이 실제로 선분 위에 있는지 확인한다. $A'(1,\ -3)$에서 $B(2,4)$로 가는 점을 $(1+t,\ -3+7t)$라 하면, $y=x$에서 $-3+7t=1+t$이므로 $t=\frac{2}{3}$이다. $0<t<1$이므로 교점 P는 선분 $A'B$ 위에 있어 등호가 성립한다. 따라서

$A'B=\sqrt{(2-1)^2+\{4-(-3)\}^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

선지 판단

① X — 계산된 최솟값 $5\sqrt{2}$와 일치하지 않는다. 틀린 값 $\sqrt{2}$는 올바르게는 $5\sqrt{2}$이다.
② O — 대칭점 $A'(1,\ -3)$과 $B(2,4)$ 사이의 거리가 $5\sqrt{2}$이므로 최솟값과 일치한다.
③ X — 계산된 최솟값 $5\sqrt{2}$보다 크다. 틀린 값 $9\sqrt{2}$는 올바르게는 $5\sqrt{2}$이다.
④ X — 계산된 최솟값 $5\sqrt{2}$보다 크다. 틀린 값 $13\sqrt{2}$는 올바르게는 $5\sqrt{2}$이다.

NoteBase

오답 포인트

두 거리 AP, BP를 각각 따로 최소화할 수 있다고 보는 것이 함정이다. P는 같은 한 점이어야 하므로 한 점을 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 뒤 꺾인 경로를 하나의 직선 경로로 펴야 한다. 또한 대칭점과 다른 점을 잇는 선분이 $y = x$와 실제로 만나는지도 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

직선 위의 점 P에 대한 두 거리의 합은 한쪽 점을 그 직선에 대하여 대칭이동한 뒤 두 고정점 사이의 직선거리로 바꾼다. 이어서 두 고정점을 잇는 선분과 제한된 직선의 교점이 허용 범위에 있는지 확인한다.

암기 포인트

직선 위 경유점까지의 거리 합의 최소는 대칭이동으로 꺾인 길을 펴서 구한다.

NoteBase

문 6. 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + 7$에 대하여 방정식 $(f(x) - a)\{f(x) - (a + 2)\} = 0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 상수 a의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 이차함수의 최댓값과 수평선의 교점 개수를 이용하여 두 방정식의 서로 다른 실근 수가 3이 되는 조건을 찾는 문제이다.

조건 정리

$f(x) = -x^2 + 2x + 7 = -(x - 1)^2 + 8$이므로 최댓값은 8이고 치역은 $f(x) \le 8$이다. 따라서 $f(x) = c$의 서로 다른 실근 수는 $c < 8$이면 2개, $c = 8$이면 1개, $c > 8$이면 0개이다. 또한 a와 $a + 2$는 서로 다른 값이므로 두 방정식의 근은 서로 겹치지 않는다.

사용할 공식

주어진 방정식은
$(f(x) - a)\{f(x) - (a + 2)\} = 0$
이므로 $f(x) = a$ 또는 $f(x) = a + 2$로 나뉜다. 서로 다른 실근이 3개가 되려면 한 방정식에서 2개, 다른 방정식에서 1개의 실근이 나와야 한다. 더 큰 높이는 $a + 2$이므로 이 값이 포물선의 최댓값 8과 같아야 한다.

계산 과정

$a + 2 = 8$
이므로 $a = 6$이다. 실제로 $f(x) = 6$에서는 $(x - 1)^2 = 2$이므로 $x = 1 \pm \sqrt{2}$의 두 근을 얻고, $f(x) = 8$에서는 $x = 1$의 한 근을 얻는다. 따라서 서로 다른 실근은 모두 3개이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a = 2$이면 높이 2와 4가 모두 8보다 작아 각각 두 근을 가지므로 실근은 4개이다. 3개가 되도록 고치면 $a = 6$이다.
② X — $a = 4$이면 높이 4와 6이 모두 8보다 작아 각각 두 근을 가지므로 실근은 4개이다. 3개가 되도록 고치면 $a = 6$이다.
③ O — $a = 6$이면 $f(x) = 6$에서 두 근, $f(x) = 8$에서 한 근이 나와 서로 다른 실근이 3개이다.
④ X — $a = 8$이면 $f(x) = 8$은 한 근을 갖지만 $f(x) = 10$은 최댓값 8을 초과하여 근이 없으므로 실근은 1개이다. 3개가 되도록 고치면 $a = 6$이다.

오답 포인트

두 인수에서 나오는 실근 수를 단순히 더하기 전에 각 높이가 최댓값 8보다 작은지, 같은지, 큰지를 구분해야 한다. 특히 $a = 8$이 아니라 더 큰 높이인 $a + 2$가 8이어야 2개와 1개의 근이 함께 생긴다.

다시 나오면 이렇게 판단

이차함수의 식을 꼭짓점형으로 바꾸어 최댓값 또는 최솟값을 찾고, 각 수평선의 높이에 따른 교점 수를 센다. 곱이 0인 식은 각 인수가 0인 경우로 나눈 뒤 근의 중복 여부까지 확인한다.

암기 포인트

아래로 열린 포물선에서 수평선이 최댓값보다 낮으면 두 점, 같으면 한 점, 높으면 만나지 않는다.

NoteBase

문 7. 원점에서 원 $x^2 + (y-a)^2 = 9$에 그은 두 접선이 수직일 때, 상수 a의 값은? (단, $a > 3$이다.)

① $3\sqrt{2}$
② $4\sqrt{2}$
③ $5\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{2}$

정답 1번

출제 포인트

원의 바깥점에서 그은 두 접선이 수직일 때, 중심까지의 거리와 반지름의 관계를 이용해 원의 중심 좌표를 구하는 문제이다.

조건 정리

원의 중심을 C, 원점을 O, 한 접점을 T라 하면 $C = (0, a)$, 반지름은 $CT = 3$, 중심까지의 거리는 $OC = a$이다.
두 접선은 OC에 대하여 대칭이므로 서로 수직이면 $\angle COT = 45^\circ$이다. 또한 반지름은 접선에 수직이므로 $\triangle OCT$는 T에서 직각인 삼각형이다.

사용할 공식

직각삼각형 OCT에서
$\sin 45^\circ = \frac{CT}{OC} = \frac{3}{a}$
를 사용한다. 접선 사이의 각이 90°이고 OC가 그 각을 이등분하므로 한쪽 각이 45°가 되기 때문이다.

계산 과정

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{a}$
이므로
$a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.
이는 $a > 3$도 만족한다. 따라서 $a = 3\sqrt{2}$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 $a = 3\sqrt{2}$이므로 옳다.
② X — $4\sqrt{2}$는 $a^2 = 32$가 되어 수직 조건 $a^2 = 18$을 만족하지 않는다. 틀린 값 $4\sqrt{2}$ → 올바른 값은 $3\sqrt{2}$이다.
③ X — $5\sqrt{2}$는 $a^2 = 50$이 되어 수직 조건 $a^2 = 18$을 만족하지 않는다. 틀린 값 $5\sqrt{2}$ → 올바른 값은 $3\sqrt{2}$이다.
④ X — $6\sqrt{2}$는 $a^2 = 72$가 되어 수직 조건 $a^2 = 18$을 만족하지 않는다. 틀린 값 $6\sqrt{2}$ → 올바른 값은 $3\sqrt{2}$이다.

NoteBase

오답 포인트

접선 두 개가 이루는 전체 각 90 °를 그대로 직각삼각형의 원점 쪽 각으로 쓰는 것이 함정이다. 중심과 원점을 잇는 선이 두 접선 사이의 각을 이등분하므로 직각삼각형에 사용하는 각은 45 °이다.

다시 나오면 이렇게 판단

원의 바깥점에서 그은 두 접선이 이루는 각을 먼저 반으로 나누고, 접점에서 반지름과 접선이 수직이라는 성질로 직각삼각형을 만든다. 접선 사이의 각이 90 °이면 중심까지의 거리 d와 반지름 r 사이에는 $d = r\sqrt{2}$가 성립한다.

암기 포인트

두 접선이 수직이면 외부점에서 중심까지의 거리는 반지름의 $\sqrt{2}$배이다.

NoteBase

문 8. x**에 대한 항등식** $(4x^3-2x+1)^5=a_1+\sum_{n=1}^{15}a_{n+1}x^n$**에 대하여,** $\sum_{n=1}^{8}a_{2n}$**의 값은? (단,** $1\le n\le 16$**인 자연수** n**에 대하여** a_n**은 상수이다.)**

① 119

② 122

③ 125

④ 128

정답 2번

출제 포인트

다항식의 홀수 차수 항의 계수 합을 $f(1)$과 $f(-1)$을 이용해 구하는 문제이다.

조건 정리

$f(x)=(4x^3-2x+1)^5$라 둔다. 전개식에서 a_{n+1}은 x^n의 계수이므로 a_{2n}은 x^{2n-1}의 계수이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{8}a_{2n}$은 $x^1, x^3, \dots, x^{15}$의 계수 합이다.

사용할 공식

다항식 $f(x)$의 홀수 차수 항의 계수 합은

$$\frac{f(1)-f(-1)}{2}$$

이다. $f(1)$은 모든 계수의 합이고 $f(-1)$은 짝수 차수 계수의 합에서 홀수 차수 계수의 합을 뺀 값이므로 두 값의 차를 2로 나누면 홀수 차수 계수의 합이 된다.

계산 과정

$f(1)=(4-2+1)^5=3^5=243$이고, $f(-1)=(-4+2+1)^5=(-1)^5=-1$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{8}a_{2n}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}=\frac{243-(-1)}{2}=122$$

이다.

선지 판단

① X — 계산값은 119가 아니라 122이므로 틀리다. 올바른 값은 122이다.

② O — 홀수 차수 항의 계수 합을 계산하면 122이므로 맞다.

③ X — 계산값은 125가 아니라 122이므로 틀리다. 올바른 값은 122이다.

④ X — 계산값은 128이 아니라 122이므로 틀리다. 올바른 값은 122이다.

NoteBase

오답 포인트

첨자 $2n$만 보고 짝수 차수의 계수 합으로 판단하기 쉽다. 그러나 a_{n+1}이 x^n의 계수이므로 a_{2n}은 홀수 차수인 x^{2n-1}의 계수이다. 또한 $f(-1) = -1$이므로 $f(1) - f(-1) = 243 - (-1) = 244$에서 음수의 뺄셈을 정확히 처리해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 계수의 첨자와 실제 차수의 대응을 확인한다. 홀수 차수 계수의 합은 $(f(1) - f(-1))/2$, 짝수 차수 계수의 합은 $(f(1) + f(-1))/2$로 계산한다.

암기 포인트

홀수 차수 계수 합은 두 대입값의 차인 $(f(1) - f(-1))/2$이다.

NoteBase

문 9. 유리함수 $y=\frac{ax+1}{-x+b}$의 그래프가 두 직선 $x=7$, $y=2$와 만나지 않을 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 $ab\neq -1$인 상수이다.)

① 3

② 5

③ 7

④ 9

정답 2번

출제 포인트

유리함수의 그래프가 특정 수직선 및 수평선과 만나지 않는 조건을 각각 식의 정의역과 방정식의 해 존재 여부로 바꾸어 a, b를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $y=\frac{ax+1}{-x+b}$이고 $ab\neq -1$이다. 그래프는 수직선 $x=7$ 및 수평선 $y=2$와 모두 만나지 않는다. 구해야 할 값은 $a+b$이다.

사용할 원리

분모가 0인 x에서는 함수가 정의되지 않는다. 또한 그래프와 수평선 $y=2$의 교점은 $2=\frac{ax+1}{-x+b}$를 만족하는 x에 해당하므로, 만나지 않으려면 이 방정식에 해가 없어야 한다. $ab\neq -1$은 분모가 0이 되는 지점에서 분자까지 0이 되어 식이 약분되는 경우를 배제한다.

계산 과정

1. 분모 $-x+b$가 0이 되는 값은 $x=b$이다. 그래프가 $x=7$과 만나지 않으므로 $b=7$이다.
2. $y=2$와의 교점 조건을 정리하면
$2(-x+b)=ax+1$
$(a+2)x=2b-1$
이다. 이 방정식에 해가 없으려면 x의 계수는 0이고 우변은 0이 아니어야 한다. 따라서 $a+2=0$, 즉 $a=-2$이다. 이때 $2b-1=13\neq 0$이므로 실제로 해가 없다.
3. 따라서 $a+b=-2+7=5$이다. 또한 $ab=-14\neq -1$이므로 주어진 조건도 만족한다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 $a+b=5$이므로 선지의 '3'은 틀리며, 올바른 값은 5이다.
② O — $a=-2$, $b=7$이므로 $a+b=5$이다.
③ X — $b=7$만을 구한 값을 합으로 착각한 '7'은 틀리며, 올바른 값은 $-2+7=5$이다.
④ X — 계산 결과는 $a+b=5$이므로 선지의 '9'는 틀리며, 올바른 값은 5이다.

오답 포인트

$x=7$과 만나지 않는다는 조건에서 $b=7$을 구한 뒤 이를 곧바로 답으로 고르면 ③을 선택하게 된다. 수평선 $y=2$와 만나지 않는 조건까지 적용하여 $a=-2$를 구한 후 두 값을 더해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

수직선과 만나지 않는 조건은 먼저 분모가 0이 되는 정의역 제외값과 연결한다. 수평선과 만나지 않는 조건은 해당 y값을 함수식에 대입한 방정식이 해를 갖지 않는 조건으로 바꾼다.

암기 포인트

수직선 미교차는 정의역 제외값, 수평선 미교차는 대입 방정식의 해 없음으로 판단한다.

NoteBase

문 10. 직선 $y = mx + n$이 곡선 $y = x^2 + 2ax + a^2 + 2a$에 실수 a의 값에 관계없이 항상 접할 때, 점 $(8, 3)$과 직선 $y = mx + n$ 사이의 거리는? (단, m, n은 상수이다.)

① $\sqrt{5}$
② $2\sqrt{5}$
③ $3\sqrt{5}$
④ $4\sqrt{5}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 두 그래프가 접할 때 교점 방정식의 판별식이 0이라는 조건을 이용해 직선을 정한 뒤, 점과 직선 사이의 거리를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 직선은 실수 a의 값과 관계없이 곡선에 항상 접한다. 따라서 교점에 관한 이차방정식의 판별식이 모든 실수 a에 대하여 0이어야 한다. 구해야 할 값은 점 $(8, 3)$과 그렇게 정해진 직선 사이의 거리이다.

사용할 공식

이차방정식 $Ax^2 + Bx + C = 0$이 중근을 가지는 조건은 $D = B^2 - 4AC = 0$이다. 또한 점 (x_0, y_0)과 직선 $Ax + By + C = 0$ 사이의 거리는 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$이다. 접점에서는 교점이 하나의 중근으로 나타나므로 판별식 조건을 사용한다.

계산 과정

직선과 곡선의 식을 같게 두면 $x^2 + (2a - m)x + (a^2 + 2a - n) = 0$이다. 접하므로 판별식을 0으로 두면 alignedD&=(2a-m)^2-4(a^2+2a-n)\\&=(-4m-8)a+m^2+4n=0.aligned 이 식이 모든 실수 a에 대하여 성립하려면 $-4m - 8 = 0$, $m^2 + 4n = 0$이어야 하므로 $m = -2$, $n = -1$이다. 따라서 직선은 $y = -2x - 1$, 즉 $2x + y + 1 = 0$이다. 점 $(8, 3)$에서 이 직선까지의 거리는 d=(|2·8+3+1|)/(√(2^2+1^2))=(20)/(5)=45이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 45이므로 5는 틀린 값이다. 올바른 거리는 45이다.
② X — 계산 결과는 45이므로 25는 틀린 값이다. 올바른 거리는 45이다.
③ X — 계산 결과는 45이므로 35는 틀린 값이다. 올바른 거리는 45이다.
④ O — 점과 직선 사이의 거리 공식에 $2x + y + 1 = 0$과 $(8, 3)$을 대입한 값이 45이므로 옳다.

NoteBase

오답 포인트

'실수 a의 값에 관계없이 항상 접한다'는 조건은 특정한 a 하나에서만 판별식이 0이라는 뜻이 아니다. 판별식 $(-4m-8)a+m^2+4n$이 모든 a에서 0이 되도록 a의 계수와 상수항을 각각 0으로 두어야 한다. 또한 거리 공식의 분모 $\sqrt{A^2+B^2}$를 빠뜨리면 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

매개변수의 값과 관계없이 항상 접한다는 문제가 나오면 교점 방정식을 만든 뒤 판별식을 매개변수에 관한 항등식으로 보고 각 계수를 0으로 둔다. 직선을 일반형으로 고친 뒤 점과 직선 사이의 거리 공식을 적용한다.

암기 포인트

항상 접함은 $D\equiv 0$, 점과 직선의 거리는 '직선식에 점을 대입한 절댓값을 계수 제곱합의 제곱근으로 나눈 값'이다.

NoteBase

문 11. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+a}-\sqrt{x+7}}{x^2-4}=b$**일 때,** $\frac{a}{b}$**의 값은? (단,** a**,** b**는 상수이고** $b\neq 0$**이다.)**

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{4}$

③ 4

④ 8

정답 4번

출제 포인트

분모가 0으로 가는 극한이 유한한 값이 되기 위한 조건으로 a를 정한 뒤, 근호식을 유리화하여 b와 a/b를 구하는 문제이다.

조건 정리

$x\to 2$일 때 분모 x^2-4는 0으로 간다. 극한값 b가 유한하고 $b\neq 0$이므로 분자도 0으로 가야 하며, 약분한 뒤의 극한은 0이 아니어야 한다. 구해야 할 값은 a/b이다.

사용할 원리

먼저 $\sqrt{8+a}-3=0$을 이용해 a를 결정한다. 그다음 $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$를 이용해 분자를 유리화한다. 이는 분자와 분모에 공통으로 생기는 $x-2$를 찾아 약분하기 위해서이다.

계산 과정

1. 분자가 0으로 가야 하므로 $\sqrt{8+a}-\sqrt{9}=0$이다. 따라서 $8+a=9$이고 $a=1$이다.
2. $a=1$을 대입하고 분자를 유리화하면
$\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7}}{x^2-4}=\frac{(4x+1)-(x+7)}{(x^2-4)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}$
$=\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}$.
3. $x-2$를 약분한 뒤 $x=2$를 대입하면
b=(3)/((2+2)(3+3))=18.
4. 따라서 $\frac{a}{b}=\frac{1}{1/8}=8$이다.

선지 판단

① X — 1/8은 a/b가 아니라 계산된 b의 값이다. '$a/b=1/8$'은 틀리고, 올바르게는 $b=1/8$, $a/b=8$이다.

② X — 1/4은 계산 결과 $a/b=8$과 일치하지 않는다. 올바른 값은 8이다.

③ X — 4는 $b=1/8$을 구한 뒤 a/b를 계산한 결과가 아니다. '$a/b=4$'는 틀리고, 올바르게는 $a/b=1/(1/8)=8$이다.

④ O — $a=1$, $b=1/8$이므로 $a/b=8$이다.

NoteBase

오답 포인트

①의 1/8은 최종 답이 아니라 중간에 구한 b이다. 또한 분자가 0이 되는 조건으로 $a = 1$을 먼저 정하지 않거나, 마지막에 a/b 대신 b/a를 계산하면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0으로 가는데 극한값이 유한하다고 주어지면 먼저 분자도 0이 되는 조건을 찾는다. 이후 인수분해나 유리화로 공통인자를 약분하여 극한값을 구하고, 문제에서 요구한 값이 중간값인지 비율인지 마지막에 확인한다.

암기 포인트

0/0형 근호 극한은 '분자 0 조건 확인 → 유리화 → 공통인자 약분'의 순서로 계산한다.

NoteBase

문 12. 함수 f(x)=cases(3x^2)/(x-2|x|)+3&(x≠0)\+2&(x=0)cases가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 절댓값이 들어 있는 함수를 $x>0$과 $x<0$으로 나누어 정리한 뒤, $x=0$에서의 좌극한·우극한·함숫값을 일치시키는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $x\neq 0$일 때 $f(x)=\frac{3x^2}{x-2|x|}+3$이고, $x=0$일 때 $f(0)=a+2$이다. 실수 전체에서 연속이려면 특히 $x=0$에서 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$이어야 한다.

사용할 공식

절댓값은 $x>0$이면 $|x|=x$, $x<0$이면 $|x|=-x$이다. 또한 $x=0$에서 연속일 조건은

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

이다. 좌우에서 절댓값의 식이 달라지므로 두 방향의 극한을 각각 계산해야 한다.

계산 과정

1. $x>0$이면 $|x|=x$이므로

$f(x)=\frac{3x^2}{x-2x}+3=-3x+3$

이고, 따라서 $\lim_{x\to 0^+} f(x)=3$이다.

2. $x<0$이면 $|x|=-x$이므로

$f(x)=\frac{3x^2}{x+2x}+3=x+3$

이고, 따라서 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=3$이다.

3. 좌극한과 우극한이 모두 3이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=3$이다. 연속 조건에 따라 $a+2=3$이므로 $a=1$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $a = 1$이므로 옳다.
② X — 2는 연속 조건 $a + 2 = 3$을 만족하지 않는다. 틀린 값 2가 아니라 올바른 값은 1이다.
③ X — 3은 극한값 자체이며 a의 값이 아니다. $a + 2 = 3$에서 2를 빼면 올바른 값은 1이다.
④ X — 4는 연속 조건을 만족하지 않는다. 틀린 값 4가 아니라 올바른 값은 1이다.

오답 포인트

$x < 0$에서 $|x| = -x$로 바꾸지 않거나, 극한값 3을 그대로 a로 고르면 틀린다. 극한값은 $f(0) = a + 2$와 같아야 하므로 마지막에 $a + 2 = 3$을 풀어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

절댓값이 포함된 연속 문제는 절댓값의 기준점을 찾고, 그 점의 왼쪽과 오른쪽 식을 각각 정리한 다음,
좌극한·우극한·함숫값을 차례로 일치시킨다.

암기 포인트

절댓값은 구간을 나누고, 연속은 좌극한=우극한=함숫값으로 판단한다.

NoteBase

문 13. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x^2-9}=2$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 방정식은?

① $y=12x+26$

② $y=12x-34$

③ $y=4x-10$

④ $y=4x+10$

정답 2번

출제 포인트

주어진 극한에서 먼저 $f(3)$을 확정한 뒤, 인수분해를 이용하여 $f'(3)$을 구하고 접선의 방정식을 세우는 문제이다.

조건 정리

분모 x^2-9는 $x\to 3$일 때 0으로 수렴한다. 주어진 극한이 유한한 값 2이므로 분자도 0으로 수렴해야 한다. 다항함수는 연속이므로 $f(3)-2=0$, 즉 $f(3)=2$이다. 따라서 접점은 $(3, 2)$이다.

사용할 공식

미분계수의 정의는 $f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$이다. 또한 접점 $(a, f(a))$에서의 접선은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다. 분모를 $x^2-9=(x-3)(x+3)$으로 인수분해하면 주어진 극한을 미분계수와 연결할 수 있다.

계산 과정

$$2=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{(x-3)(x+3)}=\left(\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right)\left(\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}\right)=\frac{f'(3)}{6}$$

따라서 $f'(3)=12$이다. 접선의 방정식은 $y-2=12(x-3)$이므로 $y=12x-34$이다.

선지 판단

① X — 기울기 12는 맞지만 절편 26이 틀렸다. 이 식에 $x=3$을 대입하면 $y=62$이므로 접점 $(3, 2)$를 지나지 않는다. 올바른 절편은 $2-12\cdot 3=-34$이다.

② O — $y=12x-34$는 기울기가 $f'(3)=12$이고 $x=3$일 때 $y=2$이므로 접점 $(3, 2)$를 지난다.

③ X — 접점 $(3, 2)$는 지나지만 기울기 4가 틀렸다. 주어진 극한은 $f'(3)$ 자체가 아니라 $f'(3)/6$이므로 올바른 기울기는 12이고 식은 $y=12x-34$이다.

④ X — 기울기 4가 틀리고, $x=3$일 때 $y=22$이므로 접점도 지나지 않는다. 올바른 식은 $y=12x-34$이다.

오답 포인트

주어진 극한값 2를 곧바로 미분계수로 보면 안 된다. 분모가 $(x-3)(x+3)$이므로 극한값은 $f'(3)/6$이다. 또한 접선의 기울기를 구한 뒤에는 반드시 접점 $(3, 2)$를 대입하여 절편을 정해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0으로 가고 전체 극한이 유한하면 먼저 분자도 0으로 가는 조건에서 함수값을 구한다. 그다음 분모를 인수분해하여 미분계수의 정의 형태를 만들고, 구한 함수값과 미분계수를 점-기울기식에 대입한다.

암기 포인트

$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$이므로 $x \to a$에서 남는 $x + a$의 극한값 $2a$까지 반영해야 한다.

NoteBase

문 14. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치 x_1, x_2가 각각
$x_1 = 2t^3 - 6t^2, \quad x_2 = 3t^2 + 24t$
이다. 두 점 사이의 거리의 최댓값은? (단, $0 \le t \le 5$이다.)

① 68

② 95

③ 112

④ 128

정답 3번

출제 포인트

두 점 사이의 거리를 위치의 차의 절댓값으로 나타내고, 닫힌구간에서 거리함수의 최댓값을 구하는 문제이다.

조건 정리

두 점의 위치는 각각 $x_1 = 2t^3 - 6t^2$, $x_2 = 3t^2 + 24t$이고 시간의 범위는 $0 \le t \le 5$이다. 구해야 할 값은 $|x_1 - x_2|$의 최댓값이다.

사용할 공식

두 점 사이의 거리 $d(t)$는
$d(t) = |x_1 - x_2|$
이다. 닫힌구간에서 연속함수의 최댓값은 구간 내부의 극값 후보와 양 끝점의 함숫값을 비교하여 구한다.

계산 과정

먼저 위치의 차를 계산하면
$x_1 - x_2 = 2t^3 - 9t^2 - 24t = t(2t^2 - 9t - 24)$
이다. $2t^2 - 9t - 24 = 0$의 양의 근은 $(9 + \sqrt{273})/4 > 5$이므로 $0 < t \le 5$에서 $2t^2 - 9t - 24 < 0$이고 $x_1 - x_2 < 0$이다. 따라서
$d(t) = -(x_1 - x_2) = -2t^3 + 9t^2 + 24t$
이다. 이를 미분하면
$d'(t) = -6t^2 + 18t + 24 = -6(t - 4)(t + 1)$
이다. 구간 안의 임계점은 $t = 4$이고, 끝점과 함께 비교하면
$d(0) = 0, \quad d(4) = 112, \quad d(5) = 95$
이다. 그러므로 두 점 사이 거리의 최댓값은 112이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 68은 $d(4) = 112$보다 작으므로 최댓값이 아니다. 틀린 값 68은 올바르게는 112이다.
② X — 95는 끝점 $t = 5$에서의 거리일 뿐이며, $t = 4$에서 거리가 112가 된다. 틀린 값 95는 올바르게는 112이다.
③ O — $t = 4$에서 $d(4) = 112$이고, 이는 양 끝점의 거리보다 크므로 최댓값이다.
④ X — 거리함수의 내부 극값과 양 끝점을 비교한 최댓값은 112이므로 128은 아니다. 틀린 값 128은 올바르게는 112이다.

오답 포인트

위치의 차 $x_1 - x_2$를 그대로 거리로 사용하면 부호를 잘못 처리하게 된다. 또한 끝점 $t = 5$만 계산하면 ②의 95를 고르기 쉽지만, 닫힌구간의 최댓값은 내부 임계점 $t = 4$도 반드시 비교해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 점의 거리는 먼저 위치의 차에 절댓값을 씌워 함수로 만든다. 그다음 절댓값 안의 부호를 구간별로 확인하고, 미분으로 찾은 구간 내부의 임계점과 양 끝점의 함숫값을 모두 비교한다.

암기 포인트

수직선 위 두 점의 거리는 위치의 차의 절댓값이며, 닫힌구간의 최댓값은 '내부 임계점과 양 끝점'을 모두 비교한다.

NoteBase

문 15. 다항함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x, y에 대하여,
$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$
을 만족시킨다.
$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f'(x)}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$
일 때, $f'(2)$의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 다항함수의 함수방정식에서 함수의 꼴을 정한 뒤, 극한이 유한하게 존재하기 위한 조건을 이용해 미지의 계수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수방정식은 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$이다. 구해야 할 값은 $f'(2)$이다. 또한 $x \to 2$일 때 분모 $x^2 - 4$가 0으로 가므로, 극한값이 유한하려면 분자 $f(x) - f'(x)$도 $x = 2$에서 0이 되어야 한다.

사용할 공식

$g(x) = f(x) - x^2 - 1$로 놓으면 함수방정식은 $g(x+y) = g(x) + g(y)$가 된다. g는 다항함수이므로 일차함수 $g(x) = ax$이고, 따라서 $f(x) = x^2 + ax + 1$이다. 이 치환은 원래 식의 교차항 $2xy$가 $(x+y)^2 - x^2 - y^2$와 같기 때문에 사용한다.

계산 과정

$f(x) = x^2 + ax + 1$이므로 $f'(x) = 2x + a$이다. 따라서
$f(x) - f'(x) = x^2 + (a-2)x + 1 - a$.
극한이 유한하려면 $x = 2$에서 분자가 0이어야 하므로
$4 + 2(a-2) + 1 - a = a + 1 = 0$
이고, $a = -1$이다. 이때
$\frac{f(x) - f'(x)}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$.
따라서 주어진 극한은 $\frac{1}{4}$이고 조건과 일치한다. 그러므로 $f'(2) = 4 + a = 3$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과 $f'(2) = 3$이므로 -3은 아니다. 틀린 값 -3 → 올바르게는 3이다.
② X — 계산 결과 $f'(2) = 3$이므로 -1은 아니다. -1은 계수 a의 값이며, 구하는 값은 $f'(2) = 4 + a = 3$이다. 틀린 값 -1 → 올바르게는 3이다.
③ X — 계산 결과 $f'(2) = 3$이므로 1은 아니다. $f'(2)$를 구할 때 $f'(x) = 2x + a$에 $x = 2$를 대입해야 한다. 틀린 값 1 → 올바르게는 3이다.
④ O — $a = -1$이므로 $f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$이다.

오답 포인트

함수방정식에서 구한 $a = -1$을 곧바로 답으로 고르면 ②를 선택하게 된다. 문제는 계수 a가 아니라 도함숫값 $f'(2)$를 묻고 있으므로 마지막에 $f'(2) = 4 + a$를 계산해야 한다. 또한 극한의 분모가 0으로 가므로 분자도 0이 되어야 한다는 조건을 먼저 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

교차항 $2xy$가 있는 함수방정식에서는 x^2을 분리해 덧셈함수의 꼴로 바꾼다. 이어서 분모가 0으로 가는 유한한 극한에서는 분자도 0이 되는 조건으로 계수를 정하고, 마지막에 문제에서 요구한 값을 다시 계산한다.

암기 포인트

$2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2$, 유한한 0/0형 극한은 먼저 분자가 0이 되는 조건을 확인한다.

NoteBase

문 16. 모든 실수 x에 대하여 다항함수 $f(x)$는
$\int_1^x tf'(t)dt = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{13}{6}$
을 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 $x = \alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$에서 극값을 갖고 $f(0) = 1$일 때, $\int_0^\beta f(x)dx$의 값은?

① -12

② -6

③ 0

④ 6

정답 2번

출제 포인트

적분으로 주어진 등식을 미분하여 $f'(x)$를 구하고, 극값을 갖는 지점 β를 찾은 뒤 정적분을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 모든 실수 x에 대하여
$\int_1^x tf'(t)dt = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{13}{6}$
이고, $f(0) = 1$이다. 또한 $f(x)$가 극값을 갖는 두 지점은 $\alpha < \beta$이다. 구해야 할 값은 $\int_0^\beta f(x)dx$이다.

사용할 공식

미적분학의 기본정리에 따라
$\frac{d}{dx}\int_1^x tf'(t)dt = xf'(x)$
이다. 양변을 미분하면 적분식에서 $f'(x)$를 얻을 수 있고, 이후 $f'(x) = 0$의 근과 부호 변화를 이용해 극값을 갖는 지점을 정할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

1. 주어진 등식의 양변을 미분한다.
$xf'(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = x(2x^2 - 2x - 4)$
$x \neq 0$에서 $f'(x) = 2x^2 - 2x - 4$이고, 양변이 다항식이므로 이 등식은 $x = 0$에서도 성립한다.

2. 도함수를 인수분해한다.
$f'(x) = 2(x + 1)(x - 2)$
도함수의 부호는 $x = -1$에서 양수에서 음수로, $x = 2$에서 음수에서 양수로 바뀐다. 따라서 두 지점 모두 극값을 갖고, $\alpha = -1, \beta = 2$이다.

3. $f'(x)$를 적분하고 $f(0) = 1$을 적용한다.
$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + C, \qquad C = 1$
따라서
$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1$
이다.

4. 0부터 $\beta = 2$까지 적분한다.
aligned ∫ _0^2 f(x)
dx&=≤ft[(1)/(6)x^4-(1)/(3)x^3-2x^2+x]_0^2\\&=(16)/(6)-(8)/(3)-8+2\\&=-6.aligned

선지 판단

① X — 계산 결과는 -6이므로 -12가 아니다. 올바른 값은 -6이다.
② O — $\beta = 2$를 대입해 계산한 정적분의 값이 -6이므로 맞다.
③ X — 계산 결과는 -6이므로 0이 아니다. 올바른 값은 -6이다.
④ X — 계산 결과는 -6이므로 6이 아니다. 올바른 값은 -6이다.

오답 포인트

$xf'(x) = x(2x^2 - 2x - 4)$에서 곧바로 x를 약분하면 $x = 0$을 빠뜨린 것처럼 보일 수 있다. 먼저 $x \neq 0$에서 도함수를 구하고, 다항식의 연속성 또는 다항식 항등 관계로 $x = 0$에서도 성립함을 확인한다. 또한 $\alpha < \beta$이므로 큰 근인 2가 β이다. 마지막 계산에서 $-8 + 2 = -6$의 부호를 반대로 처리하면 ④의 6을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

상한이 x인 정적분 등식은 먼저 양변을 미분한다. 이어서 도함수의 근과 부호 변화로 극값의 위치를 정하고, 초깃값으로 적분상수를 확정한 다음 요구된 구간의 정적분을 계산한다.

NoteBase

암기 포인트

적분 등식 미분 → 도함수의 근과 부호 변화 → 초깃값으로 상수 결정 → 정적분 계산의 순서이다.

NoteBase

문 17. 함수 f(x)=cases2x^2-2 & (x≤ 1)\\-x^2+1 & (x>1)cases에 대하여 $\int_{-1}^{3}|f(x)|dx$의 값은?

① 8

② $\frac{26}{3}$

③ $\frac{28}{3}$

④ 10

정답 3번

출제 포인트

구간별로 정의된 함수의 부호를 확인하여 절댓값을 제거한 뒤 정적분의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $x=1$을 기준으로 식이 달라진다.

$-1 \le x \le 1$에서는 $f(x)=2x^2-2 \le 0$이고, $1 < x \le 3$에서는 $f(x)=-x^2+1 < 0$이다. 따라서 적분 구간 전체에서 $|f(x)|=-f(x)$이다.

사용할 공식

함수의 식이 바뀌는 $x=1$에서 적분 구간을 나눈다.

$\int_{-1}^{3}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}(2-2x^2)dx+\int_{1}^{3}(x^2-1)dx$

각 구간에서 $f(x) \le 0$이므로 절댓값을 제거할 때 원래 함수의 부호를 반대로 바꾸어야 한다.

계산 과정

첫째 구간의 적분값은

$\int_{-1}^{1}(2-2x^2)dx=\left[2x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$

이다.

둘째 구간의 적분값은

$\int_{1}^{3}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{3}=\frac{20}{3}$

이다. 따라서

$\int_{-1}^{3}|f(x)|dx=\frac{8}{3}+\frac{20}{3}=\frac{28}{3}$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X. $8 = \frac{24}{3}$이므로 계산 결과 $\frac{28}{3}$과 일치하지 않는다. 8이라는 값이 틀렸으며, 올바른 값은 $\frac{28}{3}$이다.
② X. $\frac{26}{3}$은 계산 결과보다 $\frac{2}{3}$만큼 작다. $\frac{26}{3}$이라는 값이 틀렸으며, 올바른 값은 $\frac{28}{3}$이다.
③ O. 두 구간의 적분값을 더하면 $\frac{8}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X. $10 = \frac{30}{3}$이므로 계산 결과보다 $\frac{2}{3}$만큼 크다. 10이라는 값이 틀렸으며, 올바른 값은 $\frac{28}{3}$이다.

오답 포인트

함수식이 $x = 1$에서 바뀌므로 적분을 두 구간으로 나누어야 한다. 또한 두 구간 모두 함수값이 음수이므로 절댓값을 제거할 때 각각 $2x^2 - 2$를 $2 - 2x^2$로, $-x^2 + 1$을 $x^2 - 1$로 바꾸어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

구간별 함수의 경계점과 영점을 먼저 찾고, 각 구간에서 함수의 부호를 판정한 다음 절댓값을 제거하여 구간별 적분값을 합한다.

암기 포인트

절댓값 정적분은 '경계점·영점에서 구간 분할 → 부호 판정 → 음수 구간의 식에 마이너스 적용'의 순서로 계산한다.

NoteBase

문 18. 집합 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여, 다음 세 조건을 만족시키는 순서쌍 (A,B)의 개수는?

(가) $A \subset U,\ B \subset U$
(나) $1 \in A,\ B \neq \emptyset$
(다) $A \cap B = \emptyset,\ A \cup B = U$

① 31
② 32
③ 63
④ 64

정답 1번

출제 포인트

서로소인 두 집합 A, B가 U를 분할할 때 각 원소의 소속을 정하고, $1 \in A$와 $B \neq \emptyset$ 조건을 반영하여 순서쌍의 개수를 구하는 문제이다.

조건 정리

$A \cap B = \emptyset, A \cup B = U$이므로 U의 각 원소는 정확히 하나의 집합에 속한다. 원소 1은 반드시 A에 속하므로 소속을 선택할 수 있는 원소는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. 또한 B는 공집합이 아니어야 한다.

사용할 공식

5개 원소를 각각 A 또는 B에 배정하는 경우의 수는 2^5이다. 여기서 $B=\emptyset$인 한 가지 경우를 제외하므로 2^5-1을 사용한다.

계산 과정

1. 원소 1을 A에 고정한다.
2. 나머지 5개 원소는 각각 A와 B 중 하나에 속하므로 경우의 수는 $2^5=32$이다.
3. 이 가운데 5개 원소가 모두 A에 속하여 $B=\emptyset$이 되는 한 가지 경우를 제외한다.

따라서 순서쌍의 개수는 $2^5-1=31$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과가 31이므로 옳다.
② X — 32는 $1 \in A$만 반영한 2^5로, $B = \emptyset$인 경우까지 포함한 값이다. ②의 32는 31로 고쳐야 한다.
③ X — 63은 여섯 원소를 모두 자유롭게 배정한 2^6에서 $B = \emptyset$만 제외한 값으로, $1 \in A$를 반영하지 않았다. ③의 63은 31로 고쳐야 한다.
④ X — 64는 여섯 원소를 각각 A 또는 B에 배정한 2^6으로, $1 \in A$와 $B \neq \emptyset$을 모두 반영하지 않은 값이다. ④의 64는 31로 고쳐야 한다.

오답 포인트

②는 B가 공집합인 경우를 빼지 않은 값이고, ③과 ④는 원소 1의 소속이 이미 A로 고정되었다는 점을 놓친 값이다. 특히 분할 조건만 보고 모든 원소에 두 가지 선택이 있다고 계산하면 64 또는 63을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

분할 문제에서는 먼저 소속이 고정된 원소를 제외하고, 남은 원소마다 가능한 소속의 수를 곱한다. 그다음 공집합 금지와 같은 제한 조건에 걸리는 경우를 뺀다.

암기 포인트

원소 1 고정 후 5개를 두 집합에 배정하고, B가 빈 한 경우를 제외하므로 $2^5 - 1 = 31$이다.

NoteBase

문 19. 한 개의 주사위를 두 번 던진다. 5의 눈이 한 번도 나오지 않을 때, 나온 두 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률은?

① $\frac{2}{25}$
② $\frac{4}{25}$
③ $\frac{8}{25}$
④ $\frac{16}{25}$

정답 3번

출제 포인트

조건부 표본공간을 먼저 정한 뒤, 나머지에 따라 유리한 순서쌍의 수를 세어 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

5의 눈이 한 번도 나오지 않았으므로 각 시행에서 가능한 눈은 1, 2, 3, 4, 6이다. 따라서 조건을 만족하는 전체 순서쌍은 $5^2 = 25$개이다. 구해야 할 것은 이 중 두 눈의 합이 3의 배수인 순서쌍의 비율이다.

사용할 공식

조건이 주어진 뒤의 표본공간에서 확률은
P=유리한 순서쌍의 수조건을 만족하는 전체 순서쌍의 수
로 구한다. 조건 아래에서 25개의 순서쌍이 모두 같은 확률로 나오므로 경우의 수의 비를 사용할 수 있다.

계산 과정

가능한 눈을 3으로 나눈 나머지에 따라 분류하면 나머지가 0인 눈은 3, 6의 2개, 나머지가 1인 눈은 1, 4의 2개, 나머지가 2인 눈은 2의 1개이다. 합이 3의 배수가 되는 나머지 조합은 (0, 0), (1, 2), (2, 1)이다. 따라서 유리한 순서쌍의 수는

$$2 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 2 = 8$$

이고, 구하는 확률은

$$\frac{8}{25}$$

이다.

선지 판단

① X — $\frac{2}{25}$는 유리한 순서쌍을 2개로 잘못 센 값이다. 실제 유리한 순서쌍은 8개이므로 올바르게는 $\frac{8}{25}$이다.
② X — $\frac{4}{25}$는 (0, 0)인 4개만 세고 (1, 2), (2, 1)인 4개를 빠뜨린 값이다. 올바르게는 $\frac{8}{25}$이다.
③ O — 전체 25개 중 합이 3의 배수인 순서쌍이 8개이므로 $\frac{8}{25}$이다.
④ X — $\frac{16}{25}$는 유리한 순서쌍의 수를 16개로 잘못 센 값이다. 실제 유리한 순서쌍은 8개이므로 올바르게는 $\frac{8}{25}$이다.

NoteBase

오답 포인트

원래 주사위의 36개 순서쌍을 분모로 삼으면 안 된다. '5가 한 번도 나오지 않는다'는 조건을 반영한 25개를 새 표본공간으로 삼아야 한다. 또한 합의 나머지가 0이 되는 경우는 (0, 0)뿐 아니라 (1, 2), (2, 1)도 포함한다.

다시 나오면 이렇게 판단

조건부 확률 문제에서는 먼저 조건을 만족하는 표본공간을 다시 구성하고, 합의 배수 조건은 각 수의 나머지 조합으로 바꾸어 센다. 순서가 다른 두 경우는 각각 별도의 순서쌍으로 계산한다.

암기 포인트

조건으로 표본공간을 줄인 뒤, 합이 3의 배수이면 나머지 조합 (0, 0), (1, 2), (2, 1)을 센다.

NoteBase

문 20. 한 개의 주사위를 750번 던질 때, 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. X의 평균을 a, 분산을 b라 할 때, $a+2b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 375

② 500

③ 650

④ 750

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 이항분포의 평균과 분산 공식을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

한 번 던질 때 짝수의 눈은 2, 4, 6이므로 성공확률은 $p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다. 주사위를 750번 독립적으로 던지므로 $X \sim B(750, \frac{1}{2})$이고, 구해야 할 값은 $a+2b$이다.

사용할 공식

이항분포 $X \sim B(n, p)$에서 평균과 분산은 각각 $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$이다. 각 시행에서 짝수가 나오거나 나오지 않는 두 결과 중 짝수가 나온 횟수를 세므로 이항분포 공식을 사용한다.

계산 과정

평균은 $a=750\times\frac{1}{2}=375$이다.
분산은 $b=750\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})=\frac{375}{2}=187.5$이다.
따라서 $a+2b=375+2\times187.5=750$이다.

선지 판단

① X — 375는 a의 값일 뿐 $2b$를 더하지 않은 값이다. 375가 아니라 $a+2b=750$이다.
② X — 500은 평균 375와 분산 187.5를 공식대로 대입한 결과가 아니다. 500이 아니라 $a+2b=750$이다.
③ X — 650은 $a+2b$의 계산값과 일치하지 않는다. 650이 아니라 $a+2b=750$이다.
④ O — $a=375$, $b=187.5$이므로 $a+2b=750$이다.

오답 포인트

①의 375는 평균 a만 구하고 문제에서 요구한 $a+2b$까지 계산하지 않을 때 고르는 값이다. 또한 분산을 np로 착각하지 않고 반드시 $np(1-p)$로 계산해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

성공 횟수를 묻는 반복 시행에서는 먼저 n과 p를 정한 뒤, 평균 np와 분산 $np(1-p)$를 각각 계산하고 마지막에 문제에서 요구한 식에 대입한다.

암기 포인트

이항분포의 평균은 np, 분산은 $np(1-p)$이다.

NoteBase