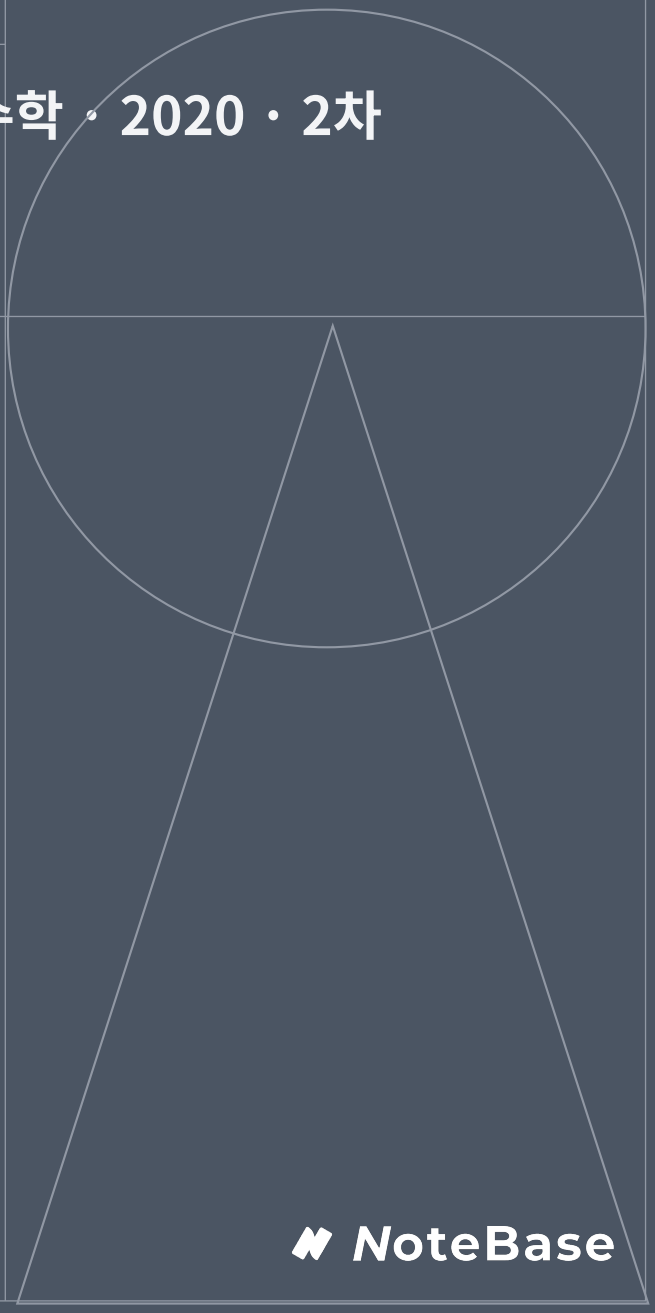
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2020 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2020 · 2차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2020 · 2차

문 1. 다항식 $f(x)=x^2-x+a$에 대하여 $f(x+b)$와 $f(x-1)$이 $x+1$로 나누어 떨어질 때, 음수 ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -18

② -21

③ -24

④ -27

정답 3번

출제 포인트

다항식이 $x+1$로 나누어 떨어진다는 조건을 나머지정리로 바꾸어 a, b, 음수 ab를 차례로 구하는 문제이다.

조건 정리

$f(x-1)$과 $f(x+b)$는 모두 $x+1$로 나누어 떨어진다. 따라서 각각에 $x=-1$을 대입한 값이 0이다. 또한 가능한 ab 중 음수인 값만 구해야 한다.

사용할 공식

다항식 $g(x)$가 $x+1$로 나누어 떨어질 필요충분조건은 $g(-1)=0$이다. 이는 $x+1=x-(-1)$이므로 나머지정리에 따라 나머지가 $g(-1)$이기 때문이다.

계산 과정

1. $f(x-1)$에 $x=-1$을 대입하면 $f(-2)=0$이다.
$f(-2)=(-2)^2-(-2)+a=6+a=0$
따라서 $a=-6$이다.
2. 이제 $f(x)=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$이므로 $f(x)$의 근은 3과 -2이다.
3. $f(x+b)$에 $x=-1$을 대입하면 $f(b-1)=0$이다. 따라서 $b-1=3$ 또는 $b-1=-2$이므로 $b=4$ 또는 $b=-1$이다.
4. $a=-6$이므로 $ab=-24$ 또는 $ab=6$이다. 이 중 음수는 -24이다.

NoteBase

선지 판단

① X — -18은 가능한 음수 ab가 아니다. 올바르게는 $a=-6, b=4$에서 $ab=-24$이다.
② X — -21은 $f(b-1)=0$에서 얻는 $b=4$ 또는 $b=-1$과 맞지 않는다. 올바른 음수 값은 -24이다.
③ O — $a=-6, b=4$일 때 $ab=(-6)\cdot 4=-24$가 되어 문제의 음수 조건을 만족한다.
④ X — -27은 가능한 음수 ab가 아니다. 올바르게 계산하면 $ab=-24$ 또는 6이며, 그중 음수는 -24이다.

오답 포인트

$f(x-1)$에서 $x+1$의 근 -1을 대입할 때 함수의 입력은 -1이 아니라 $(-1)-1=-2$가 된다. 또한 $f(b-1)=0$에서는 두 근을 모두 고려해야 하며, 마지막에 '음수 ab'라는 조건으로 -24만 선택해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

$x-c$로 나누어 떨어진다는 조건은 먼저 $x=c$에서 함수값이 0이라는 식으로 바꾼다. 합성된 입력을 정확히 계산하고, 나온 모든 해를 구한 뒤 부호 같은 추가 조건으로 최종 답을 고른다.

암기 포인트

$x+1$로 나누어 떨어지면 $x=-1$을 대입한다. 합성함수에서는 바깥의 x에 -1을 넣어 안쪽 입력까지 계산한다.

NoteBase

문 2. 방정식 $x^3 - 1 = 0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2(\beta + 1)$의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 삼차방정식의 근과 계수의 관계 및 세제곱근의 성질을 이용해 복소수 식의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: α, β는 $x^3 - 1 = 0$의 두 허근이다.
구해야 할 값: $\alpha^2(\beta + 1)$
주의할 조건: 1은 실근이므로 두 허근 α, β는 $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이다.

사용할 공식

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha^3 = 1$
두 허근은 이차인수 $x^2 + x + 1$의 근이므로 근과 계수의 관계를 적용할 수 있고, 동시에 원래 방정식의 근이므로 각각 세제곱하면 1이 된다.

계산 과정

1. 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = -1$이므로 $\beta + 1 = -\alpha$이다.
2. 이를 주어진 식에 대입하면 $\alpha^2(\beta + 1) = \alpha^2(-\alpha) = -\alpha^3$이다.
3. α는 $x^3 - 1 = 0$의 근이므로 $\alpha^3 = 1$이다. 따라서 $\alpha^2(\beta + 1) = -1$이다.

선지 판단

① X — 계산값은 -1이므로 '-2'는 틀린 값이다. 올바르게는 -1이다.
② O — $\beta + 1 = -\alpha$와 $\alpha^3 = 1$을 적용하면 값이 -1이 된다.
③ X — 계산값은 -1이므로 '0'은 틀린 값이다. 올바르게는 -1이다.
④ X — 마지막의 음수 부호를 포함하면 $-\alpha^3 = -1$이므로 '1'은 틀린 값이다. 올바르게는 -1이다.
계산 결과가 -1이므로 정답은 2번이다.

NoteBase

오답 포인트

$\beta + 1 = -\alpha$에서 음수 부호를 빠뜨리면 ④의 1을 고르기 쉽다. 두 허근의 합이 -1이라는 관계를 정확히 변형해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

다항식을 인수분해한 뒤 근과 계수의 관계로 한 근을 다른 근의 식으로 바꾸고, 원래 방정식이 주는 거듭제곱 관계로 정리한다.

암기 포인트

$x^3 - 1 = 0$의 두 허근은 $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = 1$, $\alpha^3 = \beta^3 = 1$을 만족한다.

NoteBase

문 3. 0이 아닌 세 수에 대하여 이들의 합은 4, 역수의 합은 1, 제곱의 합은 6이다. 이때 세 수의 곱은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 4번

출제 포인트

세 수의 합과 제곱의 합으로 두 수씩 곱한 합을 구한 뒤, 역수의 합을 이용해 세 수의 곱을 구하는 문제이다.

조건 정리

세 수를 a, b, c라 하면 $a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=6$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$이다. 세 수가 모두 0이 아니므로 $abc \neq 0$이고, 구해야 할 값은 abc이다.

사용할 공식

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$

첫째 공식은 합의 제곱과 제곱의 합이 주어졌을 때 $ab+bc+ca$를 구할 수 있게 한다. 둘째 공식은 구한 $ab+bc+ca$와 세 수의 곱 abc를 연결한다.

계산 과정

1. 합의 제곱 공식을 적용하면 다음과 같다.

$4^2=6+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=\frac{16-6}{2}=5$

2. 역수의 합을 하나의 분수로 합치면 다음과 같다.

$1=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{5}{abc}$

3. 따라서 $abc=5$이다.

선지 판단

① X — 세 수의 곱은 2가 아니라 5이다. 합의 제곱에서 $ab+bc+ca=5$를 구하고 역수의 합 $1=\frac{ab+bc+ca}{abc}$을 적용하면 $abc=5$가 된다.

② X — 세 수의 곱은 3이 아니라 5이다. $abc=3$이면 역수의 합은 $\frac{5}{3}$이 되어 주어진 값 1과 일치하지 않는다.

③ X — 4는 세 수의 합 $a+b+c$의 값이지 세 수의 곱이 아니다. 올바른 곱은 $abc=5$이다.

④ O — 계산 결과 세 수의 곱은 $abc=5$이므로 선지의 값과 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

③의 4는 문제에 직접 제시된 세 수의 합이므로 곱으로 혼동하기 쉽다. 또한 $ab+bc+ca$와 abc는 일반적으로 다른 값이지만, 이 문제에서는 역수의 합이 1이어서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=1$, 즉 두 값이 우연히 같아진다.

다시 나오면 이렇게 판단

세 수의 합과 제곱의 합이 함께 주어지면 먼저 $(a+b+c)^2$을 전개해 $ab+bc+ca$를 구한다. 이어서 역수의 합을 $\frac{ab+bc+ca}{abc}$로 통분하여 abc를 구한다.

암기 포인트

세 수의 역수의 합은 '두 수씩 곱한 합 ÷ 세 수의 곱'이다: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$.

문 4. 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 P, 2:1로 외분하는 점을 Q라 하자. $\overline{PQ} = k\overline{AB}$일 때, 실수 $3k$의 값은? (단, $\overline{AB}$는 선분 AB의 길이이다.)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 3번

출제 포인트

내분점과 외분점의 위치를 좌표로 나타내어 두 점 사이의 거리를 구하는 문제이다.

조건 정리

점 A의 좌표를 0, 점 B의 좌표를 1로 두면 $\overline{AB} = 1$이다.
점 P는 선분 AB를 2:1로 내분하므로 $P = \frac{2}{3}$이다.
점 Q는 선분 AB를 2:1로 외분하며, 2:1에서 앞의 비가 더 크므로 B의 바깥쪽에 놓인다.
구해야 할 값은 $\overline{PQ} = k\overline{AB}$를 만족하는 $3k$이다.

사용할 공식

두 점의 좌표를 각각 a, b라 할 때, 선분을 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\frac{na + mb}{m + n}$, 외분하는 점의 좌표는 $\frac{mb - na}{m - n}$이다.
이 문제는 같은 두 점 A, B의 내분점과 외분점 사이의 거리를 묻기 때문에 두 공식을 함께 사용한다.

계산 과정

1. 내분점은 $P = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{2}{3}$이다.
2. 외분점은 $Q = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{2 - 1} = 2$이다.
3. 따라서 $\overline{PQ} = \left|2 - \frac{2}{3}\right| = \frac{4}{3}$이다.
4. $\overline{AB} = 1$이므로 $k = \frac{4}{3}$이고, $3k = 4$이다.

선지 판단

① X — 2는 계산 결과 4와 다르다. 틀린 값 2 → 올바른 값은 4이다.
② X — 3은 계산 결과 4와 다르다. 틀린 값 3 → 올바른 값은 4이다.
③ O — $k = \frac{4}{3}$이므로 $3k = 4$이다.
④ X — 5는 계산 결과 4와 다르다. 틀린 값 5 → 올바른 값은 4이다.

NoteBase

오답 포인트

외분점을 선분 AB의 내부에 두거나 외분 공식의 분모를 $m+n$으로 쓰면 Q의 위치가 잘못된다. 또 $k=\frac{4}{3}$을 구한 뒤 문제에서 요구한 값이 k가 아니라 $3k$임을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

A를 0, B를 1로 놓고 내분점과 외분점의 좌표를 각각 구한 뒤, 두 좌표의 차의 절댓값을 $\overline{AB}$와 비교한다.
마지막에는 문제에서 요구한 값이 비례상수 자체인지 그 배수인지 확인한다.

암기 포인트

내분은 분모가 비의 합, 외분은 분모가 비의 차이며, 거리는 좌표 차의 절댓값이다.

NoteBase

문 5. 좌표평면 위의 두 점 $A(0,\ -1)$, $B(-1,\ 1)$과 포물선 $y = x^2 - 6x + 10$ 위의 점 $P(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP가 있다. 삼각형 ABP의 넓이가 최소일 때 그 넓이는?

① $\frac{7}{2}$
② $\frac{9}{2}$
③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{13}{2}$

정답 1번

출제 포인트

좌표로 주어진 세 점의 삼각형 넓이를 행렬식으로 나타낸 뒤, 완전제곱식을 이용하여 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 점은 $A(0,\ -1)$, $B(-1,\ 1)$, $P(a,\ b)$이고, P가 포물선 위에 있으므로 $b = a^2 - 6a + 10$이다. 구해야 할 값은 a가 변할 때 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값이다.

사용할 공식

세 점 A, B, P가 이루는 삼각형의 넓이는 두 벡터의 행렬식 절댓값의 절반이므로
S=12≤ft|(AB,AP)|
을 사용한다. 좌표로 주어진 세 점의 넓이를 하나의 식으로 나타낼 수 있기 때문이다.

계산 과정

$\vec{AB} = (-1,\ 2)$, $\vec{AP} = (a,\ b + 1)$이므로
S=12≤ft|(-1)(b+1)-2a|=12|b+2a+1|
이다. $b = a^2 - 6a + 10$을 대입하면
S=12|a^2-4a+11|=12|(a-2)^2+7|
이다. $(a - 2)^2 + 7$은 항상 양수이므로 절댓값을 벗길 수 있다. 따라서
S=12\(a-2)^2+7\≥72
이고, $a = 2$일 때 최소 넓이는 72이다.

선지 판단

① O — 계산한 최소 넓이 72와 일치한다.
② X — 92는 최소 넓이가 아니다. 틀린 값 92 → 올바른 최소 넓이는 72이다.
③ X — $\frac{11}{2}$는 최소 넓이가 아니다. 틀린 값 $\frac{11}{2}$ → 올바른 최소 넓이는 72이다.
④ X — $\frac{13}{2}$는 최소 넓이가 아니다. 틀린 값 $\frac{13}{2}$ → 올바른 최소 넓이는 72이다.

NoteBase

오답 포인트

행렬식 $(-1)(b+1)-2a$의 부호를 잘못 계산하거나, 넓이이므로 절댓값을 취해야 한다는 점을 놓치기 쉽다. 또한 $a^2-4a+11=(a-2)^2+7$에서 제곱항의 최솟값이 0이라는 점을 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

좌표로 주어진 삼각형의 넓이는 두 변 벡터의 행렬식으로 식을 세우고, 곡선의 조건을 대입한 뒤 완전제곱식으로 바꾸어 최솟값을 판단한다.

암기 포인트

삼각형 넓이는 행렬식 절댓값의 절반이며, $(a-c)^2+d$의 최솟값은 d이다.

NoteBase

문 6. x**에 대한 방정식** $-|x^2-9|+4(x+k)=0$**이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수** k**의 최솟값은?**

① 3

② $\frac{13}{4}$

③ 4

④ $\frac{17}{4}$

정답 1번

출제 포인트

절댓값 방정식을 구간별로 나누고, 각 해가 해당 구간에 속하는지 확인하여 서로 다른 실근의 개수가 3개가 되는 k를 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 방정식은 $|x^2-9|=4(x+k)$이다.
$|x|\geq 3$에서는 $x^2-9=4(x+k)$, $|x|\leq 3$에서는 $9-x^2=4(x+k)$로 나눈다.
구해야 할 값은 서로 다른 실근이 정확히 3개가 되게 하는 k 중 최솟값이다. 경계점 $x=-3, 3$은 두 구간에서 중복될 수 있으므로 한 번만 센다.

사용할 공식

방정식을 k에 관하여 정리하면
$k=f(x)=\frac{|x^2-9|}{4}-x$
이다. 따라서 수평선 $y=k$와 $y=f(x)$의 교점 개수가 실근의 개수이다. 구간별로는
f(x)=cases((x-2)^2-13)/(4),&x≤ -3 또는 x≥ 3,(13-(x+2)^2)/(4),&-3≤ x≤ 3.cases
가 된다. 이 표현을 쓰면 각 구간의 최솟값·최댓값과 경계값으로 교점 개수를 판단할 수 있다.

계산 과정

바깥 구간에서 $f(-3)=3$, $f(3)=-3$이고, 왼쪽 가지는 $k\geq 3$일 때 교점 1개, 오른쪽 가지는 $k\geq -3$일 때 교점 1개를 갖는다.
가운데 구간의 식은 꼭짓점이 $(-2, 13/4)$인 아래로 열린 포물선이다. 따라서 $k=3$일 때 가운데 구간의 해는 $x=-3, -1$이고, 바깥 구간의 해는 $x=-3, 7$이다. 중복된 $x=-3$을 한 번만 세면 서로 다른 실근은 $-3, -1, 7$의 3개이다.
또한 $k=13/4$일 때도 가운데 꼭짓점 $x=-2$와 바깥 구간의 해 2개로 실근이 3개이다. 그러나 $-3<k<3$에서는 실근이 2개뿐이고 $k=-3$ 이하에서도 3개가 되지 않는다. 그러므로 가능한 값 중 최솟값은 3이다.

NoteBase

선지 판단

① O — $k=3$이면 서로 다른 실근이 $-3,\ -1,\ 7$로 3개이고, 그보다 작은 k에서는 실근이 3개가 되지 않으므로 최솟값이다.
② X — $k=13/4$에서도 서로 다른 실근은 3개이지만 최솟값이 아니다. 틀린 판단은 '13/4가 최솟값'이며, 올바르게는 최솟값이 3이다.
③ X — $k=4$이면 가운데 구간의 식 $(x+2)^2=13-4k$가 실근을 갖지 않고 바깥 구간에서만 실근 2개가 나온다. 틀린 판단은 '4에서 실근이 3개'이며, 올바르게는 실근이 2개이다.
④ X — $k=17/4$이면 가운데 구간에는 실근이 없고 바깥 구간에만 실근 2개가 있다. 틀린 판단은 '17/4에서 실근이 3개'이며, 올바르게는 실근이 2개이다.

오답 포인트

$k=13/4$에서는 가운데 포물선의 꼭짓점이 수평선과 접하여 실제로 실근이 3개가 된다. 하지만 문제는 가능한 k를 하나 찾는 것이 아니라 그중 최솟값을 묻는다. 또한 $k=3$에서 경계해 $x=-3$을 두 구간의 해로 중복 계산하면 실근을 4개로 잘못 셀 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

절댓값의 부호가 바뀌는 경계로 구간을 나눈 뒤, 각 구간에서 얻은 해의 범위 조건을 확인하고 경계해의 중복을 제거한다. 매개변수의 최솟값을 묻는 경우에는 실근 개수가 바뀌는 경계값을 모두 비교한다.

암기 포인트

절댓값 방정식의 실근 개수는 '구간 분리 → 범위 확인 → 경계해 중복 제거'의 순서로 센다. 이 문제에서 실근이 3개가 되는 경계값은 3과 13/4이고, 최솟값은 3이다.

NoteBase

문 7. 모눈종이 위의 한 점 $(-1, 4)$를 점 $(1, 0)$과 겹치도록 접었을 때, 점 $(1, 1)$과 겹치는 점의 좌표는?

① $(-1, \frac{1}{2})$
② $(-\frac{1}{5}, \frac{17}{5})$
③ $(0, 3)$
④ $(\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$

정답 2번

출제 포인트

종이를 접어 두 점이 겹칠 때 접는 선은 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선이 된다는 원리와 직선에 대한 대칭이동 공식을 이용하는 문제이다.

조건 정리

서로 겹치는 두 점은 $(-1, 4)$, $(1, 0)$이다.
구해야 할 것은 점 $(1, 1)$을 같은 접는 선에 대하여 대칭이동한 점의 좌표이다.

사용할 공식

두 점에서 같은 거리에 있는 점 (x, y)의 자취를 이용하면 접는 선을 구할 수 있다.
$(x+1)^2 + (y-4)^2 = (x-1)^2 + y^2$
또한 직선 $ax + by + c = 0$에 대한 점 (x_0, y_0)의 대칭점은 $d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$라 할 때 $(x_0 - 2ad, y_0 - 2bd)$이다. 접는 선 위의 모든 점은 처음 두 점에서 거리가 같고, 종이를 접으면 같은 직선에 대한 대칭이동이 이루어지므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 거리의 제곱을 같게 놓고 정리하면 $4x - 8y + 16 = 0$이므로 접는 선은 $x - 2y + 4 = 0$이다.
2. $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $a = 1, b = -2, c = 4$를 대입하면 $d = \frac{1 - 2 + 4}{1^2 + (-2)^2} = \frac{3}{5}$이다.
3. 대칭점은 (1-2·1·35, 1-2·(-2)·35)=(-15,(17)/(5))이다.

NoteBase

선지 판단

① X — (-1,12)는 계산한 대칭점과 다르다. 특히 (1, 1)과 이 점의 중점 (0,34)이 접는 선 $x - 2y + 4 = 0$ 위에 있지 않다. 올바르게는 (-15,(17)/(5))이다.
② O — 반사 공식으로 구한 좌표 (-15,(17)/(5))와 정확히 일치한다. 두 점의 중점 (25,(11)/(5))도 접는 선 위에 있다.
③ X — (0, 3)과 (1, 1)을 잇는 선분은 접는 선에 수직이지만, 그 중점 (12,2)은 접는 선 위에 있지 않아 수직이등분 조건을 충족하지 못한다. 올바르게는 (-15,(17)/(5))이다.
④ X — (12,53)는 계산한 대칭점과 다르고, (1, 1)과 이 점을 잇는 선분도 접는 선에 수직이 아니다. 올바르게는 (-15,(17)/(5))이다.
따라서 계산 결과와 일치하는 정답은 2번이다.

오답 포인트

③은 원래 점과 후보점을 잇는 선분이 접는 선에 수직이라는 조건만 만족하므로 함정이 된다. 대칭점이 되려면 접는 선이 그 선분에 수직일 뿐 아니라 선분의 중점도 지나야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 점이 겹치도록 접는 문제에서는 먼저 그 두 점의 수직이등분선을 접는 선으로 구한 뒤, 옮길 점을 그 직선에 대하여 대칭이동한다. 마지막에는 원래 점과 대칭점의 중점이 접는 선 위에 있는지, 두 점을 잇는 선분이 접는 선에 수직인지 함께 검산한다.

암기 포인트

접어서 겹치는 두 점 ↔ 접는 선은 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선이다.

NoteBase

문 8. 함수 $y=\frac{3x-k^2+2k+5}{x-1}$의 그래프가 모든 사분면을 지나도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

출제 포인트

유리함수의 식을 점근선 형태로 바꾸고, 그래프가 제3사분면까지 지나기 위한 조건을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수를 다음과 같이 변형한다.
$y=3+\frac{-k^2+2k+8}{x-1}$
$A=-k^2+2k+8$이라 두면 $y=3+\frac{A}{x-1}$이다. 그래프가 모든 사분면을 지나려면 특히 $x<0$, $y<0$인 제3사분면을 지나야 한다.

사용할 원리

$x<0$이면 $x-1<-1$이다. $A\le 0$이면 $A/(x-1)\ge 0$이므로 $y\ge 3$이 되어 제3사분면을 지날 수 없다. $A>0$일 때 $x\to 0^-$이면 $y\to 3-A$이므로, 음수인 함수값이 존재하려면 $3-A<0$, 즉 $A>3$이어야 한다. 이 조건이면 제1·제2·제4사분면도 각각 $x>1$, 충분히 작은 음의 x, $0<x<1$에서 지나므로 모든 사분면을 지난다.

계산 과정

$A>3$
$-k^2+2k+8>3$
$k^2-2k-5<0$
이 이차부등식의 두 근은 1-6, 1+6이므로
1-6<k<1+6
이다. 이 범위에 속하는 자연수는 $k=1, 2, 3$이며, 그 개수는 3개이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 자연수 k는 1,2,3의 3개이므로 '1개'는 틀린 값이다. 올바르게는 3개이다.
② X — 조건을 만족하는 자연수의 개수는 3개이므로 '2개'는 틀린 값이다. 올바르게는 3개이다.
③ O — $k = 1, 2, 3$의 세 값이 조건을 만족하므로 '3개'가 맞다.
④ X — $k = 4$이면 $A = -4^2 + 2 \cdot 4 + 8 = 0$이 되어 모든 사분면을 지나지 못하므로 '4개'는 틀린 값이다. 올바르게는 3개이다.

오답 포인트

점근선이 $x = 1, y = 3$이라는 사실만 확인해서는 부족하다. 제3사분면에서는 $x < 0$인 범위에서 실제로 $y < 0$이 되는지가 핵심이며, 경계인 $A = 3$에서는 $x \to 0^-$일 때 함수값이 0에 가까워질 뿐 음수가 되지 않는다. 따라서 조건은 A≥3이 아니라 $A > 3$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

유리함수를 $y = q + \frac{A}{x-p}$ 꼴로 바꾼 뒤, 각 사분면의 부호 조건을 확인한다. 특히 빠지기 쉬운 사분면 하나를 먼저 찾아 그 사분면에서 필요한 엄격부등식을 세운다.

암기 포인트

모든 사분면 통과 여부는 점근선의 위치뿐 아니라 각 구간에서 함수값의 부호가 실제로 바뀌는지까지 확인한다.

NoteBase

문 9. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여
$\sum_{k=1}^{10} \log_3 (9a_k) = 11, \quad \sum_{k=1}^{9} (\log_{\frac{1}{9}} a_k - 3) = 2$
일 때, $\log_3 a_{10}$의 값은?

① 46

② 47

③ 48

④ 49

정답 4번

출제 포인트

밑이 3인 로그로 식을 통일한 뒤, 전체 10개 항의 로그합과 앞의 9개 항의 로그합의 차를 이용해 $\log_3 a_{10}$을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $\sum_{k=1}^{10} \log_3 (9a_k) = 11, \sum_{k=1}^{9} (\log_{1/9} a_k - 3) = 2$이다.
구해야 할 값: $\log_3 a_{10}$이다.
주의할 조건: $1/9 = 3^{-2}$이므로 _1/9a_k=-12_3 a_k이다.

사용할 공식

로그의 곱셈 법칙에 따라 $\log_3 (9a_k) = \log_3 9 + \log_3 a_k = 2 + \log_3 a_k$이다. 또한 밑변환을 적용하면 _1/9a_k=(_3 a_k)/(_3(1/9))=-12_3 a_k이다. 두 식이 각각 전체 10개 항과 앞의 9개 항의 로그합을 주므로, 두 합의 차로 마지막 항을 구할 수 있다.

계산 과정

$x_k = \log_3 a_k$로 놓는다.
첫째 식에서
$\sum_{k=1}^{10} (2 + x_k) = 11$
이므로 $20 + \sum_{k=1}^{10} x_k = 11$, 즉 $\sum_{k=1}^{10} x_k = -9$이다.
둘째 식에서
Σ_k=1^9≤ft(-12x_k-3)=2
이므로 -12Σ_k=1^9x_k-27=2이고, $\sum_{k=1}^{9} x_k = -58$이다.
따라서
$x_{10} = \sum_{k=1}^{10} x_k - \sum_{k=1}^{9} x_k = -9 - (-58) = 49$
이므로 $\log_3 a_{10} = 49$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 46은 계산 결과 49와 다르다. '46'은 틀린 값이며, 올바른 값은 49이다.
② X — 47은 계산 결과 49와 다르다. '47'은 틀린 값이며, 올바른 값은 49이다.
③ X — 48은 계산 결과 49와 다르다. '48'은 틀린 값이며, 올바른 값은 49이다.
④ O — 전체 로그합 -9에서 앞의 9개 항의 로그합 -58을 빼면 $-9-(-58)=49$이므로 맞다.

오답 포인트

밑이 1/9인 로그를 밑이 3인 로그로 바꿀 때 $\log_3(1/9)=-2$의 음수를 빠뜨리기 쉽다. 또한 마지막 항은 전체 합에서 앞의 9개 항의 합을 빼므로 $-9-(-58)$에서 두 번째 음수를 정확히 처리해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

각 로그를 같은 밑으로 통일하고, 항별 로그를 하나의 문자로 둔 다음, 전체 합과 부분합을 각각 구해 그 차로 남은 항을 판단한다.

암기 포인트

_3^-2a=-12_3 a, 마지막 항은 전체 합에서 앞부분의 합을 뺀 값이다.

NoteBase

문 10. 첫째항이 -5이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,
$T_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}$
이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} (S_k + T_k)$가 최소가 되게 하는 n의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 3번

출제 포인트

등차수열의 합과 교대합을 각각 구한 뒤, 누적합에 새로 더해지는 항의 부호가 바뀌는 지점에서 최솟값을 판단하는 문제이다.

조건 정리

등차수열의 일반항은 $a_n = -5 + 3(n-1) = 3n - 8$이다.
S_k는 첫째항부터 제k항까지의 합이고, T_k는 $a_1 - a_2$부터 $a_{2k-1} - a_{2k}$까지 모두 k개의 두 항 묶음으로 이루어진다.
구해야 할 값은 $U_n = \sum_{k=1}^{n} (S_k + T_k)$가 최소가 되는 자연수 n이다.

사용할 공식

등차수열의 합 공식을 적용하면
$S_k = \frac{k}{2}\{2(-5) + (k-1)3\} = \frac{k(3k-13)}{2}$.
또한 이웃한 두 항의 차는 항상
$a_{2j-1} - a_{2j} = -3$
이므로 $T_k = -3k$이다. 따라서
$S_k + T_k = \frac{k(3k-19)}{2}$.
이 식은 누적합 U_n에 제n단계에서 새로 더해지는 값이므로, 그 부호로 U_n의 증가와 감소를 판단할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

1. $S_k=\frac{k(3k-13)}{2}$, $T_k=-3k$이므로 $S_k+T_k=\frac{k(3k-19)}{2}$이다.
2. 누적합을 직접 정리하면
$U_n=\frac{1}{2}\left(3\sum_{k=1}^{n}k^2-19\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{n(n+1)(n-9)}{2}$.
3. 연속한 두 누적합의 차는
$U_n-U_{n-1}=S_n+T_n=\frac{n(3n-19)}{2}$.
4. $n=6$에서는 이 차가 음수이고 $n=7$부터 양수이다. 따라서 U_n은 $n=6$까지 감소하고 그 뒤 증가하므로 $n=6$에서 최소이다.

선지 판단

① X — $n=2$이면 $U_2=-21$이고 이후에도 누적합이 감소하므로 최소가 아니다. 틀린 값 2는 올바르게는 6이다.
② X — $n=4$이면 $U_4=-50$이며 $U_5-U_4<0$, $U_6-U_5<0$이므로 더 작은 값이 뒤에 나온다. 틀린 값 4는 올바르게는 6이다.
③ O — $U_6=-63$이고, 누적합의 증분이 $n=6$까지 음수였다가 $n=7$부터 양수가 되므로 전 구간의 최솟값은 $n=6$에서 얻어진다.
④ X — $n=8$이면 $U_8=-36$이며 이미 $n=7$부터 누적합이 증가하고 있다. 틀린 값 8은 올바르게는 6이다.

오답 포인트

T_k를 제k항까지의 교대합으로 오해하기 쉽지만, 실제로는 제$2k$항까지의 k개 묶음이므로 $T_k=-3k$이다. 또한 $U_n=0$이 되는 $n=9$를 찾는 문제가 아니라, 새로 더해지는 항 S_n+T_n의 부호가 음수에서 양수로 바뀌는 지점을 찾는 문제이다.

다시 나오면 이렇게 판단

누적합의 최솟값은 전체 합을 먼저 복잡하게 비교하기보다 U_n-U_{n-1}을 구해 판단한다. 이 차가 음수인 동안 누적합은 감소하고, 처음 양수가 되기 직전의 n에서 최소가 된다.

암기 포인트

누적합의 최소는 '새로 더하는 항의 부호 변화'를 확인한다. 이 문제에서는 $S_n+T_n=\frac{n(3n-19)}{2}$가 제6항까지 음수이고 제7항부터 양수이므로 최소 지점은 6이다.

NoteBase

문 11. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=5$를 만족시킨다. $g(x)=x\{f(x)\}^2$일 때, $g'(2)$의 값은?

① 21

② 23

③ 25

④ 27

정답 1번

출제 포인트

주어진 극한에서 $f(2)$와 $f'(2)$를 알아낸 뒤 곱의 미분법과 합성함수의 미분법으로 $g'(2)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

다항함수는 연속이므로 극한값이 유한하려면 $f(2)-1=0$이어야 한다. 따라서 $f(2)=1$이다.
이때 주어진 극한은 $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=5$를 뜻한다.
구해야 할 값은 $g(x)=x\{f(x)\}^2$의 $x=2$에서의 미분계수이다.

사용할 공식

곱의 미분법과 합성함수의 미분법을 적용하면
$g'(x)=\{f(x)\}^2+2xf(x)f'(x)$
가 된다. $g(x)$가 x와 $\{f(x)\}^2$의 곱이고, $\{f(x)\}^2$의 미분이 $2f(x)f'(x)$이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$f(2)=1, f'(2)=5$를 대입하면
$g'(2)=\{f(2)\}^2+2\cdot 2\cdot f(2)f'(2)=1^2+4\cdot 1\cdot 5=21$
이다.

선지 판단

① O — 계산한 $g'(2)$의 값이 21이므로 옳다.
② X — 23은 계산 결과와 다르다. 23이 아니라 21로 고쳐야 한다.
③ X — 25는 계산 결과와 다르다. 25가 아니라 21로 고쳐야 한다.
④ X — 27은 계산 결과와 다르다. 27이 아니라 21로 고쳐야 한다.

오답 포인트

주어진 극한을 곧바로 $f'(2)=5$로 읽기 전에 먼저 $f(2)=1$임을 확인해야 한다. 또한 $g'(x)$를 구할 때 x의 미분에서 생기는 첫째 항 $\{f(x)\}^2$이나 제곱의 미분에서 생기는 계수 2를 빠뜨리면 안 된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-L}{x-a}$가 유한하면 먼저 $f(a)=L$을 확인하고, 그 극한을 $f'(a)$로 바꾼다. 그다음 주어진 함수에 곱의 미분법과 연쇄법칙을 적용한다.

암기 포인트

유한한 미분형 극한은 먼저 함수값을 맞춘다. $g(x)=x\{f(x)\}^2$이면 $g'(x)=\{f(x)\}^2+2xf(x)f'(x)$이다.

문 12. 두 함수
f(x)=cases2x+a&(x<-1)\\1&(x≥ -1)cases, g(x)=casesb&(x<2)\^2+x+1&(x≥ 2)cases
에 대하여 함수 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이라 하자. 이때 $h(-5)+26h(3)$의 값은? (단, a, b는 양의 상수이다.)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

정답 2번

출제 포인트

분자나 분모의 식이 바뀌는 경계점에서 좌극한, 우극한, 함숫값을 같게 하여 미지수를 구하고 함수값을 계산하는 문제이다.

조건 정리

함수 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$의 식이 달라질 수 있는 경계점은 $x=-1$과 $x=2$이다. a, b는 양의 상수이므로 $x<2$에서 분모 b는 0이 아니며, $x\geq 2$에서는 $x^2+x+1>0$이다. 따라서 두 경계점의 연속 조건을 차례로 적용한다.

사용할 공식

함수 h가 $x=c$에서 연속이면
$\lim_{x\to c^-}h(x)=h(c)=\lim_{x\to c^+}h(x)$
이다. 조각함수의 식이 바뀌는 경계점에서 이 조건을 사용하면 a, b를 결정할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

1. $x=-1$에서 연속이므로
$\frac{-2+a}{b}=\frac{1}{b}$
이고, $b>0$이므로 $a=3$이다.

2. $x=2$에서 연속이므로
$\frac{1}{b}=\frac{1}{2^2+2+1}=\frac{1}{7}$
이다. 따라서 $b=7$이다.

3. $-5<-1$이고 $3\geq 2$이므로
$h(-5)=\frac{2(-5)+3}{7}=-1, \qquad h(3)=\frac{1}{3^2+3+1}=\frac{1}{13}$
이다. 따라서
$h(-5)+26h(3)=-1+26\cdot\frac{1}{13}=1$
이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 0이 아니라 1이다. 올바른 값은 1이다.
② O — $h(-5)+26h(3)=1$이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X — 계산 결과는 2가 아니라 1이다. 올바른 값은 1이다.
④ X — 계산 결과는 3이 아니라 1이다. 올바른 값은 1이다.

오답 포인트

연속 조건을 $x=-1$에서만 적용하면 a만 정해지고 b를 구할 수 없다. f의 경계점 -1뿐 아니라 g의 경계점 2에서도 h의 좌우 값을 같게 해야 한다. 또한 $x=3$에서는 $g(3)=3^2+3+1=13$이므로 $h(3)=1/13$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

조각함수의 비로 만든 함수가 실수 전체에서 연속이면 분자와 분모의 모든 경계점을 먼저 찾는다. 각 경계점에서 비의 좌우 식을 직접 비교해 상수를 정한 뒤, 구하려는 입력값이 어느 구간에 속하는지 확인하여 대입한다.

암기 포인트

조각함수의 연속성은 각 구성 함수의 경계점을 모두 모아 비의 좌우 값을 확인한다.

NoteBase

문 13. $f(n)=3^{\frac{1}{n(n+1)}}$**일 때,** $f(1)\times f(2)\times\cdots\times f(10)=9^k$**을 만족하는 상수** k**의 값은? (단,** n**은 자연수이다.)**

① $\frac{2}{11}$
② $\frac{3}{11}$
③ $\frac{5}{11}$
④ $\frac{10}{11}$

정답 3번

출제 포인트

지수법칙과 부분분수의 망원합을 이용하여 곱의 지수를 구한 뒤, 밑을 3으로 통일해 k의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(n)=3^{\frac{1}{n(n+1)}}$이다. 따라서 $f(1)f(2)\cdots f(10)$의 지수는 $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$이고, 이 곱을 9^k와 같게 하는 k를 구해야 한다.

사용할 공식

같은 밑의 거듭제곱을 곱하면 지수를 더하므로

$3^a\cdot 3^b=3^{a+b}$

를 사용한다. 또한

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

로 분해하면 연속한 항들이 서로 소거된다. 마지막으로 $9^k=(3^2)^k=3^{2k}$로 밑을 통일한다.

계산 과정

지수의 합은

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

이다. 따라서

$f(1)f(2)\cdots f(10)=3^{\frac{10}{11}}$

이다. 한편 $9^k=3^{2k}$이므로 지수를 비교하면

$2k=\frac{10}{11},\qquad k=\frac{5}{11}$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $k = \frac{2}{11}$이면 $9^k = 3^{\frac{4}{11}}$이므로 계산된 곱 $3^{\frac{10}{11}}$과 같지 않다. 틀린 값 $\frac{2}{11}$은 $\frac{5}{11}$로 고쳐야 한다.
② X — $k = \frac{3}{11}$이면 $9^k = 3^{\frac{6}{11}}$이므로 계산된 곱과 같지 않다. 틀린 값 $\frac{3}{11}$은 $\frac{5}{11}$로 고쳐야 한다.
③ O — $k = \frac{5}{11}$이면 $9^k = 3^{2 \cdot \frac{5}{11}} = 3^{\frac{10}{11}}$이므로 주어진 곱과 정확히 일치한다.
④ X — $\frac{10}{11}$은 곱을 밑이 3인 거듭제곱으로 나타냈을 때의 지수이지 k가 아니다. $9 = 3^2$이므로 이 지수를 2로 나누어 $k = \frac{5}{11}$로 고쳐야 한다.

오답 포인트

망원합으로 얻은 $\frac{10}{11}$을 곧바로 k라고 판단하면 ④를 고르게 된다. 등식의 오른쪽 밑은 3이 아니라 9이므로 $9^k = 3^{2k}$로 바꾼 뒤 지수 $2k$와 $\frac{10}{11}$을 비교해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

거듭제곱의 곱은 먼저 같은 밑으로 정리하여 지수를 합하고, $\frac{1}{n(n+1)}$ 꼴은 부분분수로 분해하여 망원합을 만든다. 마지막에는 등식 양쪽의 밑을 같게 만든 뒤 지수를 비교한다.

암기 포인트

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 그리고 $9^k = 3^{2k}$이다.

NoteBase

문 14. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 k에 대하여 $f(kx)=kf(x)$를 만족시키고 $f'(1)=4$라 하자. 함수 g(x)=cases (2f(x)-f(2))/(x-1) & (x<1)\ ax+1 & (x≥ 1) cases가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 4번

출제 포인트

함수 방정식으로 $f(x)$를 결정한 뒤 조각함수의 경계 $x=1$에서 연결 조건을 적용하여 a를 구하는 문제이다.

원문 주의

원문에는 $g(x)$가 '미분가능'하다고 인쇄되어 있으나, 그 조건을 그대로 적용하면 가능한 a가 없다. 공식 정답 ④가 나오려면 '연속' 조건을 적용해야 하므로, 아래 풀이는 출제 의도에 따라 연속 조건으로 계산한 것이다.

조건 정리

임의의 실수 k에 대하여 $f(kx)=kf(x)$이고 $f'(1)=4$이다. 경계점 $x=1$의 왼쪽 식은 $\frac{2f(x)-f(2)}{x-1}$, 오른쪽 식과 함수값은 $ax+1$이다.

사용할 공식

$x=1$을 함수 방정식에 대입하면 $f(k)=kf(1)$이므로 $f(x)=cx$ 꼴이다. 조각함수가 $x=1$에서 연속이려면 왼쪽 극한과 함수값이 같아야 한다.

계산 과정

1. $f(x)=cx$이고 $f'(1)=c=4$이므로 $f(x)=4x$이다.

2. $x<1$에서
$g(x)=\frac{2(4x)-f(2)}{x-1}=\frac{8x-8}{x-1}=8$
이다.

3. 출제 의도인 연속 조건을 적용하면
$\lim_{x\to 1-} g(x)=8=g(1)=a+1$
이므로 $a=7$이다.

4. 다만 원문의 '미분가능'을 그대로 적용하면 왼쪽 미분계수는 0이고 오른쪽 미분계수는 $a=7$이어서 서로 다르므로 해가 없다.

NoteBase

선지 판단

① X — 연속 조건 $a + 1 = 8$을 만족하지 않는다. 올바른 값은 7이다.
② X — 연속 조건 $a + 1 = 8$을 만족하지 않는다. 올바른 값은 7이다.
③ X — 연속 조건 $a + 1 = 8$을 만족하지 않는다. 올바른 값은 7이다.
④ O — 출제 의도대로 연속 조건을 적용하면 $a = 7$이다.

오답 포인트

연속과 미분가능을 같은 조건으로 처리하면 안 된다. 이 식에서 왼쪽 조각은 상수함수 8이므로 왼쪽 미분계수는 0이다. 따라서 원문의 '미분가능'은 정답 ④와 양립하지 않으며, ④는 '연속'으로 보아야 얻어진다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수 방정식으로 먼저 $f(x)$를 확정하고 조각별 식을 간단히 한다. 이어 경계점에서 연속이면 함수값을, 미분가능이면 함수값과 좌우 미분계수를 모두 비교한다.

암기 포인트

연속은 좌우 값의 일치이고, 미분가능은 연속에 더해 좌우 미분계수까지 일치해야 한다. 이 문항의 공식 답 7은 연속 조건에서 나온다.

NoteBase

문 15. 곡선 $y = x^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, t^3)$ $(t > 0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 삼각형 PAB의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^4+4}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$

정답 1번

출제 포인트

곡선 위 한 점에서의 접선 방정식으로 x절편을 구하고, 삼각형의 넓이와 최고차항을 이용해 극한을 계산하는 문제이다.

조건 정리

점 P의 좌표는 (t, t^3)이고, $t > 0$이다. 점 A는 접선의 x절편이며, 점 B는 P에서 x축에 내린 수선의 발이므로 $\mathrm{B} = (t, 0)$이다. 삼각형 PAB에서는 $\overline{AB}$를 밑변으로 보면 높이가 t^3이다.

사용할 공식

$y = x^3$의 도함수는 $y' = 3x^2$이므로 $x = t$에서 접선의 기울기는 $3t^2$이다. 따라서 접선은 $y - t^3 = 3t^2(x - t)$이다. 또한 삼각형의 넓이는 f(t)=(1)/(2)× 밑변× 높이로 구한다. 접선의 x절편이 밑변의 길이를 결정하므로 두 공식을 함께 사용한다.

계산 과정

접선이 x축과 만나는 점에서는 $y = 0$이므로 $-t^3 = 3t^2(x - t)$이다. $t > 0$이므로 t^2으로 나누면 $-t = 3(x - t)$이고, 여기서 $x = \frac{2t}{3}$을 얻는다. 따라서 $\mathrm{A} = (\frac{2t}{3}, 0)$이고, 밑변의 길이는 $\overline{AB} = t - \frac{2t}{3} = \frac{t}{3}$이다. 그러므로 $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{3} \cdot t^3 = \frac{t^4}{6}$이다. 따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^4+4} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^4/6}{t^4+4} = \lim_{t\to\infty}\frac{1/6}{1+4/t^4} = \frac{1}{6}$이다.

선지 판단

① O — 계산한 극한값이 $\frac{1}{6}$이므로 옳다.
② X — $\frac{1}{3}$은 삼각형 넓이에서 $\frac{1}{2}$을 곱하지 않았을 때 나오는 값이다. 올바른 값은 $\frac{1}{6}$이다.
③ X — $\frac{1}{2}$은 밑변 $\overline{AB} = \frac{t}{3}$을 반영하지 않은 값이다. 올바른 값은 $\frac{1}{6}$이다.
④ X — $\frac{2}{3}$은 접선의 x절편 계수 $\frac{2t}{3}$을 극한값으로 잘못 본 것이다. 올바른 값은 $\frac{1}{6}$이다.

NoteBase

오답 포인트

접선의 x절편 $\frac{2t}{3}$ 자체가 밑변의 길이는 아니다. 밑변은 점 A와 점 B 사이의 거리이므로 $t-\frac{2t}{3}=\frac{t}{3}$이고, 넓이를 구할 때는 다시 $\frac{1}{2}$을 곱해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

곡선과 접선으로 만든 도형의 넓이는 접선 방정식 작성, 축과의 교점 계산, 밑변과 높이 확인, 넓이 계산, 최고차항 비교의 순서로 판단한다.

암기 포인트

접선의 절편을 구한 뒤에는 절편의 좌표와 실제 밑변의 길이를 구분한다. 유리함수의 무한대 극한은 분자와 분모의 최고차항 계수의 비로 결정된다.

NoteBase

문 16. 함수 f(x)=casesax+1&(x<0)\\3x+1&(x≥ 0)cases에 대하여 $\int_{-1}^{1}\{xf(x+3)+f(x-3)\}dx=0$을 만족시키는 상수 a의 값은?

① $-\frac{2}{3}$
② $-\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$

정답 4번

출제 포인트

적분 구간에서 $x+3$과 $x-3$의 부호를 먼저 판단하여 조각함수의 알맞은 식을 적용하고, 대칭구간 적분으로 상수 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

$-1\le x\le 1$에서 $2\le x+3\le 4$이므로 $f(x+3)=3(x+3)+1=3x+10$이다. 또한 $-4\le x-3\le -2$이므로 $f(x-3)=a(x-3)+1=ax-3a+1$이다. 구해야 할 값은 주어진 적분을 0으로 만드는 a이다.

사용할 공식

대칭구간에서는 홀함수의 적분이 0이므로 $\int_{-1}^{1}xdx=0$이고, $\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$이다. 적분식을 다항식으로 정리하면 홀수차항을 바로 소거할 수 있으므로 이 성질을 사용한다.

계산 과정

적분함수는 다음과 같이 정리된다.

$$x(3x+10)+(ax-3a+1)=3x^2+(10+a)x+1-3a$$

따라서

$$\int_{-1}^{1}\{xf(x+3)+f(x-3)\}dx=3\cdot\frac{2}{3}+0+2(1-3a)=4-6a$$

주어진 조건에 따라 $4-6a=0$이므로 $a=\frac{2}{3}$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a = -\frac{2}{3}$이면 적분값은 $4 - 6a = 8$로 0이 아니다. 틀린 값 $-\frac{2}{3}$은 올바르게는 $\frac{2}{3}$이다.
② X — $a = -\frac{1}{3}$이면 적분값은 $4 - 6a = 6$으로 0이 아니다. 틀린 값 $-\frac{1}{3}$은 올바르게는 $\frac{2}{3}$이다.
③ X — $a = \frac{1}{3}$이면 적분값은 $4 - 6a = 2$로 0이 아니다. 틀린 값 $\frac{1}{3}$은 올바르게는 $\frac{2}{3}$이다.
④ O — $a = \frac{2}{3}$이면 적분값은 $4 - 6a = 0$이 되어 조건을 만족한다.

오답 포인트

$f(x+3)$과 $f(x-3)$에서 조각함수의 식을 정할 때 x의 부호가 아니라 입력값 $x+3$, $x-3$의 부호를 판단해야 한다. 또한 $(10+a)x$는 대칭구간에서 적분값이 0이지만 상수항 $1-3a$는 구간의 길이 2를 곱해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

적분 구간에서 조각함수의 각 입력값 범위를 구한 뒤 알맞은 식을 대입하고, 다항식으로 정리한 다음 대칭구간의 홀함수 항을 소거하여 미지수를 결정한다.

암기 포인트

조각함수는 바깥의 x가 아니라 함수 안의 입력값으로 구간을 판단하며, $[-c, c]$에서 홀함수의 적분은 0이다.

NoteBase

문 17. 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$\int_1^x tf(t)dt = \{f(x)\}^2$
을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① $\frac{2}{3}$
② $\frac{3}{4}$
③ $\frac{2}{5}$
④ $\frac{5}{6}$

정답 2번

출제 포인트

적분으로 정의된 등식을 미분한 뒤 다항식의 곱이 항등적으로 0이라는 성질을 이용하여 $f(x)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$에 대하여 모든 실수 x에서 $\int_1^x tf(t)dt = \{f(x)\}^2$이다.
구해야 할 값: $f(2)$이다.
주의할 조건: 등식이 모든 실수에서 성립하므로 양변을 미분해 얻은 식도 항등식이다.

사용할 공식

미적분학의 기본정리에 따라 $\frac{d}{dx}\int_1^x tf(t)dt = xf(x)$이고, 연쇄법칙에 따라 $\frac{d}{dx}\{f(x)\}^2 = 2f(x)f'(x)$이다. 적분의 위끝이 x이고 우변이 함수의 제곱이므로 이 두 미분 공식을 사용한다.

계산 과정

1. $x = 1$을 원래 식에 대입하면 $0 = \{f(1)\}^2$이므로 $f(1) = 0$이다.
2. 원래 식의 양변을 미분하면 $xf(x) = 2f(x)f'(x)$이고, 이를 정리하면 $f(x)\{2f'(x) - x\} = 0$이다.
3. $f(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이므로 영다항식이 아니다. 두 다항식의 곱이 영다항식이면 적어도 하나가 영다항식이므로 $2f'(x) - x = 0$, 즉 $f'(x) = \frac{x}{2}$이다.
4. 따라서 $f(x) = \frac{x^2}{4} + C$이다. $f(1) = 0$을 대입하면 C=-14이므로 $f(x) = \frac{x^2-1}{4}$이다.
5. 그러므로 f(2)=(4-1)/(4)=34이다.

NoteBase

선지 판단

① X — f(2)=23이라는 값은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 23 대신 올바르게는 f(2)=34이다.
② O — 계산 결과 f(2)=34와 일치한다.
③ X — f(2)=25이라는 값은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 25 대신 올바르게는 f(2)=34이다.
④ X — f(2)=56이라는 값은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 56 대신 올바르게는 f(2)=34이다.
계산 결과가 34이므로 정답은 2번이다.

오답 포인트

미분식 $f(x)\{2f'(x)-x\}=0$에서 곧바로 $f(x)$로 나누면 $f(1)=0$인 점에서 나눗셈이 정당화되지 않는다. 두 인수가 다항식이고 그 곱이 모든 실수에서 0이라는 항등식의 성질을 이용해야 한다. 또한 $f'(x)=\frac{x}{2}$를 적분한 뒤 원래 식의 $x=1$ 조건으로 적분상수를 결정해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

적분 등식이 모든 x에서 성립하면 먼저 적분 구간의 양 끝이 같은 값을 대입해 함수값을 얻고, 다음으로 양변을 미분해 다항식 항등식으로 정리한 뒤 초기값으로 적분상수를 결정한다.

암기 포인트

적분의 위끝이 x이면 미분 결과는 피적분함수의 x 대입값이고, 다항식의 곱이 영다항식이면 한 인수는 영다항식이다.

NoteBase

문 18. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t) = t^2 + t + a$이다. 시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P의 위치의 변화량이 $\frac{15}{2}$일 때, 시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{45}{6}$
② $\frac{59}{6}$
③ $\frac{73}{7}$
④ $\frac{87}{8}$

정답 2번

출제 포인트

속도를 적분하여 위치의 변화량으로부터 상수 a를 구하고, 속도의 부호가 바뀌는 시각을 기준으로 $|v(t)|$를 적분하여 움직인 거리를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 속도는 $v(t) = t^2 + t + a$이고, $0 \le t \le 3$에서 위치의 변화량은 $\frac{15}{2}$이다. 구해야 하는 것은 위치의 변화량이 아니라 움직인 거리이므로 속도의 부호 변화를 반영해야 한다.

사용할 공식

위치의 변화량은 $\int_0^3 v(t)dt$이고, 움직인 거리는 $\int_0^3 |v(t)|dt$이다. 속도가 음수인 구간에서는 이동 방향이 반대이므로 거리에는 속도의 절댓값을 적분해야 한다.

계산 과정

먼저 위치의 변화량 조건을 이용하면
$\int_0^3 (t^2 + t + a)dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + at\right]_0^3 = \frac{27}{2} + 3a = \frac{15}{2}$
이므로 $a = -2$이다. 따라서
$v(t) = t^2 + t - 2 = (t + 2)(t - 1)$
이고, 구간 $[0, 3]$에서 속도는 $t = 1$에서 부호가 바뀐다. 원시함수를 $F(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t$라 하면 $F(1) = -\frac{7}{6}$, $F(3) = \frac{15}{2}$이다. 그러므로 움직인 거리는
$-\int_0^1 v(t)dt + \int_1^3 v(t)dt = \frac{7}{6} + \left(\frac{15}{2} + \frac{7}{6}\right) = \frac{59}{6}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{45}{6} = \frac{15}{2}$는 위치의 변화량일 뿐이다. $0 \le t < 1$에서 속도가 음수인 사실을 반영한 움직인 거리는 $\frac{59}{6}$이다. 틀린 값 $\frac{45}{6}$은 $\frac{59}{6}$으로 고쳐야 한다.

② O — 속도의 부호가 바뀌는 $t = 1$에서 적분 구간을 나누어 $|v(t)|$를 적분하면 $\frac{59}{6}$이 된다.

③ X — $t = 1$을 기준으로 계산한 두 구간의 거리는 각각 $\frac{7}{6}$, $\frac{26}{3}$이므로 합은 $\frac{59}{6}$이지 $\frac{73}{7}$이 아니다. 틀린 값 $\frac{73}{7}$은 $\frac{59}{6}$으로 고쳐야 한다.

④ X — 같은 두 구간의 거리 합은 $\frac{59}{6}$이므로 $\frac{87}{8}$은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{87}{8}$은 $\frac{59}{6}$으로 고쳐야 한다.

오답 포인트

①의 $\frac{45}{6}$은 주어진 위치의 변화량을 그대로 거리로 착각하면 선택하게 되는 값이다. 속도가 $t = 1$에서 음수에서 양수로 바뀌므로 전체 속도 적분값과 전체 이동 거리는 서로 다르다.

다시 나오면 이렇게 판단

위치의 변화량 조건으로 속도식의 미지수를 먼저 정한 뒤, $v(t) = 0$인 시각으로 구간을 나누고 각 구간의 적분값을 절댓값으로 더한다.

암기 포인트

변화량은 $\int v(t)dt$, 거리는 $\int |v(t)|dt$이다.

NoteBase

문 19. 6개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 배열할 때, a, f가 양 끝에 오는 경우의 수는?

① 38

② 42

③ 48

④ 52

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 서로 다른 두 문자를 양 끝에 배치하는 경우와 나머지 문자를 가운데에 배열하는 경우를 곱하여 전체 경우의 수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 서로 다른 6개의 문자 a, b, c, d, e, f이다.
구해야 할 값: a와 f가 양 끝 두 자리를 차지하는 배열의 수이다.
주의할 조건: a가 왼쪽 끝에 오는 경우뿐 아니라 f가 왼쪽 끝에 오는 경우도 포함한다.

사용할 공식

곱의 법칙에 따라 전체 경우의 수는 $2! \times 4!$이다.
양 끝에 a, f를 놓는 방법이 2!가지이고, 남은 네 문자 b, c, d, e를 가운데 네 자리에 배열하는 방법이 4!가지이므로 두 경우의 수를 곱한다.

계산 과정

1. 양 끝에 a, f를 배치하는 순서는 $2! = 2$가지이다.
2. 가운데 네 자리에 b, c, d, e를 배열하는 순서는 $4! = 24$가지이다.
3. 따라서 전체 경우의 수는 $2! \times 4! = 2 \times 24 = 48$이다.

선지 판단

① X — 38은 $2! \times 4! = 48$과 다르다. ①의 '38'은 '48'로 고쳐야 한다.
② X — 42는 양 끝의 순서 2가지와 가운데 배열 24가지를 곱한 값이 아니다. ②의 '42'는 '48'로 고쳐야 한다.
③ O — 48은 a, f의 양 끝 배치 2가지와 나머지 네 문자의 배열 24가지를 곱한 값이다.
④ X — 52는 2×24와 다르다. ④의 '52'는 '48'로 고쳐야 한다.

NoteBase

오답 포인트

‘a, f가 양 끝에 온다’를 a는 왼쪽 끝, f는 오른쪽 끝으로만 고정하면 양 끝의 순서를 바꾸는 경우를 빠뜨린다. 양 끝에서는 a, f와 f, a의 두 순서가 모두 가능하다.

다시 나오면 이렇게 판단

특정 두 대상이 양 끝에 오는 배열은 먼저 두 대상의 양 끝 순서 2!를 구하고, 이어서 나머지 대상의 가운데 배열 수를 구한 뒤 두 값을 곱한다.

암기 포인트

서로 다른 n개 중 정해진 두 대상이 양 끝에 오는 경우의 수는 $2! \times (n-2)!$이다.

NoteBase

문 20. 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다.
$P(X \geq 3) = 0.72, P(X \geq 9) = 0.28$
일 때, $P(|X - m| \leq 3)$의 값은?

① 0.33

② 0.36

③ 0.4

④ 0.44

정답 4번

출제 포인트

정규분포의 평균을 중심으로 한 대칭성을 이용해 평균과 대칭구간의 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 확률은 $P(X \geq 3) = 0.72$, $P(X \geq 9) = 0.28$이다. 따라서 $P(X < 3) = 1 - 0.72 = 0.28$이고, 구해야 할 값은 평균에서 좌우로 3 이내에 있을 확률 $P(|X - m| \leq 3)$이다.

사용할 원리

정규분포는 평균 m을 중심으로 대칭이다. $P(X < 3) = P(X \geq 9) = 0.28$이므로 3과 9는 평균에서 같은 거리에 있는 대칭점이다. 따라서 $m = (3 + 9)/2 = 6$이다.

계산 과정

평균이 $m = 6$이므로 $|X - m| \leq 3$은 $3 \leq X \leq 9$와 같다. 연속확률변수에서는 한 점의 확률이 0이므로 끝점의 포함 여부는 결과에 영향을 주지 않는다. 따라서
$P(|X - m| \leq 3) = P(3 \leq X \leq 9) = P(X \geq 3) - P(X \geq 9) = 0.72 - 0.28 = 0.44$.

선지 판단

① X — 0.33은 대칭구간의 확률이 아니다. 올바른 값은 0.72에서 0.28을 뺀 0.44이다.
② X — 0.36은 주어진 두 꼬리확률로부터 얻는 중앙구간의 확률이 아니다. 올바른 값은 0.44이다.
③ X — 0.4는 계산 결과 0.44와 일치하지 않는다. 올바른 값은 0.44이다.
④ O — $P(3 \leq X \leq 9) = 0.72 - 0.28 = 0.44$이므로 옳다.

오답 포인트

두 확률 0.72와 0.28을 각각 별개의 중앙확률로 보거나, 평균을 구하지 않고 임의로 연산하면 오답이 된다. 먼저 $P(X < 3) = 0.28$로 바꾸어 3과 9가 평균 6을 기준으로 대칭임을 확인해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

정규분포에서 서로 같은 양의 양끝 확률이 주어지면 두 경계값의 중점을 평균으로 정한다. 그다음 구간확률은 큰 누적 영역에서 작은 꼬리 영역을 빼서 계산한다.

암기 포인트

정규분포의 같은 꼬리확률은 평균을 기준으로 대칭이며, 대칭점의 중점이 평균이다.

NoteBase