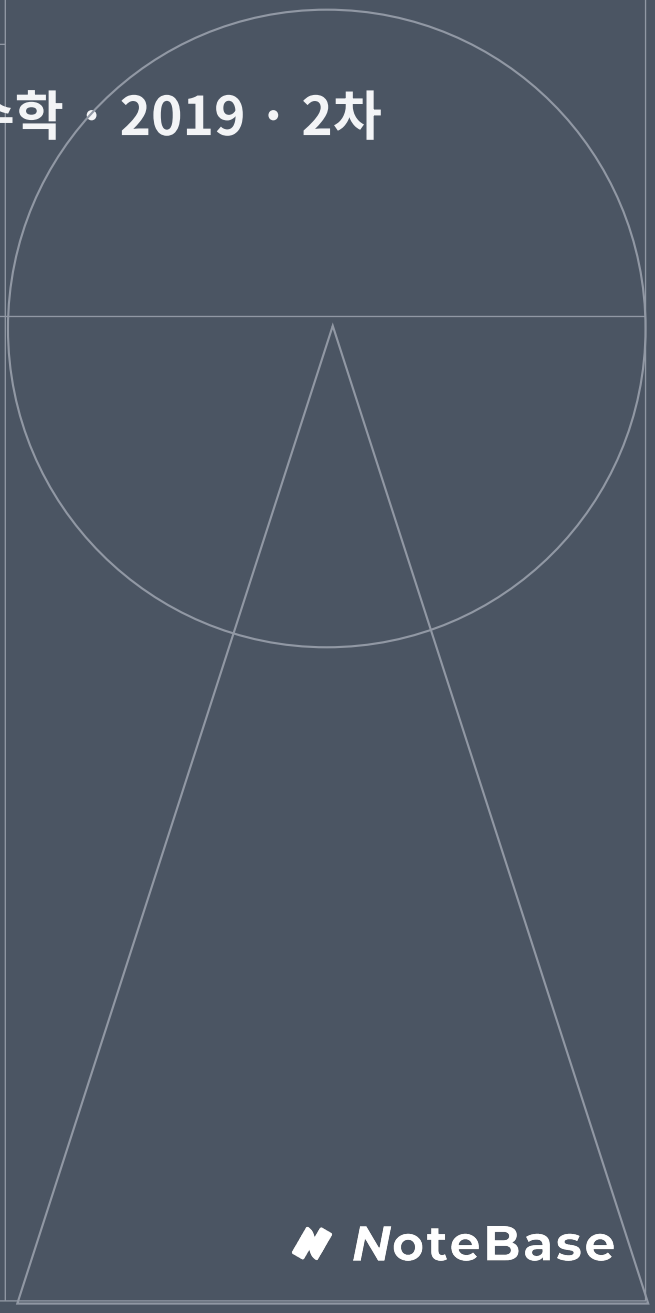
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2019 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2019 · 2차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2019 · 2차

문 1. $(3-2i)(a+bi)$**가 실수이고** $a+bi$**의 실수부분과 허수부분의 합이 3일 때,** $25ab$**의 값은? (단,** a**,** b**는 실수이고** $i=\sqrt{-1}$**)**

① 50

② 52

③ 54

④ 56

정답 3번

출제 포인트

복소수의 곱을 전개한 뒤, 그 값이 실수라는 조건에서 허수부분이 0임을 이용하여 a, b를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $(3-2i)(a+bi)$는 실수이고 $a+b=3$이다.
구해야 할 값: $25ab$이다.
주의할 조건: 복소수가 실수이려면 허수부분의 계수가 0이어야 한다.

사용할 공식

복소수의 곱셈에서 $i^2=-1$을 이용한다.
$(3-2i)(a+bi)=3a+3bi-2ai-2bi^2=(3a+2b)+(3b-2a)i$
곱이 실수이므로 허수부분 $3b-2a$가 0이다.

계산 과정

1. 허수부분이 0이므로 $3b-2a=0$, 즉 $a=\frac{3}{2}b$이다.
2. $a+b=3$에 대입하면 $\frac{3}{2}b+b=3$이므로 $\frac{5}{2}b=3$, $b=\frac{6}{5}$이다.
3. 따라서 $a=\frac{9}{5}$이고, $25ab=25\times\frac{9}{5}\times\frac{6}{5}=54$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 54이므로 50은 아니다. 틀린 값 50은 54로 고쳐야 한다.
② X — 계산 결과는 54이므로 52는 아니다. 틀린 값 52는 54로 고쳐야 한다.
③ O — $a=\frac{9}{5}$, $b=\frac{6}{5}$이므로 $25ab=54$와 일치한다.
④ X — 계산 결과는 54이므로 56은 아니다. 틀린 값 56은 54로 고쳐야 한다.

오답 포인트

전개할 때 $(-2i)(bi)=-2bi^2=2b$의 부호를 놓치기 쉽다. 또한 '실수이다'라는 조건은 실수부분이 0이라는 뜻이 아니라 허수부분 $3b-2a$가 0이라는 뜻이다.

다시 나오면 이렇게 판단

복소수의 곱을 실수부분과 허수부분으로 나누어 전개한 뒤, 실수라는 조건에서 허수부분을 0으로 놓고 나머지 조건과 연립한다.

암기 포인트

복소수가 실수이면 허수부분은 0이며, 전개할 때 $i^2=-1$ 때문에 부호가 바뀐다.

NoteBase

문 2. x에 관한 이차방정식 $x^2-(k+1)x-k-6=0$의 두 근의 차는 4이다. 이때 상수 k의 값은?

① -3

② -2

③ 2

④ 3

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 이차방정식의 두 근의 차와 판별식의 관계를 이용하여 상수 k의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $x^2-(k+1)x-k-6=0$이고, 두 근의 차는 4이다. 구해야 할 값은 상수 k이다. 두 근의 차가 실수로 주어졌으므로 그 차의 제곱은 16이다.

사용할 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{b^2-4ac}{a^2}$
이다. 이 식은 근과 계수의 관계를 이용해 두 근을 직접 구하지 않고도 두 근의 차를 나타낼 수 있으므로 사용한다.

계산 과정

근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=k+1$, $\alpha\beta=-k-6$이다. 따라서
$(\alpha-\beta)^2=(k+1)^2-4(-k-6)=k^2+6k+25$
이다. 두 근의 차가 4이므로
$k^2+6k+25=4^2=16$
이고, 이를 정리하면
$k^2+6k+9=(k+3)^2=0$
이다. 그러므로 $k=-3$이다.

선지 판단

① O: 계산 결과 $k=-3$이다. $k=-3$을 대입하면 두 근의 차의 제곱이 16이므로 두 근의 차는 4이다.
② X: $k=-2$이면 두 근의 차의 제곱은 17이어서 차는 $\sqrt{17}$이다. 틀린 값 -2가 아니라 올바른 값은 -3이다.
③ X: $k=2$이면 두 근의 차의 제곱은 41이어서 차는 $\sqrt{41}$이다. 틀린 값 2가 아니라 올바른 값은 -3이다.
④ X: $k=3$이면 두 근의 차의 제곱은 52이어서 차는 $2\sqrt{13}$이다. 틀린 값 3이 아니라 올바른 값은 -3이다.

NoteBase

오답 포인트

두 근의 차가 4라는 조건을 판별식 자체가 4라고 놓으면 안 된다. 이 방정식은 최고차항의 계수가 1이므로 판별식은 두 근의 차의 제곱인 16과 같다. 또한 상수항이 $-k-6$이므로 $-4\alpha\beta$를 계산할 때 부호가 바뀌는 점이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 근의 차가 주어지면 먼저 근과 계수의 관계로 합과 곱을 구한 뒤 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에 대입하고, 주어진 차도 반드시 제곱하여 등식을 세운다.

암기 포인트

두 근의 차의 제곱은 '근의 합의 제곱에서 근의 곱의 4배를 뺀 값'이다. 즉, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이다.

NoteBase

문 3. x에 관한 이차부등식 $f(x) < 0$의 해가 $x < -4$ 또는 $x > 3$일 때, $f(-2x) \geq 0$의 해는?

① $x \leq -2,\ x \geq \frac{3}{2}$
② $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$
③ $x \leq -\frac{3}{2},\ x \geq 2$
④ $-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 이차부등식의 해 구간을 파악한 뒤, 합성된 입력 $-2x$가 그 구간에 속하도록 연립부등식을 푸는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $f(x) < 0$의 해는 $x < -4$ 또는 $x > 3$이다.
구해야 할 조건: $f(-2x) \geq 0$이다.
주의할 조건: 부등식에 음수를 곱하거나 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

사용할 공식

$f(t) < 0$인 구간이 $t < -4$ 또는 $t > 3$이므로, 그 여집합에서 $f(t) \geq 0$이다. 따라서
$-4 \leq t \leq 3$
이다. 여기서 $t = -2x$를 대입한다. 이 원리를 쓰는 이유는 구하려는 식 $f(-2x)$의 입력값이 원래 함수의 어느 부호 구간에 놓이는지를 판단해야 하기 때문이다.

계산 과정

1. $f(t) \geq 0$이 되는 입력의 범위는 $-4 \leq t \leq 3$이다.
2. $t = -2x$를 대입하면 $-4 \leq -2x \leq 3$이다.
3. 세 항을 -2로 나누면서 부등호 방향을 모두 바꾸면 $2 \geq x \geq -\frac{3}{2}$이다.
4. 작은 값부터 쓰면 $-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $x \le -2$ 또는 $x \ge \frac{3}{2}$는 바깥쪽 구간을 택했고 경계값도 올바르지 않다. 올바르게는 $-\frac{3}{2} \le x \le 2$이다.
② X — $-2 \le x \le \frac{3}{2}$는 양 끝값을 잘못 정했다. -4에서 나오는 경계는 2, 3에서 나오는 경계는 $-\frac{3}{2}$이므로, 올바르게는 $-\frac{3}{2} \le x \le 2$이다.
③ X — $x \le -\frac{3}{2}$ 또는 $x \ge 2$는 경계값은 찾았지만 $f(-2x) \ge 0$의 안쪽 구간이 아니라 그 바깥쪽 구간을 택했다. 올바르게는 $-\frac{3}{2} \le x \le 2$이다.
④ O — $-4 \le -2x \le 3$을 풀면 정확히 $-\frac{3}{2} \le x \le 2$가 된다.

오답 포인트

핵심 함정은 두 가지이다. 먼저 $f(x) < 0$인 바깥쪽 구간의 여집합이 $f(x) \ge 0$인 닫힌 안쪽 구간이라는 점을 놓치면 ③을 고르게 된다. 또한 $-4 \le -2x \le 3$을 -2로 나눌 때 부등호 방향을 모두 바꾸고 양 끝값의 순서를 다시 정리해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 함수의 부호에 맞는 입력 구간을 정한 뒤, 함수 안의 식을 새 입력으로 대입하여 연립부등식을 푼다. 음수로 나눌 때는 부등호를 뒤집고, 마지막에는 작은 경계값부터 다시 배열한다.

암기 포인트

함수 부호 구간을 먼저 정하고, 합성 입력을 대입한다. 음수로 나누면 부등호 방향이 바뀐다.

NoteBase

문 4. 이차방정식 $x^2+x-5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $f(\alpha)=f(\beta)=2$를 만족시키는 이차식 $f(x)$는? (단, $f(x)$의 이차항의 계수는 1이다.)

① x^2-2x+3

② x^2+x-3

③ x^2-2x+7

④ x^2+x-7

정답 2번

출제 포인트

두 근에서 같은 값을 갖는 최고차항 계수가 1인 이차식을, 근을 이용한 인수분해로 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 이차방정식은 $x^2+x-5=0$이고 두 근은 α, β이다. 구해야 할 식은 최고차항의 계수가 1이며 $f(\alpha)=f(\beta)=2$를 만족하는 이차식이다. 따라서 $f(x)-2$는 최고차항의 계수가 1이고 두 근이 α, β인 이차식이다.

사용할 공식

두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1인 이차식은 $(x-\alpha)(x-\beta)$이다. $f(\alpha)-2=f(\beta)-2=0$이므로 $f(x)-2$에 이 공식을 적용한다.

계산 과정

$f(x)-2$와 x^2+x-5는 모두 최고차항의 계수가 1이고 근이 α, β이므로 같은 이차식이다. 따라서 $f(x)-2=x^2+x-5$이고, 양변에 2를 더하면$f(x)=x^2+x-3$이다.

선지 판단

① X — $f(x)=x^2-2x+3$이면 $f(x)-2=x^2-2x+1$이 되어 주어진 방정식 $x^2+x-5=0$과 일치하지 않는다. 틀린 x의 계수와 상수항을 고치면 $f(x)=x^2+x-3$이다.
② O — $f(x)=x^2+x-3$이면 $f(x)-2=x^2+x-5$이므로 α, β를 대입했을 때 모두 2가 된다.
③ X — $f(x)=x^2-2x+7$이면 $f(x)-2=x^2-2x+5$이 되어 두 근이 α, β가 아니다. 틀린 x의 계수와 상수항을 고치면 $f(x)=x^2+x-3$이다.
④ X — 주어진 근에서는 $x^2+x=5$이므로 $x^2+x-7=-2$가 되어 함수값이 2가 아니라 -2이다. 틀린 상수항 -7을 -3으로 고치면 $f(x)=x^2+x-3$이다.

NoteBase

오답 포인트

$f(\alpha) = f(\beta) = 2$에서 두 근을 갖는 식은 $f(x)$ 자체가 아니라 $f(x) - 2$이다. 이를 놓치면 주어진 식 $x^2 + x - 5$를 그대로 답으로 보거나, 상수항에 2를 더하는 대신 빼는 실수를 하기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

최고차항의 계수가 1인 이차식이 서로 다른 두 값 α, β에서 같은 값 k를 가지면, $f(x) - k = (x - \alpha)(x - \beta)$로 놓고 원래 방정식과 비교한다.

암기 포인트

두 근에서 함수값이 k이면 $f(x) - k$의 두 근이 바로 그 두 근이다.

NoteBase

문 5. 함수 $f(x)=x^2-2x-3,\quad g(x)=x^2-ax+7$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되는 실수 a의 범위는? (단, $f\circ g$는 g와 f의 합성함수이다.)

① $-3\leq a\leq 3$

② $a\leq -3,\ a\geq 3$

③ $-4\leq a\leq 4$

④ $a\leq -4,\ a\geq 4$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 이차함수 $g(x)$의 최솟값을 구한 뒤, 그 치역 전체가 $f(t)\geq 0$을 만족하도록 매개변수 a의 범위를 정하는 문제이다.

조건 정리

$t=g(x)$로 놓으면 $(f\circ g)(x)=f(t)$이다.
$f(t)=t^2-2t-3=(t-3)(t+1)$이므로 $f(t)\geq 0$인 범위는 $t\leq -1$ 또는 $t\geq 3$이다.
한편 $g(x)=x^2-ax+7=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+7-\frac{a^2}{4}$이므로 치역은 $\left[7-\frac{a^2}{4},\infty\right)$이다.

사용할 공식

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 x^2-ax+7의 최솟값은 완전제곱식을 이용하여 구한다.
$g(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+7-\frac{a^2}{4}$
$g(x)$의 치역은 아래쪽 끝점부터 무한히 이어지는 구간이므로, 이 치역 전체에서 $f(g(x))\geq 0$이 되려면 최솟값이 3 이상이어야 한다.

계산 과정

$g(x)$는 위로 열린 포물선이므로 최솟값은 $7-\frac{a^2}{4}$이다. $g(x)$는 위로 무한히 커지므로 그 치역 전체를 $t\leq -1$에 넣을 수는 없다. 따라서 치역 전체가 $t\geq 3$에 포함되어야 한다.
$7-\frac{a^2}{4}\geq 3$
$\frac{a^2}{4}\leq 4$
$a^2\leq 16$
따라서 $-4\leq a\leq 4$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $-3 \le a \le 3$은 필요한 범위보다 좁다. 틀린 범위 $-3 \le a \le 3$은 올바르게는 $-4 \le a \le 4$이다.
② X — $a \le -3$ 또는 $a \ge 3$처럼 구간의 바깥쪽을 택하면 $|a|$가 커질수록 $g(x)$의 최솟값이 낮아져 조건을 만족하지 못한다. 올바르게는 $-4 \le a \le 4$이다.
③ O — $7 - \frac{a^2}{4} \ge 3$을 풀면 정확히 $-4 \le a \le 4$가 된다.
④ X — 경계값 4는 맞지만 부등호 방향이 반대이다. 틀린 범위 $a \le -4$ 또는 $a \ge 4$는 올바르게는 $-4 \le a \le 4$이다.

오답 포인트

$f(t) \ge 0$의 해가 $t \le -1$ 또는 $t \ge 3$이라는 사실만 보고 두 구간을 모두 후보로 삼기 쉽다. 그러나 $g(x)$의 치역은 위로 무한히 이어지므로 전체 치역을 $t \le -1$에 포함시키는 것은 불가능하다. 또한 $a^2 \le 16$은 구간의 바깥이 아니라 $-4 \le a \le 4$라는 안쪽 범위이다.

다시 나오면 이렇게 판단

합성함수의 부등식이 모든 실수 x에서 성립하는 문제는 바깥 함수가 조건을 만족하는 입력 구간을 먼저 구하고, 안쪽 함수의 치역 전체가 그 구간에 포함되는지 판단한다.

암기 포인트

모든 x에 대한 합성함수 부등식은 '안쪽 함수의 치역 전체'를 바깥 함수의 부등식 해집합에 넣는 문제이다.

NoteBase

문 6. 무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}-1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $(1,2)$에서 만날 때, $g(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a\neq 0$)

① $-\frac{1}{3}$
② $-\frac{2}{3}$
③ $-\frac{1}{5}$
④ $-\frac{2}{5}$

정답 4번

출제 포인트

함수와 역함수의 그래프 위에 동시에 놓인 점을 이용해 a, b를 정하고 역함숫값을 구하는 문제이다.

조건 정리

점 $(1,2)$가 $y=f(x)$ 위에 있으므로 $f(1)=2$이다. 같은 점이 $y=g(x)$ 위에도 있으므로 $g(1)=2$이고, g가 f의 역함수이므로 $f(2)=1$이다.

사용할 공식

역함수의 성질에 따라 $g(u)=v$이면 $f(v)=u$이다. 따라서 $g(1)=2$를 $f(2)=1$로 바꾸어 두 식을 세운다.

계산 과정

$f(1)=2$에서

$\sqrt{a+b}-1=2\Rightarrow a+b=9$.

$f(2)=1$에서

$\sqrt{2a+b}-1=1\Rightarrow 2a+b=4$.

두 식을 빼면 $a=-5$이고, $b=14$이다. 따라서

$f(x)=\sqrt{-5x+14}-1$.

$y=f(x)$에서 x와 y를 바꾸어 정리하면

$x=\sqrt{-5y+14}-1\Rightarrow y=\frac{14-(x+1)^2}{5}$.

역함수의 정의역은 $x\geq -1$이고 3은 이에 포함된다. 그러므로 $g(x)=\frac{14-(x+1)^2}{5}$에서

$g(3)=\frac{14-(3+1)^2}{5}=\frac{14-16}{5}=-\frac{2}{5}$.

NoteBase

선지 판단

① X — $g(3)$의 계산값은 $-\frac{1}{3}$이 아니다. 올바른 값은 $-\frac{2}{5}$이다.
② X — $g(3)$의 계산값은 $-\frac{2}{3}$이 아니다. 올바른 값은 $-\frac{2}{5}$이다.
③ X — $g(3)$의 계산값은 $-\frac{1}{5}$이 아니다. 올바른 값은 $-\frac{2}{5}$이다.
④ O — $g(3) = -\frac{2}{5}$이므로 계산 결과와 일치한다.

오답 포인트

점 $(1, 2)$가 두 그래프의 교점이라는 조건을 $f(1) = g(1) = 2$로만 적고 끝내면 식이 하나 부족하다. $g(1) = 2$를 역함수 관계에 따라 $f(2) = 1$로 바꾸어야 a, b를 모두 정할 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수와 역함수의 교점 (p, q)가 주어지면 먼저 $f(p) = q$와 $f(q) = p$를 세우고, 원함수의 상수를 구한 뒤 역함수를 정리한다.

암기 포인트

(p, q)가 f와 f^{-1}의 공통점이면 $f(p) = q$, $f(q) = p$이다.

NoteBase

문 7. 임의의 실수 x, y에 대하여 함수 $f(x)$가
$f(x+y)=f(x)+f(y)$
를 만족하고 $f(3)=2$일 때, $f(0)+f(-3)$의 값은?

① -2

② 2

③ -3

④ 3

정답 1번

출제 포인트

가법 함수의 식에 0과 서로 반대인 수를 대입하여 $f(0)$과 $f(-3)$을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$이고 $f(3)=2$이다.
구해야 할 값: $f(0)+f(-3)$이다.
주의할 조건: $0=0+0$, $0=3+(-3)$을 이용한다.

사용할 공식

$f(0)=0$, $f(-x)=-f(x)$
가법성에 $x=y=0$을 대입하면 $f(0)=2f(0)$이므로 $f(0)=0$이다. 또한 $x+(-x)=0$이므로 $0=f(x)+f(-x)$에서 $f(-x)=-f(x)$가 된다.

계산 과정

1. $f(0)=f(0)+f(0)$이므로 $f(0)=0$이다.
2. $f(0)=f(3+(-3))=f(3)+f(-3)$이므로 $0=2+f(-3)$이다.
3. 따라서 $f(-3)=-2$이고, $f(0)+f(-3)=0+(-2)=-2$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 -2이므로 옳다.
② X — $f(-3)$의 부호를 바꾸지 않은 값이다. 올바른 값은 2가 아니라 -2이다.
③ X — $f(-3)=-2$이므로 -3은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 -2이다.
④ X — 주어진 입력값 3을 함수값으로 혼동한 값이다. 올바른 값은 3이 아니라 -2이다.
계산 결과가 -2이므로 정답은 1번이다.

NoteBase

오답 포인트

$f(-3)$을 구할 때 입력의 부호만 바꾸고 함수값의 부호를 그대로 두면 ②를 고르게 된다. 가법 함수에서는 $f(-x) = -f(x)$이므로 $f(-3) = -2$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

가법 함수에서 0이나 음수의 함수값을 묻는 경우 먼저 $f(0) = 0$을 구하고, 이어서 $f(-x) = -f(x)$를 적용한다.

암기 포인트

가법 함수는 $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$이다.

NoteBase

문 8. 직선 $y = x + k$와 원 $x^2 + y^2 = 9$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 현 AB의 길이가 4가 되는 양수 k의 값은?

① $\sqrt{10}$
② $\sqrt{11}$
③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{13}$

정답 1번

출제 포인트

원의 중심에서 직선까지의 거리와 현의 길이 관계를 이용해 직선의 상수 k를 구하는 문제이다.

조건 정리

원의 중심은 $O(0, 0)$, 반지름은 $r = 3$이다. 직선은 $x - y + k = 0$이고 현의 길이는 $AB = 4$이다. 구하는 값은 양수 k이다.

사용할 공식

중심에서 현까지의 거리를 d, 현의 길이를 L이라 하면 $L = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ 이다. 또한 점과 직선 사이의 거리 공식에 따라 $d = \frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$ 이다. 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로, 반지름을 빗변으로 하는 직각삼각형에 피타고라스 정리를 적용할 수 있다.

계산 과정

현의 반은 2이므로 $2^2 + d^2 = 3^2$ 이고, 따라서 $d^2 = 5$이다. 한편 $d^2 = \frac{k^2}{2}$ 이므로 $\frac{k^2}{2} = 5$, $k^2 = 10$ 이다. k가 양수라는 조건에 따라 $k = \sqrt{10}$이다.

선지 판단

① O — $k = \sqrt{10}$이면 $d^2 = 5$이고, 현의 길이는 $2\sqrt{9 - 5} = 4$가 된다.
② X — $k = \sqrt{11}$이면 현의 길이는 $2\sqrt{9 - 11/2} = \sqrt{14}$이므로 4가 아니다. 올바른 값은 $\sqrt{10}$이다.
③ X — $k = 2\sqrt{3}$이면 현의 길이는 $2\sqrt{9 - 12/2} = 2\sqrt{3}$이므로 4가 아니다. 올바른 값은 $\sqrt{10}$이다.
④ X — $k = \sqrt{13}$이면 현의 길이는 $2\sqrt{9 - 13/2} = \sqrt{10}$이므로 4가 아니다. 올바른 값은 $\sqrt{10}$이다.

오답 포인트

현의 길이 4를 중심에서 현까지의 거리로 착각하면 안 된다. 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로 직각삼각형에 넣는 현의 길이는 $AB/2 = 2$이다. 또한 $k^2 = 10$에서 $k = \pm\sqrt{10}$이지만, 양수 조건 때문에 $\sqrt{10}$만 남는다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구한 뒤, 현의 반길이와 반지름이 이루는 직각삼각형에서 $(L/2)^2 + d^2 = r^2$를 적용하고 마지막에 부호 조건을 확인한다.

암기 포인트

반지름 r, 중심에서 현까지의 거리 d, 현의 길이 L 사이에는 $L = 2\sqrt{r^2 - d^2}$가 성립한다.

문 9. 세 점 $O(0,0)$, $A(3,3)$, $B(3,9)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 직선 $y=m$이 이등분할 때, 상수 m의 값은?

① $9-2\sqrt{3}$
② $9-2\sqrt{2}$
③ $9-3\sqrt{3}$
④ $9-3\sqrt{2}$

정답 3번

출제 포인트

삼각형을 수평선으로 넓이가 같은 두 부분으로 나눌 때, 위쪽에 생기는 닮은 삼각형의 넓이를 이용해 수평선의 높이 m을 구하는 문제이다.

조건 정리

삼각형 OAB에서 $AB=6$이고 직선 AB와 원점 사이의 거리는 3이므로 전체 넓이는 12×6×3=9이다. 따라서 이등분된 각 부분의 넓이는 92이다. $y=3$ 아래쪽의 넓이는 3에 불과하므로 $3<m<9$이고, $y=m$ 위쪽 삼각형의 넓이를 구하면 된다.

사용할 공식

직선 OB의 방정식은 $y=3x$이다. 높이 y에서 삼각형의 오른쪽 경계는 $x=3$, 왼쪽 경계는 x= y3이므로 가로 길이는 3- y3이다. 따라서 $y=m$ 위쪽 삼각형은 밑변과 높이가 각각 $9-m$, 3- m3=(9-m)/(3)이며, 넓이는 $\frac{(9-m)^2}{6}$이다.

계산 과정

위쪽 삼각형의 넓이가 전체 넓이의 절반이므로
((9-m)^2)/(6)=92
이다. 양변에 6을 곱하면 $(9-m)^2=27$이고, $3<m<9$이므로 9-m=33이다. 따라서
m=9-33
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — m=9-23이면 위쪽 삼각형의 넓이는 ((23)^2)/(6)=2로 92가 아니다. 틀린 값 9-23이 아니라 올바른 값은 9-33이다.
② X — m=9-22이면 위쪽 삼각형의 넓이는 ((22)^2)/(6)=43으로 92가 아니다. 틀린 값 9-22가 아니라 올바른 값은 9-33이다.
③ O — m=9-33이면 위쪽 삼각형의 넓이는 ((33)^2)/(6)=92이므로 전체 넓이 9를 정확히 이등분한다.
④ X — m=9-32이면 위쪽 삼각형의 넓이는 ((32)^2)/(6)=3으로 92가 아니다. 틀린 값 9-32가 아니라 올바른 값은 9-33이다.

오답 포인트

넓이를 이등분한다고 해서 높이도 절반으로 나누어지는 것은 아니다. 또한 위쪽 삼각형의 밑변 $9-m$과 가로 높이 $\frac{9-m}{3}$을 곱한 뒤 반드시 12을 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

도형을 자르는 직선의 위치 범위를 먼저 확인하고, 잘린 두 부분 중 넓이 공식이 단순한 삼각형을 선택하여 그 넓이를 전체 넓이의 절반과 같게 둔다.

암기 포인트

닮은 삼각형에서는 길이의 비가 k이면 넓이의 비는 k^2이다.

NoteBase

문 10. 두 실수 a, b에 대하여 $4^a = 3,\ 9^b = 2\sqrt{2}$가 성립할 때, ab의 값은?

① $\frac{3}{4}$
② $\frac{5}{4}$
③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{5}{8}$

정답 3번

출제 포인트

밑이 서로 다른 지수방정식에서 지수를 로그로 나타낸 뒤, 두 지수의 곱을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $4^a = 3$, $9^b = 2\sqrt{2}$이다. 구해야 할 값은 ab이며, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $2\sqrt{2} = 2^{3/2}$로 바꾸면 계산이 간단해진다.

사용할 공식

$x^y = z$이면 $y = \frac{\log z}{\log x}$이다. 밑과 진수가 서로 다른 지수방정식에서 지수를 직접 비교할 수 없으므로 로그를 이용한다.

계산 과정

$4^a = 3$에서
$a = \frac{\log 3}{\log 4} = \frac{\log 3}{2\log 2}$
이다. 또한 $9^b = 2\sqrt{2} = 2^{3/2}$에서
$b = \frac{\log(2^{3/2})}{\log 9} = \frac{(3/2)\log 2}{2\log 3} = \frac{3\log 2}{4\log 3}$
이다. 따라서
$ab = \frac{\log 3}{2\log 2} \cdot \frac{3\log 2}{4\log 3} = \frac{3}{8}$
이다.

선지 판단

① X — $\frac{3}{4}$는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $\frac{3}{8}$이다.
② X — $\frac{5}{4}$는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $\frac{3}{8}$이다.
③ O — 로그로 나타낸 a와 b를 곱하면 $\frac{3}{8}$이므로 옳다.
④ X — $\frac{5}{8}$은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $\frac{3}{8}$이다.

NoteBase

오답 포인트

$2\sqrt{2}$를 $2^{3/2}$로 바꾸는 과정과 $\log 4 = 2\log 2$, $\log 9 = 2\log 3$에서 생기는 두 계수를 빠뜨리기 쉽다. 특히 분모의 2×2를 모두 반영해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

각 지수를 로그로 나타내고, 거듭제곱과 근호를 지수 형태로 통일한 뒤 곱셈 과정에서 같은 로그 인수가 약분되는지 확인한다.

암기 포인트

$x^y = z$이면 $y = \frac{\log z}{\log x}$이며, $2\sqrt{2} = 2^{3/2}$이다.

NoteBase

문 11. 이차방정식 $x^2 - 5x + 3 = 0$의 두 근이 $\log_5 \alpha$와 $\log_5 \beta$일 때, $\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha$의 값은?

① $\frac{17}{3}$
② $\frac{19}{3}$
③ $\frac{21}{5}$
④ $\frac{23}{5}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용해 로그의 밑과 진수에 들어 있는 두 수의 비를 계산하는 문제이다.

조건 정리

두 근을 $u = \log_5 \alpha$, $v = \log_5 \beta$라고 둔다. 이차방정식 $x^2 - 5x + 3 = 0$의 근과 계수의 관계에 따라 $u + v = 5$, $uv = 3$이다. 구해야 할 값은 $\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha$이다.

사용할 공식

밑변환 공식에 따라 $\log_\alpha \beta = \frac{\log_5 \beta}{\log_5 \alpha} = \frac{v}{u}$, $\log_\beta \alpha = \frac{u}{v}$이다. 따라서 두 로그의 합은 $\frac{v}{u} + \frac{u}{v} = \frac{u^2 + v^2}{uv}$이고, $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv$를 이용할 수 있다.

계산 과정

aligned_αβ+_βα&=(v)/(u)+(u)/(v)\\&=(u^2+v^2)/(uv)\\&=((u+v)^2-2uv)/(uv)\\&=(5^2-2·3)/(3)\\&=(19)/(3).aligned

선지 판단

① X — $\frac{17}{3}$은 계산 결과 $\frac{19}{3}$과 다르다. 틀린 값 $\frac{17}{3}$은 올바르게는 $\frac{19}{3}$이다.
② O — 근과 계수의 관계와 밑변환 공식을 적용한 값이 $\frac{19}{3}$이므로 옳다.
③ X — $\frac{21}{5}$은 계산 결과 $\frac{19}{3}$과 다르다. 틀린 값 $\frac{21}{5}$은 올바르게는 $\frac{19}{3}$이다.
④ X — $\frac{23}{5}$은 계산 결과 $\frac{19}{3}$과 다르다. 틀린 값 $\frac{23}{5}$은 올바르게는 $\frac{19}{3}$이다.

오답 포인트

$\log_\alpha \beta$를 $\log_5 \alpha / \log_5 \beta$로 거꾸로 바꾸거나, $u^2 + v^2$를 구할 때 $2uv$를 빼지 않는 실수가 핵심 함정이다. 이 문제에서는 $u^2 + v^2 = 25 - 6 = 19$이고 분모는 $uv = 3$이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

로그값 자체를 이차방정식의 두 근으로 두고 근의 합과 곱을 구한 뒤, 밑변환 공식으로 목표식을 두 근의 대칭식으로 바꾸어 계산한다.

암기 포인트

$u = \log_a b$, $v = \log_a c$이면 $\log_b c = \frac{v}{u}$이고, $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} = \frac{(u+v)^2 - 2uv}{uv}$이다.

문 12. $\frac{1}{5\sqrt{4}+4\sqrt{5}}+\frac{1}{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{64\sqrt{63}+63\sqrt{64}}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$
② $\frac{3}{8}$
③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{7}{8}$

정답 2번

출제 포인트

분모를 인수분해한 뒤 켤레식을 이용하여 각 항을 두 근호의 차로 바꾸고, 연속된 항이 소거되는 망원급수를 계산하는 문제이다.

조건 정리

첫째 항은 $n=5$, 마지막 항은 $n=64$일 때의 항이다. 일반항의 분모는 n√(n-1)+(n-1) n이고, $n=5, 6, \ldots, 64$에 대하여 합을 구한다.

사용할 공식

n√(n-1)+(n-1) n=√(n(n-1))(n+√(n-1))
따라서 켤레식 n-√(n-1)을 이용하면
(1)/(n√(n-1)+(n-1) n)=(1)/(√(n-1))-(1)/(n)
이 된다. 이 형태는 이웃한 항의 뒷부분과 다음 항의 앞부분이 서로 소거되므로 사용한다.

계산 과정

일반항을 바꾸어 합을 쓰면
Σ_n=5^64≤ft((1)/(√(n-1))-(1)/(n))
이다. 이를 펼치면
≤ft(12-(1)/(5))+≤ft((1)/(5)-(1)/(6))+·s+≤ft((1)/(√(63))-18)
이므로 중간 항이 모두 소거된다. 따라서
12-18=48-18=38
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산값은 38이므로 18은 틀린 값이다. 올바르게는 38이다.
② O — 망원급수에서 처음 남는 항 12와 마지막 남는 항 -18을 계산하면 38이다.
③ X — 계산값은 38이므로 58은 틀린 값이다. 올바르게는 38이다.
④ X — 계산값은 38이므로 78은 틀린 값이다. 올바르게는 38이다.

오답 포인트

유리화한 일반항의 순서를 (1)/(n)-(1)/(√‾(n-1))로 뒤집거나, 소거 후 남는 마지막 항의 음수 부호를 빠뜨리기 쉽다. 실제로 남는 두 항은 12와 -18이므로 빼기로 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 n√‾(n-1)+(n-1) n 꼴이면 먼저 √‾(n(n-1))(n+√‾(n-1))로 묶는다. 그다음 켤레식을 이용해 (1)/(√‾(n-1))-(1)/(n)로 바꾸고, 처음 항과 마지막 항만 남겨 계산한다.

암기 포인트

근호가 연속되는 분모는 '인수분해 → 켤레식 → 앞뒤 소거'의 순서로 처리한다.

NoteBase

문 13. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합이 $S_n = n^2 + n$일 때, $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값은?

① $\frac{2}{21}$
② $\frac{3}{21}$
③ $\frac{4}{21}$
④ $\frac{5}{21}$

정답 4번

출제 포인트

수열의 부분합 S_n에서 일반항 a_n을 구한 뒤, 분수를 부분분수로 바꾸어 망원급수의 합을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $S_n = n^2 + n$
구해야 할 값: $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$
주의할 조건: 첫째항은 $a_1 = S_1$이고, $n \geq 2$에서는 $a_n = S_n - S_{n-1}$이다.

사용할 공식

부분합과 일반항의 관계는

$$a_1 = S_1, \qquad a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

이다. 또한

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

을 이용한다. 첫 번째 공식은 부분합에서 각 항을 분리하기 위해 사용하고, 두 번째 공식은 연속한 항들이 서로 소거되는 망원급수로 바꾸기 위해 사용한다.

계산 과정

먼저 $a_1 = S_1 = 2$이다. $n \geq 2$일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + (n-1)\} = 2n$$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2n$이다. 따라서

(1)/(a_k a_k+1)=1(2k)\2(k+1)\=(1)/(4k(k+1))=14≤ft(1k-1k+1)

이다. 이를 합하면

aligned Σ _k=1^20(1)/(a_k

a_k+1)&=14 Σ _k=1^20≤ft(1k-1k+1)\\&=14≤ft(1-121)\\&=14⋅(20)/(21)=521.aligned

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 $\frac{2}{21}$가 아니라 $\frac{5}{21}$이다.
② X — 계산 결과는 $\frac{3}{21}$가 아니라 $\frac{5}{21}$이다.
③ X — 계산 결과는 $\frac{4}{21}$가 아니라 $\frac{5}{21}$이다.
④ O — 망원급수의 합이 14(1-121)=521이므로 계산 결과와 일치한다.

오답 포인트

a_n을 S_n과 혼동하면 안 된다. 또한 부분분수로 바꾼 뒤 처음 항 1과 마지막에 남는 항 -121만 남는다는 점, 그리고 앞의 계수 14를 끝까지 곱해야 한다는 점이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

부분합이 주어지면 먼저 $a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1}$로 일반항을 구한다. 이어 분모에 $k(k+1)$ 꼴이 나타나면 부분분수로 분해하고, 소거 후 남는 처음 항과 마지막 항을 확인한다.

암기 포인트

부분합에서 일반항은 차로 구하고, 1k(k+1)=1k-1k+1로 바꾸면 중간 항들이 소거된다.

NoteBase

문 14. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x^2-1}=\frac{1}{2}$**이 성립하도록 하는 상수** a, b**에 대하여** $a+b$**의 값은?**

① -1

② -2

③ -3

④ -4

정답 1번

출제 포인트

분모가 0으로 가는 극한이 유한한 값을 가지려면 분자도 0으로 가야 한다는 조건을 세우고, 근호식을 유리화하여 상수 a, b를 구하는 문제이다.

조건 정리

$x\to 1$일 때 $x^2-1\to 0$이다. 극한값이 12로 유한하므로 분자에도 $\sqrt{1+a}+b=0$이 성립해야 한다. 따라서 $b=-\sqrt{1+a}$이다.

사용할 공식

근호식의 차는 켤레식을 곱해 유리화한다.
$\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}$
분자의 영점 조건으로 원래 분자가 위와 같은 근호식의 차가 되므로, 분모의 x^2-1과 약분하여 극한을 계산할 수 있다.

계산 과정

1. $b=-\sqrt{1+a}$를 대입한다.
$\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x^2-1}=\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}}{x^2-1}$
2. 분자를 유리화하고 x^2-1을 약분한다.
$\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}}{x^2-1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}$
3. $x\to 1$을 대입하면 (1)/(2$\sqrt{}$(1+a))=12이므로 $\sqrt{1+a}=1, a=0$이다. 이어서 $b=-1$이므로 $a+b=-1$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 $a+b=-1$이므로 맞다.
② X — 선지의 -2는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 -1이다.
③ X — 선지의 -3은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 -1이다.
④ X — 선지의 -4는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 -1이다.

NoteBase

오답 포인트

분모만 0으로 가는 형태에 곧바로 값을 대입하면 안 된다. 먼저 분자도 0이 되어야 한다는 조건 $\sqrt{1+a}+b=0$을 세워야 하며, 여기서 $b=-\sqrt{1+a}$의 음수 부호를 놓치면 $a+b$를 잘못 구하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0으로 가는데 극한값이 유한하면 먼저 분자의 영점 조건을 세운다. 근호식의 차가 만들어지면 켤레식으로 유리화한 뒤 공통인자를 약분하여 극한값과 비교한다.

암기 포인트

유한한 00형 극한은 '분자도 0이 되는 조건 확인 → 유리화 → 약분'의 순서로 계산한다.

NoteBase

문 15. 함수 $g(x)$는 함수
f(x)=casesx^2+7x+6 & (x<-1)\(x) & (-1≤ x≤ 1)\^2+7x-2 & (1<x)cases
를 모든 실수에서 미분가능하게 하는 삼차 다항함수이다. 이때 $f(\frac{1}{2})$의 값은?

① -3

② -2

③ 2

④ 3

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 조각함수가 접합점에서 미분가능하기 위한 함수값과 미분계수의 일치 조건을 이용해 삼차 다항함수 $g(x)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

$x=-1$에서 왼쪽 식과 $g(x)$의 함수값 및 미분계수가 일치하고, $x=1$에서 $g(x)$와 오른쪽 식의 함수값 및 미분계수가 일치한다. 따라서
$g(-1)=0, \quad g'(-1)=5, \quad g(1)=6, \quad g'(1)=9$
이다. 또한 12[-1,1]이므로 구해야 할 값은 f(12)=g(12)이다.

사용할 공식

삼차 다항함수를 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 두고 네 접합 조건을 적용한다. 미분가능한 함수는 접합점에서 연속이어야 하고 좌우 미분계수도 같아야 하므로 함수값 조건 두 개와 미분계수 조건 두 개를 모두 사용한다.

계산 과정

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $g'(x)=3ax^2+2bx+c$로 둔다. 네 조건을 대입하면
$-a+b-c+d=0, \quad 3a-2b+c=5$
$a+b+c+d=6, \quad 3a+2b+c=9$
를 얻는다. 함수값 식끼리 빼면 $a+c=3$, 미분계수 식끼리 빼면 $b=1$이다. 또한 $3a+c=7$이므로 $a=2$, $c=1$이고, $g(1)=6$에 대입하면 $d=2$이다. 따라서
$g(x)=2x^3+x^2+x+2$
이고,
f≤ft(12)=g≤ft(12)=2≤ft(12)^3+≤ft(12)^2+12+2=3
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산값은 3이므로 −3은 틀린 값이다. 올바른 값은 3이다.
② X — 계산값은 3이므로 −2는 틀린 값이다. 올바른 값은 3이다.
③ X — 계산값은 3이므로 2는 틀린 값이다. 올바른 값은 3이다.
④ O — g(12)=3이므로 계산 결과와 일치한다.

오답 포인트

접합점에서 함수값만 맞추면 연속 조건만 반영한 것이어서 $g(x)$가 하나로 정해지지 않는다. 미분가능 조건에서는 함수값뿐 아니라 미분계수도 양쪽에서 일치시켜야 한다. 또한 12은 가운데 구간에 있으므로 바깥쪽 이차식이 아니라 $g(x)$에 대입해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

조각함수의 미분가능성 문제는 각 접합점에서 함수값 일치와 미분계수 일치를 차례로 식으로 세운 뒤, 미지의 다항함수를 결정하고 해당 구간의 식에 목표값을 대입한다.

암기 포인트

접합점에서 미분가능하면 함수값도 같고 미분계수도 같다.

NoteBase

문 16. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=12$인 삼차함수 $f(x)$가
$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{(x+1)\{f'(x)\}^2}=-\frac{1}{2}$
을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① 36

② 38

③ 40

④ 42

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 유한한 극한값이 존재하기 위한 조건으로부터 $f(-1)$과 $f'(-1)$을 구한 뒤, 최고차항의 계수와 $f(2)$를 이용해 삼차함수를 결정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(2)=12$이다.
구해야 할 값: $f(3)$이다.
주의할 조건: 극한값이 유한한 0이 아닌 값이므로 분모의 $x+1$에 대응하여 분자도 $x=-1$에서 0이어야 한다.
또한 $f'(-1)=0$이면 분모의 영점 차수가 더 커져 주어진 극한값을 만들 수 없으므로 $f'(-1)\neq 0$이다.

사용할 공식

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{f'(a)}\quad (f(a)=0,\ f'(a)\neq 0)$
이는 $f(a)=0$일 때 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)$이고 $f'(x)\to f'(a)$이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. 주어진 극한이 유한하므로 $f(-1)=0$이다.
2. 미분계수의 정의를 적용하면
_x→-1f(x)(x+1)\f'(x)\^2=f'(-1)\f'(-1)\^2=(1)/(f'(-1))=-12
이므로 $f'(-1)=-2$이다.
3. $t=x+1$로 놓으면 최고차항의 계수가 1이고 $f(-1)=0$, $f'(-1)=-2$이므로
$f(x)=t^3+at^2-2t$
로 나타낼 수 있다.
4. $x=2$이면 $t=3$이므로
$f(2)=27+9a-6=12$
에서 $a=-1$이다. 따라서
$f(x)=(x+1)^3-(x+1)^2-2(x+1)$
이다.
5. $x=3$이면 $t=4$이므로
$f(3)=4^3-4^2-2\cdot 4=64-16-8=40$
이다.

선지 판단

① X — 36은 계산 결과 40과 다르다. 틀린 값 36은 올바르게는 40이다.
② X — 38은 계산 결과 40과 다르다. 틀린 값 38은 올바르게는 40이다.
③ O — $f(3)=64-16-8=40$이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — 42는 계산 결과 40과 다르다. 틀린 값 42는 올바르게는 40이다.

오답 포인트

극한식에서 단순히 $x=-1$을 대입하면 0/0이 된다. 먼저 유한한 극한의 존재로부터 $f(-1)=0$을 얻고, $f(x)/(x+1)$을 미분계수와 연결해야 한다. 또한 $t=x+1$로 치환했을 때 $f(3)$에는 $t=4$를 대입해야 하며, $t=3$을 다시 대입하면 $f(2)$를 반복 계산하게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모에 $x-a$가 있고 극한값이 유한한 0이 아닌 값이면 먼저 분자의 영점 조건 $f(a)=0$을 확인한다. 이어서 $f(x)/(x-a)$를 $f'(a)$로 바꾸고, 도함숫값과 나머지 조건을 이용해 함수를 결정한다.

암기 포인트

$f(a)=0$, $f'(a)\neq 0$이면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{f'(a)}$이다.

NoteBase

문 17. 점 A$(1, -3)$에서 곡선 $y = x^2$에 그은 접선은 2개이다. 그 2개의 접선의 방정식을 각각 $y = a_1x + b_1$과 $y = a_2x + b_2$라 할 때, 순서쌍 $(a_1a_2, b_1 + b_2)$는?

① $(-10, -8)$

② $(-12, -8)$

③ $(-10, -10)$

④ $(-12, -10)$

정답 4번

출제 포인트

포물선 $y = x^2$ 위의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 접점의 좌표로 나타내고, 주어진 점을 지난다는 조건을 이용해 두 접선의 기울기와 절편을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 점은 $A(1, -3)$이고 곡선은 $y = x^2$이다. 두 접선 $y = a_1x + b_1$, $y = a_2x + b_2$에 대하여 a_1a_2와 $b_1 + b_2$를 구해야 한다. 접점의 x좌표를 t로 두면 접점은 (t, t^2)이고 그 점에서의 기울기는 $2t$이다.

사용할 공식

$y = x^2$의 $x = t$에서의 접선은

$y = 2tx - t^2$

이다. 미분계수는 $2t$이고, 접선이 (t, t^2)를 지나므로 $y - t^2 = 2t(x - t)$를 정리하면 이 식을 얻는다.

계산 과정

접선이 $A(1, -3)$을 지나므로

$-3 = 2t - t^2$

이고, 이를 정리하면

$t^2 - 2t - 3 = (t - 3)(t + 1) = 0$

이다. 따라서 두 접점의 x좌표는 $t = 3, -1$이다. 접선 $y = 2tx - t^2$에서 기울기는 $a = 2t$, 절편은 $b = -t^2$이므로 두 접선은 $y = 6x - 9$, $y = -2x - 1$이다. 따라서

$a_1a_2 = 6 \cdot (-2) = -12, \qquad b_1 + b_2 = -9 + (-1) = -10$

이므로 순서쌍은 $(-12, -10)$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $(-10,\ -8)$은 두 성분이 모두 계산 결과와 다르다. 틀린 표현 $(-10,\ -8)$은 $(-12,\ -10)$으로 고쳐야 한다.
② X — 첫째 성분 -12는 맞지만 둘째 성분 -8이 틀리다. 절편은 $-t^2$이므로 합은 $-9+(-1)=-10$이며, $(-12,\ -8)$은 $(-12,\ -10)$으로 고쳐야 한다.
③ X — 둘째 성분 -10은 맞지만 첫째 성분 -10이 틀리다. 기울기는 $2t$이므로 곱은 $6\cdot(-2)=-12$이며, $(-10,\ -10)$은 $(-12,\ -10)$으로 고쳐야 한다.
④ O — 두 기울기의 곱이 -12이고 두 절편의 합이 -10이므로 $(-12,\ -10)$이 정확하다.

오답 포인트

접점의 x좌표 t를 곧바로 접선의 기울기나 절편으로 착각하기 쉽다. 접선 $y=2tx-t^2$에서 기울기는 $2t$, 절편은 $-t^2$이다. 또한 절편의 합에서 음수 부호를 빠뜨리면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

포물선 $y=x^2$의 접선 문제에서는 접점을 $(t,\ t^2)$로 두고 접선 $y=2tx-t^2$를 만든 뒤, 접선이 지나는 외부점의 좌표를 대입해 가능한 t를 모두 구한다. 마지막에 각 접선의 기울기와 절편을 구분하여 요구된 값을 계산한다.

암기 포인트

$y=x^2$의 $x=t$에서의 접선은 $y=2tx-t^2$이고, 기울기는 $2t$, 절편은 $-t^2$이다.

NoteBase

문 18. 곡선 $x = y^2 - 1$과 직선 $y = x - 1$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{9}{2}$
② $\frac{11}{2}$
③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$

정답 1번

출제 포인트

두 곡선을 x에 관한 식으로 정리한 뒤, 교점의 y좌표를 구하고 가로 방향의 '오른쪽 경계-왼쪽 경계'를 적분하여 넓이를 구하는 문제이다.

조건 정리

곡선: $x = y^2 - 1$
직선: $y = x - 1$, 즉 $x = y + 1$
구해야 할 값: 두 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이
주의할 조건: 두 식이 모두 x를 y의 식으로 나타내므로 y에 관해 적분한다.

사용할 공식

가로 방향으로 자른 영역의 넓이는
A=∫ _a^b\x_오른쪽-x_왼쪽\ dy
로 구한다. 이 문제에서는 두 경계가 모두 x에 관한 식으로 주어져 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 교점에서 $y^2 - 1 = y + 1$이므로
$y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1) = 0$
따라서 적분 구간은 -1≤ y≤2이다.
2. 이 구간에서 $y + 1$이 오른쪽 경계이고 $y^2 - 1$이 왼쪽 경계이다. 실제로 두 식의 차는
(y+1)-(y^2-1)=-y^2+y+2=-(y-2)(y+1)≥0
이다.
3. 넓이는
alignedA&=∫ _-1^2(-y^2+y+2) dy\\&=≤ft[-(y^3)/(3)+(y^2)/(2)+2y]_-1^2\\&=(9)/(2)aligned
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산한 넓이 $\frac{9}{2}$와 일치한다.
② X — $\frac{11}{2}$는 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{11}{2}$ → 올바른 넓이는 $\frac{9}{2}$이다.
③ X — $\frac{13}{2}$는 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{13}{2}$ → 올바른 넓이는 $\frac{9}{2}$이다.
④ X — $\frac{15}{2}$는 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{15}{2}$ → 올바른 넓이는 $\frac{9}{2}$이다.

오답 포인트

직선 $y = x - 1$을 $x = y + 1$로 바꾸지 않거나, 가로 폭을 '오른쪽 경계-왼쪽 경계'가 아닌 반대 순서로 빼면 넓이를 바르게 구할 수 없다. 또한 교점의 y좌표 $-1, 2$를 적분 구간으로 사용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 경계가 $x = f(y)$ 꼴이면 교점의 y좌표를 먼저 구한 뒤, 해당 구간에서 오른쪽 식과 왼쪽 식을 확인하고 $\int$ (오른쪽-왼쪽) dy를 계산한다.

암기 포인트

가로 적분의 넓이는 '오른쪽 − 왼쪽', 세로 적분의 넓이는 '위 − 아래'이다.

NoteBase

문 19. $(x^2+10x-2)(ax+1)^6$**의 전개식에서** x^2**의 계수가 31일 때, 상수** a**의 값은?**

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

출제 포인트

곱의 전개식에서 x^2항이 만들어지는 경우를 모두 찾아 이항계수로 계수를 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $(x^2+10x-2)(ax+1)^6$이고, 전체 전개식에서 x^2의 계수는 31이다. 첫 번째 인수의 x^2, $10x$, -2에 각각 두 번째 인수의 상수항, x항, x^2항을 곱하는 세 경우를 모두 합해야 한다.

사용할 공식

이항정리에 따라 $(ax+1)^6$에서 x^k의 계수는 $\binom{6}{k}a^k$이다. 따라서 상수항, x항, x^2항의 계수는 각각 1, $6a$, $15a^2$이다. 전체 식의 x^2항은 차수의 합이 2가 되는 항들의 곱으로 만들어지므로 이 세 계수가 필요하다.

계산 과정

x^2의 계수는

$1\cdot 1+10\cdot 6a+(-2)\cdot 15a^2=1+60a-30a^2$

이다. 이것이 31이므로

$1+60a-30a^2=31$

$-30a^2+60a-30=0$

$-30(a-1)^2=0$

이 되어 $a=1$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — $a=1$을 대입하면 $1+60-30=31$이므로 조건을 만족한다.
② X — $a=2$를 대입하면 계수는 $1+120-120=1$이므로 31이 아니다. 틀린 값 2가 아니라 올바른 값은 1이다.
③ X — $a=3$을 대입하면 계수는 $1+180-270=-89$이므로 31이 아니다. 틀린 값 3이 아니라 올바른 값은 1이다.
④ X — $a=4$를 대입하면 계수는 $1+240-480=-239$이므로 31이 아니다. 틀린 값 4가 아니라 올바른 값은 1이다.

오답 포인트

x^2항은 $x^2\cdot 1$에서만 생기는 것이 아니다. $10x\cdot 6ax$와 $(-2)\cdot 15a^2x^2$도 포함해야 하며, 특히 상수항 -2의 음수를 빠뜨리면 방정식이 달라진다.

다시 나오면 이렇게 판단

곱의 전개식에서 특정 차수의 계수를 구할 때는 각 인수에서 선택한 항의 차수 합이 목표 차수가 되는 모든 조합을 찾고, 각 계수의 곱을 합한 뒤 주어진 계수와 같게 놓는다.

암기 포인트

목표가 x^2이면 차수 조합은 $2+0,\ 1+1,\ 0+2$이다.

NoteBase

문 20. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가
$f(x) = 3ax + a \quad (0 \le x \le 2)$
일 때, 확률 $P(0 \le X \le 1) = \frac{q}{p}$**이다.** $p + q$**의 값은? (단,** a**는 상수이고,** p**와** q**는 서로소인 자연수이다.)**

① 19

② 21

③ 23

④ 25

정답 2번

출제 포인트

확률밀도함수의 전체 적분값이 1이라는 조건으로 상수 a를 구한 뒤, 주어진 구간에서 확률밀도함수를 적분하여 확률을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수: $f(x) = 3ax + a \ (0 \le x \le 2)$
구해야 할 값: $P(0 \le X \le 1) = \frac{q}{p}$일 때 $p + q$
주의할 조건: 확률밀도함수이므로 전체 구간에서의 적분값은 1이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.

사용할 공식

확률밀도함수의 정규화 조건은
$\int_0^2 f(x)dx = 1$
이고, 구간확률은
$P(0 \le X \le 1) = \int_0^1 f(x)dx$
이다. 연속확률변수의 확률은 해당 구간 아래의 넓이이므로 이 적분식을 사용한다.

계산 과정

1. 전체 확률이 1이라는 조건을 적용한다.
$\int_0^2 (3ax + a)dx = \left[\frac{3a}{2}x^2 + ax\right]_0^2 = 6a + 2a = 8a = 1$
따라서 a=18이다.

2. $0 \le X \le 1$일 확률을 계산한다.
$P(0 \le X \le 1) = \int_0^1 (3ax + a)dx = \left[\frac{3a}{2}x^2 + ax\right]_0^1 = \frac{5a}{2} = \frac{5}{16}$

3. $\frac{q}{p} = \frac{5}{16}$이고 5와 16은 서로소이므로 $q = 5, p = 16$이다. 따라서 $p + q = 21$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과 $p+q=21$이므로 19가 아니라 21이다.
② O — $p=16, q=5$이므로 $p+q=21$이다.
③ X — 계산 결과 $p+q=21$이므로 23이 아니라 21이다.
④ X — 계산 결과 $p+q=21$이므로 25가 아니라 21이다.

계산 결과가 21이므로 정답은 2번이다.

오답 포인트

구간확률만 곧바로 적분하면 상수 a의 값을 알 수 없다. 먼저 전체 구간 $0 \le x \le 2$에서 적분값을 1로 두어 a=18을 구해야 한다. 또한 $\frac{q}{p}$에서 분자는 q, 분모는 p이므로 $p=16, q=5$로 대응해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

미지수가 들어 있는 확률밀도함수는 먼저 전체 정의구간에서 적분값을 1로 두어 미지수를 정한 뒤, 요구된 구간을 다시 적분하고 기약분수 조건을 확인한다.

암기 포인트

확률밀도함수는 전체 넓이가 1이고, 구간확률은 그 구간 아래의 넓이이다.

NoteBase