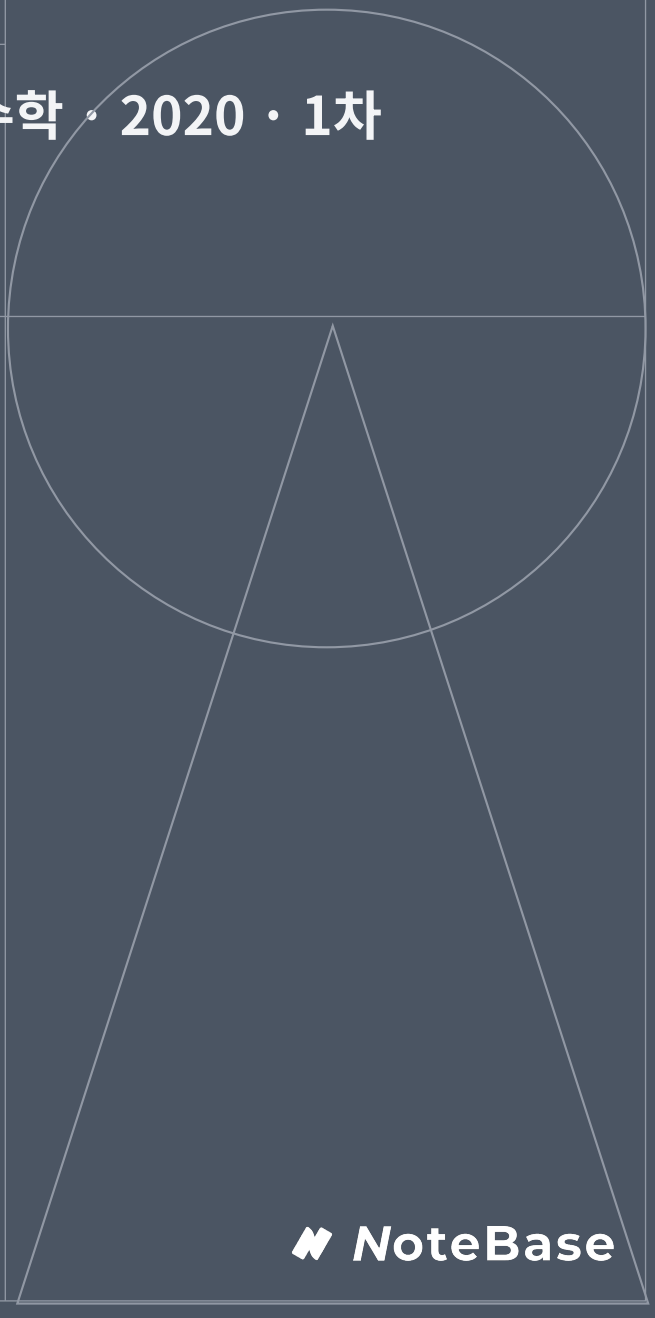
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2020 · 1차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2020 · 1차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2020 · 1차

문 1. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때 나머지는 3이고, $x-2$로 나누었을 때 나머지가 6이다. $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

정답 4번

출제 포인트

다항식의 나눗셈 관계와 나머지정리를 함께 이용하여 몫을 다시 나눈 나머지를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $f(1)=3$, $f(2)=6$이다.
구해야 할 값: $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 $q(x)$라 할 때, $q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지이다.
주의할 조건: 일차식 $x-a$로 나눈 나머지는 해당 다항식에 a를 대입한 값이다.

사용할 공식

다항식의 나눗셈 관계는 $f(x)=(x-1)q(x)+3$이다. 또한 나머지정리에 따라 $q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $q(2)$이다. 첫 번째 나눗셈의 몫과 나머지를 연결한 뒤 $x=2$를 대입하면 필요한 값을 바로 구할 수 있으므로 이 관계를 사용한다.

계산 과정

1. $f(x)=(x-1)q(x)+3$으로 둔다.
2. $x=2$를 대입하면 $f(2)=q(2)+3$이다.
3. $f(2)=6$이므로 $6=q(2)+3$, 따라서 $q(2)=3$이다.
4. $q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $q(2)=3$이다.

NoteBase

선지 판단

① X

선지의 -3은 $q(2) = 6 - 3 = 3$과 일치하지 않는다. $6 - 3$의 순서를 뒤집어 $3 - 6$으로 계산한 값이며, 올바른 값은 3이다.

② X

선지의 -1은 $6 = q(2) + 3$을 만족하지 않는다. 올바르게는 $q(2) = 3$이다.

③ X

선지의 1은 $6 = q(2) + 3$을 만족하지 않는다. 올바르게는 $q(2) = 3$이다.

④ O

계산 결과 $q(2) = 3$이므로 몫을 $x - 2$로 나눈 나머지와 일치한다.

오답 포인트

두 나눗셈의 나머지 3과 6을 그대로 비교하는 것이 아니라, 먼저 $f(x) = (x - 1)q(x) + 3$을 세운 뒤 $x = 2$를 대입해야 한다. 특히 $q(2) = 6 - 3$의 뺄셈 순서를 바꾸면 ①의 -3을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 원래 다항식을 '나누는 식 × 몫 + 나머지'로 나타낸다. 이어서 두 번째 나누는 식을 0으로 만드는 값을 대입하여 몫의 함숫값을 구하고, 그 값을 두 번째 나눗셈의 나머지로 판단한다.

암기 포인트

$f(x) = (x - a)q(x) + r$이면 $f(b) = (b - a)q(b) + r$이고, $q(x)$를 $x - b$로 나눈 나머지는 $q(b)$이다.

NoteBase

문 2. 이차방정식 $2x^2 - 2x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$의 값은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

정답 2번

출제 포인트

실수 계수 이차방정식의 허근이 서로 켤레복소수라는 사실과 근과 계수의 관계를 이용해 식의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

이차방정식은 $2x^2 - 2x + 1 = 0$이다. 판별식은 $(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$이므로 두 근은 서로 켤레인 허근이다. 따라서 근의 순서와 관계없이 $\overline{\alpha} = \beta$, $\overline{\beta} = \alpha$이다.

사용할 공식

근과 계수의 관계에 따라 $\alpha + \beta = 1$, αβ=12이다. 또한 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$이다. 주어진 식에서 켤레복소수를 각 반대쪽 근으로 바꿀 수 있으므로 이 공식을 사용할 수 있다.

계산 과정

$\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = \alpha^2 + \beta^2$=(α+β)^2-2αβ=1^2-2·12=0따라서 구하는 값은 0이다.

선지 판단

① X — 계산값은 -1이 아니라 0이다. -1 → 올바르게는 0이다.
② O — 계산 결과가 0이므로 맞는 선지이다.
③ X — 계산값은 1이 아니라 0이다. 1 → 올바르게는 0이다.
④ X — 계산값은 2가 아니라 0이다. 2 → 올바르게는 0이다.

오답 포인트

켤레 표시를 무시하고 주어진 식을 $2\alpha\beta$로 보면 1을 얻어 ③을 고르게 된다. 실제로는 $\overline{\beta} = \alpha$, $\overline{\alpha} = \beta$이므로 각 항이 α^2, β^2로 바뀐다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

실수 계수 이차방정식의 판별식이 음수이면 두 근을 켤레 관계로 바꾼 뒤, 근과 계수의 관계로 합과 곱을 구해 대칭식을 계산한다.

암기 포인트

실수 계수 방정식의 허근은 켤레끼리 짝을 이루며, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$이다.

NoteBase

문 3. $2x^2 + 3xy + y^2 + ax + y - 2$**가** x, y**에 대한 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수** a**의 값은? (단,** $a \neq 0$**이다.)**

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 이차항의 계수를 먼저 맞추어 두 일차식의 꼴을 정한 뒤, 일차항과 상수항의 계수를 비교하여 상수 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $2x^2 + 3xy + y^2 + ax + y - 2$이다.
이차항 부분은 $2x^2 + 3xy + y^2 = (2x + y)(x + y)$이므로 전체 인수는 $2x + y + m, x + y + n$의 꼴로 둘 수 있다.
상수항은 -2이고 y의 계수는 1이며, $a \neq 0$이다.

사용할 공식

$(2x + y + m)(x + y + n) = 2x^2 + 3xy + y^2 + (2n + m)x + (m + n)y + mn$
이 공식을 쓰는 이유는 두 일차식의 이차항 부분이 각각 $2x + y, x + y$이고, 나머지 상수 m, n이 일차항과 상수항의 계수를 결정하기 때문이다.

계산 과정

계수를 비교하면 $m + n = 1, mn = -2$이다.
합이 1이고 곱이 -2인 두 수는 2와 -1이므로 $(m, n) = (2, -1)$ 또는 $(-1, 2)$이다.
$(m, n) = (2, -1)$이면 $a = 2n + m = 0$이지만 조건 $a \neq 0$에 어긋난다.
따라서 $(m, n) = (-1, 2)$이고, $a = 2n + m = 4 - 1 = 3$이다. 실제로
$2x^2 + 3xy + y^2 + 3x + y - 2 = (2x + y - 1)(x + y + 2)$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a=1$은 계수 비교로 얻는 값이 아니다. 올바르게는 $a=3$이다.
② X — $a=2$는 $m+n=1, mn=-2$를 만족하는 인수의 상수항을 대입해도 나오지 않는다. 올바르게는 $a=3$이다.
③ O — $(2x+y-1)(x+y+2)$로 인수분해하면 x의 계수가 3이므로 $a=3$이다.
④ X — $a=4$는 x의 계수 $2n+m$을 잘못 계산한 값이다. 올바르게는 $a=3$이다.

오답 포인트

$(m, n)=(2, -1)$일 때 얻는 $a=0$도 계수만 보면 인수분해가 가능하지만, 문제의 $a \neq 0$ 조건 때문에 제외해야 한다. 또한 x의 계수는 $m+n$이 아니라 $2n+m$이고, $m+n$은 y의 계수이다.

다시 나오면 이렇게 판단

다항식의 이차항 부분을 먼저 인수분해하여 두 일차식의 기본 꼴을 정하고, 상수항의 합과 곱을 맞춘 뒤, 남은 일차항의 계수를 비교한다. 마지막에는 $a \neq 0$과 같은 추가 조건으로 후보를 걸러 낸다.

암기 포인트

이차항으로 인수의 뼈대를 정하고, 일차항은 합으로, 상수항은 곱으로 맞춘다.

NoteBase

문 4. 좌표평면 위의 한 점 $A(-1,\ -1)$과 직선 $x+y-2=0$ 위의 한 점 $P(a,\ b)$에 대하여 선분 PA를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있을 때, $a\times b$의 값은?

① $\frac{3}{4}$

② 1

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{3}{2}$

정답 1번

출제 포인트

내분점의 좌표와 직선의 방정식을 함께 이용하여 점 $P(a,\ b)$의 좌표를 구하는 문제이다.

조건 정리

점 $P(a,\ b)$는 직선 $x+y-2=0$ 위에 있으므로 $a+b=2$이다. 선분 PA를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라 하면 $PQ:QA=1:2$이고, Q는 y축 위에 있으므로 Q의 x좌표는 0이다.

사용할 공식

두 점 $P(a,\ b)$, $A(-1,\ -1)$을 잇는 선분을 $PQ:QA=1:2$로 내분하는 점은
$Q\left(\frac{2a-1}{3},\ \frac{2b-1}{3}\right)$
이다. 내분점의 각 좌표는 반대편 선분의 비를 가중치로 하여 구하므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

Q가 y축 위에 있으므로
$\frac{2a-1}{3}=0$
이고, 따라서 $a=\frac{1}{2}$이다. 또한 P가 $x+y-2=0$ 위에 있으므로
$a+b=2,\qquad b=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
이다. 그러므로
$a\times b=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$
이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 $\frac{3}{4}$이므로 맞는다.
② X — 1은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 1은 올바르게는 $\frac{3}{4}$이다.
③ X — $\frac{5}{4}$는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 $\frac{5}{4}$는 올바르게는 $\frac{3}{4}$이다.
④ X — $\frac{3}{2}$는 b의 값일 뿐 $a\times b$의 값이 아니다. 틀린 값 $\frac{3}{2}$는 올바르게는 $\frac{3}{4}$이다.

NoteBase

오답 포인트

선분 PA를 $1:2$로 내분한다는 것은 $PQ:QA=1:2$라는 뜻이다. 내분점 공식에서 계수의 순서를 뒤바꾸지 않아야 한다. 또한 $b=\frac{3}{2}$를 구한 뒤 멈추지 않고 문제에서 요구한 $a\times b$까지 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

내분비를 먼저 식으로 표시하고, 내분점이 좌표축 위에 있다는 조건으로 한 좌표를 구한 다음, 주어진 직선의 방정식에 대입하여 나머지 좌표를 구한다. 마지막에는 문제에서 요구한 값이 좌표 자체인지 좌표의 연산값인지 확인한다.

암기 포인트

내분점은 반대편 비를 곱해 좌표를 더하고 전체 비의 합으로 나눈다. y축 위의 점은 $x=0$이다.

NoteBase

문 5. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x$의 그래프와 직선 $y = x - m$은 점 A에서 접한다. 이 점 A와 직선 $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리를 d라 할 때, $m \times d$의 값은? (단, m은 상수이다.)

① $2\sqrt{2}$
② $2\sqrt{3}$
③ $3\sqrt{2}$
④ $3\sqrt{3}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 이차함수와 직선이 접할 때 교점 방정식의 판별식이 0이라는 사실로 m과 접점을 구한 뒤, 점과 직선 사이의 거리 공식을 적용하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $y = 2x^2 - 3x$와 $y = x - m$이 점 A에서 접한다.
구해야 할 값: 점 A와 직선 $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리 d를 이용한 md이다.
주의할 조건: 접한다는 것은 두 그래프의 교점 방정식이 중근을 갖는다는 뜻이다.

사용할 공식

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$이 중근을 가지는 조건은 $b^2 - 4ac = 0$이다. 두 그래프가 한 점에서 접하므로 교점 방정식에 이 조건을 사용한다.
점 (x_0, y_0)와 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$이다.

NoteBase

계산 과정

두 식을 같게 놓으면

$2x^2 - 3x = x - m$

이고, 정리하면

$2x^2 - 4x + m = 0$

이다. 접하므로 판별식이 0이다.

$(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot m = 0$

$16 - 8m = 0, \quad m = 2$

따라서 교점 방정식은 $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2 = 0$이므로 접점의 x좌표는 1이다. $y = x - m$에 대입하면 $y = 1 - 2 = -1$이므로 $A = (1, -1)$이다.

직선 $x - y - 4 = 0$까지의 거리는

d=(|1-(-1)-4|)/(√(1^2+(-1)^2))=(2)/(2)=2

이다. 그러므로

m d=2·2=22

이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 m d=22이므로 옳다.

② X — 23이 아니라 22이다. 거리 공식의 분모는 직선 $x - y - 4 = 0$의 두 계수 1과 -1로부터 √(1^2+(-1)^2)=2가 된다.

③ X — 32가 아니라 22이다. 접점 조건 $16 - 8m = 0$에서 $m = 2$이므로 계수를 3으로 둘 수 없다.

④ X — 33이 아니라 22이다. 접점 조건에서 $m = 2$이고, 거리 공식의 분모도 2이므로 두 값이 모두 맞지 않는다.

오답 포인트

접한다는 조건으로 m만 구하고 접점 A를 구하지 않으면 거리 공식을 적용할 수 없다. 또한 직선 $x - y - 4 = 0$에서 거리 공식의 분모는 상수항 4가 아니라 x와 y의 계수로 만든 √(1^2+(-1)^2)=2이다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수와 직선의 접점 문제는 두 식을 같게 놓고 판별식을 0으로 만들어 매개변수를 구한 다음, 중근에서 접점 좌표를 구하고 필요한 거리나 길이를 계산한다.

암기 포인트

접점은 판별식 0, 점과 직선의 거리는 직선식에 점을 대입한 절댓값을 두 변수의 계수 제곱합의 제곱근으로 나눈 값이다.

NoteBase

문 6. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + k^2 - k + b$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 항상 직선 $y = ax$에 접하도록 상수 a, b를 정할 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 이차함수의 그래프와 직선이 접할 때 교점 방정식의 판별식이 0이 된다는 성질을 이용하고, 그 조건이 모든 실수 k에서 성립하도록 항등식의 계수를 비교하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 이차함수 $y = x^2 + 2kx + k^2 - k + b$의 그래프가 k의 값과 관계없이 직선 $y = ax$에 항상 접한다.
구해야 할 값: $\frac{a}{b}$
주의할 조건: 특정한 k에서만 접하는 것이 아니라 모든 실수 k에서 접해야 한다.

사용할 공식

두 그래프의 교점에 관한 이차방정식이 중근을 가지면 판별식은 $D = 0$이다.

이 공식을 쓰는 이유: 두 그래프가 접한다는 것은 교점의 x좌표를 구하는 이차방정식이 하나의 실근을 중근으로 가진다는 뜻이기 때문이다. 또한 판별식이 모든 k에서 0이므로, k에 관한 항등식의 각 계수가 0이어야 한다.

NoteBase

계산 과정

두 식을 같게 두면

$x^2 + 2kx + k^2 - k + b = ax$

이므로 교점 방정식은

$x^2 + (2k - a)x + k^2 - k + b = 0$

이다. 접할 조건은 판별식이 0인 것이므로

alignedD&=(2k-a)^2-4(k^2-k+b)\\&=4(1-a)k+a^2-4b=0.aligned

이 식이 모든 실수 k에서 성립하려면 k의 계수와 상수항이 각각 0이어야 한다.

$4(1 - a) = 0, \qquad a^2 - 4b = 0$

따라서 $a = 1$, b=14이고,

$\frac{a}{b} = \frac{1}{1/4} = 4$

이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 1이 아니라 4이다. 틀린 값 1은 올바르게는 4로 고쳐야 한다.

② X — 계산 결과는 2가 아니라 4이다. 틀린 값 2는 올바르게는 4로 고쳐야 한다.

③ X — 계산 결과는 3이 아니라 4이다. 틀린 값 3은 올바르게는 4로 고쳐야 한다.

④ O — $a = 1$, b=14이므로 $\frac{a}{b} = 4$와 일치한다.

오답 포인트

판별식을 0으로 두는 데서 끝내면 k가 남는다. 이 문제의 핵심 표현은 '실수 k의 값에 관계없이 항상'이므로 $4(1 - a)k + a^2 - 4b$가 k에 관한 항등식임을 인식하고 k의 계수와 상수항을 각각 0으로 두어야 한다. 또한 마지막에는 b/a가 아니라 a/b를 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 그래프의 접점 문제에서는 먼저 두 식을 같게 두어 교점 방정식을 만든 뒤 판별식을 0으로 둔다. '모든 매개변수의 값에서' 성립한다는 조건이 있으면 판별식을 매개변수에 관한 항등식으로 보고 각 차수의 계수를 모두 0으로 둔다.

암기 포인트

접한다는 조건은 $D = 0$, 모든 매개변수에서 성립한다는 조건은 항등식의 계수 비교이다.

NoteBase

문 7. 원 $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$ 위를 움직이는 점 A와 원 $(x-2)^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이는 점 B에 대하여 선분 AB의 길이의 최댓값은?

① $4 + \sqrt{5}$
② $4 + \sqrt{10}$
③ $5 + \sqrt{5}$
④ $5 + \sqrt{10}$

정답 3번

출제 포인트

두 원 위의 두 점 사이 거리의 최댓값을 두 원의 중심거리와 반지름을 이용하여 구하는 문제이다.

조건 정리

첫째 원은 완전제곱식으로 고치면 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$이므로 중심은 $C_1 = (3, 2)$, 반지름은 $r_1 = 2$이다.
둘째 원 $(x-2)^2 + y^2 = 9$의 중심은 $C_2 = (2, 0)$, 반지름은 $r_2 = 3$이다.
구해야 할 값은 각 원 위에서 움직이는 점 A, B 사이 거리 AB의 최댓값이다.

사용할 공식

두 원의 중심을 각각 C_1, C_2, 반지름을 r_1, r_2라 하면
$AB_{\max} = C_1C_2 + r_1 + r_2$
이다. 삼각부등식에 따라 $AB \le AC_1 + C_1C_2 + C_2B$이고, 두 중심을 잇는 직선 위에서 A와 B를 서로 반대쪽 바깥 끝점으로 잡으면 등호가 성립하기 때문이다.

계산 과정

1. 첫째 원의 식을 정리한다.
$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$
$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$
2. 두 중심 사이의 거리를 구한다.
C_1C_2=√((3-2)^2+(2-0)^2)=5
3. 중심거리와 두 반지름을 더한다.
AB_=5+2+3=5+5

NoteBase

선지 판단

① X — 4+5는 반지름의 합을 4로 잘못 계산한 값이다. 올바르게는 2 + 3 = 5이므로 5+5이다.
② X — $4+\sqrt{10}$은 반지름의 합과 중심거리를 모두 잘못 계산한 값이다. 올바르게는 반지름의 합이 5이고 중심거리가 5이므로 5+5이다.
③ O — 계산 결과 AB_=5+5와 일치한다.
④ X — $5+\sqrt{10}$은 중심거리를 잘못 계산한 값이다. 올바른 중심거리는 √((3-2)^2+(2-0)^2)=5이므로 5+5이다.

오답 포인트

두 원의 반지름만 더하거나 중심거리만 구해서는 안 된다. 또한 중심거리에서 좌표 차는 $3-2=1, 2-0=2$이므로 제곱의 합은 5이며, 이를 10으로 잘못 계산하지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

각 원의 식을 표준형으로 바꾸어 중심과 반지름을 찾고, 두 원 위 점 사이의 최대 거리는 '중심거리 + 두 반지름'으로 계산한다.

암기 포인트

두 원 위 두 점 사이의 최대 거리 = 중심거리 + 반지름의 합이다.

NoteBase

문 8. 함수 $y=\sqrt{x-5}$의 그래프와 직선 $y=m(x-1)$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 m의 값의 범위가 $a<m<b$라 할 때, $2a+4b$의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

정답 3번

출제 포인트

제곱근함수와 직선의 교점 개수를 이차방정식의 서로 다른 양의 근 조건으로 바꾸어 매개변수의 범위를 구하는 문제이다.

조건 정리

교점에서는 $\sqrt{x-5}=m(x-1)$이고 $x\geq 5$이다. $t=\sqrt{x-5}$로 두면 $t\geq 0$, $x=t^2+5$이며, 서로 다른 교점은 서로 다른 t값에 대응한다.

사용할 공식

$t=m(t^2+4)$이므로 $mt^2-t+4m=0$이다. 이 이차방정식이 서로 다른 두 양의 근을 가져야 한다. 서로 다른 두 실근의 조건은 판별식이 양수인 것이고, 두 근의 부호는 근과 계수의 관계로 확인한다.

계산 과정

$m=0$이면 $t=0$ 하나만 얻으므로 $m\neq 0$이다. 판별식은
$D=(-1)^2-4\cdot m\cdot 4m=1-16m^2$
이므로 서로 다른 두 실근을 가지려면 |m|<14이다. 두 근의 곱은 4, 합은 1m이다. 두 근이 모두 양수이려면 합도 양수여야 하므로 $m>0$이다. 따라서
0<m<14
이고 $a=0$, b=14이다. 그러므로
2a+4b=2·0+4·14=1
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산값은 -1이 아니라 1이다. 두 교점이 생기려면 $m > 0$이고, $a = 0$, b=14를 대입하면 최종값은 1이다.
② X — 계산값은 0이 아니라 1이다. 하한 $a = 0$만 반영해서는 안 되고 $4b = 1$도 더해야 한다.
③ O — 2a+4b=2·0+4·14=1이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — 계산값은 2가 아니라 1이다. b=14이므로 $4b = 1$이며, $2a = 0$이다.

오답 포인트

판별식 조건 |m|<14만 구하고 음수인 m까지 포함하기 쉽다. 그러나 t≥0이고 두 근의 곱이 양수이므로 두 근이 모두 양수가 되려면 합 1m이 양수여야 한다. 또한 $m = 0$에서는 교점이 하나뿐이므로 범위의 끝점에 포함되지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

제곱근을 새 변수 t≥0로 치환한 뒤, 교점 개수를 방정식의 근 개수로 바꾼다. 판별식으로 서로 다른 두 실근을 확인하고, 새 변수의 정의역에 맞게 근의 부호와 경계값을 추가로 검사한다.

암기 포인트

제곱근 치환에서는 판별식만 보지 않고 t≥0 조건까지 확인한다. 이 문제의 범위는 0<m<14이다.

NoteBase

문 9. 이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)\left(k-\frac{1}{\beta}\right)$의 값은?

① 250

② 265

③ 280

④ 295

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 이차방정식의 근과 계수의 관계로 두 근의 역수의 합과 곱을 구한 뒤, 합의 공식을 적용하는 문제이다.

조건 정리

주어진 방정식은 $x^2+2x-1=0$이고 두 근은 α, β이다.
구해야 할 값은 $\sum_{k=1}^{10}\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)\left(k-\frac{1}{\beta}\right)$이다.
각 항을 전개할 때 역수의 합과 역수의 곱의 부호를 정확히 처리해야 한다.

사용할 공식

근과 계수의 관계에 따라
$\alpha+\beta=-2, \qquad \alpha\beta=-1$
이다. 따라서
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2, \qquad \frac{1}{\alpha\beta}=-1$
이다. 두 근을 직접 구할 필요 없이 식에 필요한 대칭식만 계산할 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

각 항을 전개하면
$\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)\left(k-\frac{1}{\beta}\right)=k^2-k\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\alpha\beta}=k^2-2k-1$
이다. 그러므로
$\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-1)=\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k-10$
$=385-2\cdot 55-10=265$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산값은 250이 아니라 265이므로 틀리다. 올바른 값은 265이다.
② O — 계산 결과가 265이므로 맞다.
③ X — 계산값은 280이 아니라 265이므로 틀리다. 올바른 값은 265이다.
④ X — 계산값은 295가 아니라 265이므로 틀리다. 올바른 값은 265이다.

오답 포인트

$\alpha\beta = -1$이므로 $1/(\alpha\beta) = -1$이다. 이를 1로 잘못 처리하거나, 상수항 -1이 10개 합해져 -10이 된다는 점을 빠뜨리면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 근이 들어간 대칭식은 먼저 근과 계수의 관계로 $\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$를 구하고, 필요한 역수의 합과 곱으로 바꾼 뒤 합의 공식을 적용한다.

암기 포인트

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}$이다.

NoteBase

문 10. 첫째항이 69이고, 첫째항부터 제9항까지의 합과 첫째항부터 제15항까지의 합이 같은 등차수열 $\{a_n\}$에서 이 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n이 최대가 되는 n의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

정답 2번

출제 포인트

등차수열의 부분합 조건으로 공차를 구한 뒤, 부분합을 이차식으로 나타내어 최댓값을 갖는 항의 번호를 찾는 문제이다.

조건 정리

첫째항은 $a_1 = 69$이고 $S_9 = S_{15}$이다. 따라서 제10항부터 제15항까지의 합이 0이다. 구해야 할 값은 S_n이 최대가 되는 자연수 n이다.

사용할 공식

등차수열의 제n항과 첫째항부터 제n항까지의 합은 각각
$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$
이다. 또한 연속한 등차수열 여섯 항의 합은 항의 개수와 양 끝항의 평균을 이용해 구할 수 있다. $S_9 = S_{15}$는 $a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{15} = 0$을 뜻하므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

공차를 d라 하면
$a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{15} = \frac{6}{2}(a_{10} + a_{15}) = 3\{(69 + 9d) + (69 + 14d)\} = 0$
이다. 따라서 $138 + 23d = 0$이므로 $d = -6$이다. 그러므로
$S_n = \frac{n}{2}\{138 - 6(n-1)\} = 3n(24 - n) = -3(n-12)^2 + 432$
이다. 이 식은 아래로 열린 이차식이고 꼭짓점이 $n = 12$일 때이므로 S_n의 최댓값은 $S_{12} = 432$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $S_{11} = 3 \cdot 11 \cdot 13 = 429$이고 다음 항 $a_{12} = 3$이 양수이므로 $S_{12} > S_{11}$이다. 틀린 값 11 → 올바르게는 12이다.
② O — $S_{12} = 432$이고 $S_n = -3(n-12)^2 + 432$이므로 $n = 12$에서 최대가 된다.
③ X — $S_{13} = 3 \cdot 13 \cdot 11 = 429$이며, $a_{13} = -3$이므로 $S_{13} = S_{12} - 3 < S_{12}$이다. 틀린 값 13 → 올바르게는 12이다.
④ X — $S_{14} = 3 \cdot 14 \cdot 10 = 420$으로 $S_{12} = 432$보다 작다. 틀린 값 14 → 올바르게는 12이다.

오답 포인트

$S_9 = S_{15}$를 곧바로 $a_9 = a_{15}$로 해석하면 안 된다. 두 부분합의 차인 제10항부터 제15항까지의 합이 0이라는 뜻이다. 또한 $a_{12} = 3$, $a_{13} = -3$이므로 부분합은 제12항까지 증가한 뒤 제13항부터 감소한다.

다시 나오면 이렇게 판단

부분합이 같다는 조건은 두 부분합을 빼서 그 사이 항들의 합으로 바꾼다. 공차를 구한 뒤에는 S_n을 아래로 열린 이차식으로 완전제곱하거나, $S_n - S_{n-1} = a_n$의 부호가 양수에서 음수로 바뀌는 지점을 확인한다.

암기 포인트

부분합은 $a_n > 0$인 동안 증가하고 $a_n < 0$이 되면 감소한다. 이 문제에서는 $a_{12} = 3$, $a_{13} = -3$이므로 최대 부분합은 S_{12}이다.

NoteBase

문 11. 함수 f(x)=cases(a√(x+1)+b)/(x-1)&(x≠ 1)\\1&(x=1)cases이 $x = 1$에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a^2 + b^2$의 값은?

① 12

② 16

③ 20

④ 24

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 조각함수가 $x = 1$에서 연속이 되기 위한 조건을 이용해 a와 b를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $f(1) = 1$이다.

구해야 할 값: $a^2 + b^2$이다.

주의할 조건: 연속이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=1$이어야 하며, 분모 $x - 1$이 0으로 갈 때 분자도 0으로 가야 한다.

사용할 공식

연속 조건은

$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x-1}=1$

이다. 유한한 극한값을 가지려면 먼저 a2+b=0이어야 한다. 그다음 분자를 유리화하면 극한값을 계산할 수 있다.

계산 과정

1. 분모가 0으로 가므로 분자도 0이어야 한다. 따라서

a2+b=0

이고, b=-a2이다.

2. 이를 분자에 대입하면

a√(x+1)+b=a(√(x+1)-2)

이다.

3. 유리화하여 극한을 구하면

_x→1(a(√(x+1)-2))/(x-1)=_x→1(a)/(√(x+1)+2)=(a)/(22)

이다. 연속 조건에 따라 이 값이 1이므로 a=22이고 $b=-4$이다.

4. 따라서

a^2+b^2=(22)^2+(-4)^2=8+16=24

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 12는 계산 결과 24와 다르다. 틀린 값이며, 올바른 값은 24이다.
② X — 16은 b^2만 계산한 값으로 a^2을 빠뜨린 결과이다. 올바르게는 $8+16=24$이다.
③ X — 20은 계산 결과 24와 다르다. 틀린 값이며, 올바른 값은 24이다.
④ O — a=22, $b=-4$이므로 $a^2+b^2=24$이다.

오답 포인트

분모가 0으로 간다는 이유만으로 극한이 존재하지 않는다고 판단하거나, a2+b=0만 구하고 연속 조건인 극한값 1을 적용하지 않으면 안 된다. 또한 ②의 16처럼 b^2만 계산하고 a^2을 빠뜨리기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0으로 가는 분수형 함수의 연속 문제에서는 먼저 분자도 0이 되는 조건을 세우고, 약분 또는 유리화한 뒤 극한값을 함수값과 같게 둔다.

암기 포인트

연속의 핵심은 좌극한과 우극한을 포함한 극한값이 함수값과 같다는 것, 즉 $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$이다.

NoteBase

문 12. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2+2 \le f(x) \le x^3+3x+2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+4}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 $t=1/x$로 치환한 뒤 샌드위치 정리를 적용하여 함수의 극한과 전체 분수의 극한을 구하는 문제이다.

조건 정리

$x\to\infty$이면 $t=1/x\to 0^+$이다. 주어진 부등식에 $t=1/x$를 대입하면 $t^2+2 \le f(t) \le t^3+3t+2$가 된다.

사용할 원리

샌드위치 정리에 따라 어떤 함수의 아랫값과 윗값이 같은 값으로 수렴하면 가운데 함수도 그 값으로 수렴한다. 여기서는 t^2+2와 t^3+3t+2가 모두 2로 수렴하므로 이 원리를 사용할 수 있다.

계산 과정

$t=1/x$라 두면

$t^2+2 \le f(t) \le t^3+3t+2.$

$t\to 0^+$일 때 양쪽 식이 모두 2로 수렴하므로

$\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x})=2.$

또한

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+4\right)=4.$

따라서 구하는 극한은

$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

선지 판단

① X — $\frac{1}{4}$은 분자의 극한을 1로 잘못 본 값이다. 분자의 극한은 2이므로 올바른 값은 $\frac{1}{2}$이다.

② O — 분자의 극한이 2이고 분모의 극한이 4이므로 전체 극한은 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이다.

③ X — 1은 분자와 분모의 극한이 같을 때 나오는 값이지만, 실제 극한은 각각 2와 4이다. 올바른 값은 $\frac{1}{2}$이다.

④ X — 2는 분자의 극한만 구하고 분모 4로 나누지 않은 값이다. 전체 분수의 올바른 극한은 $\frac{1}{2}$이다.

NoteBase

오답 포인트

f의 식이 직접 주어지지 않았다고 해서 극한을 구할 수 없는 것은 아니다. 두 경계식이 모두 2로 수렴하므로 샌드위치 정리로 $f(1/x)$의 극한이 2임을 확정해야 한다. 또한 마지막에는 분자의 극한 2를 분모의 극한 4로 나누어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

합성함수의 입력값이 어디로 가는지 먼저 확인하고, 주어진 부등식의 양쪽 극한이 같으면 샌드위치 정리를 적용한다. 그다음 분모의 극한이 0이 아님을 확인하여 분수의 극한을 계산한다.

암기 포인트

양쪽 경계가 같은 값으로 수렴하면 가운데 함수도 그 값으로 수렴한다. 이 문제에서는 $f(1/x) \to 2$, 분모는 4로 수렴하므로 답은 1/2이다.

NoteBase

문 13. $a = 1 + \log_{\sqrt{2}} 3,\ b = \log_9 4 - 1$**일 때,** $2^a \times 3^b$**의 값은?**

① 4

② 8

③ 12

④ 16

정답 3번

출제 포인트

로그의 밑을 지수식의 밑과 맞도록 변환한 뒤, a와 b를 각각 지수에 대입하여 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $a = 1 + \log_{\sqrt{2}} 3, b = \log_9 4 - 1$
구해야 할 값: $2^a \times 3^b$
주의할 조건: $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, $9 = 3^2$를 이용해 로그의 밑을 2와 3으로 바꾼다.

사용할 공식

밑변환 공식은 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$이고, 지수와 로그의 관계는 $c^{\log_c x} = x$이다. 주어진 로그의 밑이 $\sqrt{2}$와 9이므로 각각 2와 3을 밑으로 바꾸면 지수 계산에 바로 적용할 수 있다.

계산 과정

먼저 $\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{2}} = 2\log_2 3$이므로

$2^a = 2^{1 + 2\log_2 3} = 2(2^{\log_2 3})^2 = 2 \cdot 3^2 = 18.$

또한 $\log_9 4 = \frac{\log_3 4}{\log_3 9} = \frac{2\log_3 2}{2} = \log_3 2$이므로

$3^b = 3^{\log_3 2 - 1} = \frac{3^{\log_3 2}}{3} = \frac{2}{3}.$

따라서

$2^a \times 3^b = 18 \times \frac{2}{3} = 12.$

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 12이므로 4는 일치하지 않는다. 틀린 값 4는 올바르게는 12이다.
② X — 계산 결과는 12이므로 8은 일치하지 않는다. 틀린 값 8은 올바르게는 12이다.
③ O — $2^a = 18$, $3^b = \frac{2}{3}$이므로 곱은 12이다.
④ X — 계산 결과는 12이므로 16은 일치하지 않는다. 틀린 값 16은 올바르게는 12이다.

오답 포인트

$\log_{\sqrt{2}} 3$에서 밑 $\sqrt{2} = 2^{1/2}$를 반영하면 $2\log_2 3$이 된다. 또한 $b = \log_9 4 - 1$의 -1은 3^b를 계산할 때 3으로 나누는 효과를 내므로 빠뜨리지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

지수식과 로그식의 밑이 거듭제곱 관계이면 밑변환으로 같은 밑을 만든 뒤, $c^{\log_c x} = x$를 적용하고 마지막에 상수 지수를 처리한다.

암기 포인트

밑이 제곱근이면 로그값은 2배가 되고, 밑이 제곱이면 로그값은 절반이 된다.

NoteBase

문 14. 함수 $f(x)=x^3+3ax^2+(3a^2-9)x$가 $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\}>0$을 만족시키도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① 1
② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$
④ 2

정답 3번

출제 포인트

주어진 부등식을 함수의 단조성으로 바꾸고, 도함수가 양의 구간에서 감소하지 않도록 하는 매개변수 a의 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

$0<x_1<x_2$이므로 $x_1-x_2<0$이다. 따라서 주어진 곱이 양수가 되려면 $f(x_1)-f(x_2)<0$, 즉 $f(x_1)<f(x_2)$이어야 한다. 그러므로 f는 $x>0$에서 엄격히 증가해야 한다.

사용할 공식

도함수는
$f'(x)=3x^2+6ax+3a^2-9=3\{(x+a)^2-3\}$
이다. 미분 가능한 함수가 구간에서 증가하려면 도함수가 음수가 되는 부분이 없어야 하므로, $x>0$에서 $f'(x)\geq 0$이 되도록 a를 정한다.

계산 과정

1. $a<0$이면 $x=-a>0$에서 $f'(-a)=-9<0$이므로 조건을 만족하지 못한다.
2. $a\geq 0$이면 $x>0$에서 $x+a>a$이므로 $f'(x)\geq 0$이 되기 위한 경계는 $a^2=3$이다. 따라서 $a\geq\sqrt{3}$이어야 한다.
3. $a=\sqrt{3}$일 때 $f'(x)=3x(x+2\sqrt{3})>0$이므로 모든 $x>0$에서 실제로 엄격히 증가한다. 따라서 a의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a=1$이면 $f'(0)=3(1-3)=-6$이고 연속성에 의해 0에 가까운 양의 x에서도 도함수가 음수이다. 올바르게는 최솟값이 1이 아니라 $\sqrt{3}$이다.
② X — $a=\sqrt{2}$이면 $f'(0)=3(2-3)=-3$이므로 0의 오른쪽 일부 구간에서 함수가 감소한다. 올바르게는 $a\geq\sqrt{3}$이어야 한다.
③ O — $a=\sqrt{3}$이면 $f'(x)=3x(x+2\sqrt{3})>0$이므로 조건을 만족하며, 가능한 a 중 가장 작다.
④ X — $a=2$도 조건은 만족하지만 가능한 값의 최솟값은 아니다. 올바르게는 최솟값이 2가 아니라 $\sqrt{3}$이다.

오답 포인트

부등식에서 $x_1-x_2<0$인 점을 놓치면 증가와 감소를 반대로 판단하기 쉽다. 또한 ④의 2는 조건을 만족하는 값이지만, 문제는 가능한 값이 아니라 최솟값을 묻는다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 점의 함수값 차가 포함된 부등식은 먼저 $(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))$의 부호로 증가·감소를 판정하고, 그다음 도함수의 최솟값이 0 이상이 되는 매개변수의 경계를 찾는다. 경계값에서는 원래의 엄격부등식이 실제로 성립하는지도 확인한다.

암기 포인트

두 차의 곱이 양수이면 두 차의 부호가 같고, $x_1<x_2$일 때 이는 $f(x_1)<f(x_2)$를 뜻한다.

NoteBase

문 15. 함수 $f(x) = -x^3 + 2x + 3$에 대하여 직선 $y = -x + k$와 곡선 $y = f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 양수 k의 합은?

① 6

② 12

③ 18

④ 36

정답 1번

출제 포인트

직선과 삼차함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다는 조건을 교점 방정식이 한 중근과 한 단순근을 갖는 조건으로 바꾸어 k를 구하는 문제이다.

조건 정리

교점의 x좌표는 $-x + k = -x^3 + 2x + 3$을 만족하므로

$P(x) = x^3 - 3x + k - 3 = 0$

의 근이다. 삼차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 한 근이 중근이어야 한다. 따라서 $P(x)$와 도함수 $P'(x)$가 공통근을 가져야 한다.

사용할 공식

다항식 $P(x)$가 a를 중근으로 가지면

$P(a) = 0, \quad P'(a) = 0$

이다. 이 조건은 중근에서 함수값과 기울기가 모두 0이 되기 때문에 사용한다.

NoteBase

계산 과정

$P'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$이므로 중근 후보는 $x = 1$ 또는 $x = -1$이다.

$x = 1$일 때
$P(1) = 1 - 3 + k - 3 = k - 5 = 0$
이므로 $k = 5$이다.

$x = -1$일 때
$P(-1) = -1 + 3 + k - 3 = k - 1 = 0$
이므로 $k = 1$이다.

두 값은 모두 양수이며, 각각 중근이 정확히 2차이므로 교점은 서로 다른 두 점이다. 따라서 모든 양수 k의 합은 $1 + 5 = 6$이다.

선지 판단

① O
- 계산 결과 모든 양수 k는 1과 5이고 그 합이 6이므로 맞다.

② X
- 선지의 '12'가 틀리다. 중근 조건에서 얻은 $k = 1, 5$의 합은 12가 아니라 6이다.

③ X
- 선지의 '18'이 틀리다. 가능한 양수 k는 두 값뿐이므로 올바른 합은 6이다.

④ X
- 선지의 '36'이 틀리다. $k = 1, 5$를 더해야 하며, 올바른 값은 6이다.

오답 포인트

'서로 다른 두 점에서 만난다'를 교점 방정식이 단순히 두 근을 갖는다고만 처리하면 조건을 세우기 어렵다. 삼차방정식에서는 서로 다른 근이 두 개라는 말이 한 근은 중근이라는 뜻이므로 $P(x) = 0$과 $P'(x) = 0$을 함께 적용해야 한다. 또한 구한 $k = 1, 5$ 가운데 하나만 고르는 것이 아니라 모든 양수 k의 합을 구해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수와 직선의 교점 개수가 삼차 교점 방정식의 서로 다른 근 개수로 바뀌는지 먼저 확인한다. 서로 다른 두 근이면 중근 조건 $P(x) = P'(x) = 0$으로 매개변수 후보를 구한 뒤, 각 후보가 실제로 한 중근과 한 단순근을 만드는지 확인한다.

NoteBase

암기 포인트

삼차방정식의 서로 다른 두 근은 '중근 하나와 단순근 하나'이며, 중근은 $P = P' = 0$으로 찾는다.

NoteBase

문 16. 두 상수 a, b에 대하여 함수 f(x)=cases2bx+2&(x<0)\|x-1|&(x≥ 0)cases이 실수 전체의 집합에서 연속이고 $\int_{-2}^{2} f(x)dx = -2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 조각함수의 연속 조건으로 한 상수를 구한 뒤, 정적분 조건으로 나머지 상수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $f(x) = 2bx + 2\ (x < 0)$, $f(x) = a|x-1|\ (x \geq 0)$이다.
구해야 할 값: $a + b$이다.
주의할 조건: 함수가 실수 전체에서 연속이므로 경계점 $x = 0$에서 좌극한과 함수값이 같아야 하며, 절댓값 함수는 $x = 1$을 기준으로 나누어 적분한다.

사용할 공식

연속 조건은 $\lim_{x \to 0-} f(x) = f(0)$이다. 따라서 $2 = a|-1| = a$이므로 $a = 2$이다.
정적분은 구간별 식을 적용하여 $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} (2bx+2)dx + \int_{0}^{2} 2|x-1|dx$로 계산한다. 조각함수의 식이 구간에 따라 달라지고, $|x-1|$의 부호가 $x = 1$에서 바뀌기 때문에 이와 같이 구간을 나눈다.

계산 과정

1. 연속 조건에서 $a = 2$를 얻는다.
2. 왼쪽 구간의 적분은 $\int_{-2}^{0} (2bx+2)dx = [bx^2 + 2x]_{-2}^{0} = 4 - 4b$이다.
3. 오른쪽 구간의 적분은 $\int_{0}^{2} 2|x-1|dx = 2\left(\int_{0}^{1} (1-x)dx + \int_{1}^{2} (x-1)dx\right) = 2$이다.
4. 전체 적분 조건에 대입하면 $(4-4b) + 2 = -2$이므로 $b = 2$이다. 따라서 $a + b = 2 + 2 = 4$이다.

선지 판단

① X — 계산 결과 $a + b = 4$이므로 1은 틀리며, 올바른 값은 4이다.
② X — 연속 조건에서 얻은 $a = 2$만을 답으로 택한 값이다. 문제는 $a + b$를 묻고 있으므로 2가 아니라 4이다.
③ X — 정적분 조건까지 적용하면 $b = 2$이므로 $a + b = 3$이 될 수 없다. 3이 아니라 4이다.
④ O — $a = 2$, $b = 2$이므로 $a + b = 4$와 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

경계점의 연속 조건으로 구한 $a = 2$를 곧바로 답으로 고르면 ②를 선택하게 된다. 또한 $|x - 1|$은 $x = 1$에서 식이 바뀌므로, 이를 나누지 않고 적분하면 b를 잘못 구할 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

조각함수 문제는 먼저 경계점에서 연속 조건을 적용하고, 다음으로 식이나 절댓값의 부호가 바뀌는 점마다 적분 구간을 나눈 뒤, 마지막에 요구한 상수의 식을 계산한다.

암기 포인트

조각함수의 연속은 경계점의 좌극한과 함수값을 맞추고, 절댓값 적분은 부호가 바뀌는 점에서 구간을 나눈다.

NoteBase

문 17. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$\int_0^x f(t)dt = x^3 + 2x^2 - 2x\int_0^1 f(x)dx$
를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 1번

출제 포인트

정적분으로 주어진 함수식을 미분하고, 정적분 값을 미지수로 두어 결정한 뒤 $f(1)$을 구하는 문제이다.

조건 정리

$A = \int_0^1 f(x)dx$로 둔다. 주어진 등식은 모든 실수 x에서 성립하므로 양변을 x에 대하여 미분할 수 있다.

사용할 공식

미적분의 기본정리에 따라
$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$
이다. 또한 A는 x와 무관한 상수이므로 $-2xA$를 미분하면 $-2A$이다.

계산 과정

양변을 미분하면

$f(x) = 3x^2 + 4x - 2A$

이다. 이를 0부터 1까지 적분하면

$A = \int_0^1 (3x^2 + 4x - 2A)dx = 1 + 2 - 2A = 3 - 2A$

이므로 $3A = 3$, 즉 $A = 1$이다. 따라서

$f(1) = 3 + 4 - 2 = 5$

이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $f(1) = 5$이므로 맞다.
② X — 6은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 6을 올바르게 고치면 $f(1) = 5$이다.
③ X — 7은 $f(1) = 3 + 4 - 2A$에서 $-2A$를 누락했을 때 나오는 값이다. 올바르게는 $A = 1$을 반영하여 $f(1) = 5$이다.
④ X — 8은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 8을 올바르게 고치면 $f(1) = 5$이다.

오답 포인트

정적분 A를 x의 함수로 오인하거나, $-2xA$를 미분할 때 $-2A$를 빠뜨리면 안 된다. 특히 ③의 7은 이 항을 누락한 결과이다.

다시 나오면 이렇게 판단

미지의 정적분 값을 하나의 상수로 두고, 주어진 적분 등식을 미분해 $f(x)$를 표현한 다음 그 식을 다시 적분하여 상수를 결정한다.

암기 포인트

상한이 x인 정적분은 미분하면 $f(x)$가 되고, 구간이 고정된 정적분은 상수로 다룬다.

NoteBase

문 18. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$가 v(t)=cases(1)/(2)t^2 & (0≤ t<2)\\-(1)/(2)t+3 & (t≥ 2)cases 일 때, 점 P는 출발한 후 시각 $t = a$에서 움직이는 방향이 바뀐다. 시각 $t = 0$에서 $t = a$까지 점 P가 움직인 거리는?

① 4

② $\frac{16}{3}$

③ $\frac{20}{3}$

④ 8

정답 2번

출제 포인트

속도의 부호가 바뀌는 시각을 찾고, 속도를 구간별로 적분하여 이동 거리를 구하는 문제이다.

조건 정리

방향이 바뀌는 시각은 속도의 부호가 바뀌는 때이다. $0 \leq t < 2$에서는 v(t)=12t^2≥0이고, t≥2에서는 v(t)=-12t+3이다. 후자의 속도가 0이 되는 때는 -12a+3=0이므로 $a = 6$이다. 0≤ t≤6에서 속도는 음수가 아니므로 이 구간의 이동 거리는 속도의 정적분과 같다.

사용할 공식

이동 거리는 $\int_0^a |v(t)|dt$이다. 이 문제에서는 0≤ t≤6에서 v(t)≥0이므로 $\int_0^6 v(t)dt$로 계산한다. 속도식이 $t = 2$에서 바뀌므로 적분 구간도 0부터 2, 2부터 6으로 나눈다.

계산 과정

∫ _0^212t^2 dt=≤ft[16t^3]_0^2=43

∫ _2^6≤ft(-12t+3)dt=≤ft[-14t^2+3t]_2^6=4

따라서 이동 거리는 43+4=(16)/(3)이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 4는 $t=2$부터 $t=6$까지의 거리만 계산한 값이므로, $t=0$부터 $t=2$까지의 거리 43을 더한 $\frac{16}{3}$으로 고쳐야 한다.
② O — 구간별 거리를 합하면 43+4=(16)/(3)이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X — $\frac{20}{3}$은 첫 구간에서 속도의 계수 12를 빠뜨려 ∫ _0^2t^2 dt=83로 계산할 때 나오는 값이다. 첫 구간의 올바른 거리는 43이므로 전체 거리는 $\frac{16}{3}$이다.
④ X — 8은 첫 구간의 적분에서 t^2의 원시함수에 필요한 13을 빠뜨려 첫 구간 거리도 4로 계산할 때 나오는 값이다. 올바른 전체 거리는 $\frac{16}{3}$이다.

오답 포인트

방향 전환 시각을 단순히 속도식이 바뀌는 $t=2$로 보면 안 된다. $t=2$에서는 속도가 2로 양수이고, 실제로 속도의 부호가 양수에서 음수로 바뀌는 경계는 $t=6$이다. 또한 구간별 속도식과 적분 계수 12, 13을 빠뜨리지 않아야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 $v(t)=0$인 시각 가운데 실제로 부호가 바뀌는 시각을 찾는다. 그다음 속도식이 달라지는 지점과 부호가 바뀌는 지점에서 구간을 나누어 $\int|v(t)|dt$를 계산한다.

암기 포인트

변위는 $\int v(t)dt$, 이동 거리는 $\int|v(t)|dt$이다. 방향 전환은 속도가 0인 것만으로 부족하고 속도의 부호까지 바뀌어야 한다.

NoteBase

문 19. 검은 상자에 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공이 들어 있다. 이 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 2개의 공에 적힌 숫자가 모두 짝수이거나 모두 홀수일 확률은?

① $\frac{5}{18}$
② $\frac{3}{9}$
③ $\frac{7}{18}$
④ $\frac{4}{9}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 순서를 구분하지 않고 2개의 공을 뽑는 전체 경우의 수와, 두 수가 같은 홀짝성을 갖는 경우의 수를 조합으로 구하는 문제이다.

조건 정리

1부터 9까지의 수 중 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이고 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이다.
구해야 할 사건은 '짝수 2개' 또는 '홀수 2개'를 뽑는 사건이다. 두 공을 동시에 꺼내므로 뽑는 순서는 구분하지 않는다.

사용할 공식

서로 다른 n개 중 순서 없이 r개를 고르는 경우의 수는 ${}_nC_r$이다.

따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_4C_2 + {}_5C_2}{{}_9C_2}$
이다. 짝수 2개를 뽑는 사건과 홀수 2개를 뽑는 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 두 경우의 수를 더한다.

계산 과정

전체 경우의 수는
${}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2} = 36$
이다.

짝수 2개를 뽑는 경우는 ${}_4C_2 = 6$, 홀수 2개를 뽑는 경우는 ${}_5C_2 = 10$이므로 유리한 경우의 수는 16이다. 따라서
$\frac{6+10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{5}{18} = \frac{10}{36}$은 홀수 2개를 뽑는 경우만 반영한 값이다. '$\frac{5}{18}$'은 '$\frac{4}{9}$'로 고쳐야 한다.
② X — $\frac{3}{9} = \frac{12}{36}$은 유리한 경우의 수 16을 제대로 반영하지 않은 값이다. '$\frac{3}{9}$'은 '$\frac{4}{9}$'로 고쳐야 한다.
③ X — $\frac{7}{18} = \frac{14}{36}$은 유리한 경우의 수 ${}_4C_2 + {}_5C_2 = 16$과 일치하지 않는다. '$\frac{7}{18}$'은 '$\frac{4}{9}$'로 고쳐야 한다.
④ O — 전체 36가지 중 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수인 경우는 16가지이므로 확률은 $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$이다.

오답 포인트

①은 홀수 2개를 뽑는 10가지만 세고 짝수 2개를 뽑는 6가지를 빠뜨릴 때 나오는 값이다. '모두 짝수이거나 모두 홀수'에서 '이거나'는 두 사건의 경우의 수를 더한다는 뜻이다.

다시 나오면 이렇게 판단

동시에 여러 개를 뽑는 확률은 순서를 구분하지 않는 조합으로 전체 경우의 수를 먼저 구한다. 그다음 조건을 만족하는 서로 겹치지 않는 경우들을 각각 세어 더하고, 마지막에 전체 경우의 수로 나눈다.

암기 포인트

같은 홀짝 2개는 '짝수 2개 또는 홀수 2개'이므로 ${}_4C_2 + {}_5C_2$로 센다.

NoteBase

문 20. 이항분포 $B(n, p)$를 따르는 이산확률변수 X에 대하여 $P(X=1)=P(X=n-1)$, $V(X)=15$일 때, n의 값은?

① 60

② 70

③ 80

④ 90

정답 1번

출제 포인트

이항분포의 확률질량함수와 분산 공식을 함께 이용하여 시행 횟수 n을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $P(X=1)=P(X=n-1)$, $V(X)=15$이다. 분산이 양수이므로 $0<p<1$이고, 선지의 n은 모두 2보다 크다. 구해야 할 값은 시행 횟수 n이다.

사용할 공식

이항분포 $X \sim B(n, p)$에서
$P(X=k)={}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$
이고, 분산은
$V(X)=np(1-p)$
이다. 첫 번째 공식은 두 확률의 대칭 조건으로 p를 구하는 데 사용하고, 두 번째 공식은 구한 p를 이용하여 n을 구하는 데 사용한다.

계산 과정

$P(X=1)=P(X=n-1)$에 확률질량함수를 적용하면
$np(1-p)^{n-1}=np^{n-1}(1-p)$
이다. $V(X)=15>0$이므로 $p \neq 0, 1$이고, 양변을 $np(1-p)$로 나누면
$(1-p)^{n-2}=p^{n-2}$
이다. $n>2$이고 $0<p<1$이므로 $1-p=p$, 즉 p=12이다. 따라서
15=np(1-p)=n·12·12= n4
이므로 $n=60$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $n = 60$이므로 옳다.
② X — 70은 분산 조건 $n/4 = 15$를 만족하지 않는다. 올바른 값은 60이다.
③ X — 80은 분산 조건 $n/4 = 15$를 만족하지 않는다. 올바른 값은 60이다.
④ X — 90은 분산 조건 $n/4 = 15$를 만족하지 않는다. 올바른 값은 60이다.
계산 결과 $n = 60$이므로 정답은 1번이다.

오답 포인트

$P(X = 1) = P(X = n - 1)$을 곧바로 평균에 관한 조건으로 해석하면 안 된다. 두 확률을 각각 이항분포의 확률질량함수로 전개해야 p=12를 얻을 수 있다. 또한 p=12일 때 분산은 $n/2$가 아니라 $n/4$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

이항분포에서 서로 대칭인 두 값의 확률이 같으면 먼저 확률질량함수를 전개하여 p를 구한 뒤,
$V(X) = np(1 - p)$에 대입하여 n을 결정한다.

암기 포인트

이항분포가 p=12이면 좌우가 대칭이고, 분산은 $V(X) = n/4$이다.

NoteBase