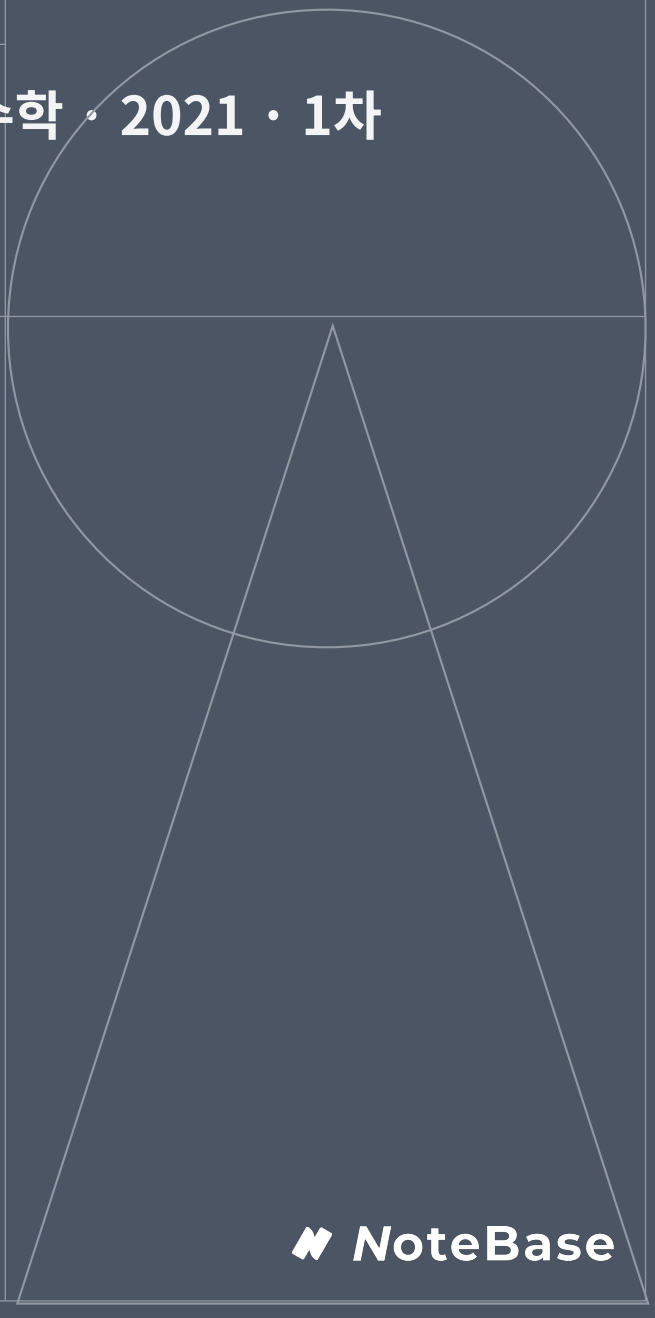
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2021 · 1차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2021 · 1차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2021 · 1차

문 1. 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, abc의 값은?

$2x^2 + ax + 4 = x(x-1) + b(x-1)(x-2) + cx(x-2)$

(단, a, b, c는 상수이다.)

① 10

② 20

③ 30

④ 40

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 다항식의 항등식에서 같은 차수의 항의 계수를 비교하여 상수 a, b, c를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 등식은 모든 x에 대하여 성립한다. 따라서 우변을 전개한 뒤 x^2항, x항, 상수항의 계수를 좌변과 각각 같게 놓는다. 구해야 할 값은 abc이다.

사용할 공식

두 다항식이 항등적으로 같으면 같은 차수의 항의 계수가 각각 같다.

$x(x-1) + b(x-1)(x-2) + cx(x-2) = (1+b+c)x^2 + (-1-3b-2c)x + 2b$

이 공식을 쓰는 이유는 주어진 등식이 특정한 x에서만 성립하는 방정식이 아니라 모든 x에서 성립하는 항등식이기 때문이다.

계산 과정

상수항을 비교하면 $2b = 4$이므로 $b = 2$이다.

x^2항을 비교하면 $1 + b + c = 2$이므로 $c = -1$이다.

x항을 비교하면 $a = -1 - 3b - 2c = -1 - 6 + 2 = -5$이다.

따라서

$abc = (-5) \times 2 \times (-1) = 10$

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $abc = 10$이므로 옳다.
② X — 20이라는 값은 계산 결과 $abc = 10$과 일치하지 않는다. 올바른 값은 20이 아니라 10이다.
③ X — 30이라는 값은 계산 결과 $abc = 10$과 일치하지 않는다. 올바른 값은 30이 아니라 10이다.
④ X — 40이라는 값은 계산 결과 $abc = 10$과 일치하지 않는다. 올바른 값은 40이 아니라 10이다.

오답 포인트

$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$에서 일차항의 계수 -3이나 상수항 2를 빠뜨리면 b, c, a가 연쇄적으로 달라진다. 특히 $cx(x-2) = cx^2 - 2cx$에는 상수항이 없다는 점도 구분해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

항등식은 양변을 차수별로 정리한 뒤 계산이 가장 간단한 상수항부터 비교하고, 이어서 최고차항과 나머지 항의 계수를 비교한다. 마지막에는 구한 계수를 원래 식에 대입하여 검산한다.

암기 포인트

항등식은 모든 x에서 성립하므로 동류항의 계수가 각각 같다.

NoteBase

문 2. $2021^4 - 1$을 $2020 \times 2021^2 + 2020$으로 나누었을 때의 몫은?

① 2019

② 2020

③ 2021

④ 2022

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 제곱의 차 공식으로 피제수와 제수를 인수분해한 뒤 공통인수를 약분하여 몫을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 피제수는 $2021^4 - 1$이고, 제수는 $2020 \times 2021^2 + 2020$이다. 구해야 할 값은 두 식을 나눈 몫이다. 제수에서 2020을 공통인수로 묶고, 피제수에는 제곱의 차 공식을 적용한다.

사용할 공식

제곱의 차 공식 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$를 사용한다. $2021^4 - 1 = (2021^2)^2 - 1^2$이므로 이 공식을 적용할 수 있고, 제수와 같은 인수 $2021^2 + 1$을 만들 수 있다.

계산 과정

피제수는

$2021^4 - 1 = (2021^2 - 1)(2021^2 + 1)$

이고, 다시 $2021^2 - 1 = (2021 - 1)(2021 + 1) = 2020 \times 2022$이므로

$2021^4 - 1 = 2020 \times 2022 \times (2021^2 + 1)$

이다. 제수는

$2020 \times 2021^2 + 2020 = 2020(2021^2 + 1)$

이다. 따라서 몫은

$\frac{2020 \times 2022 \times (2021^2 + 1)}{2020(2021^2 + 1)} = 2022$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 몫은 2019가 아니라 2022이다. 공통인수를 약분하고 남는 인수는 $2021-1$이 아니라 $2021+1$이다.
② X — 몫은 2020이 아니라 2022이다. 2020은 $2021-1$에서 생기는 공통인수로 제수의 2020과 약분된다.
③ X — 몫은 2021이 아니라 2022이다. 2021^2-1을 인수분해하면 $2021-1)(2021+1)$이므로 약분 후 남는 값은 $2021+1$이다.
④ O — 공통인수 $2020(2021^2+1)$을 약분하면 몫이 2022가 된다.

오답 포인트

핵심 함정은 2021^4-1을 한 번만 인수분해하거나, 2021^2-1을 $2021-1$로 잘못 단순화하는 것이다. $2021^2-1=(2021-1)(2021+1)$까지 인수분해해야 2020은 약분되고 2022가 남는다.

다시 나오면 이렇게 판단

큰 거듭제곱의 차와 곱셈 형태의 제수가 함께 나오면 두 식을 먼저 인수분해하여 공통인수를 찾는다. 약분한 뒤 실제로 남는 인수를 계산하면 된다.

암기 포인트

$a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)=(a-1)(a+1)(a^2+1)$이다.

NoteBase

문 3. 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\sqrt{1-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}}$의 값은?

① $4\sqrt{2}$
② $5\sqrt{2}$
③ $6\sqrt{2}$
④ $7\sqrt{2}$

정답 1번

출제 포인트

근과 계수의 관계를 이용하고, 제곱근을 절댓값으로 바꾸어 식의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

이차방정식의 두 근에 대하여 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$이다. 두 근은 $3\pm2\sqrt{2}$이므로 한 근은 1보다 크고 다른 근은 1보다 작다.

사용할 공식

$\sqrt{u^2}=|u|$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
근호 안이 각각 $(1-1/\alpha)^2$, $(1-1/\beta)^2$이므로 첫 번째 공식을 사용한다. 또한 두 근의 차는 합과 곱만으로 구할 수 있으므로 두 번째 공식을 사용한다.

계산 과정

두 근의 순서는 결과에 영향을 주지 않으므로 $\alpha=3+2\sqrt{2}>1$, $\beta=3-2\sqrt{2}<1$로 둔다. $\alpha\beta=1$에서 $1/\alpha=\beta$, $1/\beta=\alpha$이다.
aligned√(≤ft(1-1α)^2)+√(≤ft(1-1β)^2)&=≤ft|1-1α|+≤ft|1-1β|\\&=|1-β|+|1-α|\\&=(1-β)+(α-1)\\&=α-β.aligned
따라서
$\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$.

선지 판단

① O — 계산값이 $4\sqrt{2}$이므로 옳다.
② X — $5\sqrt{2}$가 아니라 $4\sqrt{2}$이다.
③ X — $6\sqrt{2}$가 아니라 $4\sqrt{2}$이다.
④ X — $7\sqrt{2}$가 아니라 $4\sqrt{2}$이다.

NoteBase

오답 포인트

$\sqrt{u^2}$를 u로 바로 바꾸면 부호를 놓친다. 이 문제에서는 두 근 중 하나가 1보다 작으므로 반드시 $\sqrt{u^2} = |u|$를 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

근호 안을 완전제곱식으로 만든 뒤 절댓값을 붙이고, 근의 크기로 부호를 정한다. 이어서 근과 계수의 관계로 합과 곱을 대입해 두 근의 차를 계산한다.

암기 포인트

$\sqrt{u^2} = |u|$이며, 두 근의 차는 $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$이다.

NoteBase

문 4. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2이고 곱이 k일 때, 함수 $y=xf(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 2 이상이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

정답 3번

출제 포인트

두 근의 합과 곱으로 이차방정식의 판별식을 나타내고, $y=xf(x)$의 서로 다른 x절편 개수를 판단하는 문제이다.

조건 정리

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=k$이다. $y=xf(x)$가 x축과 만나는 점은 $x=0$ 또는 $f(x)=0$을 만족하는 서로 다른 실수 x에 대응한다.

사용할 공식

두 근의 합이 2이고 곱이 k이므로 근을 정하는 이차식은 $t^2-2t+k=0$이다. 판별식은
$D=(-2)^2-4k=4-4k$
이다. 그래프에 $x=0$ 이외의 교점이 적어도 하나 더 있으려면 $f(x)=0$이 실근을 가져야 하므로 $D\geq 0$을 사용한다.

계산 과정

$4-4k\geq 0 \iff k\leq 1$
따라서 가능한 k의 최댓값은 1이다. 실제로 $k=1$이면 두 근은 모두 1이므로 $y=xf(x)$의 서로 다른 x절편은 $x=0$과 $x=1$의 두 점이다.

선지 판단

① X — $k=-1$은 $k\leq 1$을 만족하지만 가능한 값 중 최댓값은 아니다. 틀린 값 -1 → 올바른 최댓값은 1이다.
② X — $k=0$이면 두 근은 0과 2여서 교점 조건은 만족하지만 최댓값은 아니다. 틀린 값 0 → 올바른 최댓값은 1이다.
③ O — $k=1$이면 판별식이 0이고 $f(x)=0$의 중근은 1이다. 따라서 $y=xf(x)$는 $x=0$, 1에서 x축과 만나며, 조건을 만족하는 k의 최댓값이 1이다.
④ X — $k=2$이면 판별식이 -4이므로 $f(x)=0$은 실근이 없다. 이때 $y=xf(x)$는 $x=0$에서만 x축과 만난다. 틀린 값 2 → 허용 범위는 $k\leq 1$, 최댓값은 1이다.

NoteBase

오답 포인트

‘만나는 점의 개수가 2 이상’에서 중근을 서로 다른 두 점으로 세면 안 된다. 다만 $k = 1$일 때 $f(x) = 0$의 중근 $x = 1$과 앞의 인수 x가 만드는 근 $x = 0$은 서로 다르므로 교점은 정확히 두 점이다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 근의 합과 곱으로 판별식을 만든 뒤 실근 조건을 구하고, 곱해진 추가 인수가 만드는 근과 중복되는지 확인하여 서로 다른 절편의 개수를 센다.

암기 포인트

근의 합이 S, 곱이 P이면 판별식은 $D = S^2 - 4P$이고, 그래프의 교점 개수는 중복을 제거한 서로 다른 실근의 개수이다.

NoteBase

문 5. 두 점 $A(a,b)$, $B(3,4)$를 이은 선분 AB 위의 점 $P(1,0)$에 대하여 $2\overline{AP}=a\overline{PB}$일 때, ab의 값은? (단, a,b는 상수이고 $\overline{AB}$는 선분 AB의 길이이다.)

① -1
② $-\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{2}$
④ 1

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 선분의 내분점 공식을 이용하여 점 P의 좌표로부터 a, b를 차례로 구하는 문제이다.

조건 정리

점 $P(1,0)$는 선분 AB 위에 있고 $2\overline{AP}=a\overline{PB}$이므로 $\overline{AP}:\overline{PB}=a:2$이다. 구해야 할 값은 ab이다. 좌표 $A(a,b)$의 a와 내분비에 나타난 a가 같은 상수라는 점에 주의한다.

사용할 공식

두 점 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$를 잇는 선분을 점 P가 $m:n$으로 내분하면
$P\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$
이다. 여기서는 $\overline{AP}:\overline{PB}=a:2$이므로 $m=a, n=2$를 적용한다.

계산 과정

내분점 공식에 $A(a,b), B(3,4), P(1,0)$을 대입하면
$(1,0)=\left(\frac{2a+3a}{a+2}, \frac{2b+4a}{a+2}\right)$
이다. x좌표를 비교하면
$1=\frac{5a}{a+2} \Rightarrow a+2=5a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$
이다. y좌표를 비교하면
$0=\frac{2b+4a}{a+2} \Rightarrow 2b+4a=0 \Rightarrow b=-2a=-1$
이다. 따라서
$ab=\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — -1은 계산 결과 $-\frac{1}{2}$와 다르다. 틀린 값 -1 → 올바르게는 $-\frac{1}{2}$이다.
② O — $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$이므로 $ab=-\frac{1}{2}$이다.
③ X — $\frac{1}{2}$는 절댓값만 같고 부호가 다르다. $b=-1$이므로 곱은 음수이다. 틀린 값 $\frac{1}{2}$ → 올바르게는 $-\frac{1}{2}$이다.
④ X — 1은 계산 결과 $-\frac{1}{2}$와 다르다. 틀린 값 1 → 올바르게는 $-\frac{1}{2}$이다.

오답 포인트

내분비가 $\overline{AP}:\overline{PB}=a:2$일 때 점 A의 좌표에는 반대편 비인 2를, 점 B의 좌표에는 반대편 비인 a를 곱한다. 또한 y좌표 식에서 $b=-1$이 나오므로 ab의 음수 부호를 빠뜨리면 ③을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 길이 조건을 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$으로 바꾼 뒤, 내분점 공식에서 각 끝점의 좌표에 반대편 비를 곱한다. 내분점의 x좌표와 y좌표를 각각 비교하여 미지수를 구하고 마지막에 요구한 값을 계산한다.

암기 포인트

내분점의 좌표는 각 끝점에 반대편 비를 곱한 가중평균이다.

NoteBase

문 6. 원 $x^2 + y^2 = 25$와 직선 $x - y + 3 = 0$의 두 교점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는?

① $\frac{3\sqrt{41}}{16}$
② $\frac{3\sqrt{41}}{8}$
③ $\frac{3\sqrt{41}}{4}$
④ $\frac{3\sqrt{41}}{2}$

정답 4번

출제 포인트

원의 중심에서 현까지의 거리와 피타고라스 정리를 이용해 현의 길이를 구한 뒤, 삼각형의 넓이를 계산하는 문제이다.

조건 정리

원의 중심은 원점이고 반지름은 5이다. 두 교점을 잇는 현은 직선 $x - y + 3 = 0$ 위에 있다. 구해야 할 값은 이 현을 밑변으로 하고 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이이다.

사용할 공식

중심에서 직선 $ax + by + c = 0$까지의 거리는 $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$이다. 반지름이 r이고 중심에서 현까지의 거리가 d이면 현의 길이는 $2\sqrt{r^2 - d^2}$이다. 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로 피타고라스 정리를 적용할 수 있다.

계산 과정

원점에서 직선까지의 거리는
$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$
이다. 현의 길이는
$2\sqrt{5^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{25 - \frac{9}{2}} = 2\sqrt{\frac{41}{2}} = \sqrt{82}$
이다. 따라서 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2} \times \sqrt{82} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{41}}{2}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{3\sqrt{41}}{16}$은 계산된 넓이와 다르다. 틀린 값이며, 올바른 넓이는 $\frac{3\sqrt{41}}{2}$이다.
② X — $\frac{3\sqrt{41}}{8}$은 계산된 넓이와 다르다. 틀린 값이며, 올바른 넓이는 $\frac{3\sqrt{41}}{2}$이다.
③ X — $\frac{3\sqrt{41}}{4}$은 계산된 넓이의 절반이다. 현 전체가 아니라 반현을 밑변으로 사용하면 나오는 값이며, 올바른 넓이는 $\frac{3\sqrt{41}}{2}$이다.
④ O — 원점에서 직선까지의 거리를 높이로 하고 두 교점 사이의 현 전체를 밑변으로 계산한 넓이 $\frac{3\sqrt{41}}{2}$와 일치한다.

오답 포인트

중심에서 현까지의 수선은 현을 이등분한다. 피타고라스 정리로 얻은 $\sqrt{r^2-d^2}$은 현 전체가 아니라 현의 절반이므로, 밑변에는 그 두 배를 사용해야 한다. 특히 3번은 반현을 그대로 밑변으로 넣은 경우의 값이다.

다시 나오면 이렇게 판단

원의 중심과 현으로 만든 삼각형은 먼저 중심에서 현이 놓인 직선까지의 거리 d를 구하고, 반현 $\sqrt{r^2-d^2}$을 구한 뒤, 넓이를 $d\sqrt{r^2-d^2}$로 계산한다.

암기 포인트

중심과 현이 만드는 삼각형의 넓이는 '높이 d × 반현 $\sqrt{r^2-d^2}$'이다.

NoteBase

문 7. 중심이 $(3, 4)$이고 반지름이 5인 원의 방정식을 $f(x-1, y+1)=0$이라고 할 때, 방정식 $f(x+2, y-2)=0$이 나타내는 원의 중심과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{2}$

정답 4번

출제 포인트

함수의 입력값 변화에 따른 원의 평행이동을 파악하고, 점과 직선 사이의 거리 공식을 적용하는 문제이다.

조건 정리

주어진 원: $f(x-1, y+1)=0$, 중심 $(3, 4)$, 반지름 5

구해야 할 값: $f(x+2, y-2)=0$의 중심과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리

주의할 점: 함수의 입력이 증가한 방향과 그래프가 이동하는 방향은 서로 반대이다. 반지름 5는 평행이동 뒤에도 그대로이지만, 중심과 직선 사이의 거리 계산에는 사용되지 않는다.

사용할 공식

$F(x, y)=f(x-1, y+1)$로 놓으면 $f(x+2, y-2)=F(x+3, y-3)$이다. $F(x+3, y-3)=0$의 그래프는 $F(x, y)=0$을 왼쪽으로 3, 위쪽으로 3만큼 평행이동한 것이다.

점 (x_0, y_0)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이다. 중심을 먼저 구한 뒤 이 공식에 대입할 수 있기 때문에 사용한다.

계산 과정

1. $F(x, y)=f(x-1, y+1)$라 하면 $F(x, y)=0$의 중심은 $(3, 4)$이다.
2. $f(x+2, y-2)=F(x+3, y-3)$이므로 중심은 $(3-3, 4+3)=(0, 7)$로 이동한다.
3. 중심 $(0, 7)$과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$d=\frac{|0-7+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 중심과 직선 사이의 거리는 $2\sqrt{2}$이므로 1이 아니다. 틀린 값 1은 올바르게는 $2\sqrt{2}$이다.
② X — 계산 결과가 $2\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2}$가 아니다. $4/\sqrt{2}$를 정리할 때 계수 2를 빠뜨린 값이며, 올바르게는 $2\sqrt{2}$이다.
③ X — 거리 공식의 분모는 직선 $x-y+3=0$의 계수로부터 $\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$가 되므로 $\sqrt{3}$이 아니다. 올바르게는 $2\sqrt{2}$이다.
④ O — 중심 $(0,7)$을 점과 직선 사이의 거리 공식에 대입하면 $2\sqrt{2}$가 나온다.

오답 포인트

입력식의 x가 $x-1$에서 $x+2$로 3만큼 증가하고 y가 $y+1$에서 $y-2$로 3만큼 감소했다고 해서 중심도 같은 방향으로 옮기면 안 된다. 그래프는 입력 변화와 반대 방향인 왼쪽 3, 위쪽 3으로 이동한다. 또한 $4/\sqrt{2}$를 $\sqrt{2}$로 잘못 줄이지 않고 $2\sqrt{2}$로 정리해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

기준 식을 $F(x,y)$로 새로 놓고 목표 식을 $F(x+h,y+k)$ 꼴로 바꾼다. 그다음 중심을 $(-h,\ -k)$만큼 이동시키고, 새 중심을 점과 직선 사이의 거리 공식에 대입한다.

암기 포인트

$F(x+h,y+k)=0$의 그래프는 $F(x,y)=0$을 $(-h,\ -k)$만큼 평행이동한다. 점과 직선 사이의 거리는 '직선식에 점을 대입한 절댓값'을 '계수 제곱합의 제곱근'으로 나눈 값이다.

NoteBase

문 8. 유리함수 $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$의 그래프와 무리함수 $g(x)=-\sqrt{x}+k$의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① $-\frac{1}{3}$

② 0

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{2}{3}$

정답 1번

출제 포인트

두 그래프의 교점 조건을 k에 관한 식으로 바꾼 뒤, 정의역에서 그 식의 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

교점의 x좌표에서는 $x\geq 0$이고, $\frac{2x-1}{x+3}=-\sqrt{x}+k$이다. 따라서
$k=\frac{2x-1}{x+3}+\sqrt{x}$
의 최솟값을 구하면 된다.

사용할 공식

$t=\sqrt{x}$로 놓으면 $t\geq 0$, $x=t^2$이므로
$k=\frac{2t^2-1}{t^2+3}+t=2-\frac{7}{t^2+3}+t$
이다. 제곱근이 포함된 정의역을 $t\geq 0$으로 단순화하여 증가성을 확인하기 위해 이 치환을 사용한다.

계산 과정

$K(t)=2-\frac{7}{t^2+3}+t$라 하면
$K'(t)=1+\frac{14t}{(t^2+3)^2}>0 \quad (t\geq 0)$
이다. 따라서 $K(t)$는 $t\geq 0$에서 증가하며, 최솟값은 경계점 $t=0$, 즉 $x=0$에서 얻는다.
$k_{\min}=K(0)=2-\frac{7}{3}=-\frac{1}{3}$
또한 $K(t)$가 연속이고 엄격히 증가하므로 $k\geq -\frac{1}{3}$일 때 교점은 정확히 한 개이다.

선지 판단

① O — 계산한 최솟값이 $-\frac{1}{3}$이므로 옳다.

② X — 0에서도 두 그래프는 한 점에서 만나지만, 0은 가능한 k의 최솟값이 아니다. 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이다.

③ X — $\frac{1}{3}$은 최솟값보다 큰 가능한 값일 뿐이다. 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이다.

④ X — $\frac{2}{3}$도 최솟값보다 큰 가능한 값일 뿐이다. 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이다.

NoteBase

오답 포인트

교점이 생기는 어떤 k를 찾는 것이 아니라, 교점이 생길 수 있는 k 전체의 범위에서 최솟값을 찾는 문제이다. 또한 $x \geq 0$이라는 무리함수의 정의역 때문에 최솟값이 경계점 $x = 0$에서 나올 수 있음을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 그래프의 교점 문제에서 매개변수의 최솟값을 묻는 경우, 교점 방정식을 매개변수에 관해 정리하고 공통 정의역에서 그 식의 최솟값을 구한다. 제곱근이 있으면 $t = \sqrt{x}$로 치환한 뒤 내부 임계점뿐 아니라 정의역의 경계점도 함께 확인한다.

암기 포인트

교점의 매개변수 최솟값은 '매개변수 식으로 정리 → 정의역 확인 → 증가·감소와 경계점 확인'의 순서로 구한다.

NoteBase

문 9. 이차방정식 $x^2 - \frac{1}{\sqrt{n}}x + \frac{1}{2(n+1)} = 0$ (n은 자연수)의 두 근을 $\alpha_n,\ \beta_n$이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{2021}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$의 값은?

① $\frac{2018}{2019}$
② $\frac{2019}{2020}$
③ $\frac{2020}{2021}$
④ $\frac{2021}{2022}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 비에타 정리로 두 근의 제곱합을 구한 뒤, 망원급수의 연속된 항을 소거하여 전체 합을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 이차방정식의 두 근은 $\alpha_n,\ \beta_n$이고, 합의 범위는 $n = 1$부터 2021까지이다.
구해야 할 값: $\sum_{n=1}^{2021}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$이다.
주의할 조건: 마지막 항의 지수가 2021이므로 망원급수의 마지막 분모는 2022가 된다.

사용할 공식

비에타 정리에 따라
_n+_n=(1)/(n), _n_n=(1)/(2(n+1))
이고,
$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n\beta_n$
이다. 두 근의 합과 곱이 방정식의 계수로 바로 주어지므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 비에타 정리를 제곱합 공식에 대입하면
_n^2+_n^2=≤ft((1)/(n))^2-2·(1)/(2(n+1))=1n-1n+1
이다.
2. 이를 합에 대입하면
Σ_n=1^2021≤ft(1n-1n+1)=≤ft(1-12)+≤ft(12-13)+·s+≤ft(12021-12022)
이다.
3. 중간 항이 모두 소거되므로
1-12022=(2021)/(2022)
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{2018}{2019}$는 같은 항을 $n=2018$까지만 더했을 때의 값이다. 합의 상한은 2021이므로 올바르게는 $\frac{2021}{2022}$이다.
② X — $\frac{2019}{2020}$는 같은 항을 $n=2019$까지만 더했을 때의 값이다. 합의 상한을 2021로 적용하면 $\frac{2021}{2022}$이다.
③ X — $\frac{2020}{2021}$는 마지막 항 12021-12022을 빠뜨려 $n=2020$까지만 더한 값이다. 마지막 항까지 포함하면 $\frac{2021}{2022}$이다.
④ O — 망원급수에서 중간 항이 소거된 뒤 1-12022=(2021)/(2022)가 남으므로 계산 결과와 일치한다.
계산 결과가 $\frac{2021}{2022}$이므로 정답은 4번이다.

오답 포인트

각 오답은 합의 상한을 2018, 2019, 2020으로 잘못 잡았을 때 나오는 값이다. 특히 ③은 상한 2021을 최종 분모 2021로 착각하여 마지막 항을 누락하게 만든다. $n=N$까지 더하면 마지막 음의 항은 -1N+1이므로 결과는 $\frac{N}{N+1}$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 근의 제곱합은 먼저 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$로 바꾸고 비에타 정리를 적용한다. 이어서 일반항을 두 분수의 차로 정리한 뒤 처음 남는 항과 마지막 남는 항을 확인한다.

암기 포인트

Σ_n=1^N≤ft(1n-1n+1)=1-1N+1=(N)/(N+1)이다.

NoteBase

문 10. $a_1 = 1, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$**으로 정의된 수열** $\{a_n\}$**의 첫째항부터 제**n**항까지의 합을** S_n**이라고 하자.** S_5**를 10으로 나눈 나머지는?**

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 점화식으로 수열의 각 항을 차례로 구한 뒤, 부분합을 계산하여 나머지를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $a_1 = 1, na_{n+1} = 2(n+1)a_n$
구해야 할 값: S_5를 10으로 나눈 나머지
주의할 조건: 점화식에서 a_{n+1}을 구할 때 양변을 n으로 나누어야 한다.

사용할 공식

점화식을 정리하면
$a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n}a_n$
이다. 또한 첫째항부터 제5항까지의 합은 $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$이다. 주어진 식이 바로 이웃한 두 항의 관계를 나타내므로, $n = 1, 2, 3, 4$를 차례로 대입해 제5항까지 구한다.

계산 과정

$n = 1$: $a_2 = \frac{2 \cdot 2}{1}a_1 = 4$
$n = 2$: $a_3 = \frac{2 \cdot 3}{2}a_2 = 3 \cdot 4 = 12$
$n = 3$: $a_4 = \frac{2 \cdot 4}{3}a_3 = \frac{8}{3} \cdot 12 = 32$
$n = 4$: $a_5 = \frac{2 \cdot 5}{4}a_4 = \frac{5}{2} \cdot 32 = 80$
따라서
$S_5 = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 = 129$
이고, $129 = 10 \cdot 12 + 9$이므로 나머지는 9이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산한 나머지는 9이므로 6이 아니다. 틀린 값 6은 올바르게는 9이다.
② X — 계산한 나머지는 9이므로 7이 아니다. 틀린 값 7은 올바르게는 9이다.
③ X — 계산한 나머지는 9이므로 8이 아니다. 틀린 값 8은 올바르게는 9이다.
④ O — $S_5 = 129$이고 $129 \equiv 9 \pm \mathrm{od}10$이므로 9가 맞다.

오답 포인트

점화식의 n과 $n+1$을 같은 값으로 처리하거나, S_5에서 첫째항 또는 제5항을 빠뜨리면 오답이 된다. 이 문항에서는 제5항까지 모두 더한 129의 일의 자리 9가 나머지이다.

다시 나오면 이렇게 판단

점화식을 먼저 a_{n+1}에 관해 정리하고, 필요한 마지막 항까지 n을 순서대로 대입한 뒤, 부분합의 범위를 확인하여 나머지를 계산한다.

암기 포인트

점화식은 항을 먼저 구하고, 부분합은 범위를 빠짐없이 더하며, 10으로 나눈 나머지는 합의 일의 자리로 판단한다.

NoteBase

문 11. $2^x = 5^y = 100^z$**일 때,** $\frac{z}{x} + \frac{z}{y}$**의 값은? (단,** $x,\ y,\ z$**는** $xyz \neq 0$**인 실수이다.)**

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{2}$
③ 1
④ 2

정답 2번

출제 포인트

공통인 거듭제곱의 값을 로그로 나타내어 지수의 비를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $2^x = 5^y = 100^z$이고, 구해야 할 값은 $\frac{z}{x} + \frac{z}{y}$이다. x, y, z가 모두 0이 아니므로 각 비를 계산할 수 있다.

사용할 공식

양수 a, b에 대하여 $a^m = b^n$이면 양변에 로그를 취해 $m\log a = n\log b$로 나타낼 수 있다. 이 문제에서는 공통값을 기준으로 $2^x = 100^z$, $5^y = 100^z$를 각각 비교하면 필요한 두 비를 바로 구할 수 있다.

계산 과정

$2^x = 100^z$에서 $x\log 2 = z\log 100$이므로 $\frac{z}{x} = \frac{\log 2}{\log 100}$이다. 또한 $5^y = 100^z$에서 $y\log 5 = z\log 100$이므로 $\frac{z}{y} = \frac{\log 5}{\log 100}$이다. 따라서
$\frac{z}{x} + \frac{z}{y} = \frac{\log 2 + \log 5}{\log 100} = \frac{\log 10}{\log 100} = \frac{1}{2}$.

선지 판단

① X — 계산값은 $\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{4}$는 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{1}{4}$은 $\frac{1}{2}$로 고쳐야 한다.
② O — $\frac{\log 10}{\log 100} = \frac{1}{2}$이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X — 계산값은 $\frac{1}{2}$이므로 1은 일치하지 않는다. 틀린 값 1은 $\frac{1}{2}$로 고쳐야 한다.
④ X — 계산값은 $\frac{1}{2}$이므로 2는 일치하지 않는다. 틀린 값 2는 $\frac{1}{2}$로 고쳐야 한다.

오답 포인트

$2^x = 5^y = 100^z$에서 지수끼리 직접 같다고 보면 안 된다. 밑이 서로 다르므로 로그를 취한 뒤 $x\log 2 = z\log 100$, $y\log 5 = z\log 100$의 관계를 사용해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

서로 다른 밑의 거듭제곱이 같으면 공통값과 각 식을 한 쌍씩 비교하고, 로그를 취해 필요한 지수의 비를 만든다. 마지막에는 $\log a + \log b = \log(ab)$로 합을 정리한다.

암기 포인트

거듭제곱의 공통값은 로그로 지수의 비를 만든다. $\log 2 + \log 5 = \log 10$, $\log 100 = 2\log 10$이다.

NoteBase

문 12. 함수 $f(x)=\frac{x^2+x-6}{|x-2|}$에 대하여 $a=\lim_{x\to 2+0} f(x)$, $b=\lim_{x\to 2-0} f(x)$라고 할 때, ab의 값은?

① -25

② -20

③ -15

④ -10

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 분자를 인수분해한 뒤 $\frac{x-2}{|x-2|}$의 부호가 $x=2$의 오른쪽과 왼쪽에서 달라짐을 이용하여 두 편극한의 곱을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=\frac{x^2+x-6}{|x-2|}$이다.
구해야 할 값은 우극한 a와 좌극한 b의 곱 ab이다.
주의할 조건은 $x>2$일 때 $|x-2|=x-2$, $x<2$일 때 $|x-2|=-(x-2)$라는 점이다.

사용할 공식

분자를 인수분해하면
$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$
이므로 $x\neq 2$에서
$f(x)=(x+3)\frac{x-2}{|x-2|}$
이다. 절댓값 안의 식은 $x=2$를 경계로 부호가 바뀌므로 우극한과 좌극한을 나누어 계산한다.

계산 과정

1. $x\to 2+0$이면 $x>2$이므로 $\frac{x-2}{|x-2|}=1$이다. 따라서 $a=\lim_{x\to 2+0}(x+3)=5$이다.
2. $x\to 2-0$이면 $x<2$이므로 $\frac{x-2}{|x-2|}=-1$이다. 따라서 $b=\lim_{x\to 2-0}-(x+3)=-5$이다.
3. 그러므로 $ab=5\times(-5)=-25$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 $ab=-25$이므로 옳다.
② X — -20은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 -20 → 올바른 값은 -25이다.
③ X — -15는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 -15 → 올바른 값은 -25이다.
④ X — -10은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 -10 → 올바른 값은 -25이다.

NoteBase

오답 포인트

분자와 분모의 $x-2$를 단순히 약분하여 양쪽 극한을 모두 5로 처리하면 안 된다. 분모가 $|x-2|$이므로 $\frac{x-2}{|x-2|}$는 오른쪽에서 1, 왼쪽에서 -1이며, 이에 따라 a와 b의 부호가 서로 반대가 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

절댓값이 포함된 편극한은 경계점의 오른쪽과 왼쪽에서 절댓값을 각각 풀고, 공통인수를 정리한 뒤 두 극한의 부호를 따로 확인한다.

암기 포인트

$\frac{x-c}{|x-c|}$는 $x \to c+0$에서 1, $x \to c-0$에서 -1이다.

NoteBase

문 13. 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2 - 3x + 5$일 때, 함수 $(x^2 - 9)f(x)$의 $x = 3$에서의 미분계수는?

① 25

② 30

③ 35

④ 40

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 두 함수의 곱을 미분하는 곱의 미분법을 이용해 특정 점에서의 미분계수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x) = x^2 - 3x + 5$이고, 미분할 함수는 $g(x) = (x^2 - 9)f(x)$이다. 구해야 할 값은 $g'(3)$이다. $x = 3$에서 $x^2 - 9 = 0$이 된다는 점을 이용하면 계산을 간단히 할 수 있다.

사용할 공식

곱의 미분법은 $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$이다. 이 문제의 함수가 $x^2 - 9$와 $f(x)$의 곱이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$g'(x) = 2xf(x) + (x^2 - 9)f'(x)$
$x = 3$을 대입하면 둘째 항은 $3^2 - 9 = 0$이므로 사라진다. 또한 $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 5 = 5$이다. 따라서 $g'(3) = 2 \cdot 3 \cdot f(3) + 0 \cdot f'(3) = 6 \cdot 5 = 30$이다.

선지 판단

① X — 미분계수는 25가 아니라 30이다. $x = 3$에서 남는 항 $2xf(x)$에 값을 대입하면 $6 \cdot 5 = 30$이다.
② O — 곱의 미분법으로 구한 $g'(3)$이 30이므로 옳다.
③ X — 미분계수는 35가 아니라 30이다. $x^2 - 9$가 0이므로 $f'(3)$이 포함된 항을 더하지 않는다.
④ X — 미분계수는 40이 아니라 30이다. $f(3) = 5$이고 남는 계수는 $2 \cdot 3 = 6$이므로 그 곱은 30이다.

오답 포인트

$(x^2 - 9)f(x)$를 미분하지 않은 채 $x = 3$을 먼저 대입하면 원래 함수값 0만 얻을 뿐 미분계수를 구할 수 없다. 또한 곱의 미분법을 적용한 뒤 $x = 3$에서 $x^2 - 9 = 0$인 항이 사라진다는 점을 놓치면 불필요한 값을 더하게 된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

곱으로 주어진 함수는 먼저 곱의 미분법을 적용하고, 그다음 지정된 값을 대입한다. 대입했을 때 0이 되는 인수가 있는지 확인하면 계산을 줄일 수 있다.

암기 포인트

곱의 미분은 앞의 미분×뒤 + 앞×뒤의 미분이며, 미분한 뒤 대입한다.

NoteBase

문 14. 함수 f(x)=cases(x^2-x+a)/(x-3)&(x≠ 3)\&(x=3)cases가 모든 실수 x에 대하여 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 조각함수가 경계점에서 연속이 되기 위한 조건을 이용하여 상수 a, b를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $x=3$에서만 식이 나뉜다. 따라서 $x=3$에서 극한값이 존재하고 그 값이 함수값 $f(3)=b$와 같아야 한다.

사용할 공식

연속 조건은 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)=b$이다. $x\neq3$일 때 분모 $x-3$이 0으로 가므로 유한한 극한값을 가지려면 분자도 $x=3$에서 0이어야 한다.

계산 과정

1. 분자가 $x=3$에서 0이 되도록 한다.

$3^2-3+a=0\Rightarrow a=-6$

2. $a=-6$을 대입하여 인수분해한다.

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

3. $x\neq3$에서 약분한 뒤 극한값을 구한다.

$\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+2)=5$

연속이려면 $b=5$이므로 $a+b=-6+5=-1$이다.

선지 판단

① X — $a+b$는 -3이 아니다. 틀린 값 -3 → 올바르게는 -1이다.

② X — $a+b$는 -2가 아니다. 틀린 값 -2 → 올바르게는 -1이다.

③ O — 연속 조건에서 $a=-6$, $b=5$이므로 $a+b=-1$이다.

④ X — $a+b$는 0이 아니다. 틀린 값 0 → 올바르게는 -1이다.

NoteBase

오답 포인트

분모가 0이 되는 $x = 3$을 원래 분수식에 바로 대입하면 안 된다. 먼저 분자도 0이 되게 하여 a를 정하고, 인수분해와 약분으로 극한값을 구한 뒤 그 값을 b와 같게 해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

조각함수의 경계점에서는 좌우에서의 극한값이 존재하는지 확인하고, 그 극한값과 경계점의 함수값을 같게 놓아 미지수를 결정한다.

암기 포인트

경계점에서의 연속은 '극한값 = 함수값'이다. 분모가 0으로 가는 분수식은 분자도 0이 되게 만든 뒤 약분하여 극한을 계산한다.

NoteBase

문 15. 곡선 $y = x^2 - 2x + 3$ 위의 임의의 점에서 직선 $y = 4x - 7$까지의 거리 중 최단거리는?

① $\frac{\sqrt{17}}{34}$
② $\frac{\sqrt{17}}{17}$
③ $\frac{2\sqrt{17}}{17}$
④ $\frac{3\sqrt{17}}{17}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 곡선 위의 점을 좌표로 나타낸 뒤 점과 직선 사이의 거리 공식을 적용하여 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

곡선 위의 임의의 점을 $P(x, x^2 - 2x + 3)$이라 둔다.
주어진 직선은 $4x - y - 7 = 0$으로 나타낼 수 있다.
구해야 할 값은 점 P와 이 직선 사이의 거리의 최솟값이다.

사용할 공식

점 (x_0, y_0)와 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는
$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
이다. 곡선 위의 각 점에서 직선까지의 거리를 x의 식으로 나타낼 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

점 $P(x, x^2 - 2x + 3)$에서 직선 $4x - y - 7 = 0$까지의 거리는
$d = \frac{|4x - (x^2 - 2x + 3) - 7|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{|-x^2 + 6x - 10|}{\sqrt{17}}$
이다.
이때 $-x^2 + 6x - 10 = -((x - 3)^2 + 1)$은 항상 음수이므로
$d = \frac{(x - 3)^2 + 1}{\sqrt{17}}$
이다. $(x - 3)^2 \geq 0$이므로 $x = 3$일 때 거리가 최소가 되고,
$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{\sqrt{17}}{34} = \frac{1}{2\sqrt{17}}$은 계산된 최단거리의 절반이므로 틀리다. 올바른 값은 $\frac{\sqrt{17}}{17}$이다.
② O — $\frac{1}{\sqrt{17}}$을 유리화하면 $\frac{\sqrt{17}}{17}$이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X — $\frac{2\sqrt{17}}{17} = \frac{2}{\sqrt{17}}$은 최솟값이 아니다. 이는 예를 들어 $x = 2$ 또는 $x = 4$일 때의 거리이며, 올바른 최단거리는 $\frac{\sqrt{17}}{17}$이다.
④ X — $\frac{3\sqrt{17}}{17} = \frac{3}{\sqrt{17}}$은 최솟값 $\frac{1}{\sqrt{17}}$보다 크므로 틀리다. 올바른 값은 $\frac{\sqrt{17}}{17}$이다.

오답 포인트

분자에 절댓값이 있으므로 바로 부호를 없애면 안 된다. $-x^2 + 6x - 10 = -((x-3)^2 + 1)$이 항상 음수임을 확인한 뒤 절댓값을 처리해야 한다. 또한 거리의 최솟값은 꼭짓점 $x = 3$에서 구하며, 마지막에 $\frac{1}{\sqrt{17}}$을 정확히 유리화해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

곡선 위의 점을 변수로 나타내고, 직선을 일반형으로 바꾼 뒤 점과 직선 사이의 거리 공식에 대입한다. 그 결과의 절댓값과 제곱식을 정리하여 최솟값을 판단한다.

암기 포인트

점과 직선 사이의 거리 공식은 '직선식에 점을 대입한 값의 절댓값을 계수 제곱합의 제곱근으로 나눈 것'이다.

NoteBase

문 16. 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가
$f(x) = \int_0^x (3t^2 - 6at + b)dt$
로 실수 전체의 집합에서 정의되어 있다. 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않을 때, $f(1)$의 최솟값은?

① $\frac{1}{16}$
② $\frac{1}{8}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$

정답 3번

출제 포인트

함수가 극값을 갖지 않는 조건을 도함수의 부호와 이차식의 판별식으로 나타낸 뒤, 완전제곱을 이용해 함수값의 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수의 도함수는 미적분학의 기본정리에 따라 $f'(x) = 3x^2 - 6ax + b$이다. 이 이차식은 최고차항의 계수가 양수이므로 서로 다른 두 실근을 가지면 부호가 양수, 음수, 양수로 바뀌어 f가 극값을 갖는다. 따라서 극값을 갖지 않으려면 판별식이 0 이하이어야 한다.

사용할 공식

이차식 $Ax^2 + Bx + C$가 중근을 갖거나 실근을 갖지 않을 조건은 판별식 $D = B^2 - 4AC \le 0$이다. 이 문제에서는 도함수가 실수축에서 부호를 바꾸지 않아야 하므로 이 조건을 사용한다.

계산 과정

도함수의 판별식은
$D = (-6a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot b = 12(3a^2 - b)$
이다. 따라서 $D \le 0$에서 $b \ge 3a^2$을 얻는다.

한편
$f(1) = \int_0^1 (3t^2 - 6at + b)dt = 1 - 3a + b.$
고정된 a에서 이 값은 b가 가장 작은 $b = 3a^2$일 때 최소이므로
f(1)≥ 1-3a+3a^2=3≤ft(a-12)^2+14≥14.
a=12, b=34일 때 등호가 성립하므로 실제 최솟값은 14이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 116은 하한 14보다 작아 조건을 만족하는 어떤 a, b에서도 최솟값이 될 수 없다. 틀린 값이며, 올바른 최솟값은 14이다.
② X — 18도 하한 14보다 작아 나올 수 없다. 올바른 최솟값은 14이다.
③ O — f(1)=3(a-12)^2+14의 최소가 14이고 등호 조건도 성립한다.
④ X — 12은 최솟값 14보다 크다. 특정 조건에서 얻을 수 있는 함수값일 수는 있지만 전체 조건에서의 최솟값은 아니며, 올바른 최솟값은 14이다.

오답 포인트

$f'(x)=0$이 실근을 가지지 않아야 한다고만 생각해 판별식을 $D<0$으로 제한하기 쉽다. 중근일 때도 도함수의 부호가 바뀌지 않아 극값이 생기지 않으므로 $D=0$을 포함한 $D\le 0$이 정확한 조건이다. 또한 $b\ge 3a^2$을 얻은 뒤에는 a에 대해서도 다시 최소화해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수의 극값 조건이 주어지면 먼저 도함수를 구하고, 도함수의 영점 전후에서 부호가 바뀌는지를 판별한다.
도함수가 위로 열린 이차식이면 판별식으로 허용되는 매개변수 범위를 정한 뒤, 그 경계값을 목적식에 대입하고 완전제곱으로 최솟값을 구한다.

암기 포인트

위로 열린 이차식인 도함수가 부호를 바꾸지 않는 조건은 $D\le 0$이고, 중근 $D=0$도 극값이 생기지 않는 경우에 포함된다.

NoteBase

문 17. $\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2k}{n}\right)^2$**의 값은?**

① 22

② 24

③ 26

④ 28

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 주어진 합을 정적분의 정의로 바꾸어 극한값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2$이다. 구간 $[0,1]$을 n등분하면 $\Delta x=\frac{1}{n}$, 오른쪽 끝점은 $x_k=\frac{k}{n}$이다.

사용할 공식

리만 합의 정의는 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$이다. 이 문제에서 $f(x)=6(1+2x)^2$이므로 이 공식을 사용할 수 있다.

계산 과정

주어진 극한을 정적분으로 바꾸면
$6\int_0^1(1+2x)^2dx$
이다. $u=1+2x$로 두면 $du=2dx$이므로
$6\left[\frac{(1+2x)^3}{6}\right]_0^1=3^3-1^3=26$
이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 26이므로 22라는 값이 틀렸다. 올바르게는 26이다.

② X — 계산 결과는 26이므로 24라는 값이 틀렸다. 올바르게는 26이다.

③ O — 리만 합을 정적분으로 계산한 값이 26이므로 옳다.

④ X — 계산 결과는 26이므로 28이라는 값이 틀렸다. 올바르게는 26이다.

오답 포인트

바깥의 6과 리만 합의 간격 $\frac{1}{n}$을 함께 반영해야 한다. 또한 $\int(1+2x)^2dx$에서 안쪽 함수의 미분값 2로 나누면 원시함수는 $\frac{(1+2x)^3}{6}$이 된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

$\frac{1}{n}\sum f(\frac{k}{n})$ 꼴을 먼저 찾고, 합 안의 $\frac{k}{n}$을 x로 바꾸어 $\int_0^1 f(x)dx$로 계산한다.

암기 포인트

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \to \int_0^1 f(x)dx$이다.

NoteBase

문 18. 수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t) = 3t^2 - 18t + 24$일 때, 시각 $t = 1$에서 $t = 3$까지 물체가 움직인 거리는?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 속도의 부호가 바뀌는 시각을 찾고, 각 구간에서 속도의 절댓값을 적분하여 이동거리를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 속도는 $v(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4)$이다. 구간 $1 \le t \le 3$에서 $t = 2$일 때 속도가 0이 되며, $1 \le t < 2$에서는 $v(t) > 0$, $2 < t \le 3$에서는 $v(t) < 0$이다. 따라서 $t = 2$에서 운동 방향이 바뀐다.

사용할 공식

이동거리는 속도의 절댓값을 적분한 값이므로 $\int_1^3 |v(t)|dt = \int_1^2 v(t)dt - \int_2^3 v(t)dt$를 사용한다. $t = 2$를 전후로 속도의 부호가 달라지므로 단순히 $\int_1^3 v(t)dt$를 계산하면 이동거리가 아니라 변위가 된다.

계산 과정

속도의 한 부정적분을 $F(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$라 하면 $F(1) = 16$, $F(2) = 20$, $F(3) = 18$이다. 따라서 $\int_1^2 v(t)dt = F(2) - F(1) = 4$이고, $\int_2^3 v(t)dt = F(3) - F(2) = -2$이다. 이동거리는 각 구간 변위의 절댓값을 더한 $4 + |-2| = 6$이다.

선지 판단

① X — 4는 $t = 1$에서 $t = 2$까지의 이동거리만 계산한 값으로, $t = 2$에서 $t = 3$까지의 이동거리 2가 빠졌다. 4가 아니라 전체 이동거리 6이 올바르다.
② O — 두 구간의 이동거리 4와 2를 더하면 6이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X — 속도의 부호가 바뀌는 $t = 2$에서 구간을 나누어 계산하면 이동거리는 6이다. 8이 아니라 6이 올바르다.
④ X — 각 구간 변위의 절댓값은 각각 4와 2이므로 합은 6이다. 10이 아니라 6이 올바르다.

NoteBase

오답 포인트

①의 4는 방향이 바뀐 뒤의 이동을 누락한 값이다. 또한 정적분 $\int_1^3 v(t)dt = 2$는 출발점과 도착점 사이의 변위이므로 이동거리와 구별해야 한다. 이 문항의 핵심 함정은 속도가 음수인 구간의 정적분값을 그대로 더하는 데 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

속도를 인수분해하여 구간 안에서 $v(t) = 0$이 되는 시각을 먼저 찾고, 그 시각을 기준으로 구간을 나눈 뒤 각 정적분값의 절댓값을 더한다.

암기 포인트

변위는 $\int v(t)dt$, 이동거리는 $\int |v(t)|dt$이다.

NoteBase

문 19. 명중률이 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$인 두 사람 A, B가 같은 표적을 향해 사격을 했을 때, 적어도 한 사람이 명중시킬 확률은?

① $\frac{4}{5}$
② $\frac{17}{20}$
③ $\frac{9}{10}$
④ $\frac{19}{20}$

정답 2번

출제 포인트

두 사람 중 적어도 한 사람이 명중할 확률을 여사건인 '두 사람 모두 빗나갈 확률'로 구하는 문제이다.

조건 정리

A의 명중 확률은 $\frac{3}{4}$, 빗나갈 확률은 $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$이다.
B의 명중 확률은 $\frac{2}{5}$, 빗나갈 확률은 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이다.
두 사람의 사격 결과는 서로 독립으로 본다.

사용할 공식

적어도 한 사람이 명중할 확률은 그 여사건을 이용하여 구한다.

P(적어도 한 명 명중)=1-P(두 사람 모두 빗나감)

두 사람의 사격이 독립이므로 모두 빗나갈 확률은 각자의 빗나갈 확률을 곱한다.

계산 과정

두 사람 모두 빗나갈 확률은
$\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$
이다. 따라서 적어도 한 사람이 명중할 확률은
$1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$는 계산 결과 $\frac{17}{20}$와 다르다. 틀린 값 $\frac{4}{5}$는 $\frac{17}{20}$으로 고쳐야 한다.
② O — 여사건 계산 결과가 $\frac{17}{20}$이므로 옳다.
③ X — $\frac{9}{10}$은 B의 명중 확률 $\frac{2}{5}$을 빗나갈 확률로 잘못 사용하여 $1 - \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}$로 계산할 때 나오는 값이다. B가 빗나갈 확률은 $\frac{3}{5}$이므로 $\frac{17}{20}$으로 고쳐야 한다.
④ X — $\frac{19}{20}$은 B가 빗나갈 확률을 $\frac{1}{5}$로 잘못 놓아 $1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$로 계산할 때 나오는 값이다. B가 빗나갈 확률은 $\frac{3}{5}$이므로 $\frac{17}{20}$으로 고쳐야 한다.

오답 포인트

‘적어도 한 사람 명중’을 두 명의 명중 확률을 단순히 더하는 방식으로 처리하면 중복되는 경우가 생긴다. 또한 명중 확률과 빗나갈 확률을 혼동하기 쉽다. 먼저 각각의 빗나갈 확률을 구한 뒤, 두 사람이 모두 빗나갈 확률을 전체 확률 1에서 뺀다.

다시 나오면 이렇게 판단

‘적어도 하나’가 나오면 반대 사건인 ‘하나도 일어나지 않음’을 먼저 계산한다. 독립사건에서는 각 사건이 일어나지 않을 확률을 곱한 뒤 1에서 뺀다.

암기 포인트

독립사건에서 적어도 하나가 일어날 확률은 1-(모두 일어나지 않을 확률)이다.

NoteBase

문 20. 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 사건 A^c이 일어날 확률의 3배일 때, 5회의 독립시행에서 사건 A가 2회 일어날 확률은? (단, A^c은 A의 여사건이다.)

① $\frac{39}{512}$
② $\frac{41}{512}$
③ $\frac{43}{512}$
④ $\frac{45}{512}$

정답 4번

출제 포인트

여사건의 확률 관계로 한 번의 성공확률을 구한 뒤, 독립시행에서 사건이 정확히 일정 횟수 일어날 확률을 이항확률로 계산하는 문제이다.

조건 정리

사건 A가 일어날 확률을 p라 하면 여사건 A^c의 확률은 $1-p$이다. 주어진 조건은 $p=3(1-p)$이고, 구해야 할 값은 5회의 독립시행에서 A가 정확히 2회 일어날 확률이다.

사용할 공식

독립시행 n회에서 확률이 p인 사건이 정확히 r회 일어날 확률은 $\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$이다. 5회 중 A가 일어나는 2회의 위치를 고르는 경우가 $\binom{5}{2}$가지이고 각 배열의 확률이 같으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

먼저 $p=3(1-p)$에서 $4p=3$이므로 $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(A^c)=\frac{1}{4}$이다. 따라서
$\binom{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3=10\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{64}=\frac{90}{1024}=\frac{45}{512}$.

선지 판단

① X — 계산 결과는 $\frac{45}{512}$이므로 $\frac{39}{512}$는 일치하지 않는다. ①의 값을 올바르게 고치면 $\frac{45}{512}$이다.
② X — 계산 결과는 $\frac{45}{512}$이므로 $\frac{41}{512}$는 일치하지 않는다. ②의 값을 올바르게 고치면 $\frac{45}{512}$이다.
③ X — 계산 결과는 $\frac{45}{512}$이므로 $\frac{43}{512}$는 일치하지 않는다. ③의 값을 올바르게 고치면 $\frac{45}{512}$이다.
④ O — $\binom{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{45}{512}$이므로 계산 결과와 일치한다.

오답 포인트

‘2회 일어날 확률’은 특정 두 번만 일어나는 한 배열의 확률이 아니다. 5회 중 성공하는 2회의 위치를 고르는 경우의 수 $\binom{5}{2}$를 반드시 곱해야 한다. 또한 $P(A)=3P(A^c)$와 $P(A)+P(A^c)=1$을 함께 사용해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 사건과 여사건의 확률의 합이 1임을 이용해 한 번의 성공확률을 구한다. 그다음 '정확히 r회'이면 $\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$에 대입하고 약분한 값을 선지와 비교한다.

암기 포인트

여사건은 합이 1이고, 독립시행에서 정확히 r회는 $\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$이다.

NoteBase